

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра прикладної статистики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 124Системний аналіз

на тему:

**АЛГОРИТМИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧ
ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

Виконав студент 4-го курсу
групи ПС-4
Крахмілець Богдан Русланович



Науковий керівник:
доктор фіз-мат. наук, професор
Семенова Наталія Володимирівна



Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень
з праць інших авторів без відповідних посилань



Студент

Роботу розглянуто й допущено до захисту
на засіданні кафедри прикладної статистики
« 05 » червня 2023 р., Протокол № 11

Завідувач кафедри
доктор фіз-мат. наук
І.В.Розора



Київ – 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи: 61 стор., 7 ілюстрацій, 46 джерел.

БАГАТОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ, ДВОКРИТЕРІЙНА ЗАДАЧА ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ, МНОЖИНА ПАРЕТО, МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОКРИТЕРІЙНОЇ ЗАДАЧІ, ЛІНІЙНА ЗГОРТКА КРИТЕРІЇВ, ПОСИЛЕНИЙ АЛГОРИТМ.

Об'єкт дослідження – Задача двокритерійної оптимізації.

Метою кваліфікаційної роботи є дослідження, аналіз та розробка алгоритмів розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації.

В роботі досліджено властивості двокритерійних задач цілочислової оптимізації, проведено аналіз існуючих алгоритмів, визначено їхні переваги та недоліки для різних типів даних і подальшого використання для певних задач та описано новий алгоритм розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації.

Результатом роботи є розробка алгоритму розв'язання двокритерійної задачі про рюкзак з цілочисловими змінними на основі використання зваженої функції скаляризації Чебишева, а також алгоритму знаходження наближеної множини Парето.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1 ДВОКРИТЕРІЙНА ОПТИМІЗАЦІЯ.....	8
1.1 Задача двокритерійної оптимізації.....	8
1.2 Різні види оптимальних розв’язків багатокритерійних (векторних) задач оптимізації.....	11
1.3 Математичні моделі деяких прикладних задач двокритерійної оптимізації	14
1.3.1 Оптимальний вибір проектного рішення.....	14
1.3.2 Двокритерійна задача комівояжера	15
РОЗДІЛ 2 ПАРЕТО ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ’ЯЗКИ ДВОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧ.....	18
2.1 Основні поняття та визначення векторної оптимізації.....	18
2.1.1 Векторний критерій.....	18
2.1.2 Відношення переваги	19
2.2 Множина Парето, її властивості.....	20
2.3 Умови оптимальності для двокритерійних задач.....	22
РОЗДІЛ 3 МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗАННЯ ДВОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ.....	25
3.1 Лінійна згортка критеріїв в багатокритерійній цілочисловій оптимізації.....	25
3.1.1 Постановка задачі.....	25
3.1.2 Поєднання двох критеріїв в один, лінійна згортка критеріїв.....	27
3.1.3 Геометрична інтерпретація лінійної згортки критеріїв.....	27
3.1.4 Обчислювальна складність задач багатокритерійної дискретної оптимізації.....	29
3.1.5 Обчислювальний експеримент.....	30

3.1.6 Алгоритми розв'язання задач за допомогою лінійної згортки критеріїв.....	32
3.2 Алгоритми розв'язання двокритерійних задач.....	33
3.3 Зважена сума.....	35
3.4 Зважена норма Чебишева.....	38
3.5 Алгоритм, що використовує зважену норму Чебишева.....	44
3.5.1 Посилення алгоритму.....	45
3.5.2 Наближене подання множини Парето.....	53
3.5.3 Інтерактивний варіант алгоритму.....	54
ВИСНОВКИ.....	56
ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	57

Основні позначення

ℓ – кількість критеріїв

$I = \{1, 2, \dots, \ell\}$ – множина номерів критеріїв

X – множина допустимих розв'язків

$F = (f_1, f_2, \dots, f_\ell)$ – векторний критерій

$Y = F(X)$ – множина допустимих векторів (оцінок)

\succ_X – відношення переваги ОПР, задане на множині X

\succ_Y – відношення переваги ОПР, індуковане відношенням \succ_X і задане на множині Y

\succ – продовження відношення \succ_Y на весь простір R^ℓ

$Sel X$ – множина рішень, що обираються,

$Sel Y$ – множина векторів (оцінок), що обираються,

$Ndom X$ – множина недомінованих розв'язків

$Ndom Y$ – множина недомінованих векторів (оцінок)

$P_F(X)$ – множина парето-оптимальних розв'язків

$P(Y)$ – множина парето-оптимальних векторів (оцінок)

ВСТУП

Актуальність проблеми. Численні задачі прийняття рішень можна сформулювати як задачі з багатьма критеріями. Задачі багатокритерійної оптимізації виникають при дослідженні багатьох теоретичних і прикладних проблем. Практично будь-яка задача оптимального проектування складних економічних і технічних систем, схем, технологічних пристроїв, конструкцій, складання мережевих графіків, планування і управління виробничою і комерційною діяльністю, прийняття розв'язків в умовах невизначеності, ідентифікації параметрів моделі за експериментальними даними вимагає, щоб шуканий розв'язок знаходився з урахуванням багатьох критеріїв.[1]

Дослідження проблем двокритеріальної дискретної оптимізації, що є продовженням класичної однокритеріальної дискретної оптимізації, викликано наявністю багатьох прикладів практичного застосування, зокрема за необхідності врахування двох і більше критеріїв для обрання оптимального напрямку діяльності, для матричної корекції задач лінійного програмування з несумісною системою обмежень (розглядається як двокритерійна задача максимізації вхідного лінійного критерію та мінімізації допустимої корекції розширеної матриці обмежень) та багатьох інших.

Мета і завдання дослідження. Мета бакалаврської роботи полягає у дослідженні, аналізі та розробці алгоритмів розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації. Для реалізації поставленої мети були визначені наступні задачі:

- розглянути основні поняття багатокритерійної оптимізації;
- визначити та проаналізувати різні поняття оптимальних розв'язків багатокритерійних задач;
- вивчити властивості двокритеріальних задач неперервної та дискретної оптимізації;

- встановити та проаналізувати властивості Парето оптимальних розв'язків двокритерійних задач;
- дослідити методи та алгоритми розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації.

РОЗДІЛ 1

ДВОКРИТЕРІЙНА ЦІЛОЧИСЛОВА ОПТИМІЗАЦІЯ

1.1 Задача двокритерійної оптимізації

Загальну двокритерійну цілочислову задачу (ДЦЗ) представимо в такому вигляді:

$$Z(F, X): \max F(x) = [f_1(x), f_2(x)]$$

$$\text{за умови } x \in X \subset Z^n,$$

де $f_i(x)$, $i=1,2$, дійснозначні функції критерію. Множину X називають *множиною допустимих розв'язків*, а простір, що містить X – *простором розв'язків*. Допустима множина X є підмножиною простору Z^n цілочислових векторів із R^n , що міститься в області, що описується комбінацією обмежень у вигляді рівностей та нерівностей, а також явних меж для окремих змінних.

Подамо *множину допустимих розв'язків* у вигляді $Y = F(X)$, а простір, що містить Y – *простором критеріїв* або *простором результатів*.

Допустимий розв'язок $x \in X$ *домінується* розв'язком $\hat{x} \in X$, або \hat{x} *домінує* x , якщо $f_i(\hat{x}) \geq f_i(x)$ при $i=1,2$, та принаймні одна з двох нерівностей є строгою. Цю ж термінологію можна застосувати до точок у просторі результатів. При цьому $y = F(x)$ *домінується* $\hat{y} = F(\hat{x})$, а \hat{y} *домінує* y [2-4].

Якщо \hat{x} *домінує* x за умови $f_i(\hat{x}) > f_i(x)$ при $i=1,2$, то таке відношенню домінування називають *сильним*; в іншому випадку – *слабким* (аналогічна ситуація спостерігається в межах простору результатів).

Допустимий розв'язок $\hat{x} \in X$ вважається *ефективним*, якщо не існує іншого $x \in X$, такого що x домінуватиме над \hat{x} .

Позначимо X_E множину ефективних розв'язків задачі $Z(F, X)$, а Y_E – відображення X_E в межах простору критеріїв (результатів) – $Y_E = f(X_E)$.

Множину Y_E називають множиною *оцінок (результатів) Парето*. Множину $y \in Y \setminus Y_E$ називають множиною *результатів не ефективних за Парето*.

Ефективний розв'язок $\hat{x} \in X$ вважають *слабо ефективним*, якщо не існує $x \in X$ що слабо домінує \hat{x} ; у протилежному випадку \hat{x} є строго ефективним.

Аналогічним чином визначається слабка або строга ефективність розв'язку Парето для $\hat{y} = f(\hat{x})$.

Множина Парето Y_E вважається рівномірно домінуючою, якщо всі точки в Y_E є строгими за Парето.

Операція $v \max$ вказує на той факт, що розв'язання задачі $Z(F, X)$ передбачає формування ефективних розв'язків у межах допустимої області X та результатів Парето у межах множини Y . Слід відмітити, що задача $Z(F, X)$ вимагає наявності цілих значень кожної змінної.

У *двокритерійній частково цілочисловій задачі* не всі змінні мають бути цілими. Методика, що запропонована у цій роботі, може застосовуватись для розв'язання змішаних задач, доки Y_E залишатиметься скінченною множиною.

Враховуючи той факт, що кілька точок в межах X можуть відобразитися в той самий результат в межах області Y , то часто зручно формулювати багатокритерійну задачу в межах простору результатів. У випадку із ДЦЗ, задачу $Z(F, X)$ можна розглядати наступним чином

$$v \max y = [y_1, y_2].$$

за умови $x \in X \subset R^2$.

За виглядом цільових функцій та множини X , задачі двокритерійного цілочислового програмування можна поділити на лінійні та нелінійні. У випадку із лінійних задач двокритеріальної цілочислової оптимізації цільові функції залишаються лінійними, а допустима множина представлена множиною цілочислових векторів в межах многогранної опуклої множини. Решта задач двокритеріального цілочислового програмування вважаються нелінійними.

Дослідження проблеми двокритеріального цілочислового програмування, що є розвитком проблеми класичного однокритеріального цілочислового програмування, викликана різноманітністю прикладних задач реального світу, у яких необхідно враховувати два або більше критеріїв при виборі напрямку дій. Приклади можна знайти в багатьох галузях, де прийняття рішень вимагає врахування конкуруючих цілей, таких як планування капітального бюджету [5], аналіз розміщення [6], технічне проектування [7] та ін.

Існує ціла низка методів розв'язання задач двокритерійного цілочислового програмування. Зазначені методи, як правило, розроблялись для розв'язання (загальних) багатокритерійних цілочислових задач, що дозволяє використовувати їх по відношенню до двокритерійних задач, або розроблялись безпосередньо для двокритерійних задач.

Залежно від сфери застосування, згадані методи можна додатково розподілити на інтерактивні та неінтерактивні. Неінтерактивні методи використовуються для обчислення усієї множини Парето або певної підмножини, що ґрунтується на попередньо визначених пріоритетах особи, яка приймає рішення. Інтерактивні методи обчислюють множину Парето з урахуванням певного переліку пріоритетів, що стають доступними на певному етапі реалізації алгоритму.

Загальний аналіз різних підходів до розв'язання цілочислових задач подано у роботах Сергієнка І.В. [9], Семенової Н.В. [1], Climaco та ін. [12], а також Ehrgott та Gandibleux [13,14] та Ehrgott та Wiecek [15]. Запропоновані підходи можна поділити на точні та евристичні і згрупувати їх залежно від методологічних концепцій, які вони використовують. Можна також виділити низку концепцій, що використовуються в спеціалізованих алгоритмах, наприклад, метод гілок і меж [16, 17, 18-21], динамічне програмування [22, 23], неявний перебір [24, 25], загальні напрямки [26, 27], зважені норми [28–30], зважені суми з додатковими обмеженнями та булеве програмування. Евристичні підходи, наприклад, імітація відпалу, пошук табу та еволюційні алгоритми пропонують використовувати для багатокритерійних цілочислових задач із вбудованою комбінаторною структурою [31]. Розроблено методи для двокритерійних задач цілочислових потоків у мережах [32].

Алгоритми, які, зокрема, мають особливе значення для цієї роботи, є підходами, спеціалізованими для двокритерійних задач і базуються на параметризованому дослідженні простору критеріїв (результатів). В нашому випадку приділяється особлива увага тим підходам, що використовуються для двокритерійних задач та ґрунтуються на параметризованому дослідженні простору оцінок (результатів).

