ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Математичні олімпіади

УДК 378.016:[517.9+512.64+519.6] **DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.3**

Михайло ГОРОДНІЙ, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.
ORCID ID: 0000-0002-9991-910X
e-mail: horodnii@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРО ДЕЯКІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕСТАНДАРТНИХ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

Анотація. *У даній статті висвітлено кілька класичних методів розв'язання більш складних, ніж зазвичай розглядаються на шкільних уроках з математики, задач – логарифмування, використання монотонності спеціально підібраної функції, метод максимуму-мінімуму. Також значну увагу приділено повноті та логіці розв'язків, оскільки тестові завдання з математики перевіряють в основному стандартні технічні математичні навички, а цього недостатньо для успішного навчання в закладах вищої освіти, особливо на математичних (зокрема, IT), інженерних, природничих та економічних спеціальностях.*

Ключові слова: *рівняння; нерівність; розв'язок; логарифмування; монотонність функції; метод максимуму-мінімуму.*

1. Вступ

Математика в сучасному світі є основним апаратом не тільки фізики і техніки, але й сфери IT, біології, економіки, хімії, соціології та інших наук. Також саме математика виховує самостійність і логічність мислення, а без цих якостей важко досягти успіху в будь-якій області професійної діяльності. Тому математику включають до обов'язкових предметів національного мультимедійного тесту. На жаль, її обов'язковість призводить до того, що перевіряються в основному тільки технічні навички, а не вміння обґрунтовувати правильність тих чи інших технічних перетворень або логічних висновків. У результаті знання і навички багатьох випускників з шкільного курсу математики недостатні для успішного навчання в закладах вищої освіти.

Щоб мотивувати школярів до поглибленого вивчення математики, вітчизняні університети проводять свої олімпіади з математики. На цих олімпіадах перевіряється не тільки вміння випускника школи запам'ятати формулювання і використати деякі стандартні рецепти, але й володіння логікою математичних міркувань, вміння застосовувати теоретичні знання для розв'язування нестандартних задач.

Мета цієї статті – познайомити школярів з деякими методами розв'язування нетривіальних рівнянь, нерівностей і систем. Більшість задач, що розглядаються в статті, у різні роки пропонувалися на олімпіаді з математики для абітурієнтів Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

2. Приклади розв’язування задач

Задача 1. *Розв’язати нерівність*

$$2024^{2025(x+1-\sqrt{x+13})} > 2025^{2024(x+1-\sqrt{x+13})}.$$

Розв’язання: На ОДЗ наша нерівність рівносильна нерівності

$$a^{x+1-\sqrt{x+13}} > 1, \qquad (1)$$

де $a = \frac{2024^{2025}}{2025^{2024}}$. Оскільки показникова функція $y = a^x$ монотонно зростає при $a > 1$ і монотонно спадає при $0 < a < 1$, то потрібно порівняти числа a і 1.

Перевіримо, чи правильна нерівність $a > 1$. Скориставшись тим, що функція $y = \ln x$ монотонно зростає на $(0, +\infty)$, матимемо

$$a > 1 \iff 2025 \ln 2024 - 2024 \ln 2025 > 0 \iff \frac{\ln 2024}{2024} > \frac{\ln 2025}{2025} \iff$$
$$\iff f(2024) > f(2025), \qquad (2)$$

де $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Оскільки $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ при $x > e$, то функція $f(x)$ монотонно спадає на $(e, +\infty)$ і тому нерівність (2), а отже, і нерівність $a > 1$ правильні.

Тепер, скориставшись тим, що функція $y = a^x$ монотонно зростає і рівністю $a^0 = 1$, робимо висновок, що нерівність (1) рівносильна нерівності

$$x + 1 > \sqrt{x + 13}. \qquad (3)$$

Нерівність (3) розв’яжемо піднесенням до квадрату. Отримаємо:

$$x + 1 > \sqrt{x + 13} \iff \begin{cases} x + 1 \geq 0, \\ x + 13 \geq 0, \\ (x+1)^2 > x + 13 \end{cases} \iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x^2 + x - 12 > 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \geq -1, \\ x < -4 \text{ або } x > 3 \end{cases} \iff x > 3.$$

Відповідь: $x > 3$.

