

**Київський національний університет  
імені Тараса Шевченка**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра обчислювальної математики

**Кваліфікаційна робота**  
на здобуття ступеня бакалавра  
за спеціальністю 113 Прикладна математика

на тему:

**ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ**

Виконала студентка 4-го курсу  
Каспрова Ярослава Андріївна



Науковий керівник:  
доцент, кандидат фіз.-мат. наук  
Кашпур Олена Федорівна



Засвідчую, що в цій роботі немає  
запозичень з праць інших авторів без  
відповідних посилань.

Студентка



Роботу розглянуто й допущено до  
захисту на засіданні кафедри  
обчислювальної математики

« 29 » травня 2023 р.,

протокол № 8

Завідувач кафедри

проф. Ляшко С. І.



**Київ – 2023**

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....	3
<b>РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ</b>	
<b>ЗАДАЧ</b> .....	8
<b>1.1. Обернена інтерполяція для наближення лінійних операторів в гільбертовому просторі</b> .....	8
<b>1.2. Наближення функцій багатьох змінних в евклідовому просторі</b> .....	14
<b>1.3. Порівняльний аналіз методів побудови інтерполяційних поліномів</b> .....	19
<b>РОЗДІЛ 2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ</b> .....	22
<b>2.1. Наближення лінійних операторів у гільбертовому просторі</b> ....	22
<b>2.2. Побудова поверхонь</b> .....	30
<b>ВИСНОВКИ</b> .....	44
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	46

## ВСТУП

Апроксимації операторів, функціоналів та функцій багатьох змінних є актуальною задачею обчислювальної математики. Інтерполяція є одним із методів наближення операторів (функцій) на основі спостереження реакції системи на деякі вхідні сигнали, тобто невідомий об'єкт (оператор) задається у вигляді пар "вхід-вихід" і за цими даними необхідно побудувати наближення. В цьому випадку виникає так звана задача "чорного ящика".

Інтерполяція поширена у різних галузях науки і техніки. Наприклад, у інженерії, фізиці, хімії, економіці, медицині, інформатиці тощо.

Існує низка теорем, що дають змогу наближати нелінійні оператори (функції) поліномами. Це теорема Веєрштраса – для неперервних функцій, що задані на компактi, Фреше – для неперервних функціоналів інтегрального вигляду, Прентер – для операторів, що визначені на сепарабельному гільбертовому просторі.

Нехай  $X, Y$  – гільбертові простори.

### Визначення 1

$k$ -лінійний оператор – оператор  $L_k(v_1, v_2, \dots, v_k): X^k \rightarrow Y$ , який є лінійним за кожним аргументом  $x_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ .

### Визначення 2

Нехай  $v_1 = v_2 = \dots = v_k = x$ .

Оператор  $L_k(\underbrace{x, x, \dots, x}_k) = L_k x^k$  називається  $k$ -степенним ( $k$ -м операторним степенем).

У подальшому розв'язок інтерполяційної задачі будемо шукати на множині  $\Pi_n$ , що є множиною операторних поліномів  $P_n: X \rightarrow Y$  степеня  $n$ , яка має вигляд

$$\Pi_n = \{P_n(x): P_n(x) = L_0 + L_1x + L_2x^2 + \dots + L_nx^n\},$$

де  $L_o \in Y$ ,  $L_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$  –  $k$ -лінійна неперервна симетрична операторна форма,  $L_k x^k = L_k(\underbrace{x, x, \dots, x}_k)$ .

Існує багато прикладних задач, що підтверджують важливість наближення операторів поліномами. Досить часто на практиці зустрічаються нелінійні системи, описані поліномами з множини  $P_n$ , які називаються поліноміальними. Дослідження цих систем має велике значення, а їх простий математичний опис спонукає до подальшого дослідження. Існуючі аналітичні методи ідентифікації для лінійних систем, можна також застосовувати до полілінійних та поліноміальних систем. Тож вивчення нелінійних структур у загальному вигляді можна звести до дослідження їх поліноміальних наближень. Отже, теорію поліноміальних наближень можна використовувати як зв'язок між лінійною та нелінійною теоріями.

Нижче наведено деякі з найважливіших застосувань поліноміальних систем у різних галузях:

- Фізика: допомагають описувати різноманітні фізичні процеси та властивості, наприклад, використовуються в теорії квантової механіки для опису руху частинок та їхніх взаємодій. [2]
- Економіка: використовуються для моделювання та прогнозування різних економічних процесів та явищ, наприклад, можуть бути використані для аналізу фінансових ринків та прогнозування цін на товари та послуги. [3]
- Статистика: допомагають моделювати та аналізувати різні випадкові процеси, зокрема, застосовуються в теорії ймовірностей для опису різних розподілів випадкових величин. [4]
- Біологія та медицина: застосовуються для моделювання та аналізу різноманітних процесів та явищ, наприклад, для

моделювання експресії генів та інших біохімічних процесів у клітинах. [5]

- Географія та геодезія: знаходять застосування для моделювання та аналізу різних геометричних процесів та явищ, зокрема, використовуються для розрахунку траєкторій руху супутників та аналізу геодезичних мереж. [6]

Для пошуку розв'язку багатьох прикладних задач побудова поверхонь є особливо важливою, але часто зустрічаються практичні задачі в умовах недовизначеності (кількість інтерполяційних умов є меншою, ніж розмірність простору поліномів розв'язку).

Наближення функцій багатьох змінних є важливим інструментом для різних галузей:

- Комп'ютерна графіка: використовується для створення 3D-моделей та анімації, зокрема, у задачах комп'ютерної візуалізації, де метою є створення максимально наближених до реальності зображень, для моделювання освітлення, тіней та інших аспектів зображення. [7]
- Біологія: застосовується для моделювання складних систем, таких як нейронні мережі, наприклад, для розуміння механізмів роботи мозку, щоб знайти залежність між різними факторами, такими як активність нейронів, рівень нейромедіаторів тощо. [8]
- Геодезія та картографія: допомагає створювати 3D-моделі ландшафту та топографічних карт, моделі поверхні землі на основі геодезичних вимірювань. [6]
- Фінанси: знаходить застосування для прогнозування поведінки фінансових ринків, зокрема, для прогнозування ціни на акції можна використовувати наближення функцій багатьох змінних,

де змінні представляють фактори, що впливають на ціну акції, такі як прибуток, дивіденди, рівень безробіття тощо. [9]

- Фізика та інженерія: використовується для розв'язання складних фізичних проблем, наприклад, в задачах, пов'язаних з обчисленням потенціалу електричного поля, щоб знайти потенціал електричного поля в кожній точці. [10]
- Метеорологія: допомагає аналізувати дані про температуру, вологість, тиск, вітер та інші параметри, що дозволяє створювати прогнози погоди з високою точністю. [11]
- Медицина: застосовується для аналізу медичних зображень, отриманих, наприклад, з магнітно-резонансної томографії (МРТ). Інтерполяція може допомогти побудувати поверхню тіла пацієнта на основі даних, отриманих з МРТ, що дозволяє лікарям аналізувати та візуалізувати структуру органів та тканин пацієнта для діагностики та планування лікування. [12]

Наведені приклади показують важливість розв'язання задачі про апроксимацію операторів (функцій багатьох змінних) за допомогою інтерполяційних методів. Розглянемо постановку задачі на операторному рівні.

Постановка задачі інтерполяції Лагранжа.

Нехай  $X, Y$  – гільбертові простори, задана система елементів  $\{x_i\}_{i=1}^m \in X$ ,  $i = \overline{1, m}$  та оператор  $F: X \rightarrow R$ , в загальному випадку нелінійний, своїми значеннями

$$P_n(x_i) = F(x_i), i = \overline{1, m}.$$

Метою дипломної роботи є розв'язання задач про наближення лінійних операторів в гільбертовому просторі за допомогою оберненої інтерполяції та побудова поверхонь в евклідовому просторі у випадку, коли

вихідної інформації про поверхню не вистачає для однозначної її побудови, тобто інтерполяційних вузлів менше ніж розмірність простору поліномів на якому шукаємо розв'язок. Як відомо, для побудови інтерполяційних формул в скінченновимірному евклідовому просторі  $E_k$  повинно виконуватись співвідношення  $m = \frac{(n+k)!}{n!k!}$  [1], де  $m$  – число вузлів інтерполяції,  $n$  – степінь інтерполяційного полінома. Якщо остання рівність не виконується, то для наближення неперервної функції багатьох змінних методом інтерполяції потрібно на функцію накладати певні умови за допомогою яких в подальшому визначати коефіцієнти (які не знайдені, оскільки не вистачило інформації для їх знаходження) інтерполянта.

## РОЗДІЛ 1. ПОСТАНОВКА ТА АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

### 1.1. Обернена інтерполяція для наближення лінійних операторів в гільбертовому просторі

#### Визначення 3

Клас подій (множин)  $S$  називається алгеброю, якщо  $S$  містить  $A \cup B$ ,

$A \cap B, A \setminus B$ , які б не були  $A$  і  $B$  з  $S$ . [13]

#### Визначення 4

Алгебра подій (множин) називається  $\sigma$ -алгеброю, якщо  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in S$  для будь-якої послідовності  $\{A_k, n = 1, 2, \dots\}$ ,  $A_k \in S$ . [13]

#### Визначення 5

Нехай  $X$  деяка множина, а  $S$   $\sigma$ -алгебра підмножин множини  $X$ . На  $S$  визначена випадкова міра  $\mu$ , якщо для кожної множини  $A \in S$  визначена випадкова величина  $\mu(A)$ , причому, яка б не була послідовність множин  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ , що попарно не перетинаються, ряд  $\sum_1^{\infty} \mu(A_k)$ , збігається за імовірністю до величини  $\mu(\bigcup_k A_k)$ . [13]

#### Визначення 6

Міра  $\mu$  називається гауссовою, або нормальною, якщо для всякого набору  $A_1, A_2, \dots, A_k$  із  $S$  сукупний розподіл величин  $\mu(A_1), \mu(A_2), \dots, \mu(A_k)$  є нормальним. [13]

Нехай  $X, Y$  – гільбертові простори.  $\mu$  - гауссова міра на просторі  $X$  така, що її перший момент дорівнює нулю,  $B(u, v)$  – кореляційний функціонал,  $B$  – кореляційний самоспряжений та додатньовизначений, ядерний оператор міри  $\mu$ .

Припустимо, задана система інтерполяційних вузлів  $\{x_i\}_{i=1}^m \in X$  та оператор  $F: X \rightarrow Y$  своїми значеннями  $F(Bx_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Задача полягає у

побудові єдиного операторного поліному  $P_n \in \Pi_n$  такого, щоб при будь-яких значеннях оператора у вузлах виконувалися інтерполяційні умови

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i), i = \overline{1, m}.$$

У просторі  $\Pi_n$  введемо [14] скалярний добуток та норму:

$$\begin{aligned} (P_n^{(1)}, P_n^{(2)}) &= \sum_{k=0}^n \int_X \dots \int_X (L_k^{(1)}(v_1, v_2, \dots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, v_2, \dots, v_k))_Y \cdot \\ &\quad \cdot \mu(dv_1) \mu(dv_2) \dots \mu(dv_k), \\ \|P_n\| &= (P_n, P_n)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

де  $(\cdot, \cdot)_Y$  – скалярний добуток у просторі  $Y$ , а  $L_k^{(1)}$  та  $L_k^{(2)}$  –  $k$ -лінійні неперервні симетричні операторні форми поліномів  $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}$ .