1.2 Різні види оптимальних розв'язків багатокритерійних (векторних) задач оптимізації

Векторна (багатокритерійна) задача математичного програмування лежить в основі математичної моделі, що описує, наприклад, деяку економічну систему або технічний об'єкт. Формалізуємо опис такої математичної моделі.

У багатокритерійній задачі оптимізації порівняння розв'язків здій-

снюється за допомогою заданих на множині допустимих альтернатив числових функції $f_1, \dots, f_s, f_{s+1}, \dots, f_l$, що називаються критеріями. Передбачається, що $l \geq 2$. Для кожного критерію $f_i, i \in N_l = \{1, 2, \dots, l\}$, на числовій прямій R вказується підмножина, на якій він приймає значення.

Розглянемо багатокритеріальну задачу оптимізації. Критерії, що оптимізуються, представляються набором функцій:

$$\begin{aligned} \min F_1(x) \\ \max F_2(x) \end{aligned} \quad (1.1)$$

за умови $x \in X \subset R^n$,

тут $F_1(x) = (f_1(x), \dots, f_s(x))$, $F_2(x) = (f_{s+1}(x), \dots, f_l(x))$. Тобто з l функцій s мають мінімізуватись, а $l-s$ навпаки максимізуватись, оскільки у практичному застосування часто виникає потреба у зменшенні одних критеріїв та збільшенні інших.

Набір критеріїв (1.1) можна представити у вигляді вектор-функції:

$$F = (-f_1(x), \dots, -f_s(x), f_{s+1}(x), \dots, f_l(x)), \text{ максимум якої необхідно знайти.}$$

У багатокритерійній цілочисловій оптимізації задача формулюється шляхом визначення допустимої множини $X \subset R^n$ повністю або частково цілочислової структури і заданого на ній векторного критерію $F(x) = (f_1(x), \dots, f_l(x))$. Для кожного із компонентів $x_j, j \in N_n$, вектора змінних $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$ задається множина $X_j \subset R, j \in N_n$, її можливих значень, тобто $x_j \in X_j, j \in N_n$, і хоча б одна із множин $X_j, j \in N_n$, є цілочисловою (скінченною або зліченною). Слід зазначити, що кожний розв'язок $x \in X$ характеризується відповідною векторною оцінкою, тобто вектором $F(x)$. Тому вибір оптимального розв'язку із множини всіх розв'язків зводиться до вибору оптимальної оцінки із множини оцінок:

$$Y = F(X) = \left\{ y \in R^l \mid y = F(x), x \in X \right\}.$$

При цьому оптимальність оцінок (розв'язків) визначається деяким принципом оптимальності, заданим у критеріальному просторі.

Таким чином тут і надалі будемо розглядати векторну (багатокри-теріальну) задачу $Z(F, X)$ максимізації векторного критерію $F = (f_1, \dots, f_\ell)$, визначеного на не порожній обмеженій дискретній множині X .

$$Z(F, X): \max \{ F(x) \mid x \in X \}$$

Під розв'язанням цієї задачі, як правило, розуміють знаходження елементів однієї із наступних множин [1–4]:

1) множини ідеальних $I(F, X)$ розв'язків:

$$I(F, X) = \{ x \in X : v(x, F, X) = \emptyset \}, \quad (1.2)$$

$$v(x, F, X) = \{ y \in X \mid \exists i \in N_l : f_i(y) > f_i(x) \}.$$

2) множини Парето $P(F, X)$, тобто множини ефективних (Парето-оптимальних) розв'язків:

$$P(F, X) = \{ x \in X : \pi(x, F, X) = \emptyset \} \quad (1.3)$$

$$\pi(x, F, X) = \{ y \in X : F(y) \geq F(x), F(y) \neq F(x) \}$$

3) множини Слейтера $Sl(F, X)$ слабо ефективних розв'язків:

$$Sl(F, X) = \{ x \in X : \sigma(x, F, X) = \emptyset \} \quad (1.4)$$

$$\sigma(x, F, X) = \{ y \in X : F(y) > F(x) \}$$

4) множини Смейла $Sm(F, X)$ строго ефективних розв'язків:

$$Sm(F, X) = \{ x \in X : \eta(x, F, X) = \emptyset \} \quad (1.5)$$

$$\eta(x, F, X) = \{ y \in X \setminus \{x\} : F(y) \geq F(x) \}.$$

Очевидно, що:

$$I(F, X) \subset Sm(F, X) \subset P(F, X) \subset Sl(F, X). \quad (1.6)$$

Елемент множини $I(F, X)$ називається ідеальним розв'язком. Цей розв'язок є найкращим відразу за всіма частковими критеріями. Оптимальність за Парето означає, що значення будь-якого із часткових критеріїв можна збільшити лише за рахунок зменшення значення хоча б одного з інших часткових критеріїв. Для слабо ефективної оцінки (розв'язку $x \in SI(F, X)$) не знайдеться такої оцінки (розв'язку), яка була б більше відразу за всіма частковими критеріями.

Проблема відшукування всіх ефективних розв'язків (оцінок) представляє не тільки теоретичний, але й великий практичний інтерес. Це пояснюється тим, що побудова всієї множини ефективних розв'язків або ж деякої досить широкої її підмножини є одним з перших етапів у цілому ряді процедур оптимального вибору при багатьох критеріях. У наш час розроблена вже досить велика кількість різних методів виділення множини ефективних розв'язків. Докладний виклад цих методів виходить за рамки даної роботи. Тому обмежимося лише коротким описом відомих методів, обговоренням проблеми і посиланням на роботи, у яких викладаються відповідні методи і алгоритми.

1.3 Математичні моделі деяких прикладних задач двокритерійної оптимізації

1.3.1 Оптимальний вибір проєктного рішення

У цій задачі множина X складається з кількох конкурсних проєктів (наприклад, будівництва нового підприємства), а критеріями оптимальності можуть бути вартість реалізації проєкту f_1 і величина прибутку f_2 , яку забезпечить дане проєктне рішення (тобто побудоване підприємство). Якщо обмежити розгляд даної задачі лише одним критерієм оптимальності,

практична значимість розв'язання такої задачі буде незначною. Справді, при використанні тільки першого критерію буде вибрано найдешевший проєкт, але його реалізація може призвести до неприпустимо малого прибутку. З іншого боку, на будівництво найприбутковішого проєкту, обраного на основі другого критерію оптимальності, може просто не вистачити наявних коштів. Тому в даній задачі необхідно враховувати обидва зазначені критерії одночасно. Якщо ж додатково намагатися мінімізувати небажані екологічні наслідки будівництва та функціонування підприємства, то до двох зазначених слід додати ще один – третій критерій, що враховує екологічні збитки від будівництва підприємства тощо.

Що стосується ОПР, то в даній задачі таким є голова адміністрації району, на території якого буде побудовано підприємство, за умови, що це підприємство є державним. Якщо ж підприємство – приватне, то як ОПР виступає глава відповідної фірми.

1.3.2 Двокритеріальна задача комівояжера

Задача комівояжера є однією із класичних задач дискретної оптимізації [1, 9, 10]. Вона полягає в складанні маршруту відвідування торговим агентом, який знаходиться в деякому початковому пункті, $(n-1)$ -го інших міст за умови, що задана матриця $C = [c_{ij}]_{n \times n}$ вартостей переїзду з міста в місто, враховуючи початкове. Причому допустимим є тільки такий маршрут, який передбачає одноразове відвідування всіх міст і повернення в початковий пункт. Очевидно, що найкращий маршрут повинен мінімізувати сумарну вартість переїздів.

Допустимими планами в цій задачі слугують зв'язні маршрути, що однозначно визначаються упорядкованим набором міст, які відвідує торговець. Кожен такий маршрут можна ототожнити з перестановкою

$p = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ n чисел (упорядкованою вибіркою із множини n чисел по n). Отже формулювання задачі комівояжера має наступний вигляд:

$$\min \left\{ f(p) = \sum_{k=1}^n c_{i_k i_{k+1}} \mid p = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in P \right\},$$

де P – множина перестановок чисел від 1 до n .

Зазначимо, що задача комівояжера при довільній (навіть симетричній) матриці C є NP -повною задачею. [12]

Окремо слід зупинитися на тому, що задача комівояжера має велику кількість змістовних аналогів. До аналогічної моделі приводить задача розробки графіка переналагоджування обладнання, яке може випускати різні типи виробів, але потребує певних витрат (часових або матеріальних) при переході від одного технологічного режиму на інший. Очевидно, що задачу комівояжера можна узагальнити, враховуючи більше число критеріїв.

Алгоритми розв'язання багатокритерійних задач цього типу визначаються тим, що розуміється під оптимальним розв'язком задачі. Залежно від цього формується однокритеріальна задача, у якій новий критерій є деякою функцією (згорткою) критеріїв, і розв'язання багатокритеріальної задачі зводиться до розв'язання послідовності однокритеріальних задач для критерія-згортки. При цьому під розв'язанням багатокритеріальної задачі розуміємо розв'язання задачі для критерія-згортки.

Постановка задачі. Нехай $x = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ – довільна перестановка елементів множини $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ номерів міст є маршрутом комівояжера. Кожному маршруту x поставимо у відповідність два критерії

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^n c_{i_k i_{k+1}} \quad (1.7)$$

$$f_2(x) = \max_{(i_k, i_{k+1})} c_{i_k i_{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad (1.8)$$

тут $i_{n+1} = i_1$. Критерій $f_1(x)$ є довжина маршруту x , $f_2(x)$ – вузьке місце цього маршруту. Задача із одним критерієм (1.7) називається лінійною задачею, задача із критерієм (1.8) – задачею на вузьке місце.

Нехай $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$. Задача полягає в мінімізації векторного критерію $F(x)$ на множині X :

$$\min \{F(x) \mid x \in X\}. \quad (1.9)$$

Слід уточнити, у якому змісті розуміється задача мінімізації за двома критеріями. Нехай

$$f_i(x_i^0) = \min \{f_i(x) \mid x \in X\} = f_i^0, \quad i = 1, 2.$$

Точка (f_1^0, f_2^0) називається ідеальною точкою.

Підхід до розв'язання задачі. Під задачею оптимізації за двома критеріями будемо розуміти наступну задачу мінімізації згортки двох критеріїв:

$$g(\rho(f_1(x_0), f_1^0), \rho(f_2(x_0), f_2^0)) = \min_{x \in X} \{g(\rho(f_1(x), f_1^0), \rho(f_2(x), f_2^0))\} \quad (1.10)$$

Тут $\rho(f_i(x), f_i^0)$ – відхилення отриманого наближеного розв'язку по кожному із критеріїв, $i = 1, 2$, від шуканого наближеного розв'язку задачі. При цьому як функція ρ розглядається сума відхилень (чи їх квадратів) або максимальне з відхилень. У задачі (1.10) здійснюється пошук маршруту x , що мінімізує відхилення від ідеальної точки.

Застосування згорток для наближеного розв'язання багатокритеріальних задач дискретної оптимізації великої розмірності може бути виправдане тим, що при цьому не потрібно шукати точний розв'язок відповідних однокритеріальних задач, які також можуть бути задачами великої розмірності.

РОЗДІЛ 2

ПАРЕТО ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДВОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧ

2.1 Основні поняття та визначення векторної оптимізації

2.1.1 Векторний критерій

Зазвичай вважається, що обраним (найкращим) є таке можливе рішення, яке найповніше задовольняє бажання, інтереси або цілі особи, що приймає рішення (ОПР). Прагнення ОПР досягти певної мети нерідко у математичних термінах вдається висловити у вигляді максимізації (або мінімізації) деякої числової функції, заданої на множині X . Однак у складніших ситуаціях доводиться мати справу не з однією, а одночасно з кількома функціями. Так буде, наприклад, коли досліджуване явище, об'єкт чи процес розглядаються з різних точок зору та для формалізації для кожної точки зору використовується відповідна функція.

Якщо явище вивчається в динаміці, поетапно і для оцінки кожного етапу доводиться вводити окрему функцію, то у цьому випадку також доводиться враховувати кілька функціональних показників. Залежно від змісту задачі вибору ці функції називають критеріями оптимальності, критеріями ефективності, цільовими функціями, показниками або критеріями якості.