Зауваження 1. Корисно запам’ятати, що:

а) логарифмування, а також використання монотонності функції – класичні прийоми, що використовуються для порівняння чисел;

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

б) нерівність $f(x) > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі $\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ \left(f(x)\right)^2 > g(x). \end{cases}$

Задача 2. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x^4 + x^2 - 4x - 3 = 0, & (5) \\ x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0. & (6) \end{cases}$$

Розв'язання: *1 спосіб*. Підставивши числа 1, -1, 3, -3 в рівняння (5), робимо висновок, що (5), а отже, і наша система не мають цілих розв'язків.

Спробуємо отримати більш просте рівняння, серед розв'язків якого є всі розв'язки вихідної системи. Виразивши x^4 із (5) і підставивши в (6), отримаємо

$$-x^2 + 4x + 3 = 2x^3 - 2x^2 + x + 2,$$

тобто

$$2x^3 = x^2 + 3x + 1. \tag{7}$$

Тепер зауважимо, що $x = 0$ – не розв'язок системи. Тому всі розв'язки вихідної системи є розв'язками як рівняння (7), так і отриманого множенням (7) на x рівняння

$$2x^4 = x^3 + 3x^2 + x,$$

або, з урахуванням (7), рівняння

$$2x^4 = \frac{1}{2}(x^2 + 3x + 1) + 3x^2 + x. \tag{8}$$

На кінець, підставивши вираз для x^4 із (5) в (8), матимемо

$$2(-x^2 + 4x + 3) = \frac{7}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Таким чином, ми встановили, що розв'язками системи можуть бути тільки корені квадратного рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, тобто числа $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Слід звернути особливу увагу на те, що ми отримали рівняння $x^2 - x - 1 = 0$ як наслідок вихідної системи, а отже, наразі можемо тільки стверджувати, що якщо система має розв'язки, то їх не більше двох і кожен з них співпадає з одним з чисел $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Отже, для закінчення розв'язання потрібно перевірити, чи є ці числа коренями вихідної системи.

Звичайно, можна безпосередньо підставити $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ в кожне з рівнянь системи і переконатися, що вони справді є розв'язками. Оскільки цей підхід призводить до громіздких обчислень, наведемо інший метод цієї перевірки.

Якщо $x = x_0$ – розв'язок рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, то

$$x_0{}^2 = x_0 + 1, \qquad x_0{}^3 = x_0{}^2 + x_0, \qquad x_0{}^4 = x_0{}^3 + x_0{}^2,$$

і тому

$$x_0{}^4 + x_0{}^2 - 4x_0 - 3 = x_0{}^3 + 2x_0{}^2 - 4x_0 - 3 = 3x_0{}^2 - 3x_0 - 3 = 3(x_0{}^2 - x_0 - 1) = 0,$$

$$x_0{}^4 - 2x_0{}^3 + 2x_0{}^2 - x_0 - 2 = -x_0{}^3 + 3x_0{}^2 - x_0 - 2 = 2x_0{}^2 - 2x_0 - 2 = 2(x_0{}^2 - x_0 - 1) = 0,$$

тобто $x = x_0$ є розв'язком вихідної системи.

Отже, система має два розв'язки $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

З наведених вище міркувань випливає, що ліві частини рівнянь системи діляться на $x^2 - x - 1$. Тому розв'язування можна записати більш коротко, а саме, наприклад, таким чином.

2 спосіб. Оскільки

$$\begin{array}{l|l}
_x^4 + 0\cdot x^3 + x^2 - 4x - 3 & \underline{x^2 - x - 1} \;, \\
\underline{x^4 - x^3 - x^2} & x^2 + x + 3 \\
\qquad _x^3 + 2x^2 - 4x & \\
\qquad\qquad \underline{x^3 - x^2 - x} & \\
\qquad\qquad _3x^2 - 3x - 3 & \\
\qquad\qquad\; \underline{3x^2 - 3x - 3} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
_x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 & \underline{x^2 - x - 1} \;, \\
\underline{x^4 - x^3 - x^2} & x^2 - x + 2 \\
\quad _-x^3 + 3x^2 - x & \\
\qquad \underline{x^3 - x^2 - x} & \\
\qquad\quad _2x^2 - 2x - 2 & \\
\qquad\quad\; \underline{2x^2 - 2x - 2} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

