МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СКОТАРЕНКО ФЕДІР МИКОЛАЙОВИЧ

УДК 519.6:004.93

РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ГРУПУВАННЯ ІНФОРМАЦІЇ З МАТРИЧНИМИ ОЗНАКАМИ

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
ДОНЧЕНКО Володимир Степанович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
професор кафедри системного аналізу та теорії
прийняття рішень.

Офіційні опоненти: член-кореспондент НАН України,
доктор фізико-математичних наук, професор,
ХІМІЧ Олександр Миколайович,
Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
завідувач відділу чисельних методів
комп'ютерного моделювання,

кандидат фізико-математичних наук, доцент
ЩЕСТЮК Наталія Юріївна,
Національний університет
"Києво-Могилянська Академія" МОН України,
доцент кафедри математики.

Захист відбудеться " 17 " листопада 2016 року о 15:25 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д. 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, просп. академіка Глушкова, 4-Д, факультет комп'ютерних наук та кібернетики, ауд. 01.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "12 " жовтня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Розвиток та впровадження інформаційних технологій, систем штучного інтелекту неможливе без адекватного розвитку та вдосконалення методів математичного моделювання. Повною мірою це стосується засобів математичного опису та моделювання в задачах групування інформації: відновлення функцій, представлених своїми спостереженнями (*function fitting*) та - класифікації, кластеризації, розпізнавання образів: від засобів статистичної обробки інформації, до обробки зображень, обробки мовних сигналів, теорії оптимального керування, засобів прогнозу особливо в умовах модельної невизначеності, систем підтримки прийняття рішень з відповідними областями застосування та технологічними засобами реалізації. Розв'язання здач групування інформації, в прикладних дослідженнях, загалом, використовує широкий діапазон методів як математичних: статистичних, алгебраїчних, оцінок гарантованої точності, ін. - так і тих чи інших засобів евристичного характеру. Власне, метод дослідження конкретних систем та об'єктів визначається його природою, специфікою предметної області та цілями дослідження. Значне місце в розв'язанні задач групування інформації в прикладних дослідженнях посідають методи, що мають основою оперування з базовими структурами евклідових просторів. Таке залучення базових структур в прикладних задачах вимагає наявності конструктивних методів конструювання таких структур та, відповідно - конструктивності в оперуванні з ними. Стандартним варіантом звертання до евклідових просторів є використання евклідового простору числових векторів R^n.

В той же час практика вимагає розширення класу евклідових просторів, що можуть конструктивно використовуватись в прикладних дослідженнях, зокрема до матричних евклідових просторів, як це має місце в задачах розпізнавання мови та обробки зображень. Важливою основою конструктивних засобів використання базових структур в евклідових просторах R^n є сингулярне подання матриці та псевдо обернення. Тому дослідження, пов'язані із розвитком математичних засобів розв'язання задач групування інформації на основі слушного сингулярного подання та псевдообернення для матричних представників набувають особливої актуальності. Важливість розвитку математичних засобів конструктивної побудови, опису та використання базових алгебраїчних структур в евклідових просторах матриць фіксованої розмірності і визначає актуальність досліджень дисертаційної роботи.

Розвиток сучасних інформаційних технологій визначається все більш високими вимогами до них. Це повною мірою стосується задач розпізнавання мови, в тому числі дактильної. Цей напрямок є одним з актуальних та перспективних у зв`язку зі створенням природних інтерфейсів, які забезпечують спілкування людини з комп`ютером природним чином. Не менш важливим напрямком є розвиток технологій аналізу зображень, зокрема, виділення та супроводження об`єктів на зображенні та їх класифікація. Пошук на зображенні автомобілів та їх номерних знаків, виділення облич людей на фотографіях, аналіз емоцій за мімікою губ – це лише деякі приклади найбільш відомих задач, які знайшли практичне застосування у відомих інтернет–порталах та системах різного напрямку. Досить поширеними є програми, які дозволяють керувати автомобілем за допомогою голосових команд або жестів.

Ефективне розв`язання, зокрема, згаданих задач базується на методах класифікації, кластеризації, розпізнавання образів. Принциповими є роботи іноземних науковців, зокрема, самоорганізаційна карта Т.К. Кохонена, приховані марківські моделі Л.Е. Баума, інваріантні моменти М.К. Ху та інші. Важливий внесок здійснили і вітчизняні науковці. Ще півстоліття тому В.М. Глушков створив в Києві наукову школу аналізу зображень. Цей напрямок досліджень продовжив розвивати М.І. Шлезінгер. Результати досліджень М.І. Шлезінгера знайшли своє практичне застосування у проекті Viewdle, який пов`язаний з комп`ютерним зором: розпізнаванням облич та об`єктів. Статистичні методи розвивали В.Н. Вапник та А.Я. Червоненкис. В області розпізнавання мовної інформації важливими є роботи Т.К. Вінцюка. Видатний внесок у розвиток алгебраїчних методів, зокрема, псевдообернення та його застосування в задачах групування інформації, був здійснений М.Ф. Кириченком, зокрема, у його роботах з Ю.Г. Кривоносом.