Поліном  $P_n \in \Pi_n$  є інтерполянтотом мінімальної норми, за умови, що він є розв'язком екстремальної задачі

$$\|P_n\| = \min \|Q_n\|, Q_n \in \Pi_n^I,$$

де  $\Pi_n^I$  – множина таких поліномів степеня  $n$ , що задовольняють інтерполяційним умовам

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i), i = \overline{1, m}.$$

У роботі [14] доведено, що розв'язком задачі наближення операторів (і інтерполянтотом мінімальної норми) буде інтерполяційний поліном вигляду

$$P_n(x) = \langle \vec{F}, \Gamma^{-1} \vec{l}(x) \rangle,$$

де

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \{F(Bx_i)\}_{i=1}^m, \\ \vec{l}(x) &= \sum_{k=0}^n \{(x, x_i)^k\}_{i=1}^m, \end{aligned}$$

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^n (Bx_i, x_j)^k \right\|_{i,j=1}^m.$$

Цей поліном існує тоді і лише тоді, коли виконується рівність

$$(E - \Gamma\Gamma^+)\vec{F} = \vec{0},$$

де  $\Gamma^+$  – псевдообернена матриця Мура-Пенроуза до  $\Gamma$ ,  $E$  – одинична матриця.

Розглянемо побудову інтерполяційного полінома мінімальної норми більш детально. Припустимо, що умова існування розв'язку інтерполяційної задачі виконується. Позначимо добуток оберненої матриці  $\Gamma^{-1}$  на вектор  $\vec{l}(x)$  як  $\vec{b}(x)$ :

$$\Gamma^{-1}\vec{l}(x) = \vec{b}(x).$$

Помножимо обидві частини цього рівняння зліва на матрицю  $\Gamma$ . Отримаємо систему рівнянь

$$\Gamma\vec{b}(x) = \vec{l}(x),$$

звідки шуканий вектор  $\vec{b}(x)$  можна знайти за допомогою методу квадратного кореня. При такій побудові інтерполянта мінімальної норми не потрібно знаходити обернену матрицю, а отже час виконання алгоритму зменшиться.

На практиці іноді виникають задачі про знаходження точних чи наближених значень аргументів оператора за його заданими значеннями. В такому випадку виникає задача оберненої інтерполяції. Вона використовується для розв'язання різних класів задач.

Розглянемо застосування операторної оберненої інтерполяції на прикладі крайових задач.

Нехай задана двоточкова крайова задача:

$$Au = -f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Задача оберненої інтерполяції полягає в тому, щоб за заданими значеннями функції  $f(x)$ , визначити функцію  $u$ , на яку діє відомий лінійний оператор  $A$ .

Оператор  $B$  оберемо найпростішого вигляду

$$B\tilde{f} = \int_0^1 G(x, \xi)\tilde{f}(\xi)d\xi,$$

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1 - \xi), & 0 \leq x \leq \xi \leq 1; \\ \xi(1 - x), & 0 \leq \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Матриця  $\Gamma$  має вигляд

$$\Gamma = \|\gamma_{ij}\|_{i,j=1}^m.$$

Функцію  $\tilde{f}$  визначаємо з рівняння  $B\tilde{f} = -f$ . Тобто

$$\int_0^1 G(x, \xi)\tilde{f}(\xi)d\xi = -f(x),$$

$$\int_0^x \xi(1 - x)\tilde{f}(\xi)d\xi + \int_x^1 x(1 - \xi)\tilde{f}(\xi)d\xi = -f(x).$$

Для цього продиференціюємо двічі дане рівняння.

$$-\int_0^x \xi\tilde{f}(\xi)d\xi + \int_x^1 (1 - \xi)\tilde{f}(\xi)d\xi = -f'(x),$$

$$-x\tilde{f}(x) - (1 - x)\tilde{f}(x) = -f''(x).$$

Будемо мати

$$\tilde{f} = f'',$$

тож для  $i = \overline{1, m}$ , отримаємо

$$\tilde{f}_i = f_i'',$$

$$B\tilde{f}_i = -f_i,$$

де  $-f_i = Au_i$ , тож

$$B\tilde{f}_i = Au_i.$$

Отже, запишемо алгоритм оберненої інтерполяції для лінійного оператора:

1. Обираємо систему функцій  $u_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ . За теорією для збіжності ітераційного процесу система функцій повинна бути ортонормованою.
2. Знаходимо  $f_i$  (на практиці задано таблицею).
3. Будуємо матрицю  $\Gamma_m$ , що містить елементи

$$\gamma_{ij} = (B\tilde{f}_i, \tilde{f}_j), \quad i, j = \overline{1, m},$$

де  $(\cdot, \cdot)$  – скалярний добуток у просторі  $L_2(0,1)$ :

$$(f, g)_{L_2(0,1)} = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Розглянемо елементи матриці  $\Gamma$ :

$$\gamma_{ij} = (B\tilde{f}_i, \tilde{f}_j) = -(f_i, f_j'') = -\int_0^1 f_i(x)f_j''(x)dx =$$

$$= |\text{інтегруємо частинами}| = -f_i f_j' \Big|_0^1 + \int_0^1 f_i' f_j' dx =$$

$$= |\text{враховуючи крайові умови}| = \int_0^1 f_i' f_j' dx = (f_i', f_j'), \quad i, j = \overline{1, m}.$$

4. Будуємо вектори  $\vec{l}(-f)$  та  $\vec{u}$ :

$$\vec{l}(-f) = \{(-f, \tilde{f}_i)\}_{i=1}^m,$$

$$\vec{u} = \{u_i\}_{i=1}^m.$$

5. Знаходимо шуканий поліном:

$$P(-f) = \langle \vec{u}, \Gamma^{-1} \vec{l}(-f) \rangle.$$

## 1.2. Наближення функцій багатьох змінних в евклідовому просторі

Найпростішою ситуацією є інтерполяція за допомогою одновимірних поліномів (апроксимація функцій однієї змінної, яка задана своїми значеннями). Проте наближення функцій багатьох змінних поліномами є набагато складнішим та зараз є предметом активних досліджень, адже такі прикладні задачі на практиці виникають досить часто. Для пошуку розв'язку застосовують різні методи, наприклад, функції двох змінних апроксимують за допомогою інтерполяційних сплайнів на нерегулярних вузлах, B-сплайнів, кривих Без'є, мінімізації деяких критеріїв та інших методів.

Але використання вище згаданих методів для наближення функцій багатьох змінних поліномами не є досить ефективним, адже при розв'язанні кожним з них виникає багато труднощів.

Наприклад, при збільшенні кількості інтерполяційних вузлів стає складно обчислити сплайни, а мінімізація критеріїв має досить строгі обмеження щодо впорядкування вузлів інтерполяції. У разі наближення сплайнами чи поверхнями Без'є потрібно область розбивати на підобласті. Наприкінці підобласті потрібно з'єднувати - "зшивати", при цьому на функції накладаються певні обмеження, наприклад, існування перших похідних. Також при виборі досить великої кількості інтерполяційних вузлів відбувається значне збільшення похибки.

У свою чергу алгоритм інтерполяції поліномом мінімальної норми є досить простим та складається із звичайних дій над векторами та матрицями, які будуються за допомогою інтерполяційних вузлів та значень невідомої функції у цих вузлах.

Для розв'язання задачі побудови поверхонь за допомогою інтерполяції розглянемо евклідовий простір  $E_2$  з гаусовою мірою  $\mu$ .

Припустимо, задана система інтерполяційних вузлів  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ , де  $\gamma_i = (x_i, y_i)$  та функція  $f: E_2 \rightarrow R_1$  своїми значеннями  $f(\gamma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Повинна виконуватися умова  $m \leq p$ , де  $p$  – розмірність простору поліномів степеня  $n$  в  $E_2$ ,  $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ .

Як показано у роботі [1] за оператор  $B$  можна обрати одиничний оператор, тобто

$$B = I, \text{ де } I \text{ – одиничний оператор.}$$

Для апроксимації функції за допомогою інтерполянта мінімальної норми запишемо матрицю  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left\| \sum_{k=0}^n (\gamma_i, \gamma_j)^k \right\|_{i,j=1}^m = \left\| \sum_{k=0}^n (x_i x_j + y_i y_j)^k \right\|_{i,j=1}^m.$$

Якщо ввести матрицю  $A$ , що визначається за координатами точок  $\gamma_i$  таким чином

$$A = \left\| \begin{array}{cccccccccccc} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & \sqrt{2}x_1y_1 & y_1^2 & \dots & x_1^n & \sqrt{n}x_1^{n-1}y_1 & \dots & \sqrt{n}x_1y_1^{n-1} & y_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & y_m & x_m^2 & \sqrt{2}x_my_m & y_m^2 & \dots & x_m^n & \sqrt{n}x_m^{n-1}y_m & \dots & \sqrt{n}x_my_m^{n-1} & y_m^n \end{array} \right\|,$$

то матриця  $\Gamma = AA'$ .

Позначимо рядки матриці  $A$  як вектори  $s_i$

$$s_i = (1, x_i, y_i, x_i^2, \sqrt{2}x_iy_i, y_i^2, \dots, x_i^n, \sqrt{n}x_i^{n-1}y_i, \dots, \sqrt{n}x_iy_i^{n-1}, y_i^n), i = \overline{1, m}.$$

Тоді матрицю  $\Gamma$  можна записати у вигляді

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (s_1, s_1) & \dots & (s_1, s_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ (s_m, s_1) & \dots & (s_m, s_m) \end{pmatrix}, m \leq p,$$

І вона ж є матрицею Грама.

Матриця  $\Gamma$  буде невинродженою за умови, що є лінійно незалежними вектори  $s_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $m \leq p$ .

Отже, маємо формулу для інтерполянта мінімальної норми:

$$P_n(x, y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^n \{(x_i x + y_i y)^k\}_{i=1}^m \right\rangle, \vec{f} = \{f(\gamma_i)\}_{i=1}^m.$$

Якщо вузли інтерполяції  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ ,  $m \leq p$  обирати з умови лінійної незалежності векторів  $s_i$ , то задача наближення функцій двох змінних так, що  $P_n(\gamma_i) = f(\gamma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ , має розв'язок при будь-яких значеннях функції у вузлах інтерполювання, та існує єдиний розв'язок мінімальної норми у випадку коли  $m \leq p$ .

Для того щоб забезпечити лінійну незалежність системи векторів  $s_i$  і невинродженість матриці  $\Gamma$ , можна обрати систему інтерполяційних вузлів наступним чином:

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1), (x_2, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_1), (x_n, y_1), \\ &(x_1, y_2), (x_2, y_2), \dots, (x_{n-1}, y_2), \\ &\dots\dots\dots \\ &(x_1, y_{n-1}), (x_2, y_{n-1}), \\ &(x_1, y_n), \\ &x_i \neq x_j, y_i \neq y_j, \text{ якщо } i \neq j. \end{aligned}$$

Подані результати також застосовують для наближення функцій багатьох змінних в  $k$ -вимірному евклідовому просторі  $E_k$ .