то вихідна система рівносильна системі

$$\begin{cases} (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 3) = 0, & (9) \\ (x^2 - x - 1)(x^2 - x + 2) = 0. & (10) \end{cases}$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Також рівняння $x^2+x+3=0$ не має розв'язків, а отже, розв'язками (9) є тільки корені рівняння $x^2-x-1=0$, які також є розв'язками рівняння (10). Таким чином, система має два розв'язки $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Відповідь: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задача 3. *Довести, що при всіх x, y виконується нерівність*

$$\frac{x^2}{3}-x+\frac{5}{6}-\frac{6^y}{36^{y+1}+1}\geq 0.$$

Визначити, при яких x, y досягається рівність.

Розв'язання: Покладемо

$$f(x)=\frac{x^2}{3}-x+\frac{5}{6}, \qquad g(y)=\frac{6^y}{36^{y+1}+1}.$$

Нам досить довести, що

$$\min_{x\in R} f(x)=\max_{y\in R} g(y), \tag{11}$$

а також визначити, при яких x, y в (11) отримаємо рівність.

Оскільки

$$f(x)=\frac{1}{3}\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{12},$$

то

$$\min_{x\in R} f(x)=\frac{1}{12}$$

і цей мінімум досягається тільки в точці $x=\frac{3}{2}$.

Для знаходження максимуму функції $g(y)$ скористаємось нерівністю Коші для двох доданків, яка стверджує, що

$$a^2+b^2\geq 2ab, \tag{12}$$

для всіх дійсних a, b, причому рівність в (12) матимемо лише при $a=b$. Поклавши $a=6^{y+1}$, $b=1$, отримаємо $36^{y+1}+1\geq 2\cdot 6^{y+1}$, і тому

$$g(y)\leq \frac{6^y}{2\cdot 6^{y+1}}=\frac{1}{12}$$

для всіх $y \in R$, причому $g(y) = \frac{1}{12}$ тільки при $6^{y+1} = 1$, тобто $y = -1$. Отже, $\max_{y \in R} g(y) = \frac{1}{12}$ і цей максимум досягається в єдиній точці $y = -1$.

Таким чином, нерівність (11), а отже, і вихідну нерівність доведено для всіх x, y. Рівність досягається тільки при $x = \frac{3}{2}$, $y = -1$.

Зауваження 2. Звичайно, $\min_{x \in R} f(x)$ та $\max_{y \in R} g(y)$ можна знайти за допомогою похідної.

Зауваження 3. *Нерівність Коші* часто використовується при розв'язуванні задач зі шкільної математики. Тому її корисно запам'ятати. Зазначимо, що вона рівносильна тривіальній нерівності $(a-b)^2 \geq 0$.

Метод розв'язання задачі 3, який будемо називати ***методом максимуму-мінімуму***, дозволяє розв'язати багато нестандартних математичних задач. Наведемо ще один приклад його застосування.

Задача 4. *Розв'язати рівняння*

$$4\sin^2(x^4 - 1) = 4x^4 + \frac{1}{x^4}.$$

Розв'язання: Зауважимо, що $4\sin^2(x^4-1) \leq 4$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, а також за нерівністю Коші

$$4x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2 \cdot 2x^2 \cdot \frac{1}{x^2} = 4, \tag{13}$$

причому рівність в (13) виконується лише тоді, коли $2x^2 = \frac{1}{x^2}$. Отже, скориставшись методом максимуму-мінімуму, робимо висновок, що вихідне рівняння рівносильне системі

$$\begin{cases} \sin^2(x^4 - 1) = 1, \\ 2x^2 = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases} \tag{14}$$

Друге рівняння цієї системи має розв'язки $x_1 = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Оскільки

$$\sin^2(x_1^4 - 1) = \sin^2(x_2^4 - 1) = \sin^2\frac{1}{2} < 1,$$

то система (14), а отже, і вихідне рівняння не мають розв'язків.