Зазначені числові функції f_1, f_2, \dots, f_m утворюють векторний критерій $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, який приймає значення просторі m -вимірних векторів R^m . Цей простір називають критеріальним простором або простором оцінок, а будь-яке значення $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)) \in R^m$ векторного критерію f за певного $x \in X$ іменують векторною оцінкою допустимого розв'язку x . Усі

можливі векторні оцінки утворюють множину можливих оцінок (можливих векторів)

$$Y = \left\{ f(x) = y \in R^m \mid y = f(x) \text{ при деякому } x \in X \right\}.$$

Поряд множиною розв'язків, що обираються, зручно ввести в розгляд множину обраних векторів (оцінок).

$$SelY = f(SelX) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ при деякому } x \in SelX\},$$

що деякою підмножиною критеріального простору R^m .

2.1.2 Відношення переваги

Розглянемо два можливі рішення x' і x'' . Припустимо, що після надання ОПР цієї пари рішень, вона обирає (віддає перевагу) першому з них. У цьому випадку пишуть $x' \succ_x x''$.

Знак \succ_x служить для позначень переваг даної ОПР і називається відношенням строгої переваги, або коротше - відношенням переваги.

Слід зазначити, що не будь-які два можливі рішення x' і x'' пов'язані співвідношенням $x' \succ_x x''$, або співвідношенням $x'' \succ_x x'$. Інакше кажучи, не з будь-якої пари рішень ОПР може зробити остаточний вибір. Цілком можуть існувати такі пари, що ОПР не в змозі віддати перевагу якомусь одному рішенню цієї пари, навіть якщо це пара різних рішень. Описана ситуація цілком відповідає реальному становищу речей. Більше того, якби від ОПР була потрібна здатність вміти визначати у довільній парі можливих рішень, найкраще рішення порівняно з іншим, то в такому разі теорія, побудована на зазначеній «жорсткій» вимозі до ОПР не представляла б практичного інтересу. Подібні «всемогутні» ОПР у житті зустрічаються вкрай рідко.

Відношення переваги \succ_x , задане на множині можливих рішень, очевидно

$$f(x') \succ_Y f(x'') \Leftrightarrow x' \succ_X x'' \text{ для } x', x'' \in X$$

індукує (породжує) відношення переваги \succ_Y на множині можливих векторів Y . Тим самим, вектор $y' = f(x')$ є кращим від вектора $y'' = f(x'')$ (тобто $y' \succ_Y y''$) тоді і тільки тоді, коли рішення x' краще рішення x'' (тобто $x' \succ_x x''$).

2.2 Множина Парето, її властивості

Аксиома 2.1. (виключення домінованих векторів). Якщо для деякої пари векторів $y', y'' \in Y$ виконано співвідношення $y' \succ_Y y''$, то $y'' \notin SelY$.

Аксиома 2.2 (продовження відношення переваги). Існує продовження \succ на весь критеріальний простір R^m відношення \succ_Y , причому це продовження \succ є іррефлексивним і транзитивним відношенням.

Аксиома 2.3 (узгодження критеріїв із відношенням переваги). Кожен із критеріїв f_1, f_2, \dots, f_m узгоджений із ставленням переваги \succ .

Якщо для деякої пари можливих рішень має місце нерівність $f(x') \geq f(x'')$, то завдяки аксіомі Парето перше рішення буде краще другого, тобто $x' \succ_x x''$. Тоді відповідно до аксіоми 2.1 друге рішення ні за яких обставин не може виявитися обраним і його можна виключити з наступного урахування в процесі прийняття рішень до множини Парето.

Множина парето-оптимальних рішень позначається $P_f(X)$ і визначається рівністю

$$P_f(X) = \left\{ x^* \in X \mid \text{не існує такого } x \in X, \text{ що } f(x) \geq f(x^*) \right\}.$$

Лемма 2.1. При виконанні аксіом 2.2 і 2.3 множина недомінованих рішень $Ndom X$ задовольняє включення

$$Ndom X \subset P_f(X). \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. В умовах виконання аксіом 2.1–2.3 для будь-якої непорожньої множини $Sel X$ рішень, обираються справедливе включення

$$Sel X \subset P_f(X). \quad (2.2)$$

Включення (2.2) виражає собою так званий принцип Еджворта-Парето (принцип Парето), згідно з яким

якщо ОПР поводить ся досить «розумно» (тобто відповідно до аксіом 2.1–2.3), то рішення, які він вибирає, обов'язково є парето-оптимальними.

Цей принцип демонструє особливу, виключно важливу роль множини парето-оптимальних рішень у теорії прийняття рішень.

Уважний аналіз доведень наведених тверджень, у сукупності які приводять до теореми 2.1, показує, що якщо хоча б одна з аксіом 2.1, 2.2, або 2.3 порушується, то обране рішення має бути парето-оптимальним.

Звідси випливає, що принцип Еджворта-Парето перестав бути універсальним, тобто застосовним у всіх без винятку задачах багатокритерійного вибору. Більше того, на основі аксіом 2.1, 2.2 та 2.3 (точніше кажучи, на основі заперечень цих аксіом) при бажанні можна зробити певний висновок і про те, у яких саме задачах цей принцип може «не працювати».

Отже, застосування цього принципу ризиковано або взагалі неприпустимо, якщо

- відношення переваги, якою ОПР керується в процесі вибору, не є транзитивним;
- відношення переваги ОПР не узгоджене хоча б з одним із критеріїв;
- рішення, яке не вибирається з деякої пари, виявляється обраним з усієї множини можливих рішень.

2.3 Умови оптимальності для двокритерійних задач

У цьому підрозділі розглядаються умови оптимальності за Парето для двокритерійних задач із векторним критерієм $F = (f_1, f_2)$. При формулюванні цих умов використовуються відомості про найбільші та найменші значення критеріїв на множині ефективних (Парето оптимальних) розв'язків.

Припустимо, що множина $P(F, X) \neq \emptyset$. Тоді

$$\sup\{f_i(x) \mid x \in P(F, X)\} \leq \sup\{f_i(x) \mid x \in X\}, i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Якщо ж множина $P(F, X)$ ще й зовні стійка, то згідно з наслідком 1.4 із роботи [2] ця нестрога нерівність зводиться до рівності.

Лема 2.2. Якщо $y^0 \in P(Y)$ та $y_1^0 = \max\{y_1 \mid y \in P(Y)\}$ то $y_2^0 = \min\{y_2 \mid y \in P(Y)\}$.

Доведення. Припустимо, що $y_2^0 > \min\{y_2 \mid y \in P(Y)\}$. Тоді знайдеться $y^* \in P(Y)$ такий, що $y_2^0 > y_2^*$. З огляду на ефективність y^* має бути $y_1^0 < y_1^*$, а це суперечить умові леми.

Зазначимо, що на випадок $m > 2$ лема 2.2 не узагальнюється (див. рис. 2.6, де $Y = P(Y)$ – шестикутник, вписаний у трикутник ABC).

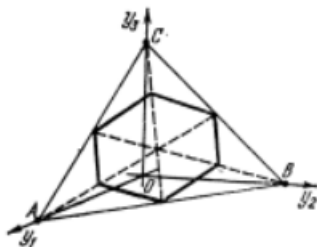


Рисунок 2.6

Звернемося до розгляду двокритерійної задачі, в якій вектор-функція $f = (f_1, f_2)$ задана на непорожній множині $X \subseteq E^n$.

Введемо наступні позначення:

$$b_i = \sup_{x \in X} f_i(x), \quad i = 1, 2;$$

$$X_1^* = \{x \in X \mid f_1(x) = b_1\};$$

$$a_2 = \begin{cases} \sup\{f_2(x) \mid x \in X_1^*\}, & \text{якщо } X_1^* \neq \emptyset \\ \inf\{f_2(x) \mid x \in X\}, & \text{інакше} \end{cases}.$$

Обумовимось вважати, що $[a_2, b_2]$ означає відповідний відрізок у випадку скінченних a_2 і b_2 , а у випадку, якщо одне із них (або обидва) є нескінченність, то відповідний промінь (чи всю числову пряму). Наприклад, якщо $a_2 = -\infty$, то $[a_2, b_2] \in [-\infty, b_2]$.

Якщо $P_f(X) \neq \emptyset$, то відповідно (2.3) $f_2(x) \leq b_2$ для будь-якого $x \in P_f(X)$. Якщо $X_1^* \neq \emptyset$, то завдяки лемі 1 $f_2(x) \geq a_2$ для всіх $x \in P_f(X)$. Якщо $X_1^* \neq \emptyset$, то для кожного $x \in P_f(X)$ також маємо $f_2(x) \geq a_2$. Таким чином, $f_2(x) \in [a_2, b_2]$ при $x \in P_f(X)$.

Для $\alpha \in [a_2, b_2]$ введемо до розгляду задачу: знайти

$$\max\{f_1(x) \mid x \in X, f_2(x) \geq \alpha\} \quad (2.4)$$

Якщо $x^0 \in P_f(X)$, то відповідно до теореми 1.5 із [2] x^0 – єдиний розв'язок задачі (2.4) при $\alpha = f_2(x^0)$, причому, як виявили раніше, $\alpha \in [a_2, b_2]$. Навпаки, якщо x^0 – єдиний розв'язок задачі (2.4), то із теореми 1.8 із [2] (при $\varphi_0(f(x)) = f_1(x)$, $\varphi_1(f(x)) = f_2(x)$, $t_1 = \alpha$) випливає ефективність x^0 .

Все це значить, що $x^0 \in P_f(X)$ тоді і тільки тоді, коли точка x^0 є єдиним розв'язком скалярної задачі (2.4) при $\alpha \in [a_2, b_2]$ (див. рис. 2.7).

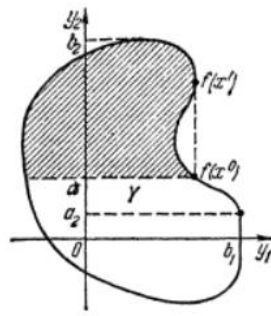


Рис. 7.

Інші, специфічні для двокритерійного випадку достатні умови єдиності дані у такій теоремі.

Теорема 2.1. Для того, щоб кожен розв'язок задачі (2.4) при $\alpha \in [a_2, b_2]$ був єдиним і ефективним, достатньо виконання однієї з наступних умов:

- 1) X опукла, f_1 сильно квазіугнута, а f_2 угнута;
- 2) множина $Y_* = Y - E_{\geq}^2$ опукла;
- 3) $X = E^n$ і функція f_1 такі, що кожен її локальний максимум є глобальним, а f_2 напівнеперервна знизу на E^n .

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОКРИТЕРІЙНИХ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЛОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

3.1 Лінійна згортка критеріїв у багатокритерійній цілочисловій оптимізації

Поняття оптимальності за Парето є центральним в економічній теорії, дослідженні операцій та теорії прийняття рішень. Вивчення багатокритерійного дискретного програмування та співвідношень понять ефективного розв'язку та оптимального розв'язку однокритерійної задачі з критерієм згорткою було розпочато роботою Купманса [33], який фактично звернув увагу на зв'язок цих понять з теорією двоїстості. Багато результатів у цій галузі були систематизовані в монографії [34]. Отримані з того часу результати [35] істотно розширили перелік прикладів пропуску лінійною згорткою ефективних розв'язків і уточнили оцінки потужності множини Парето. Використання нелінійних згорток критеріїв для знаходження всіх ефективних розв'язків було розпочато у роботі [36]. Огляду сучасного стану багатокритерійної дискретної оптимізації, її теорії та застосувань присвячено монографії [1, 3, 4, 37].

3.1.1 Постановка задачі

Нехай X – скінченна множина. Будемо розглядати задачу

$$y = (y_1(x), \dots, y_p(x)) \rightarrow \min, \quad x \in X.$$

Множину допустимих значень критеріальної функції $y(x)$ для всіх $x \in X$ позначимо Y . Вектор $y \in Y$ у просторі критеріїв E^p будемо називати розв'язком.

За означенням [2], вектор y^1 домінує вектор y^0 , якщо для всіх i виконуються нерівності $y_i^1 \leq y_i^0$ і $y_j^1 < y_j^0$ хоча б для одного j .

Множину недомінованих векторів множини Y ($\text{conv} Y$) позначимо $P(Y)$ ($P \text{conv} Y$) і назвемо множиною ефективних або оптимальних за Парето векторів.

Встановимо зв'язок між ефективними розв'язками задач 1, 2 та оптимальними розв'язками задачі 3 у просторі критеріїв.