Припустимо, задана система інтерполяційних вузлів  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$  та функція  $f: E_k \rightarrow R_1$  своїми значеннями  $f(\gamma_i)$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Тоді розв'язок будемо шукати на просторі  $\Pi_{kn}$  поліномів  $k$  змінних  $n$ -го степеня розмірності  $p = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ .

У [1] показано, що задача наближення функції багатьох змінних є інваріантно розв'язною та має єдиний розв'язок мінімальної норми для  $m \leq p$  ( $p$  – розмірність простору  $\Pi_{kn}$ ) за умови такого вибору вузлів інтерполяції  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ , щоб була лінійно незалежною система векторів

$$s_i = \left\{ \left( \frac{j!}{j_1! j_2! \dots j_k!} \right)^{\frac{1}{2}} x_{i_1}^{j_1} x_{i_2}^{j_2} \dots x_{i_k}^{j_k}, j_1 + j_2 + \dots + j_k = j, 0! = 1 \right\}_{j=0}^n, i = \overline{1, m}.$$

Матриця  $\Gamma$  в даному випадку має вигляд

$$\Gamma = \left\| \left\| \sum_{l=0}^n (\gamma_i, \gamma_j)^l \right\|_{i,j=1}^m \right\| = \left\| \left\| \sum_{l=0}^n (x_{i_1} x_{j_1} + \dots + x_{i_k} x_{j_k})^l \right\|_{i,j=1}^m \right\| = AA',$$

$$\text{де } A = \left\| \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & x_{1_1} & \dots & x_{1_k} & x_{1_1}^2 & \dots & x_{1_k}^2 & \sqrt{2}x_{1_1}x_{1_2} & \dots & \sqrt{2}x_{1_1}x_{1_k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{m_1} & \dots & x_{m_k} & x_{m_1}^2 & \dots & x_{m_k}^2 & \sqrt{2}x_{m_1}x_{m_2} & \dots & \sqrt{2}x_{m_1}x_{m_k} & \dots \end{array} \right\| \right\|,$$

а інтерполянт мінімальної норми

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{l=0}^n \left\{ (x_1 x_{i_1} + x_2 x_{i_2} + \dots + x_k x_{i_k})^l \right\}_{i=1}^m \right\rangle.$$

Зауважимо, що, якщо функція  $f$ , яку наближаємо, буде поліномом степеня  $n$ , та кількість вузлів  $m = p$ , то отриманий поліном  $P_n$  буде тотожно рівний  $f$ .

Запишемо алгоритм наближення функції двох змінних:

1. Обираємо систему вузлів інтерполяції  $\{\gamma_i\}_{i=1}^m$ .
2. Будуємо матрицю  $\Gamma$  за формулами, згаданими вище.
3. Знаходимо вектор

$$\sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m.$$

4. Знаходимо  $\vec{f}$  такий, що

$$\vec{f} = \{f(\gamma_i)\}_{i=1}^m.$$

5. Знаходимо шуканий поліном:

$$P_n(\gamma) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m \right\rangle.$$

### 1.3. Порівняльний аналіз методів побудови інтерполяційних поліномів

У випадку задач наближення функцій багатьох змінних (більше двох) класичні формули інтерполяції не використовуються, а розв'язок знаходять у вигляді

$$P_{nk}(\gamma) = P_{nk}(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_k x_k + a_{11} x_1^2 + \dots + a_{kk} x_k^2 + a_{12} x_1 x_2 + \dots + a_{kk \dots k} x_k^n,$$

де всі  $a_i$  – невідомі коефіцієнти, знайшовши які, отримаємо шуканий поліном.

Нехай  $m = p$ . Тоді для знаходження даного полінома  $P_{nk}(\gamma)$  на підставі інтерполяційних умов потрібно

$$\frac{2}{3} m^3 + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^k \frac{k!}{(k-i)!(i-1)!} + (n+1)^k + 1 + O(m^2)$$

арифметичних операцій, так як задача полягає у розв'язанні системи рівнянь

$$P_{nk}(\gamma_i) = f(\gamma_i), i = \overline{1, m},$$

що займає  $\frac{2}{3} m^3 + O(m^2)$  арифметичних операцій.

Покажемо, що складність за кількістю арифметичних операцій алгоритму розглянутого вище є меншою:

- для обчислення матриці  $\Gamma$  необхідно  $(2k + n - 2)m^2$  операцій;
- вектор  $\sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m$  обчислимо за  $(2k + n - 2)m$  операцій;
- вектор  $\Gamma^{-1} \sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m$  обчислимо за  $\frac{1}{3} m^3 + O(m^2)$  операцій.

Для обчислення останнього вектору будемо систему рівнянь

$$\vec{q}(\gamma) = \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m.$$

Помноживши обидві частини цього рівняння зліва на матрицю  $\Gamma$ , отримаємо

$$\Gamma \vec{q}(\gamma) = \sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m.$$

Так як  $\Gamma$  – симетрична матриця, для розв’язку даної системи рівнянь необхідно  $\frac{1}{3}m^3 + O(m^2)$ .

Отже, складність алгоритму

$$\frac{1}{3}m^3 + (2k + n - 2)(m^2 + m) + 2(m + 1)^2 + m + O(m^2).$$

Так як  $m = p = \frac{(n+k)!}{n!k!}$ , фіксуючи  $n$  та  $k$ , можна порівняти складності алгоритмів за сталою при  $m^3$ . Для класичного методу цей коефіцієнт рівний  $\frac{2}{3}$ , а для методу, що розглядається,  $\frac{1}{3}$ . Тож кількість арифметичних операцій, необхідна для даного методу, є вдвічі меншою.

Інтерполяцію функцій можна використовувати для побудови траєкторії руху об’єкту. Для цього маємо побудувати дві поверхні порядку  $n$ , їх перетин і буде шуканою траєкторією, на підставі теореми М. Стоуна. [15]

Нехай, маємо координати  $(x_i, y_i, z_i)_{i=1}^m$  деякого об’єкту, що рухається. Необхідно побудувати поверхні  $P_n^{(1)}(x, y, z)$  та  $P_n^{(2)}(x, y, z)$ , які є поліномами степеня  $n$ .

Поліноми будемо знаходити у вигляді

$$P_n^{(1)}(x, y, z) = Q_n^{(1)}(x, y, z) - \left\langle Q_n^{(1)}, \Gamma^{-1} \vec{l}(x) \right\rangle,$$

$$P_n^{(2)}(x, y, z) = Q_n^{(2)}(x, y, z) - \left\langle \overrightarrow{Q_n^{(2)}}, \Gamma^{-1} \vec{l}(x) \right\rangle,$$

$$\text{де } Q_n^{(1)}, Q_n^{(2)} \in \Pi_n, \overrightarrow{Q_n^{(1)}} = \left\{ Q_n^{(1)}(x_i, y_i, z_i) \right\}_{i=1}^m, \overrightarrow{Q_n^{(2)}} = \left\{ Q_n^{(2)}(x_i, y_i, z_i) \right\}_{i=1}^m,$$

$$\vec{l}(x) = \sum_{k=0}^n \{(\gamma, \gamma_i)^k\}_{i=1}^m, \gamma = (x, y, z), \gamma_i = (x_i, y_i, z_i), \Gamma = \left\| \sum_{k=0}^n (\gamma_i, \gamma_j)^k \right\|_{i,j=1}^m.$$

Відмітимо, що в цьому випадку умова існування розв'язку інтерполяційної задачі виконується.

## РОЗДІЛ 2. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

### 2.1. Наближення лінійних операторів у гільбертовому просторі

Дослідимо ефективність апроксимації операторів за допомогою оберненої інтерполяції та з'ясуємо, як змінюється точність розв'язку при збільшенні кількості інтерполяційних вузлів та різних диференціальних операторах  $A$  на конкретних прикладах.

Розглянемо першу задачу.

Нехай, задана крайова задача

$$Au = -f,$$

де

$$Au = u'' - xu = -f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Нехай, точний розв'язок початкового рівняння

$$u^*(x) = \sin(\pi x).$$

Тоді

$$-f(x) = u^{*''} - xu^* = -(\pi^2 + x) \sin(\pi x).$$

Тобто задача має вигляд:

$$u'' - xu = -(\pi^2 + x) \sin(\pi x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Виконаємо алгоритм оберненої інтерполяції для операторів, обравши  $u_i$  таким чином:

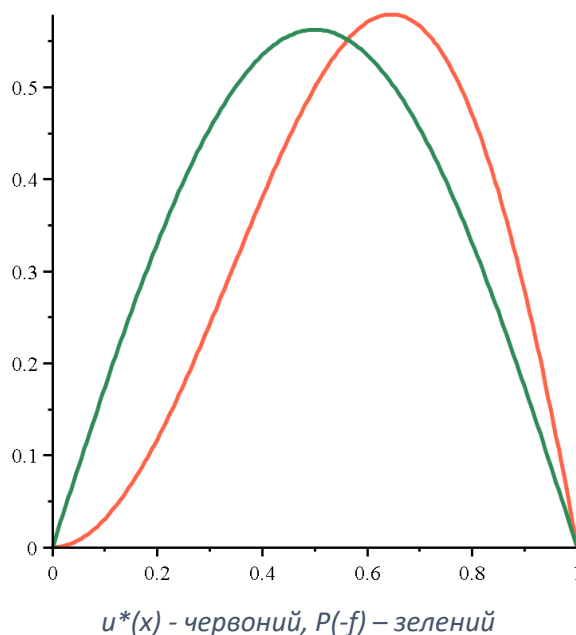
$$u_i = \sin(\pi i x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Візьмемо мінімальну кількість вузлів, тобто  $m = 1$ .

Отримали поліном:

$$P(-f) = \frac{\sin(\pi x) (6\pi^6 + 8\pi^4 + 63\pi^2 + 3)}{2(6\pi^6 + 6\pi^4 + 2\pi^2 + 3)}.$$

Побудуємо графіки точного розв'язку  $u^*(x)$  та отриманого  $P(-f)$ :



Для порівняння та оцінки отриманих результатів знайдемо похибку у просторі неперервних функцій

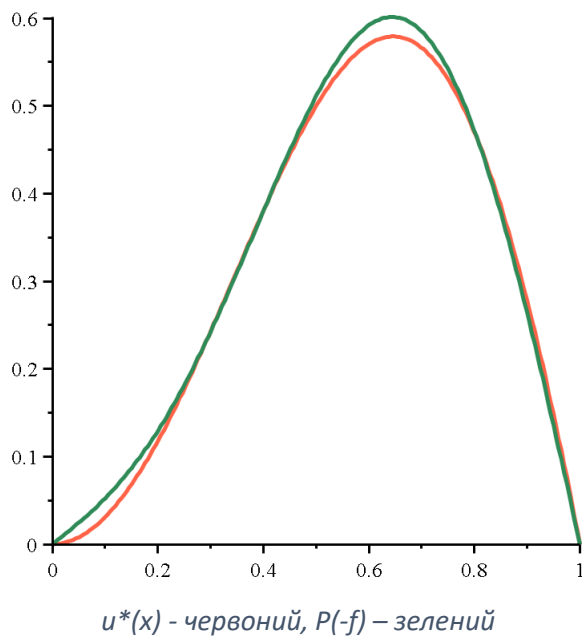
$$\Delta = \|u^*(x) - P(-f)\|_{C[0,1]},$$

$$\text{де } \|g(t)\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |g(t)|.$$

У даному випадку  $\Delta = 0.2209665958$ .