Відповідь: рівняння не має розв'язків.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Задача 5. *Визначити, скільки раціональних коренів має рівняння*

$$5^x \cdot 2^{\frac{6x}{x+2}} = 20.$$

Розв'язання. Зауважимо, що $x_1 = 1$ є коренем рівняння (цей корінь неважко вгадати, оскільки 5 і 2 є дільниками числа 20). Також, прологарифмувавши це рівняння за основою 5, отримаємо рівносильне йому рівняння

$$x + \frac{6x}{x+2}\log_5 2 = \log_5 20,$$

тобто, при $x \neq 2$,

$$x^2 + x(2 + 6\log_5 2 - \log_5 20) - 2\log_5 20 = 0. \quad (15)$$

Звідси, скориставшись тим, що $x_1 = 1$ є коренем квадратного рівняння (15) і теоремою Вієта, робимо висновок, що його другий корінь $x_2 = -2\ \log_5 20$.

Якщо, від супротивного, $x_2 \in \mathbb{Q}$, то $-\frac{1}{2}x_2 = \log_5 20 \in \mathbb{Q}$, а отже, існує такий нескоротний дріб $\frac{p}{q} > 1$, що $\log_5 20 = \frac{p}{q}$. Але тоді $5^p = 20^q$ і ми отримали суперечність, оскільки остання рівність містить зліва непарне число, а справа – парне.

Відповідь: рівняння має один раціональний корінь.

Зауваження 4. Вгадавши корінь $x_1 = 1$ початкового рівняння, який також є коренем рівняння (15), нам вдалося зразу записати корінь x_2 у вигляді, зручному для подальшого дослідження. Інакше ми були б змушені використати формулу для обчислення коренів квадратного рівняння і отримали б досить громіздкі вирази для коренів x_1 та x_2.

3. Висновки

У даній статті наведено приклади застосування класичних методів – логарифмування, використання монотонності спеціально підібраної функції, методу максимуму-мінімуму – для розв'язування нестандартних рівнянь і нерівностей. Також значна увага приділена повноті і логіці розв'язань, оскільки виконання тестового завдання з математики і повне, логічно правильне розв'язання математичної задачі є суттєво різними поняттями.

Мабуть, єдиний спосіб навчитися правильно розв'язувати задачі – це самостійне розв'язування великої кількості різноманітних задач. Наразі існує багато збірників задач, які можна використовувати. Деякі з них вказані в списку використаних джерел. Звичайно, також корисно мати поряд досвідченого, кваліфікованого вчителя, який зможе відповісти саме на ваші запитання.

Список використаних джерел

Сканаві М. І. (1994) *Збірник задач з математики для вступників до втузів*. Київ: Вища школа. 445 с.

Горделадзе Ш. Т., Кухарчук М. М. & Яремчук Ф. П. (1973) *Збірник конкурсних задач з математики: Посібник для вступників до вузів*. Київ: Вища школа. 324 с.

Вишенський В. А., Перестюк М. О. & Самойленко А. М. (2001) *Конкурсні задачі з математики*. Київ: Вища школа. 432 с.

Вишенський В. А., Нагорний В. Н., Перестюк М. О. & Плахотник В. В. (2005) *Десять математичних олімпіад; КНУ ім. Т. Шевченка*. Кам'янець-Подільський : Аксіома, 208 с.

Отримано редакцією журналу: 06.11.2025
Прорецензовано: 21.11.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Mykhailo HORODNII, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-9991-910X
e-mail: horodnii@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

ON SOME METHODS OF SOLVING NON-STANDARD EQUATIONS AND INEQUALITIES

Abstract. *This article elucidates several classical methods for solving problems that are more complex than those usually considered in school mathematics lessons - logarithms, using the monotonicity of a specially selected function, and the maximum-minimum method. Also, significant attention is paid to the completeness and logic of solutions, because mathematics test tasks mainly test standard technical mathematical skills, which is not enough for successful study in higher education institutions, especially in mathematical (including IT), engineering, natural science and economic specialties.*

Keywords: *equation; inequality; solution; logarithm; monotonicity of a function; maximum-minimum method.*