Задача 1.

$$y \rightarrow \min, \quad y \in Y.$$

Задача 2.

$$y \rightarrow \min, \quad y \in \text{conv} Y,$$

де $\text{conv} Y$ – опукла оболонка множини Y

$$\text{conv} Y = \left\{ z \in R^p \mid z = \sum_{i=1}^p \mu_i y^i, \sum_{i=1}^p \mu_i = 1, \forall i \mu_i \geq 0, y^i \in Y \right\}.$$

Задача 3.

$$z(\lambda, y) = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i \rightarrow \min,$$

$$\text{де } y \in Y, \lambda \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^p, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, \forall i \lambda_i > 0 \right\}.$$

Визначимо множину

$$Y^c = \bigcup \left\{ Y^\lambda, \lambda \in \Lambda \right\}, Y^\lambda \text{ – розв'язок задачі 3 при } \lambda \in \Lambda.$$

Множина $P(Y)$ називається зовні стійкою, якщо для кожного y із множини $Y \setminus P(Y)$ знайдеться y^0 із $P(Y)$, що домінує y .

Зауваження 3.1. Зі скінченності Y випливає, що $\text{conv} Y$ замкнена множина, звідки [2] множини $P(Y)$ і $P(\text{conv} Y)$ є зовні стійкими.

3.1.2 Поєднання двох критеріїв в один, лінійна згортка критеріїв

Для формулювання основної теореми 3.1 (див. далі) наведемо декілька лем. Справедливі такі леми [38].

Лема 3.1. $P \text{conv}(Y) = P \text{conv}(P(Y))$.

Лема 3.2. Справедливе співвідношення $Y^C = [P(Y)]^C$.

Лема 3.3. Справедливе таке співвідношення $Y^C = \text{conv}[Y]^C \cap Y$.

Лема 3.4. Справедливе співвідношення $\text{conv}[Y]^C = P(\text{conv} Y)$.

Теорема 3.1. [38]. Справедливі наступні співвідношення

$$Y^C = P(\text{conv} Y) \cap P(Y), \quad (3.1)$$

$$Y^C = P(\text{conv} P(Y)) \cap P(Y), \quad (3.2)$$

$$Y^C = P(\text{conv} Y) \cap Y.$$

3.1.3 Геометрична інтерпретація лінійної згортки критеріїв

Не будемо розглядати нецікавий випадок, коли задача 1 має єдиний розв'язок y^{id} – ідеальну точку у просторі критеріїв. Очевидно, що тоді задача 3 також має єдиний розв'язок y^{id} .

Припустимо, що $y^{id} \notin Y$ і перенесемо початок координат у просторі критеріїв у точку y^{id} , що очевидно не змінить взаємного розташування точок з Y . Тепер $y_i \geq 0, i = 1, \dots, p, \forall y \in Y$.

Назвемо гіперплощину $\Gamma(y^0) = (n, y) - q = 0$, що є опорною до $\text{conv } Y$ у точці y^0 , додатною, якщо $(n, y^0) - q = 0, (n, y) - q \geq 0$, для всіх $y \in \text{conv } Y, n > 0, q > 0$.

Теорема 3.2. [38]. Точка $y^{id} \in Y^c$ тоді і тільки тоді, коли існує додатна гіперплощина $\Gamma(y^0)$.

Наслідок 3.1. Якщо знайдеться $\lambda^0 \in \Lambda = \left\{ \lambda \in R^p, \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \right\}$,

таке, що $z(\lambda^0, y) = z_0 \forall y \in Y$, то $Y^c = Y$.

Приклад 1.

Нехай

$$p = 2 \text{ і } P(Y) = \{y^1, \dots, y^7\} = (6; 0), (4; 1), (3.5; 1.5), (3; 4), (2; 5), (1; 6), (0; 9)\}.$$

Значення λ , за яких точки із $P(Y)$ входять до Y^C мають вигляд:

y	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7
λ	$(0, 1/3]$	$[1/3, 1/2]$	$[1/2]$	$[1/2, 2/3]$	—	$[2/3, 3/4]$	$[3/4, 1)$

Значення $y^5 \in P(Y)$ не входить до Y^C ні при якому значенні λ , так як $y^5 \notin \text{conv } P(Y)$. Впорядкуємо точки Y^C за зростанням другої координати і позначимо $k_l = (y_2^l - y_2^{l-1}) / (y_1^{l-1} - y_1^l)$.

Тоді y^l входить в Y^C для всіх λ із відрізка $[k_l / (k_l + 1), k_{l+1} / (k_{l+1} + 1)]$, а при $\lambda = k_l / (k_l + 1)$ всі точки з Y , що лежать на ребрі (y^{l-1}, y^l) , входять в Y^C . Перша і остання точки із Y^C мають інтервали для λ вигляду

$(0, k_2 / (k_2 + 1)]$ і $[k / (k + 1), 1)$,відповідно, де k визначається останньою парою точок.

3.1.4 Обчислювальна складність задач багатокритерійної дискретної оптимізації

Розглянемо наступну двокритерійну задачу про рюкзак.

Нехай є $2m$ предметів, кожен із яких має дві вартості. Потрібно вибрати не більше ніж m предметів максимальної сумарної цінності за кожною із вартостей.

Візьмемо такі вартості предметів

$$(1,0), (2,0), (4,0), \dots, (2^{m-1},0), (0,1), (0,2), (0,4), \dots, (0, 2^{m-1}).$$

Існує $2m$ наборів з m предметів зі значеннями критеріїв

$$(2^m - 1, 0), (2^m - 2, 1), (2^m - 3, 2), \dots, (0, 2^m - 1).$$

Усі ці набори є ефективними і всі ці набори належать Y^C при $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$.

Таким чином, $P(Y)$ і Y^C можуть мати експонентні потужності.

Наслідок 3.2. Багатокритеріальна задача про рюкзак, що містить не менше двох критеріїв MAXSUM (MINSUM), є важкорозв'язною.

Терема 3.3. [38]. Багатокритерійні задачі про шляхи, про призначення, про покриваючихі дерева (прадерева), паросполучення, покриття, комівояжера з не менш ніж двома критеріями MAXSUM (MINSUM) є важкорозв'язними.

Доведення випливає із зведеності сформульованої задачі про рюкзак до перелічених задач. Двокритерійні задачі про шляхи призначення, покриваючі дерева (прадерева), паросполучення з критеріями MINSUM-MINMAX і MINMAX-MINMAX є очевидно ефективно розв'язуваними, оскільки

потужність $P(Y)$ не перевищує числа ребер у мережі, а кожен розв'язок може бути знайдено за поліноміальний час.

Задача комівояжера з критерієм MINSUM-MINMAX є, очевидно, NP-важкою. Такими ж будуть і деякі оціночні задачі для задачі комівояжера, наприклад, двокритерійна задача про призначення з критеріями MINSUM та мінімальне число підциклів; двокритерійна задача про 1-дерево з критеріями MINSUM та максимальна кількість ребер у підциклі тощо.

3.1.5 Обчислювальний експеримент

Формула (3.4) є основою для проведення обчислювального дослідження співвідношення між розв'язками задач 1 та 3. Метою експерименту є отримання кількісних співвідношень між потужностями множин $P(Y)$ і Y^c .

Обчислювальний експеримент було проведено за результатами розв'язання трьох двокритерійних задач, що ефективно розв'язуються.

Задача про призначення. Задані дві $(n \times n)$ -матриці $C = \|c_{ij}\|$ $D = \|d_{ij}\|$ невід'ємних чисел. Треба знайти $(n \times n)$ -матрицю $X = \|x_{ij}\|$ таку, що

MINSUM-MINMAX:

$$a) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min,$$

$$б) \max(d_{ij} x_{ij}) \rightarrow \min$$

$$\text{за умов } \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n, \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, i = 1, 2, \dots, n, x_{ij} \in \{0, 1\}, i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

При записі MINMAX-MINMAX-задачі, критерій а) замінюється на

$$\max\{c_{ij}x_{ij}\} \rightarrow \min$$

Задача про покриваюче дерево. Нехай $G=(V,E)$ – неорієнтований граф без петель і кратних ребер. Кожному ребру e_k поставимо у відповідність два невід'ємні числа c_k і d_k .

Зв'язний підграф графу G без циклів, що тримає всі вершини графа G , назвемо покриваючим деревом T .

Нехай

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо ребро } e_k \in T \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}. \text{ Тоді критерії запишуться у вигляді:}$$

$$\sum_{e_k \in E} c_k x_k \rightarrow \min, \quad (3.3)$$

$$\max\{c_k x_k\} \rightarrow \min, \quad (3.4)$$

$$\max\{d_k x_k\} \rightarrow \min. \quad (3.5)$$

Розглянемо задачу з критеріями (3.3), (3.5) та (3.4), (3.5). Зазначимо, що покриває дерево є базою графічного матроїда графа G .

Задача про 1-дерево. 1-дерево T_1 графу G будується наступним чином:

Будується покриваюче дерево підграфу, індукованого вершинами v_2, \dots, v_n , і до нього додається вершина v_1 разом з двома інцидентними їй ребрами. Таким чином, T_1 містить рівно один цикл і може розглядатися як основа відповідного матроїда. Як критерії в задачі про 1-дерево будемо використовувати (3.1), (3.3) та (3.2), (3.3).

3.1.6 Алгоритми розв'язання задач

Алгоритми розв'язання двокритерійних задач MINSUM-MINMAX і MINMAX-MINMAX

Опишемо загальну схему розв'язання таких задач. Для конкретності будемо розглядати задачу про призначення. Позначимо (y_1, y_2) – значення критеріїв задачі. Будемо будувати всю множину парето-оптимальних розв'язків.

1. Розв'язати однокритерійну задачу з матрицею P за критерієм y_1 .

Обчислити величину критерію y_2 для цього розв'язку x за матрицею D .

2. Виконати перетворення матриці C

$$c_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{якщо } d_{ij} < y_2, \\ \infty, & \text{якщо } d_{ij} \geq y_2. \end{cases}$$

Покласти $\bar{y}_1 = y_1, \bar{y}_2 = y_2, \bar{x} = x$.

3. Розв'язати однокритерійну задачу з матрицею P за критерієм y_1 .

Обчислити величину критерію y_2 для цього розв'язку x за матрицею D .

Якщо скінченного розв'язку не існує, то множини $P(Y)$ і $P(X)$ побудовані.

4. Якщо $y_1 = \bar{y}_1$, то перейти до пункту 2. Якщо $y_2 > \bar{y}_2$, то $P(Y) = P(Y) \cup (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, $P(X) = P(X) \cup \bar{x}$ і перейти до пункту 2.

Отже, зробимо такі висновки.

1. Лінійна згортка критеріїв у задачах багатокритерійної дискретної оптимізації знаходить лише ті ефективні розв'язки, які залишаються ефективними і для неперервної задачі з допустимою множиною, що є опуклою оболонкою множини розв'язків дискретної задачі.

2. Формули (3.1)–(3.2) дозволяють тепер одноманітно будувати приклади пропуску лінійною згорткою ефективних розв'язків.

3. Множини $P(Y)$ і Y^c , а також $P(Y) \setminus Y^c$, як показує приклад 1, можуть мати експоненційну потужність.

4. Кількість ефективних розв'язків, що знаходяться лінійною згорткою критеріїв у класичних двокритерійних задачах дискретного програмування, монотонно зменшується з розмірністю задачі до 12% числа ефективних розв'язків при $n = 50$ у разі MINSUM-MINMAX-критеріїв та до 40% – у разі MINMAX-MINMAX критеріїв. У середньому при $n = 10 - 50$ лінійна згортка знаходить 20% ефективних розв'язків у першому випадку і 60% – у другому.

3.2 Алгоритми розв'язання двокритерійних задач

В даному підрозділі запропоновано параметричний алгоритм визначення множини Парето для задачі двокритерійного цілочислового програмування. Зазначений алгоритм побудовано на основі зваженої функції скаляризації Чебишева, час його роботи є асимптотично оптимальним. Описано ряд розширень, зокрема: методика обробки слабо домінованих розв'язків, схема апроксимації множини Парето, а також інтерактивна версія із доступом до всіх результатів Парето. В роботі [39], наведено обширні обчислювальні тести розв'язання двокритерійної задачі про рюкзак та пошуку маршрутів у мережах з пропускною спроможністю.

Отже, зосередимо свою увагу на новому алгоритмі для визначення всієї множини Парето – за допомогою зваженої норми Чебишева (ЗНЧ), що була побудована з урахуванням зазначеного підходу. Алгоритм ЗНЧ побудовано на результатах дослідження Eswaran та ін. [40], який розробив чіткий алгоритм розрахунку всієї множини Парето для ДЦЗ з використанням зваженої норми Чебишева; Solanki [31], який розробив наближений алгоритм із використанням зваженої норми Чебишева та Chalmertet та ін. [41], які запропонували точний алгоритм з використанням зважених сум.