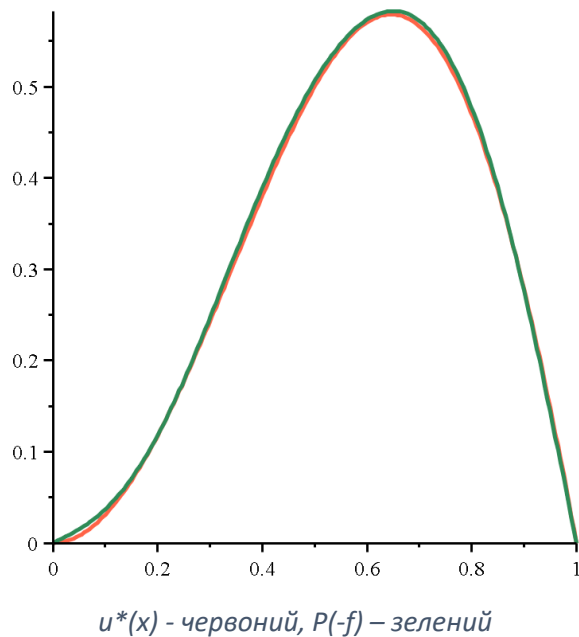
Виконаємо ті ж дії, але візьмемо більшу кількість вузлів  $m = 3$ .

Маємо



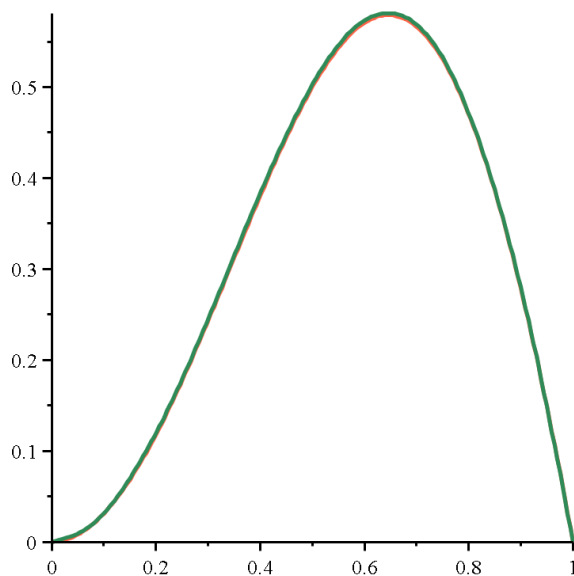
Як можемо помітити, отриманий результат є набагато кращим, значення похибки зменшилося майже у 10 разів  $\Delta = 0.02217115499$ .

Спробуємо ще більше покращити розв'язок та візьмемо  $m = 5$  вузлів.



$\Delta = 0.008969816042$ .

Для  $m = 10$  маємо



$u^*(x)$  - червоний,  $P(-f)$  – зелений

$$\Delta = 0.003022097826.$$

Розглянемо іншу крайову задачу, а саме змінимо оператор  $A$

$$Au = u'' - x^2 u = -f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u'' - xu = -x(\pi^2 + x^2) \sin(\pi x) + 2\pi \cos(\pi x) \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

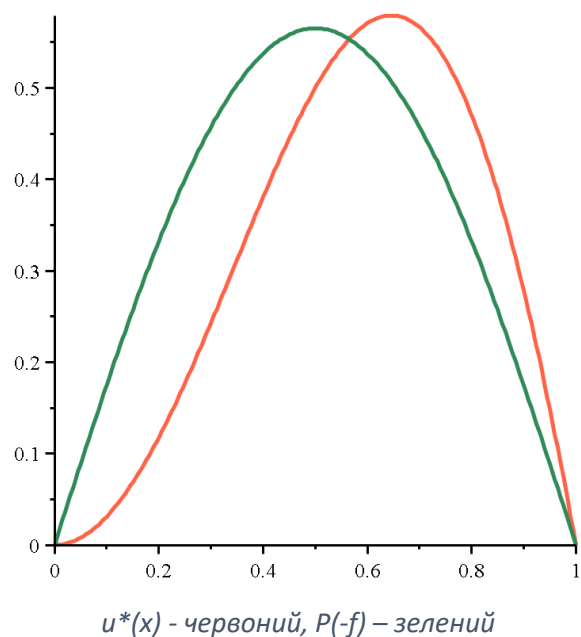
Можемо обрати  $u_i$  так само

$$u_i = \sin(\pi i x), \quad i = \overline{1, m}.$$

Обравши мінімальну кількість вузлів  $m = 1$ , отримали

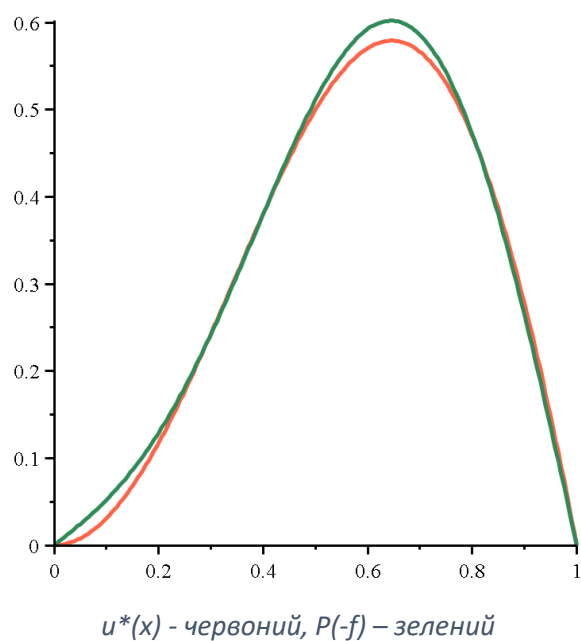
$$P(-f) = \frac{5 \sin(\pi x) (6\pi^8 + 6\pi^6 + 56\pi^4 + 3\pi^2 - 9)}{2(30\pi^8 + 20\pi^6 - 24\pi^4 + 10\pi^2 - 15)}.$$

Побудуємо графіки точного розв'язку  $u^*(x)$  та отриманого  $P(-f)$ :



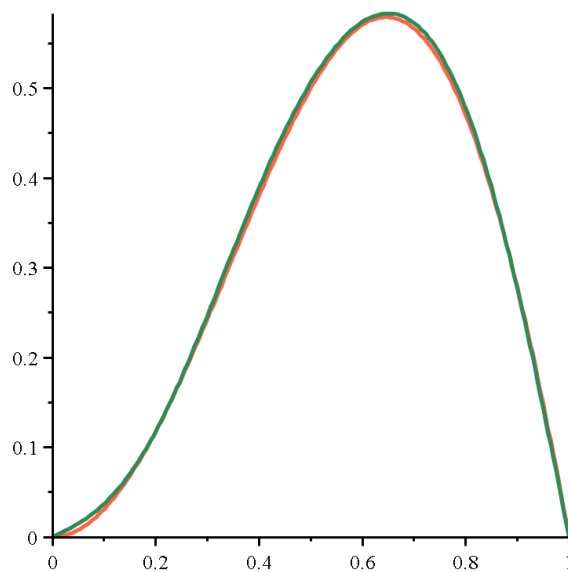
Значення похибки майже не змінилося у порівнянні з попередньою задачею  $\Delta = 0.2227782037$ .

Збільшуємо кількість вузлів  $m = 3$ . Маємо



$\Delta = 0.02281985668$ .

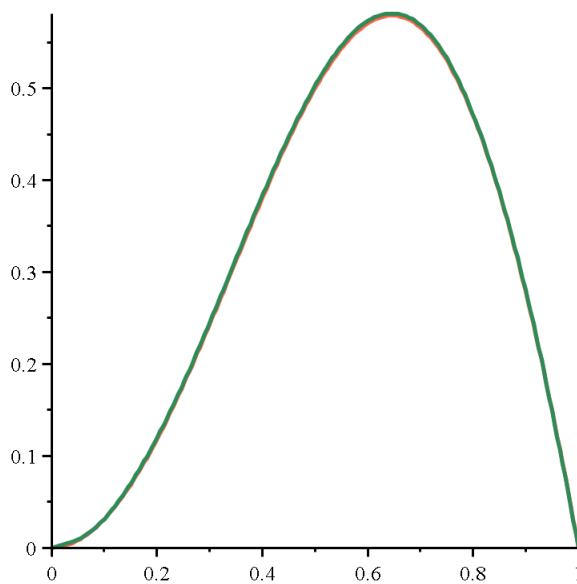
Для  $m = 5$  отримали



$u^*(x)$  - червоний,  $P(-f)$  – зелений

$$\Delta = 0.009038304804.$$

При  $m = 10$



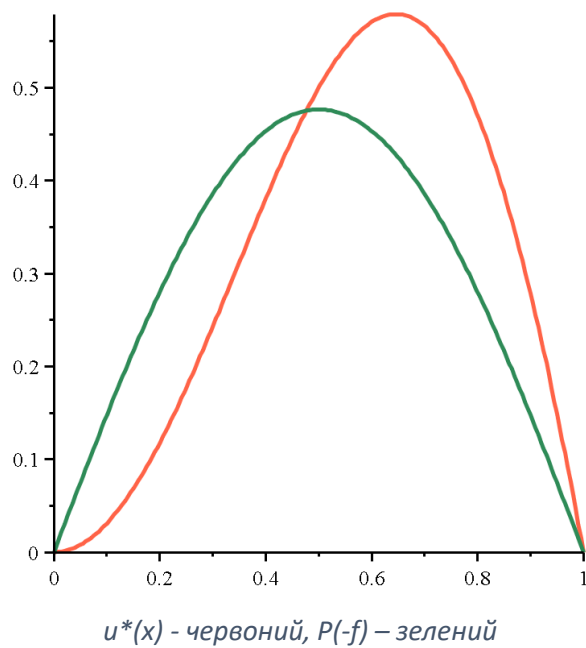
$u^*(x)$  - червоний,  $P(-f)$  – зелений

$$\Delta = 0.003130685346.$$

Отже, при невеликих змінах оператора  $A$ , ефективність методу суттєво не погіршується. Задамо  $A$  іншим способом:

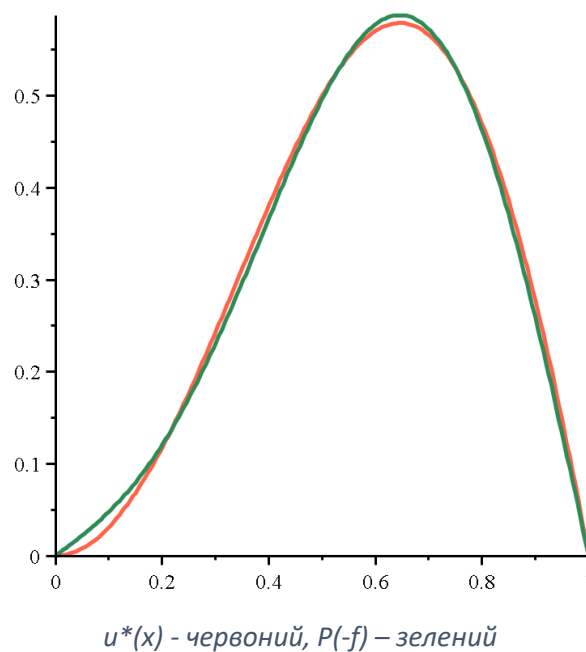
$$Au = u'' - (1 + \cos x)u$$

Тоді при  $m = 1$



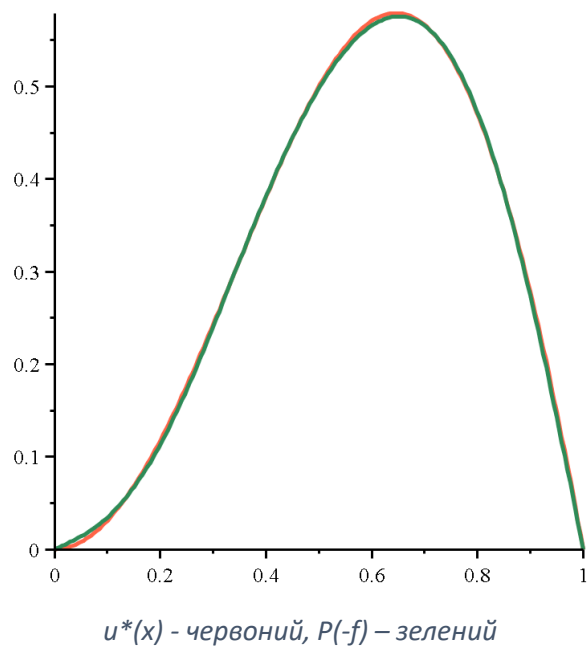
$$\Delta = 0.1940637616.$$

При  $m = 3$



$$\Delta = 0.01908880991.$$

При  $m = 5$



$$\Delta = 0.006717596705.$$

## 2.2. Побудова поверхонь

Розглянемо приклади побудови декількох поверхонь та дослідимо, як змінюються розв'язки, якщо обирати різну кількість інтерполяційних вузлів. Для кількості вузлів  $m = p$ , де  $p = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$  маємо отримати найкращих розв'язок, його і будемо порівнювати з іншими, за умови недовизначеності, тобто  $m < p$ .

Як перший приклад розглянемо наближення функції двох змінних  $f$ , що є поліномом другого степеня ( $n = 2$ ), та оберемо кількість вузлів  $m = p = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = 6$ .

Як було зазначено вище, поліном  $P_2$  повинен тотожно дорівнювати  $f$ .

Нехай точний розв'язок задачі  $f(x, y) = -2x^2 + 3y^2 + x - 2y$ .

Оберемо систему інтерполяційних вузлів таким чином:

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (-1,0), \quad \gamma_3 = (1,0)$$

$$\gamma_4 = (0,-1), \quad \gamma_5 = (-1,-1)$$

$$\gamma_6 = (0,1).$$

Тож задамо вхідні дані таблицею:

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$x_i$	0	-1	1	0	-1	0
$y_i$	0	0	0	-1	-1	1
$f(x_i, y_i)$	0	-3	-1	5	2	1

Будуємо матрицю  $\Gamma$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

та обернену до неї  $\Gamma^{-1}$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Останнім кроком знаходимо поліном

$$P_2(x, y) = \left\langle \vec{f}, \Gamma^{-1} \sum_{k=0}^2 \{(xx_i + yy_i)^k\}_{i=1}^6 \right\rangle = -2x^2 + 3y^2 + x - 2y.$$

Отже, отримали точний розв'язок.

Дослідимо, як буде змінюватися розв'язок в умовах недовизначеності, тобто будемо поступово зменшувати  $m$ .

Покладемо  $m = 5$  та приберемо вузол  $(-1, -1)$

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (-1,0), \quad \gamma_3 = (1,0)$$

$$\gamma_4 = (0,-1), \quad \gamma_5 = (0,1).$$

Знову отримали точний розв'язок

$$P_2(x, y) = -2x^2 + 3y^2 + x - 2y.$$

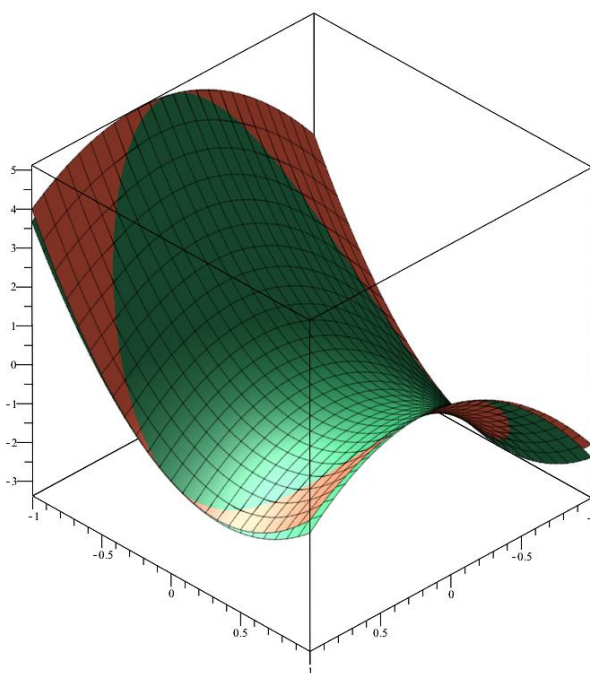
При  $m = 4$  оберемо вузли

$$\gamma_1 = (-1, 0), \quad \gamma_2 = (1, 0), \quad \gamma_3 = (0, -1), \quad \gamma_4 = (0, 1).$$

У цьому випадку точність розв'язку погіршується. Отримали поліном

$$P_2(x, y) = -\frac{7}{3}x^2 + \frac{8}{3}y^2 + x - 2y + \frac{1}{3}.$$

Зобразимо графіки



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

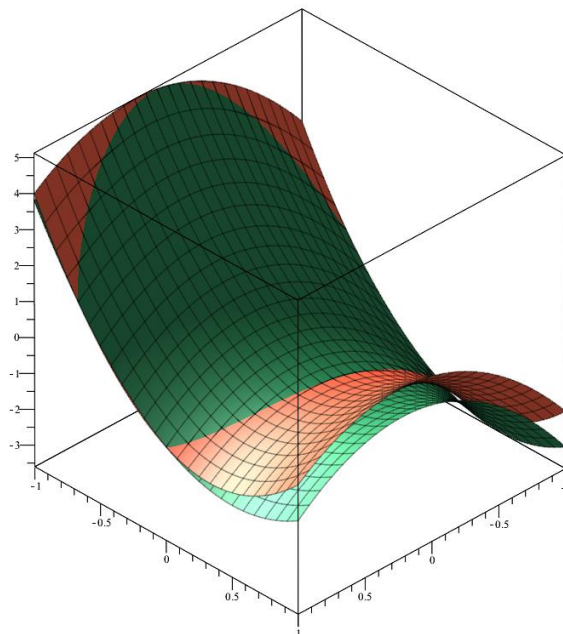
Похибка  $\Delta = \frac{1}{3}$ .

При  $m = 3$  оберемо вузли

$$\gamma_1 = (0, -1), \quad \gamma_2 = (1, 0), \quad \gamma_3 = (-1, 0).$$

Знайдений поліном

$$P_2(x, y) = -\frac{11}{5}x^2 + \frac{12}{5}y^2 + x - \frac{12}{5}y + \frac{1}{5}.$$



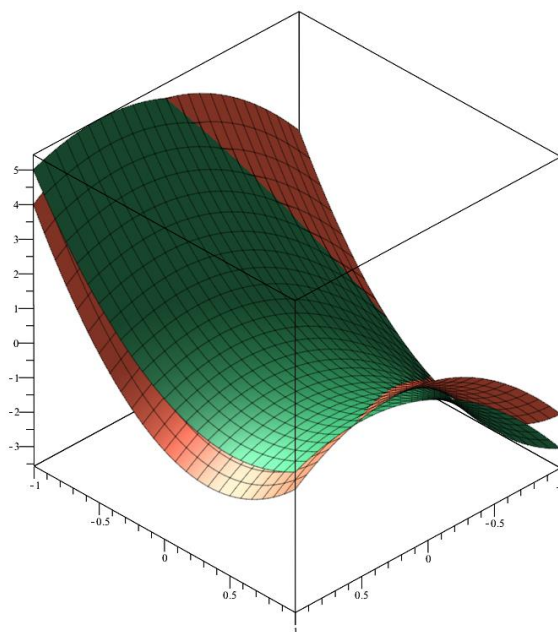
$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  – зелений

Похибка  $\Delta = 1$ .

При  $m = 2$  оберемо вузли

$$\gamma_1 = (0, -1), \quad \gamma_2 = (-1, 0).$$

$$P_2(x, y) = -\frac{7}{4}x^2 + \frac{9}{4}y^2 + \frac{7}{4}x - \frac{9}{4}y + \frac{1}{2}.$$



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  – зелений

Похибка  $\Delta = 1.520825$ .

Розглянемо іншу задачу. Нехай точний розв'язок

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Будемо будувати поліном другого степеня, тож покладемо  $m = 6$ . У такому випадку маємо отримати найкращий результат. Нехай

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (1,0), \quad \gamma_3 = (3,0)$$

$$\gamma_4 = (0,1), \quad \gamma_5 = (1,1)$$

$$\gamma_6 = (0,3).$$

Можемо подати вхідні дані у вигляді таблиці:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
$x_i$	0	1	3	0	1	0
$y_i$	0	0	0	1	1	3
$f(x_i, y_i)$	3	$2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{7}$	0

Матриця  $\Gamma$  має вигляд

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 13 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 13 & 91 & 1 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 3 & 13 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 13 & 91 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 13 & 3 & 13 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

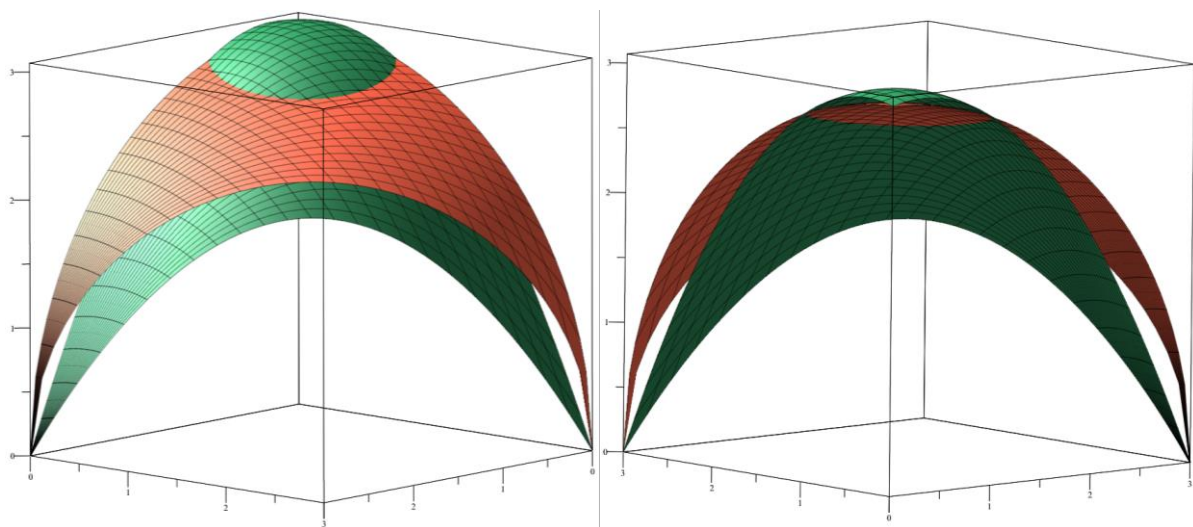
а обернена до неї  $\Gamma^{-1}$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & 0 & 0 & \frac{5}{18} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 & -\frac{1}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{18} & \frac{5}{18} & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{5}{18} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{18} & \frac{95}{18} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тож, обчислюємо шуканий поліном

$$P_2(x, y) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (3 + \sqrt{7} - 4\sqrt{2})xy + (1 - \sqrt{2})y^2 + (3\sqrt{2} - 4)x + (3\sqrt{2} - 4)y + 3.$$

Для порівняння точного та наближеного розв'язку зобразимо їх графіки на проміжках  $x \in [0; 3]$ ,  $y \in [0; 3 - x]$



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

Та знайдемо похибку  $\Delta = 0.672954413$ .