Вищезазначені алгоритми зводять задачу пошуку множини результатів Парето до розв'язання параметризованої послідовності однокритерійних цілочислових задач (підзадач) в межах допустимої множини X . Таким чином головним фактором, що впливає на тривалість обробки задачі, є кількість згаданих підзадач, які потребують розв'язання. Алгоритм ЗНЧ є доопрацюванням методики Eswaran та ін. [40] оскільки він передбачає отримання результатів Парето за рахунок розв'язання наступної кількості $2|Y_E| - 1$ підзадач. Кількість підзадач, що можна розв'язати за допомогою алгоритму Eswaran, залежить від показника допустимості та може значно перевищувати попередні показники (див. [41]). Більше того, цей метод дозволяє визначити результати зі слабким домінуванням із подальшим виключенням з множини Парето. Алгоритм Chalmet та ін. [41] дозволяє розв'язати приблизно однакову кількість підзадач (за аналогією із безпосереднім розвиненням алгоритму апроксимації Solanki [31]). В той же час алгоритм ЗНЧ (та Eswaran) дозволяє отримати чіткі показники контрольних точок (з урахуванням зваженої функції скаляризації Чебишева) між суміжними результатами Парето. Подібні параметри не можливо отримати на підставі алгоритмів [41] та [31], тоді як алгоритм Eswaran дозволяє отримати лише наближені розв'язки.

Хоча основна увага переважно зосереджена на формуванні повної множини Парето, запропоноване дослідження містить аналіз поведінки алгоритму ЗНЧ при формуванні апроксимацій множини Парето, а також інтерактивну версію, що ґрунтується на парному порівнянні результатів Парето. Інтерактивний алгоритм ЗНЧ може формувати будь-який результат Парето (у порівнянні з інтерактивним методом Eswaran, який може формувати результати тільки на верхній опуклій оболонці Y). Підтвердження процесу порівняння відбувається за рахунок узгодження. Дослідження подібного узгодження в контексті покращеної (або модифікованої) функції скаляризації Чебишева здійснювалось переважно для неперервних

багатокритерійних задач [42, 43]. Аналогічне бачення інформації щодо узгодження глобального характеру застосовується в контексті двокритерійних цілочислових задач.

Основні положення скаляризації

Головний принцип, покладений в основу *алгоритмів зондування* для розв'язання двокритерійних цілочислових задач, полягає у поєднанні двох задач у єдиний критерій (*скаляризації* задачі). Згодом, результат подібного поєднання отримує певні параметри. При цьому зміна параметру супроводжує форсування оптимального розв'язання однокритеріальних задач, що відповідатиме результатам Парето для двокритерійної задачі. Формування однозначних критеріїв переважно здійснюється за рахунок зважених сум (опуклі комбінації) та зваженої функції Чебишева (або альтернативного розв'язку). Виконання алгоритмів супроводжується розв'язанням низки підпроблем (*зондування*) для певних показників параметрів.

3.3 Зважені суми

Одним із шляхів виокремлення однокритеріальної математичної задачі з багатокритеріальної є отримання невід'ємної лінійної комбінації цільової функції [44]. Скаляризація сум за рахунок додавання відбувається без втрати загальних параметрів. Кожна комбінація зважених сум формує окрему однокритеріальну задачу. В той же час оптимізаційна задача приводить до формування результатів Парето. В разі двокритерійної задачі параметри спільного критерію задаються одним скаляром $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\max(\alpha y_1 + (1 - \alpha) y_2), \quad y \in Y. \quad (3.6)$$

Оптимальний розв'язок однокритеріальної задачі (3.6) має співпадати з результатом, що припадає на *верхню опуклу оболонку* допустимих розв'язків (частка множини Парето в межах границі $\text{conv}(Y)$). Такий результат називають *опорним*. Не кожен Парето оптимальний розв'язок є опорним. Більше того, існування неопорних розв'язків Парето є доволі розповсюдженим явищем при розв'язанні практичних задач. Таким чином, жоден алгоритм, що забезпечує розв'язання задачі (3.6) для послідовності значень α , не може гарантовано отримати всі Парето оптимальні розв'язки навіть за умови лінійності функцій f_i при $i=1,2$. Множина Парето (не опорних розв'язків) представлена на рисунку 1. Показники y^p та y^r на рисунку позначають Парето оптимальні розв'язки. Втім використання опуклої комбінації двох цільових функцій з метою розв'язання задачі дозволяє отримати y^s , y^q або y^t .

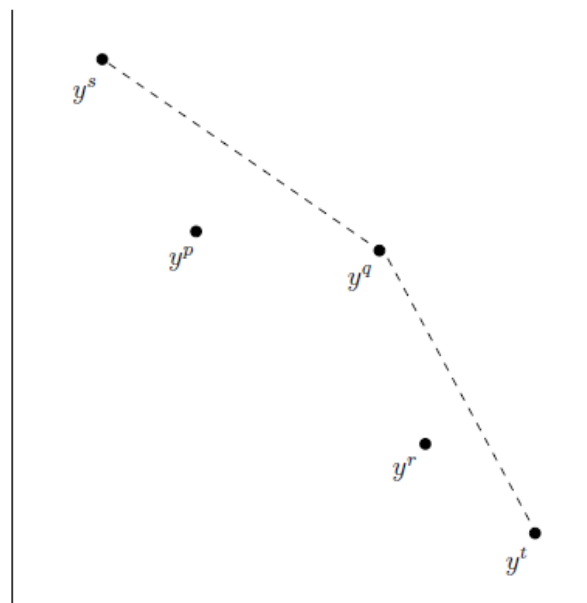


Рис. 1: Приклад верхньої опуклої оболонки допустимих результатів

Точки y^p та y^r називають розв'язками, переважно отриманими з опуклості. Верхня опукла оболонка множини допустимих результатів позначена пунктирною лінією.

Алгоритм Chalmet та ін. [41] здійснює пошук точок Парето в межах підмножини допустимих розв'язків. Зазначені підмножини генеруються таким чином, щоб кожна Парето-оптимальна точка гарантовано припадала на опуклу верхню оболонку певної підмножини, дозволяючи в результаті визначити кожен Парето-оптимальний розв'язок.

Робота за алгоритмом починається з визначення допустимих розв'язків, що забезпечують формування максимальних значень y_1 та y_2 . Після цього, кожна ітерація алгоритму розпочинає пошук серед недослідженої області між двома відомими точками Парето, скажімо, $(y^s$ та y^t). Дослідження (або зондування) передбачає розв'язання задач з використанням зваженої суми та "обмеженої оптимальності", що накладають конкретні вимоги щодо покращення $\min\{y_1^s, y_1^t\}$ та $\min\{y_2^s, y_2^t\}$. Якщо задача з обмеженнями виявиться недопустимою, результати Парето в межах даної підобласті відсутні. В іншому випадку генерується оптимальний результат y^q , а область розподіляється на частини від y^p до y^q та від y^s до y^t . Виконання алгоритму продовжується до завершення дослідження останньої підобласті. Слід відмітити, що оптимальний результат не обов'язково має знаходитись на опуклій верхній оболонці усіх допустимих розв'язків. Мова йде лише про ті результати, що знаходяться між контрольними точками підінтервалу, дозволяючи згенерувати всі результати Парето. Слід також зазначити, що кожна ітерація завершується генеруванням нового Парето-оптимального розв'язку або визнанням відповідної підобласті такою, що не має допустимих рішень. Таким чином загальна кількість розв'язаних підзадач становить $2|Y_E| + 1$.

3.4 Зважена функція Чебишева

Функція Чебишева в просторі R^2 є \max norm (ℓ_∞ norm), що визначається наступним чином

$$\|y_\infty\| = \max\{|y_1|, |y_2|\}.$$

Відстань між двома точками y^1 та y^2 становить:

$$d(y^1, y^2) = \|y^1 - y^2\| = \max\{|y_1^1 - y_1^2|, |y_2^1 - y_2^2|\}.$$

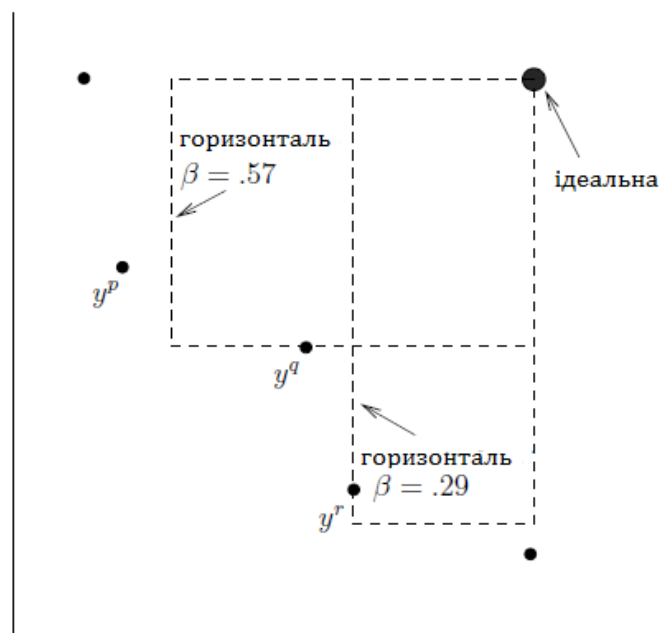


Рис. 2: Приклади горизонталей зваженої функції Чебишева.

Зважена функція Чебишева у просторі R^2 з вагами $0 \leq \beta \leq 1$ визначається наступним чином

$$\|(y_1, y_2)\|_\infty^\beta = \max\{\beta|y_1|, (1 - \beta)|y_2|\}.$$

Методика з використанням зваженої функції Чебишева передбачає обрання допустимих розв'язків за умови дотримання мінімальної відстані

між зваженою функцією Чебишева та *ідеальною точкою* $y^* = (y_1^*, y_2^*)$ (де $y_i^* = \max\{f_i(x) \mid x \in X\}, i = 1, 2$, максимізує однокритеріальну задачу з критерієм $f_i(x)$). На рис. 2 зображено південно-західний квадрант горизонтальних ліній для двох значень β типової задачі.

Далі представлено загально відомі результати скаляризації зваженої функції Чебишева [45].

Теорема 3.4. Якщо $\hat{y} \in Y$ є результатом (оцінкою) Парето, то \hat{y} є розв'язком задачі

$$\min_{y \in Y} \{\|y - y^*\|_\infty^\beta\} \quad (3.7)$$

за умови $0 \leq \beta \leq 1$.

Наступний результат Боумена [46], використаний також у [40], спочатку був сформульований для ефективної множини, але тут корисно сформулювати еквівалентний результат для множини Парето.

Теорема 3.5. Якщо множина Парето при (3.6) має рівномірне домінування, будь-який розв'язок (3.7) є результатом Парето.

Надалі у тексті цього розділу припустимо, що множина Парето характеризується рівномірним домінуванням.

Задача (3.7) має вигляд

$$\min z$$

за умов

$$\begin{aligned} z &\geq \beta(y_1^* - y_1) \\ z &\geq (1 - \beta)(y_2^* - y_2) \\ y &\in Y. \end{aligned} \quad (3.8)$$

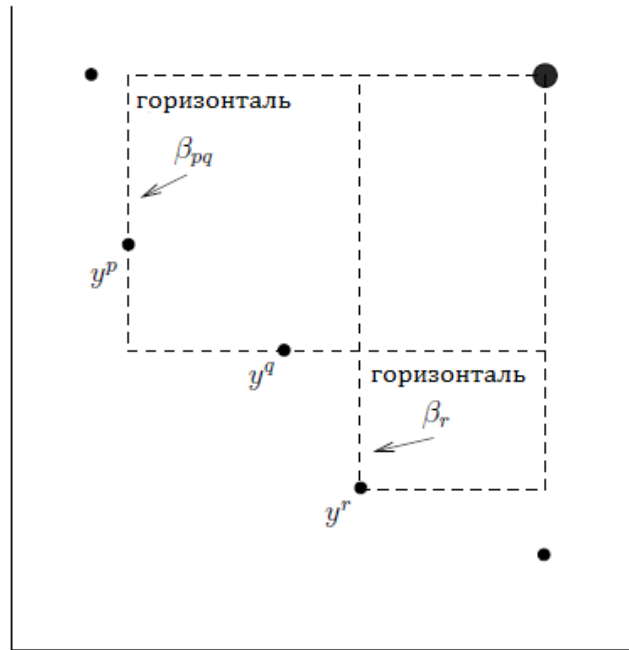


Рис. 3: Відношення між точками Парето y^p , y^q і y^r та вагами β_r і β_{pq} .