Звичайно, ми не отримали тотожно рівну функцію, але результат наближення є досить точним.

Дослідимо, як будуть змінюватися розв'язок та похибка, якщо обрати меншу кількість інтерполяційних вузлів.

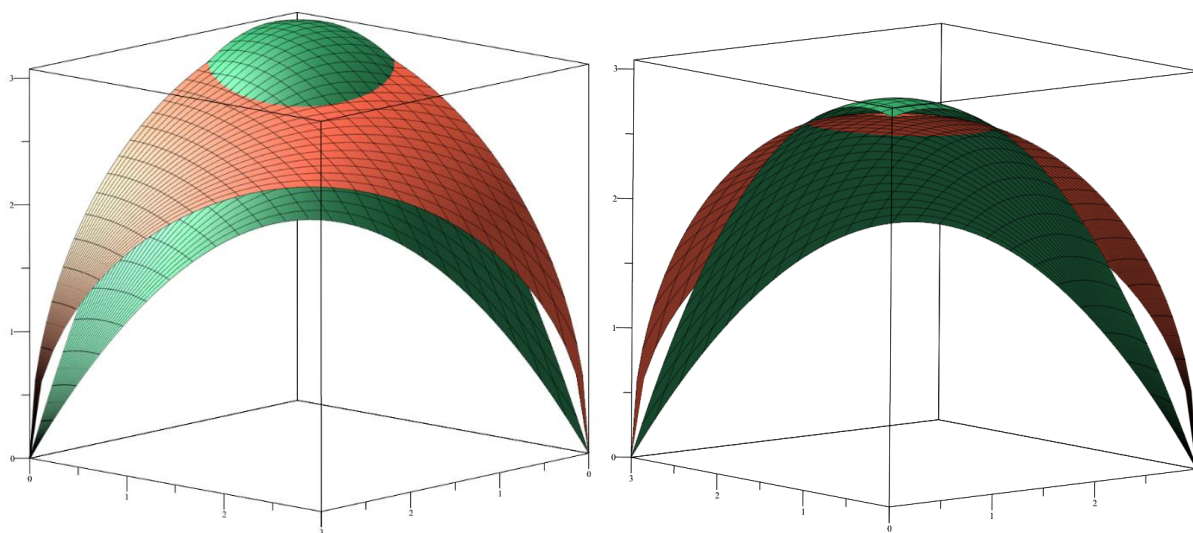
Нехай  $m = 5$ , а система точок має вигляд

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (1,0), \quad \gamma_3 = (3,0)$$

$$\gamma_4 = (0,1), \quad \gamma_5 = (0,3).$$

Отримали поліном

$$P_2(x, y) = (1 - \sqrt{2})x^2 + (1 - \sqrt{2})y^2 + (3\sqrt{2} - 4)x + (3\sqrt{2} - 4)y + 3.$$



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

$$\Delta = 0.672954413.$$

Тож похибка не збільшилася.

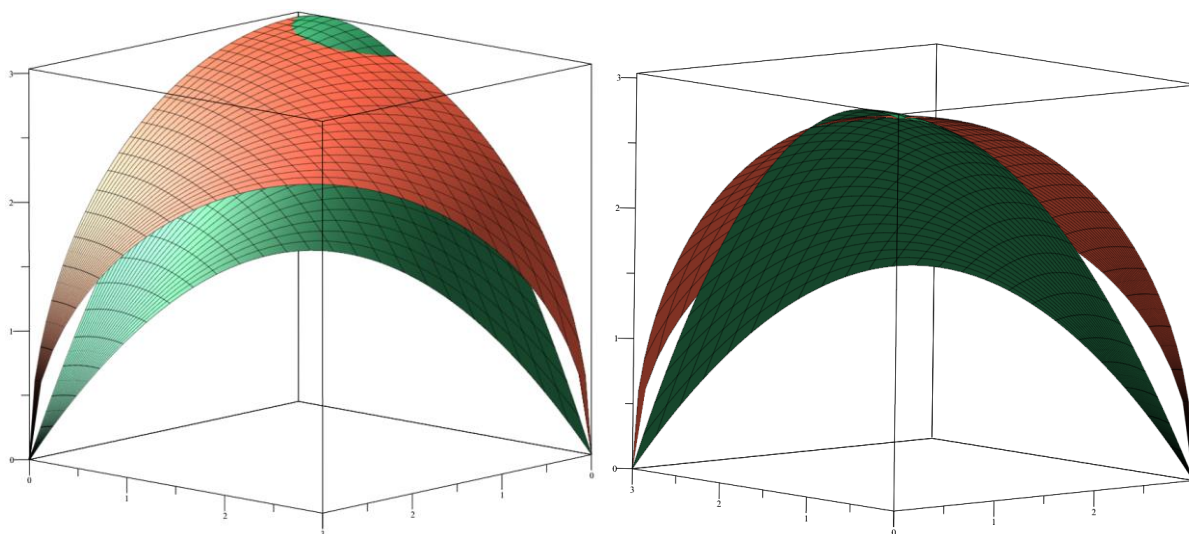
При  $m = 4$  оберемо вузли

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (3,0), \quad \gamma_3 = (0,1), \quad \gamma_4 = (0,3).$$

Маємо поліном

$$P_2(x, y) = -0.3x^2 + (1 - \sqrt{2})y^2 - 0.1x + (3\sqrt{2} - 4)y + 3.$$

Графіки точного та наближеного розв'язків:



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

$$\Delta = 0.786177184.$$

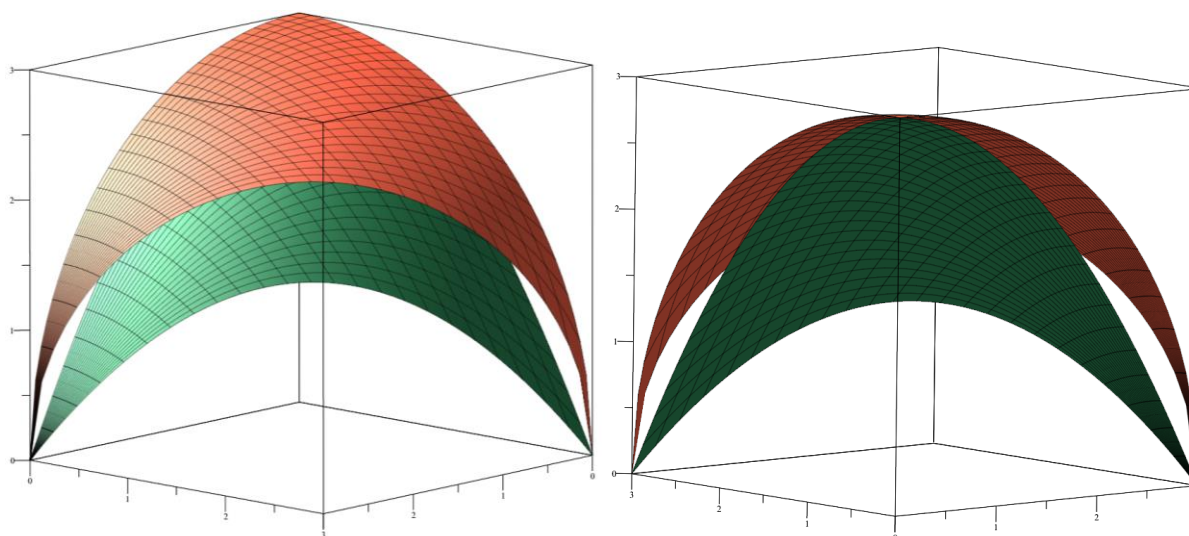
При  $m = 3$  покладемо

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (3,0), \quad \gamma_3 = (0,3).$$

Поліном

$$P_2(x,y) = -0.3x^2 - 0.3y^2 - 0.1x - 0.1y + 3.$$

Будуємо графіки



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

$$\Delta = 0.833331781.$$

Розглянемо ще одну задачу. Нехай точним розв'язком є функція

$$f(x, y) = 1 + x^2 - \sin y.$$

Побудуємо поліном другого степеня. Тоді покладемо  $m = 6$ . Вузли інтерполяції оберемо наступним чином

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (1,0), \quad \gamma_3 = (-1,0)$$

$$\gamma_4 = (0,1), \quad \gamma_5 = (1,1)$$

$$\gamma_6 = (0, -1).$$

Можемо подати вхідні дані у вигляді таблиці:

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
$x_i$	0	1	-1	0	1	0
$y_i$	0	0	0	1	1	-1
$f(x_i, y_i)$	1	2	2	$1 - \sin 1$	$2 - \sin 1$	$1 + \sin 1$

Матриця  $\Gamma$  має вигляд

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

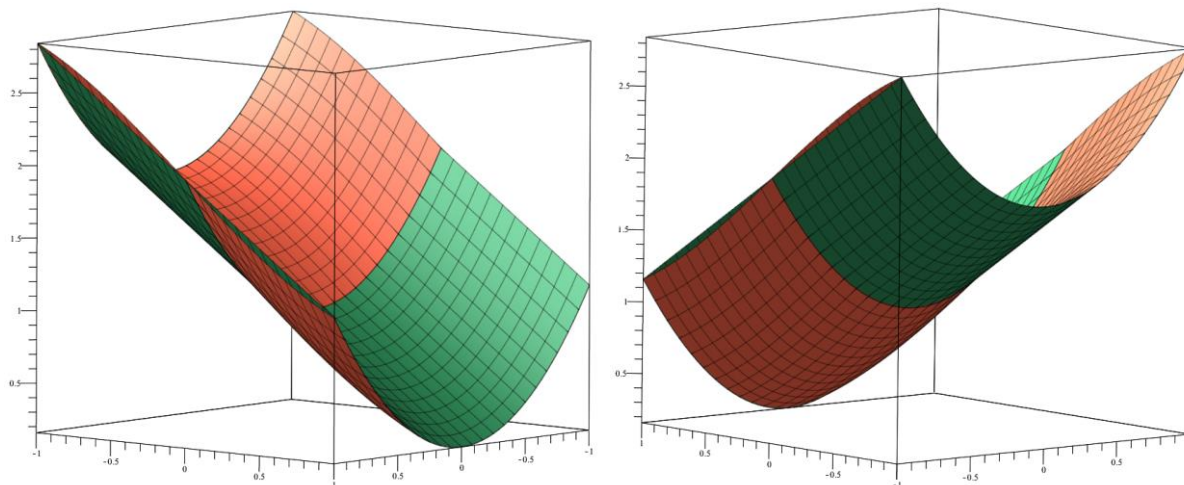
а обернена до неї  $\Gamma^{-1}$

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо шуканий поліном

$$P_2(x, y) = 1 + x^2 - \sin(1)y.$$

Зобразимо графіки точного та наближеного розв'язку на проміжку  $x \in [-1; 1], y \in [-1; 1]$



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  - зелений

Та знайдемо похибку  $\Delta = 0.0599935877$ .