де $0 \leq \beta \leq 1$. Розподіляємо множину вірогідних значень β на підінтервали, де існує єдиний оптимальний та унікальний розв'язок (3.8). Припустимо, що $Y_E = \{y^p \mid p \in 1, \dots, N\}$ є множиною результатів Парето (3.5), що відповідають $p < q$ за умови $y_1^p \leq y_1^q$. За такої послідовності точки y^p і y^{p+1} називають *суміжними* точками Парето. Для будь-якого результату Парето y^p , визначаємо

$$\beta_p = (y_2^* - y_2^p) / (y_1^* - y_1^p + y_2^* - y_2^p), \quad (3.9)$$

для будь-якої пари результатів y^p та y^q , $p < q$, визначаємо

$$\beta_{pq} = (y_2^* - y_2^q) / (y_1^* - y_1^p + y_2^* - y_2^q). \quad (3.10)$$

Рівняння (3.10) узагальнює визначення $\beta_{p,p+1}$ для [40]. Отримуємо:

1. Для $\beta = \beta_p$, y^p – єдиний унікальний та оптимальний результат (3.7), та

$$\beta_p (y_1^* - y_1^p) = (1 - \beta_p) (y_2^* - y_2^p) = \|y^* - y^p\|_\infty^\beta.$$

2. Для $\beta = \beta_{pq}$, y^p та y^q – єдині оптимальні результати для (3.7), та $\beta_{pq}(y_1^* - y_1^p) = (1 - \beta_{pq})(y_2^* - y_2^q) = \|y^* - y^p\|_\infty^\beta = \|y^* - y^q\|_\infty^\beta$.

Цей взаємозв'язок зображено на рис. 3. Цей аналіз подано у наступному результаті [40].

Теорема 3.6. Якщо припустити, що результати Парето упорядковані таким чином, що

$$y_1^1 < y_1^2 < \dots < y_1^N$$

та

$$y_2^1 > y_2^2 > \dots > y_2^N$$

тоді

$$\beta_1 > \beta_{12} > \beta_2 > \beta_{23} > \dots > \beta_{N-1,N} > \beta_N.$$

Крім того, y^p вважається оптимальним результатом для (3.8) при $\beta = \hat{\beta}$, якщо $\beta_{p-1,p} \leq \hat{\beta} \leq \beta_{p,p+1}$.

Якщо y^p та y^q є суміжними до результатів Парето, величину β_{pq} можна вважати *контрольною точкою* між інтервалами на які припадають значення β із оптимальним рівнем y^p та y^q задачі (3.8).

Eswaran та ін. [40] описує алгоритм генерування повної множини Парето з використанням двійкового пошуку аби наблизитись до контрольних точок. Робота алгоритму починається із визначення оптимального розв'язку задачі (3.8) при $\beta=1$ та $\beta=0$. Кожна ітерація здійснює пошук в межах недослідженої області між парами послідовних значень β , отриманих в результаті зондування (наприклад, β_p та β_q). Пошук передбачає розв'язання задачі (3.8) при $\beta_p < \beta = \hat{\beta} < \beta_q$. Якщо отриманим результатом є y^p або y^q , проміжок між $\hat{\beta}$ та β_p або β_q можна не брати до уваги. У разі генерування нового результату y^r , проміжки від β_p до β_r та від β_r до β_q вносяться до відповідного переліку для подальшого дослідження. Проміжки, менші за встановлені показники ξ , не враховуються.

Якщо $\hat{\beta}=(\beta_p +\beta_q)/2$, загальна кількість підзадач, що підлягають розв'язанню за найгіршої ситуації, приблизно становить

$$|Y_E|(1 -\lg(\zeta(|Y_E| - 1))). \quad (3.11)$$

Eswaran пропонує інтерактивний алгоритм, що передбачає попарне порівняння результатів Парето, однак зазначений алгоритм дозволяє отримати виключно обґрунтовані результати.

Solanki [31] пропонує алгоритм, що дозволяє генерувати наближені до множини Парето величини, втім зазначений алгоритм може використовуватись як точний. Такому алгоритму властива міра похибки, що залежить від досліджуваного підінтервалу. Величина похибки залежить від відносної довжини і ширини недослідженого інтервалу. Робота алгоритму починається з розв'язання задачі (3.8) за умови $\beta=1$ та $\beta=0$. В даному випадку “локальна ідеальна точка” для кожного недослідженого інтервалу між результатами y^p та y^q становитиме $\max\{y_1^p, y_1^q\}$, $\max\{y_2^p, y_2^q\}$. Алгоритм забезпечує розв'язання задачі (3.8) для області між y^p та y^q з урахуванням зазначеної ідеальної точки. Якщо пошук не видає нових результатів для встановленої підзадачі, інтервал підлягає повноцінному дослідженню із нульовою похибкою. У разі отримання нового результату y^r , інтервал може бути розділено. Наступним досліджується інтервал з найбільшою похибкою. Робота алгоритму триває доки похибки алгоритмів не стануть меншими за допустиму похибку. Якщо зазначена похибка дорівнює нулю, алгоритм продовжуватиме розв'язувати $2|Y_E| - 1$ підзадачі та згенерує повну множину Парето.

3.5 Покращений алгоритм

Цей підрозділ присвячено алгоритму ЗНЧ, що є покращеною версією алгоритму Eswaran та ін. [40]. Алгоритм Eswaran має два суттєвих недоліки:

- Він не може гарантувати виведення всіх результатів Парето, якщо кілька таких результатів потраплять в інтервал із шириною меншою за допустимий рівень ξ . Усі результати Парето можна отримати, якщо ξ матиме достатньо незначну величину (за умови рівномірного домінування). Однак зазначений алгоритм не дозволяє закріпити певне значення ξ , що дозволило б гарантувати отримання необхідного результату.

- Як зазначалося вище, тривалість роботи алгоритму переважно залежить від ξ . Якщо ξ має достатньо незначний рівень аби гарантувати отримання всіх результатів Парето, реалізація алгоритму може призвести до розв'язання значної кількості підзадач, що не дозволять отримати нову інформацію про множину Парето.

Іншим недоліком алгоритму Eswaran є неможливість отримання точної множини контрольних точок. Алгоритм ЗНЧ дозволяє генерувати точні контрольні точки, (див. підрозділ 2.2) та гарантує отримання всіх результатів Парето та контрольних точок за результатами розв'язання послідовності $2|Y_E|-1$ підзадач. Метод, що досліджується, не відрізняється за складністю від методу Chalmet та ін. При цьому кількість розв'язаних підзадач є асимптотично оптимальною. Однак метод Chalmet, за аналогією з алгоритмом Eswaran не дозволяє згенерувати та у повній мірі використати контрольні точки. Потенційною перевагою методу зваженої суми є правильність роботи у випадку наявності нерівномірно домінуючих множин Парето.

Алгоритм з використанням зваженої норми Чебишева (ЗНЧ)

Припустимо $P(\beta^*)$ – це задача, що визначається (3.8) при $\beta=\beta^*$ та $N=|Y_E|$. У такому разі розроблений алгоритм ЗНЧ буде складатись із наступних кроків:

Ініціалізація. Розв'язати $P(1)$ та $P(0)$ для встановлення оптимальних результатів y^1 та y^N , відповідно, та ідеальної точки $y^* = (y_1^1, y_2^N)$.

Множина $I = \{y_1^1, y_2^N\}$ та множина $S = \{(x^1, y^1), (x^N, y^N)\}$ (де $y^j = f(x^j)$).

Ітерація. Наступні операції виконуються поки $I \neq \emptyset$:

1. Видалити всі (y^p, y^q) із I .
2. Розрахувати β_{pq} відповідно до формули (3.10) та розв'язати $P(\beta_{pq})$. Якщо результатом є y^p або y^q , то y^p та y^q є проміжними у переліку (y^1, y^2, \dots, y^N) .
3. В іншому випадку формується новий результат. Додати (x^r, y^r) до S . Додати (y^p, y^r) та (y^r, y^q) до I .

Згідно теореми 3.6, кожна ітерація алгоритму має визначати нову точку Парето або нову контрольну точку $\beta_{p,p+1}$ між суміжними точками Парето. Оскільки кількість контрольних точок складає $N-1$, загальна кількість ітерацій дорівнюватиме $2N-1 \in O(N)$. Будь-який алгоритм, що визначає всі N результати Парето шляхом розв'язання послідовності підзадач в межах множини X має розв'язати не менше N підзадач аби кількість ітерацій цього алгоритму була асимптотично оптимальною по відношенню до інших методів.

3.5.1 Посилення алгоритму

Алгоритм ЗНЧ можна покращити кількома способами. В цьому підрозділі йтиметься про деякі глобальні покращення.

Попереднє встановлення верхньої межі

На другому етапі, будь-який новий результат y^r матиме $y_1^r > y_1^p$ та $y_2^r > y_2^q$. За відсутності такого результату розв'язання підзадачі все одно вимагатиме повторного підтвердження оптимальності y^p або y^q . У випадку з алгоритмом Eswaran, подібне підтвердження є необхідністю, оскільки саме оптимальний показник (y^p або y^q) для $P(\beta)$ визначає ту половину недослідженого інтервалу, яку можна не враховувати. У випадку з алгоритмом ЗНЧ, факт генерування y^p або y^q вказує на можливість випущення цілого інтервалу. Знання про те, який з y^p або y^q було згенеровано дозволяє отримати нову інформацію.

Цей факт дозволяє покращити алгоритм ЗНЧ наступним чином. Розглянемо недосліджений інтервал між результатами Парето (y^p та y^q). Припустимо, що ϵ_1 та ϵ_2 є такими додатними числами, що y^r , як новий результат між y^p та y^q забезпечує отримання $y_i^r \geq \min\{y_i^p, y_i^q\} + \epsilon_i$ за умови $i=1,2$. Наприклад, якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ є цілими числами, то $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$. В такому випадку

$$\|y^* - y^r\|_{\infty}^{\beta_{pq}} + \min\{\beta_{pq}\epsilon_1, (1 - \beta_{pq})\epsilon_2\} \leq \|y^* - y^p\|_{\infty}^{\beta_{pq}} = \|y^* - y^q\|_{\infty}^{\beta_{pq}}. \quad (3.12)$$

Таким чином, можна встановити верхню межу

$$\|y^* - y^p\|_{\infty}^{\beta_{pq}} - \min\{\beta_{pq}\epsilon_1, (1 - \beta_{pq})\epsilon_2\} \quad (3.13)$$

під час розв'язання підзадачі $P(\beta_{pq})$. Наявність верхньої межі дозволяє ефективно видаляти усі допустимі розв'язки із значеннями, що не є меншими за значення функції Чебишева (отримані в межах сфери пошуку заданої

підзадачі) у незначній мірі. Таким чином, проведення другого етапу завершується отриманням нового або недопустимого результату. Недопустимий результат передбачає проведення набагато меншої кількості розрахунків у порівнянні з перевіркою оптимальності відомого результату. Таким чином, зазначена модифікація дозволяє покращити загальну ефективність алгоритму.

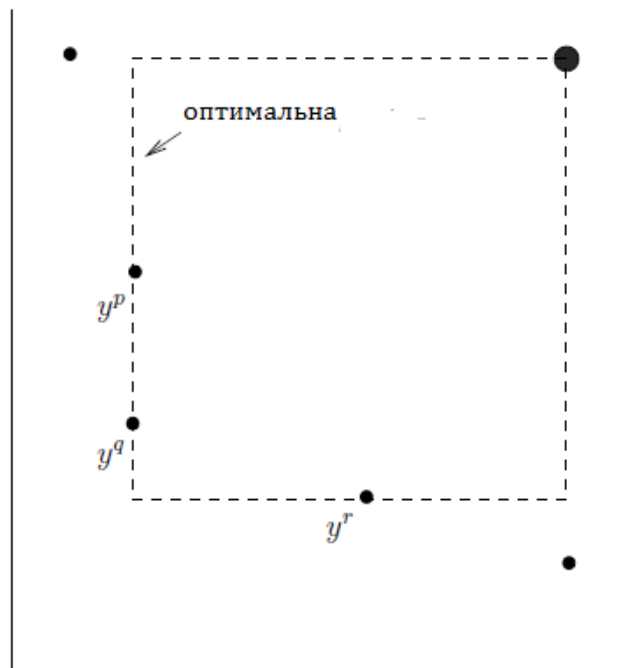


Рис. 4. Слабке домінування y^p над y^r

Послаблення вимоги до універсальності домінування

Більшість практичних задач порушують припущення щодо універсальності домінування множини Парето, характерне для алгоритму ЗНЧ. Зондування алгоритмів, що використовують зважені суми (наприклад, Chalmet та ін. [41]) не вимагає зазначеного припущення на відміну від алгоритмів на основі функції Чебишева, що необхідно змінити аби забезпечити врахування наявності неуніверсального домінування. За відсутності універсального домінування серед множини Парето, задача $P(\beta)$

може мати кілька оптимальних результатів, частина яких може не відповідати принципу Парето.

Певні проблеми виникають із допустимим розв'язком за наявності слабкого домінування з боку результату Парето, оскільки вони можуть знаходитись на однаковій горизонталі зваженої функції Чебишева. В такому випадку вони можуть стати розв'язком $P(\beta)$ за певних значень β , що обробляються в ході виконання алгоритму. Наприклад, пунктирний прямокутник на рис. 4 позначає оптимальну контурну лінію для функції Чебишева для підзадачі $P(\beta)$. В такому випадку y^p та y^q будуть вважатись оптимальними для $P(\beta)$, однак y^p матиме незначне домінування над y^q . Точка y^r , що знаходиться на протилежному кінці контурної лінії, також вважається оптимальною, однак жодного домінування по відношенню до y^p або y^q не спостерігається. Якщо результат y є оптимальним відносно певних $P(\beta)$, то такий результат має припадати на край оптимальної контурної лінії за відсутності жодного потужного домінування з боку іншого допустимого результату. Розв'язання задачі (3.8) за рахунок використання звичайного методу гілок і меж дозволяє отримати лише оптимальну контурну лінію та повертає один результат з цієї лінії. Нашою другорядною задачею є забезпечити генерування результату, що буде максимально наближеним до ідеальної точки, що визначається функцією l_p для деяких результатів $p < \infty$. Це дозволяє гарантувати відношення кінцевого результату до множини Парето. Існує два шляхи досягнення поставленої цілі. Розглянемо їх у наступному розділі.

Посилена функція Чебишева Використання посиленої функції Чебишева за визначенням Steuer [37] є одним із способів, що дозволяє гарантувати, аби новий результат, отриманий в ході проведення другого етапу алгоритму ЗНЧ, відносився до точок Парето

Посилена функція Чебишева визначається наступною умовою

$$k(y_1, y_2)k^{\beta, \rho}_{\infty} = \max\{\beta|y_1|, (1 - \beta)|y_2|\} + \rho(|y_1| + |y_2|),$$

де ρ незначне додатне число.

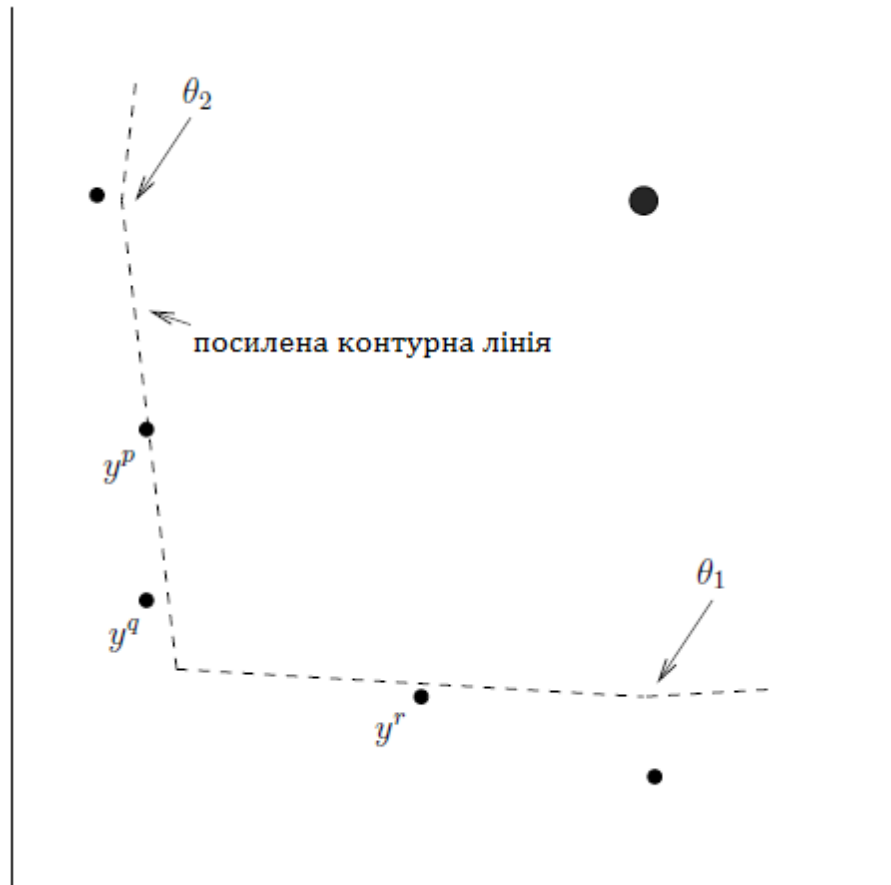


Рис. 5: Посилена функція Чебишева. Точка y^p є оптимальною точкою мінімуму для доповненої-звичайної відстані до ідеальної точки.

В разі використання зазначеної функції в межах алгоритму ЗНЧ, отримуємо алгоритм АСН. Ідея полягає в тому, щоб згенерувати результат максимально наближений до ідеальної точки вздовж одного краю оптимальної контурної лінії, що утворюється функціями l_{∞} та l_1 . Це досягається за рахунок фактичного додавання невеликого кратного значення відставні функції l_1 до відстані функції Чебишева. Графічне зображення контурних ліній з урахуванням зазначених функцій представлено на рис. 5. Кут між нижніми краями контурної лінії

$$\theta_1 = \tan^{-1}[\rho/(1 - \beta + \rho)],$$

а кут між лівими краями

$$\theta_2 = \tan^{-1}[\rho/(\beta + \rho)].$$

Задача визначення допустимого результату, що буде максимально наближеним до ідеальної точки за даних значень параметрів, полягає в наступному

$$\begin{aligned} \min \quad & z + \rho(|y_1^* - y_1| + |y_2^* - y_2|) \\ \text{за умови } \quad & z \geq \beta(y_1^* - y_1) \\ & z \geq (1 - \beta)(y_2^* - y_2) \quad y \in Y. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Оскільки $y_k^* - y_k \geq 0$ спостерігається для усіх значень $y \in Y$, цільову функцію можна записати наступним чином

$$\min \quad z - \rho(y_1 + y_2) \quad (3.15)$$

В разі незначного $\rho > 0$:

- всі оптимальні результати задачі (3.14) задовольняють Парето (азначені результати не характеризуються слабким домінуванням), та
- заданий результат Парето у задачі (3.14) забезпечує існування такого значення $0 \leq \beta^* \leq 1$, за якого у вважатиметься унікальним результатом задачі (11) при $\beta = \beta^*$.

В реальній ситуації, обрання необхідного значення ρ може виявитись доволі проблематичним. Наявність занадто малого значення ρ може викликати певні труднощі при проведенні обчислень, оскільки вага другорядної задачі може втратити свою важливість по відношенню до головної задачі. Подібна ситуація може призвести до виникнення результатів із слабким домінуванням незалежно від доповненої задачі. З іншого боку, занадто велике значення ρ може перетворити частину результатів Парето на недосяжні (тобто неоптимальні для задачі $Z(F, X)$ не залежно від значення β). Steuer [37] рекомендує дотримуватись діапазону $0,001 \leq \rho \leq 0,01$, однак

подібні значення є спеціальними. Обрання такого значення ρ , що дозволить забезпечити нормальну роботу алгоритму, залежить від відносного розміру оптимальних значень цільової функції та не може бути розраховано. В деяких випадках, достатньо невеликі значення ρ аби гарантувати виявлення всіх точок Парето (особливо якщо β наближується до нуля або одиниці) можуть виявитись настільки невеликими, що призведуть до виникнення труднощів під час розрахунку.

Комбінаторні методи. Альтернативним способом пом'якшення вимоги до універсального домінування є перерахунок (не в чіткій формі) всіх оптимальних результатів $P(\beta)$ із видаленням всіх результатів під дією слабкого домінування із використанням гіперплощини. Це призведе до збільшення часу на розв'язання задачі $P(\beta)$, однак видалить всі труднощі цифрового характеру, пов'язані із доповненою функцією Чебишева. Реалізація цього методу передбачає надання суб'єкту, що займається розв'язанням підзадачі, можливості продовжити пошук альтернативних оптимальних результатів для $P(\beta)$ із подальшою реєстрацією найкращих з урахуванням другорядної задач. Це досягається за рахунок зміни звичайних правил скорочення для алгоритму за методом гілок та меж, що використовується для розв'язання $P(\beta)$. Суб'єкту, що займається розв'язанням задачі, забороняється видаляти будь-який вузол під час пошуку, за винятком випадків неефективності зазначеного вузла або перебування його нижньої межі безпосередньо над повністю встановленою верхньою межею (тобто, найкращий до цього часу результат з урахуванням зваженої функції Чебишева). Подібна методика дозволяє отримати альтернативні оптимальні результати по мірі продовження пошуку.

Важливим аспектом подібної модифікації є той факт, що вона передбачає заборону на видалення будь-якого вузла, який вже створив допустимий цілочисловий розв'язок (з урахуванням результату для Y). Хоча зазначений розв'язок має бути оптимальним по відношенню до зваженої

функції Чебишева (з урахуванням обмежень, які накладаються методом гілок та меж), результат може залишатись під дією слабкого домінування. Таким чином, після отримання нового результату \hat{y} , його значення зваженої функції Чебишева порівнюється із оптимальним значенням, знайденим на даний момент. Якщо отримане значення строго більше, розв'язок вважається недійсним. Якщо отримане значення строго менше, він визначається як новий найбільш оптимальний результат. Якщо його нормальне значення дорівнює найкращому поточному результату, таке значення залишається без змін лише за умови слабкого домінування над результатом.

Визначившись із встановленням \hat{y} як найбільш оптимального результату на даний момент, накладається відповідне обмеження за оптимальністю, що запобігає подальшому генеруванню результатів із слабким домінуванням з боку \hat{y} та участі в обробці поточного вузла. Встановлення обмеження за оптимальністю передбачає визначення однієї з двох умов

$$z \geq \beta(y_1^* - y_1) \quad (3.16)$$

$$z \geq (1 - \beta)(y_2^* - y_2) \quad (3.17)$$

для задачі (3.7), що є обов'язковою для \hat{y} . Це визначає границю контурної лінії, на яку припадає результат. Якщо обов'язковою є перша умова, будь-який результат \bar{y} із слабким домінуванням з боку \hat{y} має задовольняти наступну умову $\bar{y}_1 < \hat{y}_1$. Таким чином, відбувається наближення до ідеальної точки з огляду на відстань функції l_1 вздовж краю контурної лінії. Накладаємо обмеження за оптимальністю

$$y_2 \geq \hat{y}_2 + \varepsilon_2, \quad (3.18)$$

де ε_i визначається відповідно до рекомендацій розділу 3.2.1. Якщо обов'язковою є друга умова, накладаємо обмеження за оптимальністю

$$y_1 \geq \hat{y}_1 + \varepsilon_1. \quad (3.19)$$

Обидва обмеження (3.18) та (3.18) можуть бути обов'язковими для \hat{y} , тобто результат може знаходитись на перетині двох меж контурної лінії. Подібна ситуація є доволі проблематичною, оскільки наявна методика дозволяє проводити пошук домінуючого результату лише вздовж однієї межі, тоді як такі результати можуть припадати на одну або обидві сторони. В такому випадку необхідно забезпечити проведення пошуку по обидві сторони, якщо пошук з однієї не дозволить знайти домінуючий результат.

Поточне значення β може також виступати контрольною точкою між двома попередньо встановленими результатами Парето. Таким чином, існує чіткий результат з кожного боку оптимальної контурної лінії. В даному випадку неважливо який із зазначених результатів буде сформовано. Втім отриманий результат не має знаходитись під слабким домінуванням. Одразу після знаходження оптимальної контурної лінії, зосереджуємо пошук результату Парето на одному з країв (на якому було вперше знайдено розв'язок). Це досягається за рахунок випущення будь-якого отриманого результату із аналогічним, проте несумісним, значенням зваженої функції Чебишева, на рівні поточного оптимального значення (значення не знаходиться під впливом слабого домінування та не має зазначеного домінування по відношенню до інших).