Отриманий розв'язок є набагато кращим, ніж у попередній задачі, похибка більш ніж у 10 разів менша.

Тож дослідимо, наскільки погіршиться розв'язок та похибка при меншій кількості інтерполяційних вузлів.

Нехай  $m = 5$ , відкинемо точку  $(1,1)$ , тобто

$$\gamma_1 = (0,0), \quad \gamma_2 = (1,0), \quad \gamma_3 = (-1,0)$$

$$\gamma_4 = (0,1), \quad \gamma_5 = (0,-1).$$

Отримали поліном

$$P_2(x, y) = 1 + x^2 - \sin(1)y,$$

який є тотожно рівним до попереднього результату.

При  $m = 4$  оберемо вузли

$$\gamma_1 = (1,0), \quad \gamma_2 = (-1,0), \quad \gamma_3 = (0,1), \quad \gamma_4 = (0,-1).$$

Тобто прибрати точку  $(0,0)$ .

Маємо поліном

$$P_2(x, y) = 1 + x^2 - \sin(1)y.$$

Розв'язок знову не змінився. Отже, можна зробити висновок, що інтерполяційні вузли  $(0,0)$  та  $(1,1)$  не впливали на перший ( $m = 6$ ) наближений поліном для даної функції.

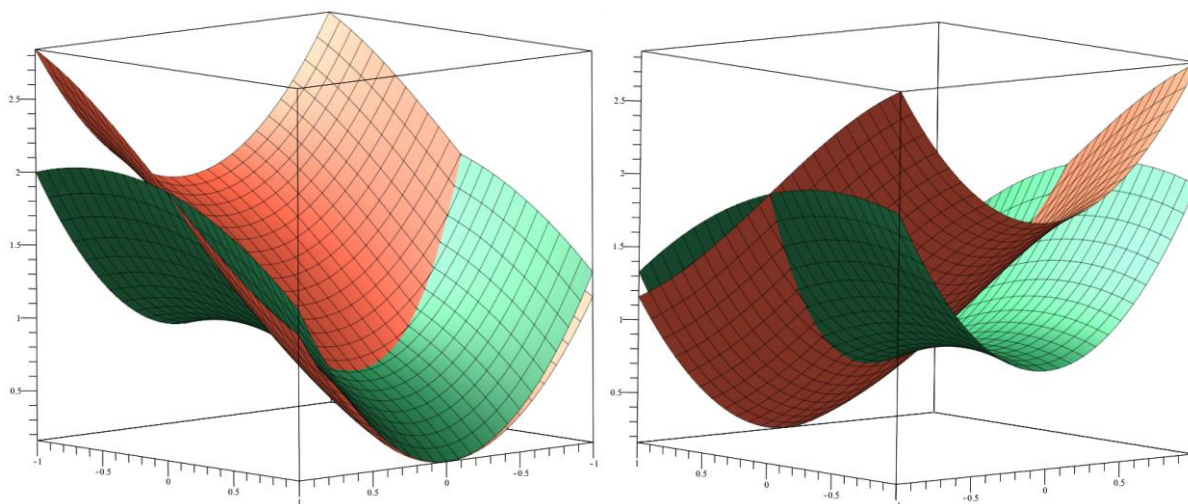
Покладемо  $m = 3$  та вузли

$$\gamma_1 = (1,0), \quad \gamma_2 = (-1,0), \quad \gamma_3 = (0,1).$$

Отримали розв'язок

$$P_2(x, y) = 1 + \left(1 + \frac{\sin(1)}{5}\right)x^2 - \frac{2\sin(1)}{5}y^2 - \frac{2\sin(1)}{5}y - \frac{\sin(1)}{5}.$$

Будуємо графіки



$f(x,y)$  - червоний,  $P_2(x,y)$  – зелений

$$\Delta = 1.009765182.$$

Результат суттєво погіршився. Найбільше відхилення маємо у точці  $(0, -1)$ , яка раніше була інтерполяційним вузлом.

Розглянемо задачу про побудову траєкторії рухомого об'єкту.

Нехай, задані координати руху деякого об'єкту

	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$
$x_i$	-1	-2	-1	1	2	3
$y_i$	$-\frac{1}{2}$	3	4	2	$\frac{3}{2}$	-4
$z_i$	3	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	4	6

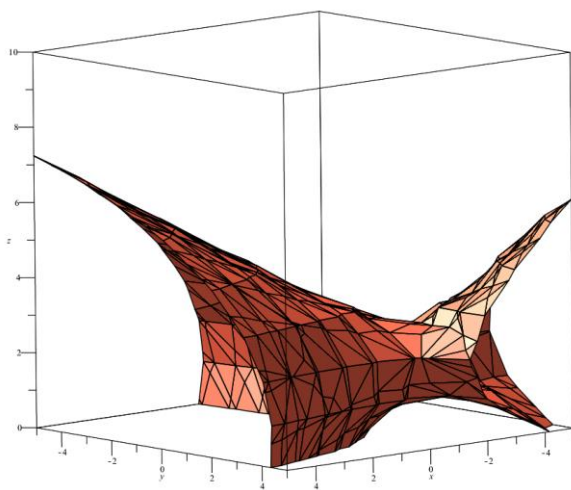
Так як  $m = 6$ , то оберемо  $n = 2$ .

Поліноми  $Q_2^{(1)}(x, y, z)$  та  $Q_2^{(2)}(x, y, z)$  оберемо наступним чином

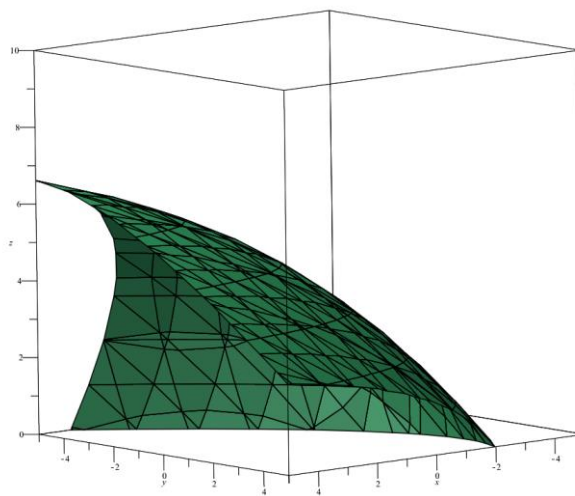
$$Q_2^{(1)}(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - xy + x + z + 1,$$

$$Q_2^{(2)}(x, y, z) = y^2 - z^2 - 2xy + x + y + 1.$$

Зобразимо графіки отриманих поліномів  $P_2^{(1)}(x, y, z)$  та  $P_2^{(2)}(x, y, z)$

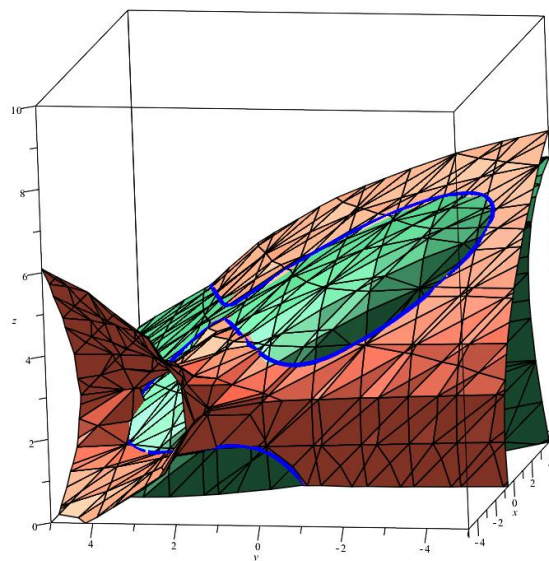
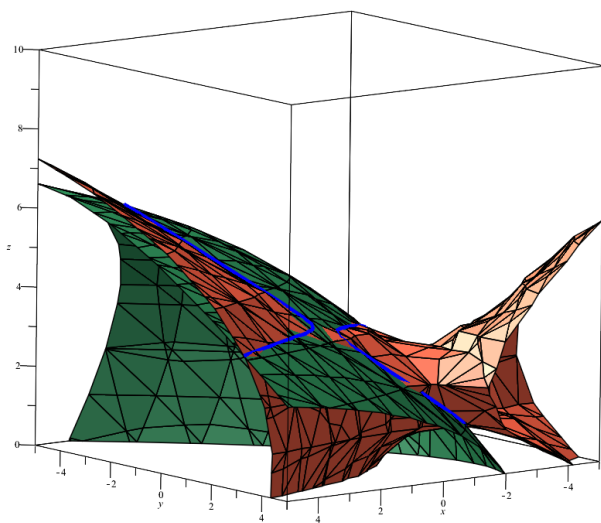


$P_2^{(1)}(x, y, z)$



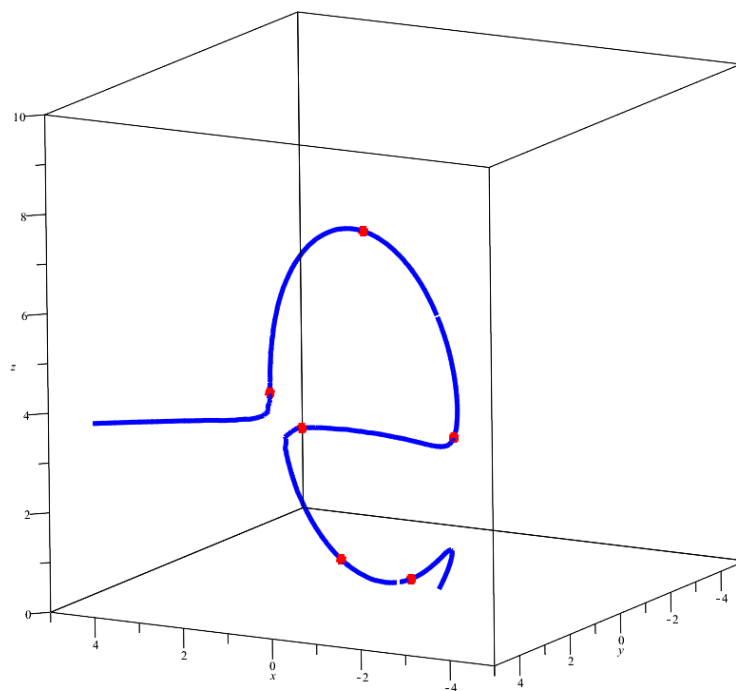
$P_2^{(2)}(x, y, z)$

Побудуємо криву перетину цих двох поверхонь. Отримані графіки з різних ракурсів:



$P_2^{(1)}(x, y, z)$  - червона,  $P_2^{(2)}(x, y, z)$  - зелена, крива перетину - синя

Отже, отримали траєкторію рухомого об'єкту, яка проходить через задані точки:



## ВИСНОВКИ

Отже, методи інтерполяції операторів та побудови поверхонь, розглянуті у даній роботі, є ефективними. Задачі, які можна розв'язати цими методами, є дуже важливими та з'являються у багатьох галузях науки та техніки, таких як розпізнавання образів, задач екології, медицини, балістики тощо.