Гібридні методи Третьою альтернативною, що довела свою ефективність на практиці, є поєднання методу доповненої функції Чебишева із комбінаторним методом, який розглядався раніше. Це досягається за рахунок використання посиленої цільової функції (3.15) паралельно із використанням комбінаторного методу. Таким чином, блокуються такі значення ρ , що є занадто малими аби забезпечити генерування результатів Парето, та формуються рекомендації щодо подальшого пошуку результатів

Парето. Гібридний метод дозволяє скоротити тривалість роботи алгоритму у порівнянні із звичайним комбінаторним методом.

3.5.2 Наближене представлення множини Парето

У разі занадто великої кількості результатів Парето, витрати обчислювальних ресурсів на генерування усієї множини можуть виявитись занадто високими. За даних обставин, слід розглянути можливість генерування виключно певної кількості точок, що будуть репрезентативними для підмножини. При цьому "репрезентативна" підмножина є "рівномірно розподіленою на всій множині" [31]. Розв'язання цієї задачі за наявності загальних програм із великою кількістю критеріїв, що відносяться до ДЦЗ, можна забезпечити за допомогою детермінованих алгоритмів із використанням функції Чебишева, однак роботи Solanki [31] та Schandl та ін. [30] вважається трохи не єдиними, що пропонують спеціалізовані детерміновані алгоритми для ДЦЗ. Жодна з відомих нам робіт не містить детальних результатів розрахунків щодо наближень множини Парето ДЦЗ детермінованими алгоритмами.

Метод Solanki мінімізує геометричну міру "похибки" відносно згенерованої підмножини результатів Парето, що дозволяє генерувати мінімально необхідну кількість результатів для отримання заздалегідь встановленої відносної похибки. Метод Schandl використовує поліедральні функції для пошуку наближення та оцінки його якості. Генерування допоміжних результатів Парето здійснюється за допомогою звичайного методу, тоді як лексикографічний метод Чебишева та гіперплощина використовуються для пошуку непідтверджених результатів Парето.

Будь-який зондувальний алгоритм може згенерувати наближення до множини Парето за рахунок простого видалення ранніх результатів. (Алгоритм Solanki може згенерувати повну множини Парето, продовжуючи

власну роботу поки величина похибки не буде дорівнювати нулю). Репрезентативність вихідного наближення залежить від контролю над послідовністю відбору доступних інтервалів для подальшого дослідження. Бажані особливості для такої послідовності:

- точки мають бути репрезентативними, та
- витрати обчислювальних ресурсів мають бути зменшені до мінімуму.

У випадку із алгоритмом ЗНЧ досягнення поставлених цілей забезпечується за рахунок обрання недосліджених інтервалів у порядку їх появи. Подібний спосіб вибору збільшує вірогідність перетворення підзадачі на новий результат Парето та зменшує кількість недосяжних підзадач (відсутність нових результатів за результатами зондування) в разі дострокового завершення алгоритму. Крім того, він дозволяє забезпечити якісне поширення результатів.

3.5.3 Інтерактивний варіант алгоритму

Після використання алгоритму для знаходження всіх (або більшої підмножини) результатів Парето, особа, що приймає рішення та має намір використати їх, має взяти участь у другій стадії прийняття рішення для визначення однієї точки Парето, що найкраще відповідає потребам організації. Щоб вибрати найкращий розв'язок з множини Парето-розв'язків, вони мають бути порівняні відповідно до однокритеріальної функції корисності. Якщо функція корисності особи, що приймає рішення, відома, то остаточний вибір результатів можна виконати автоматично. Однак визначення точного вигляду цієї функції корисності для конкретної ОПР, є важкою задачею для дослідників. Процес зазвичай включає в себе

обмежувальні припущення про форму такої функції корисності, та може потребувати складних маніпуляцій з боку ОПР.

ВИСНОВКИ

В бакалаврській роботі досліджено властивості двокритерійних задач цілочислової оптимізації, проведено аналіз існуючих алгоритмів, визначено їхні переваги та недоліки для різних типів даних і подальшого використання для певних задач та описано новий алгоритм розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації. Для реалізації поставленої мети були поставлені та вирішені наступні задачі:

- вивчені основні поняття багатокритерійної оптимізації;
- визначені та проаналізовані різні поняття оптимальних розв'язків багатокритерійних задач;
- встановлено властивості двокритерійних задач неперервної та дискретної оптимізації;
- встановлено та проаналізовано властивості Парето оптимальних розв'язків двокритерійних задач;
- досліджено ефективність методів та алгоритмів розв'язання двокритерійних задач цілочислової оптимізації.

Результатом роботи є розробка параметричного алгоритму розв'язання двокритерійної задачі про рюкзак з цілочисловими змінними на основі використання зваженої функції скаляризації Чебишева, а також алгоритму знаходження наближеної множини Парето.

ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Семенова Н.В. Колечкіна Л.М. Векторні задачі дискретної оптимізації на комбінаторних множинах: методи дослідження та розв'язання. К.: Наук. думка, 2009. 266 с.
2. Подиновский В.В. Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982 256 с.
3. Ehrgott M. Multicriteria optimization. Berlin; Heidelberg: Springer, 2005. 323 p.
4. Jahn Johannes. Vector optimization. Theory, applications, and extensions. Second edition. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2011. 481 p.
5. Bhaskar K. A multiple objective approach to capital budgeting. *Accounting and Business Research*, 9:25–46, 1979.
6. Ferreira C., Climaco J., and Paixao J. The location-covering problem: a bicriterion interactive approach. *Investigation Operativa*, 4(2):119–139, 1994.
7. Kere P. and Koski J. Multicriterion optimization of composite laminates for maximum failure margins with an interactive descent algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(6):436–447, 2002.
8. Climaco J., Ferreira C., and Captivo M.E. Multicriteria integer programming: an overview of different algorithmic approaches. In J. Climaco, editor, *Multicriteria Analysis*, pages 248–258. Springer, Berlin, 1997.
9. Сергиенко И.В. Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. К.: Наук. думка, 1988. 471 с.
10. Сергиенко И.В., Шило В.П. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования. К.: Наук. думка, 2003. 264 с.
11. Гэри М. Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 416 с.
12. Climaco J., Ferreira C., and Captivo M.E. Multicriteria integer programming:

- an overview of different algorithmic approaches. In J. Climaco, editor, *Multicriteria Analysis*, pages 248–258. Springer, Berlin, 1997
13. Ehrgott M. and Gandibleux X. A survey and annotated bibliography of multiobjective combinatorial optimization. *OR Spektrum*, 22:425–460, 2000.
 14. Ehrgott M. and Gandibleux X. Multiobjective combinatorial optimization—theory, methodology and applications. In M. Ehrgott and X. Gandibleux, editors, *Multiple Criteria Optimization—State of the Art Annotated Bibliographic Surveys*, pages 369–444. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2002.
 15. Ehrgott M. and Wiecek M. Multiobjective programming. In M. Ehrgott, J. Figueira, and S. Greco, editors, *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, pages 667–722. Springer, Berlin, Germany, 2005.
 16. Aksoy Y. An interactive branch-and-bound algorithm for bicriterion nonconvex mixed integer programming. *Naval Research Logistics*, 37(3):403–417, 1990.
 17. Mavrotas G. and Diakoulaki D. A branch and bound algorithm for mixed zero-one multiple objective linear programming. *European Journal of Operational Research*, 107(3):530–541, 1998.
 18. Ramesh R., Karwan M.H., and Zionts S. Preference structure representation using convex cones in multicriteria integer programming. *Management Science*, 35(9):1092–1105, 1989.
 19. R. Ramesh, M.H. Karwan, and S. Zionts. An interactive method for bicriteria integer programming. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20(2):395–403, 1990.
 20. R. Ramesh, M.H. Karwan, and S. Zionts. Interactive bicriteria integer programming: a performance analysis. In M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, and M. Roubens, editors, *Interactive Fuzzy Optimization and Mathematical Programming*, volume 368 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, pages 92–100. Springer-Verlag, 1991.

21. W.S. Shin and D.B. Allen. An interactive paired-comparison method for bicriterion integer programming. *Naval Research Logistics*, 41(3):423–434, 1994.
22. B. Villarreal and M.H. Karwan. Multicriteria integer programming: A (hybrid) dynamic programming recursive approach. *Mathematical Programming*, 21:204–223, 1981.
23. B. Villarreal and M. H. Karwan. Multicriteria dynamic programming with an application to the integer case. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 38:43–69, 1982.
24. D. Klein and E. Hannan. An algorithm for the multiple objective integer linear programming problem. *European Journal of Operational Research*, 93:378–385, 1982.
25. Pasternak H. and Passy U. Bicriterion mathematical programs with boolean variables. In J. L. Cochrane and M. Zeleny, editors, *Multiple Criteria Decision Making*, pages 327–348. University of South Carolina Press, 1973.
26. J. Karaivanova, P. Korhonen, S. Narula, J. Wallenius, and V. Vassilev. A reference direction approach to multiple objective integer linear programming. *European Journal of Operational Research*, 81:176–187, 1995.
27. S.C. Narula and V. Vassilev. An interactive algorithm for solving multiple objective integer linear programming problems. *European Journal of Operational Research*, 79(3):443–450, 1994.
28. M.J. Alves and J. Climaco. Using cutting planes in an interactive reference point approach for multiobjective integer linear programming problems. *European Journal of Operational Research*, 117:565–577, 1999.
29. M.J. Alves and J. Climaco. An interactive reference point approach for multiobjective mixedinteger programming using branch-and-bound. *European Journal of Operational Research*, 124:478–494, 2000.
30. B. Schandl, K. Klamroth, and M.M. Wiecek. Norm-based approximation in bicriteria programming. *Computational Optimization and Applications*,

- 20(1):23–42, 2001.
31. R. Solanki. Generating the noninterior set in mixed integer biobjective linear programs: an application to a location problem. *Computers and Operations Research*, 18:1–15, 1991.
 32. A. Seden˜o Noda and C. Gonz´alez-Mart´ın. An algorithm for the biobjective integer minimum cost flow problem. *Computers and Operations Research*, 28:139–156, 2001.
 33. Koopmans T.C. Analysis of production as an efficient combination of activities. Ed. T.C. Koopmans. *Activity Analysis Production and Allocation*. N.Y.: Wiley, 1951. P. 33–97
 34. Charnes A., Cooper W. W. *Management Models and Industrial Application of Linear Programming*. New York: Wiley, 1961.
 35. Емеличев В.А., Перепилица В.А. К вычислительной сложности дискретных многокритериальных задач. *Известия АН СССР. Техн. кибернетика*. 1988. № 1. С. 78–85.
 36. Burkard R.E., Keiding H., Kgarup J., Pruzan P.H. A relationship between optimality and efficiency in multicriteria 0–1 programming problems. *Comput. and Operat. Res.* 1981. V. 8. № 2. P. 241–247.
 37. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
 38. Меламед И.И., Сигал И.Х. Исследование линейной свертки критериев в многокритериальном дискретном программировании. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1995, т. 35, № 8, С. 1260–1270.
 39. Ralphs T.K., Saltzman M.J., Wiecek M.M. An improved algorithm for solving biobjective integer programs. *Annals of Operations Research*. 2006. 147(1)P. 43-70.
 40. P.K. Eswaran, A. Ravindran, and H. Moskowitz. Algorithms for nonlinear integer bicriterion problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 63(2):261–279, 1989.

41. L.G. Chalmet, L. Lemonidis, and D.J. Elzinga. An algorithm for the bi-criterion integer programming problem. *European Journal of Operational Research*, 25:292–300, 1986.
42. Kaliszewski I. Using tradeoff information in decision-making algorithms. *Computers and Operations Research*, 27:161–182, 2000.
43. Kaliszewski I. Dynamic parametric bounds on efficient outcomes in interactive multiple criteria decision making problems. *European Journal of Operational Research*, 147:94–107, 2003.
44. A.M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22:618–630, 1968.
45. R.E. Steuer and E.-U. Choo. An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical Programming*, 26:326–344, 1983.
46. V.J. Bowman. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multicriteria objectives. In H. Thieriez, editor, *Multiple Criteria Decision Making*, pages 248–258. Springer, Berlin, 1976.