У даній роботі були описані алгоритми вищезгаданих методів та досліджена їх робота на різних задачах.

За допомогою оберненої інтерполяції було розв'язано 3 задачі про наближення лінійних операторів у гільбертовому просторі. Як було показано, зі збільшенням кількості інтерполяційних вузлів відбувалося суттєве зменшення похибки. Алгоритм оберненої інтерполяції для розв'язання крайових задач було побудовано один раз. Змінюємо оператор  $A$  – це означає (для лінійної крайової задачі), що змінюється лише права частина рівняння. Отже, щоб використати побудований алгоритм, потрібно лише перерахувати значення вектора  $f$ . Зауважимо, що в прикладних задачах ці значення достатньо часто задані. Таким чином побудований алгоритм можна застосовувати для багатьох прикладних задач. Отримані розв'язки мають досить високу точність, та похибки для всіх трьох задач майже не відрізнялися. Для порівняння зобразимо таблицю похибок отриманих розв'язків для розглянутих задач:

		Оператор		
		$Au = u'' - xu$	$Au = u'' - x^2u$	$Au = u'' - (1 + \cos x)u$
Кількість вузлів, $m$	1	$\Delta = 0.2209665958$	$\Delta = 0.2227782037$	$\Delta = 0.1940637616$
	3	$\Delta = 0.0221711549$	$\Delta = 0.0228198567$	$\Delta = 0.0190888099$
	5	$\Delta = 0.0089698161$	$\Delta = 0.0090383048$	$\Delta = 0.0067175967$
	10	$\Delta = 0.0030220978$	$\Delta = 0.0031306854$	

Алгоритм інтерполяції поліномом мінімальної норми теж показав гарні результати. У порівнянні з іншими методами наближення функцій багатьох змінних він виділяється своєю простою будовою та досить невеликою кількістю арифметичних операцій. За допомогою цього методу було розв'язано 3 задачі про побудову поверхонь та одну задачу про побудову траєкторії рухомого об'єкту. При зменшенні кількості інтерполяційних вузлів погіршувався розв'язок у тих областях, з яких вилучили вузли. У випадку третьої задачі розв'язок не змінювався, коли зменшували  $m$  з 6 до 4, проте при  $m = 3$  відбулося суттєве збільшення похибки. Порівняємо результати, отримані при побудові поверхонь:

		Поверхня, $f(x, y)$		
		$-2x^2 + 3y^2 + x - 2y$	$\sqrt{9 - x^2 - y^2}$	$1 + x^2 - \sin y$
Кількість вузлів, $m$	6	$\Delta = 0$	$\Delta = 0.672954413$	$\Delta = 0.059993588$
	5	$\Delta = 0$	$\Delta = 0.672954413$	$\Delta = 0.059993588$
	4	$\Delta = \frac{1}{3}$	$\Delta = 0.786177184$	$\Delta = 0.059993588$
	3	$\Delta = 1$	$\Delta = 0.833331781$	$\Delta = 1.009765182$

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] До деяких питань поліноміальної інтерполяції в евклідових просторах / О.Ф. Кашпур, В.В. Хлобистов // Доповіді Національної академії наук України. — 2016. — № 10. — С. 10-14.
- [2] Cotfas N. Systems of orthogonal polynomials defined by hypergeometric type equations with application to quantum mechanics / Nicolae Cotfas // Open Physics. — 2004. — Pp. 456–466.
- [3] Kocięcki A. A solution to the global identification problem in DSGE models. / Andrzej Kocięcki, Marcin Kolasa. // Working Papers. — 2022. — Pp. 1–44.
- [4] Robbiano L. Polynomial Systems and some Applications to Statistics / Lorenzo Robbiano. // 31 p.
- [5] Goel N. S. Nonlinear Models of Interacting Populations / N. S. Goel, S. C. Maitra, E.W. Montrol. // N.Y.: Academic Press. — 1971. — 146 p.
- [6] Govorov M. Geodesy and Cartography for needs of Geographic information infrastructure / M. Govorov // 2008. — 176 p.
- [7] Getreuer P. Linear Methods for Image Interpolation / P. Getreuer // Image Processing On Line. — 2011. — Vol. 1. — Pp. 238–259.
- [8] Gongwer M. W. Brain-wide projections and differential encoding of prefrontal neuronal classes underlying learned and innate threat avoidance / M. W. Gongwer, C. B. Klune, J. Couto, B. Jin, A. S. Enos, R. Chen, D. Friedmann, L. A. DeNardo // 2023. — 30 p.
- [9] Meng M. In-depth analysis of financial market based on iris recognition algorithm of MATLAB GUI / M. Meng, J. Yu // Neural Computing and Applications. — 2021. — Pp. 1–16.

[10] Klančar G. Robot Navigation Based on Potential Field and Gradient Obtained by Bilinear Interpolation and a Grid-Based Search / G. Klančar, A. Zdešar, M. Krishnan // *Sensors*. — 2022. — Pp. 1–22.

[11] Accadia C. Sensitivity of Precipitation Forecast Skill Scores to Bilinear Interpolation and a Simple Nearest-Neighbor Average Method on High-Resolution Verification Grids / C. Accadia, S. Mariani, M. Casaioli, A. Lavagnini, A. Speranza // 2003. — Pp. 918–932.

[12] Leng J. Medical image interpolation based on multi-resolution registration / J. Leng, G. Xu, Y. Zhang // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2013. — Pp. 1–18.

[13] Декілька зауважень про випадкові міри / А. В. Скороход // *Вісник Київського університету*. — 1958. — № 1. — С. 105-114.

[14] Makarov V. L. Methods of operator interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. // Київ: Інститут математики НАН України. — 2010. — Т. 83. — 516 p.

[15] Stone M. H. The generalized Weierstrass approximation theorem / M. H. Stone. // *Mathematics Magazine*. — 1948. — № 21. — Pp. 167 – 183.

## Відгук

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

**«Застосування інтерполяції для розв'язання прикладних задач»**  
студентки 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики  
Київського національного університету імені Тараса Шевченка


### **Каспрові Ярослави Андріївни**

Робота Каспрові Я. А. присвячена дослідженню методу оберненої інтерполяції для наближення лінійних операторів в гільбертовому просторі та побудови поверхонь в евклідовому просторі на основі інтерполяційного полінома мінімальної норми. Існує багато математичних моделей, що базуються на операторних поліномах. Такі моделі використовуються в біології, географії, економіці, фізиці тощо. Задачі наближення функцій багатьох змінних також виникають у різних галузях, таких як: медицина, інженерія, геодезія та інших.

Метою кваліфікаційної роботи є розв'язання задач, пов'язаних з наближенням лінійних операторів та побудовою поверхонь, зокрема, розглядається випадок, коли кількість інтерполяційних вузлів є меншою за розмірність простору поліномів, на якому шукається розв'язок. Робота має обчислювально-експериментальний характер, але її розрахунки важливі для теоретичного обґрунтування запропонованих алгоритмів. Результати експериментів переконливо свідчать про перевагу розглянутих у роботі методів над стандартними.

Вважаю, що поставлене завдання кваліфікаційної роботи повністю виконано на належному рівні, робота відповідає вимогам, що висуваються до кваліфікаційних робіт бакалаврів, Каспріа Ярослава Андріївна заслуговує оцінки «Відмінно».

Заступник декана з навчально-методичної роботи факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка,  
доцент кафедри обчислювальної математики,  
кандидат фізико-математичних наук

 О. Ф. Кашпур

## Рецензія

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

**«Застосування інтерполяції для розв'язання прикладних задач»**

студентки 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київського національного університету імені Тараса Шевченка

**Каспрової Ярослави Андріївни**

Рецензована кваліфікаційна робота має обчислювально-експериментальний характер та розкриває актуальну тему розв'язання прикладних задач, що часто виникають у фізиці, медицині, географії, економіці та інших областях.

У вступі автор обґрунтовує актуальність обраної теми та формулює мету роботи, поставлені перед нею завдання та її практичну значимість. Теоретичну частину роботи присвячено огляду методів, опису алгоритмів та порівняльному аналізу методів побудови інтерполяційних поліномів, що дозволило автору виявити основні переваги та недоліки використання розглянутого методу.

Мета роботи полягала в розв'язанні задач про наближення лінійних операторів в гільбертовому просторі за допомогою оберненої інтерполяції та побудові поверхонь в евклідовому просторі у випадку, коли вихідної інформації про поверхню не вистачає для однозначної її побудови. Результатом роботи є розв'язання крайових, аналіз точності проведеного обчислювального експерименту (порівняння точності отриманих розв'язків при різній кількості інтерполяційних вузлів (в умовах недовизначеності)). На підставі інтерполяційної формули мінімальної норми досліджено побудову поверхонь та розв'язана задача про побудову траєкторії рухомого об'єкту.

Вважаю, що робота виконана на належному рівні, відповідає вимогам до кваліфікаційних робіт бакалаврів та заслуговує оцінки «відмінно».

Професор кафедри моделювання складних систем,  
доктор фізико-математичних наук



Володимир СТОЯН

# КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

## СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр



Ім'я користувача:  
Оноцький В'ячеслав ФКомпНаук

ID перевірки:  
1015591523

Дата перевірки:  
13.06.2023 20:41:58 EEST

Тип перевірки:  
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:  
13.06.2023 20:47:15 EEST

ID користувача:  
100002816

Назва документа: КаспроваяЯрославаАндріївна

Кількість сторінок: 44 Кількість слів: 5338 Кількість символів: 33570 Розмір файлу: 2.12 MB ID файлу: 1015240689

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

**2.25%**

**Схожість**

Найбільша схожість: 0.9% з Інтернет-джерелом (<http://sinp.msu.ru/ru/system/files/dissertations/vladimirov-dissert.pdf>)

1.85% Джерела з Інтернету

9

Сторінка 46

2.19% Джерела з Бібліотеки

103

Сторінка 46

**0% Цитат**

Вилучення цитат вимкнено

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнено

**0%**

**Вилучень**

Немає вилучених джерел

**Модифікації**

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи

85

Підозріле форматування

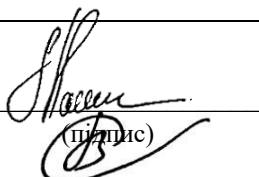
11

сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

Робота студентки 4-го курсу Каспрової Ярослави Андріївни «Застосування інтерполяції для розв'язання прикладних задач» виконана самостійно, при цьому обсяг цитувань та запозичень становить 2.25% та відповідає належному рівню.

Науковий керівник:

  
(підпис)

Кашпур О.Ф.

(ПІБ)

Оператор:

(підпис)

Оноцький В. В.

(ПІБ)