Розв’язання задачі лінійної дискримінації як правило пов’язується з роботами Р.А. Фішера та Г. Маклоклена. Також розв`язання задач кластеризації на основі занурення у відповідні множини (слушні паралелепіпеди) запропонували Ю.В. Куц та М.Ф. Кириченко. В роботах М.Ф. Кириченка та В.С. Донченка запропонована та розвинута концепція відстаней відповідності в задачах кластеризації та класифікації інформації через асоціацію (занурення) у слушні алгебраїчні структури. Принципові результати у сфері моделювання емоційних станів обличчя людини, жестової мови, автоматизації стенографування, синтезу мови отримані Ю.В. Краком.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана у відповідності до плану наукових досліджень кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України у рамках науково-дослідницької теми: №11БФ015-06 “Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж” (державний номер реєстрації 0111U006680, термін виконання 2011-2015 рр. за програмою "Інформатизація суспільства").

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є розвиток математичних засобів групування інформації, розробка моделей реалізації систем розпізнавання мови та знаків дактильної мови жестів.

Для досягнення мети поставлені наступні задачі:

– реалізувати концепцію кортежних операторів для матричних кортежів, що дало можливість побудувати конструктивну теорію SVD (сингулярний розклад), ПДО (псевдообернення) для таких операторів;

– сформулювати та розв'язати задачу лінійної робастної дискримінації в матричних евклідових просторах;

– розробити конструктивний алгоритм реалізації задачі лінійної дискримінації в евклідових просторах матриць фіксованої розмірності;

– побудувати рекурентні формули псевдообернення для кортежних операторів: узагальнену формулу Ґревіля-Кириченка для кортежних операторів.

Об`єкт дослідження – процес математичного моделювання в задачах групування інформації, в тому числі для розпізнавання знаків дактильної абетки української мови та мовної інформації, обробки зображень.

Предмет дослідження – підходи, методи, алгоритми реалізації засобів конструктивного розв'язання задач групування інформації для варіанту матричних представників об'єктів, що аналізуються з метою групування.

Методи дослідження. Методологічну основу дослідження становлять: системний підхід, алгебраїчні методи (включаючи методи сингулярного розкладу та псевдо обернення), методи кластеризації та класифікації, розпізнавання образів.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі отримано нові науково обґрунтовані результати реалізації концепції кортежних операторів за матричними кортежами матриць фіксованої розмірності, що дало можливість:

вперше:

- отримати методи розв'язання задачі побудови сингулярного подання як самих кортежних операторів, так і спряжених до них, зведенням до класичної задачі на власні значення для матриць;
- конструктивно побудувати псевдообернення кортежних операторів та спряжених до них, що уможливило створення основи до побудови низки методів розв'язання задач групування інформації для представників з матричних евклідових просторів;
- вичерпно та конструктивно дослідити систему лінійних алгебраїчних рівнянь для кортежних операторів та спряжених до них;
- сформулювати та розробити конструктивний алгоритм реалізації задачі лінійної дискримінації в евклідових просторах матриць фіксованої розмірності;
- сформулювати та розв'язати задачу рекурентного обчислення псевдообернення для кортежних операторів та спряжених до них за розширенням кортежів новими матричним елементами: побудувати аналоги прямих формул Ґревіля-Кириченка для матриць.

удосконалено:

- засоби дослідження лінійних та нелінійних базових структур в матричних евклідових просторах;

набули подальшого розвитку:

- алгоритми розв'язання задач лінійної дискримінації у їхньому застосуванні до матричних евклідових просторів;
- засоби оперування з базовими структури евклідового просторів матриць фіксованої розмірності: з лінійними підпросторами та гіперплощинами (зсунутими підпросторами) та засобами їх породження та використання; з лінійними операторами, що відповідають лінійним підпросторам та гіперплощинам; з конструктивним та оптимальним в певному сенсі породженням квадратичних форм та еліпсоїдів, що їм відповідають;
- математичний апарат для задач групування інформації з матричними представниками.

Практична цінність і впровадження результатів роботи. Отримані в дисертації наукові результати є внеском у розвиток математичних методів розв'язання прикладних задач групування інформації, коли досліджувані об'єкти представляються матрицями. Запропоновані алгоритми, що реалізують використання отриманих результатів для розв'язання задач групування інформації.

Результати наукового дослідження методів та алгоритмів псевдообернення в евклідовому просторі матриць для розв'язання прикладних задач у сучасних інформаційних системах, отримані в рамках підготовки кандидатської дисертації "Розробка математичних методів групування інформації з матричними ознаками", впроваджені у 2013-2014 н.р. у навчальний процес кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні курсу "Обробка інформації в умовах невизначеності" для студентів 1 курсу магістратури за спеціальністю "Системи і методи прийняття рішень", а також використана при виконанні науково-дослідної теми №11БФ015-06 "Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж".

Особистий внесок здобувача. Дисертація є самостійною науковою працею, в якій висвітлені власні ідеї і розробки автора, що дозволили розв`язати поставлені задачі. Робота містить теоретичні та методичні положення, розроблені алгоритми та відповідні висновки, сформульовані дисертантом особисто. Використані в дисертації ідеї, положення та гіпотези інших авторів мають відповідні посилання і використані лише для підкріплення ідей здобувача.

В роботах, що написані у співавторстві, здобувачу належить: у роботі [1] опис методів розв'язання задачі побудови сингулярного подання як самих кортежних операторів, так і спряжених до них, зведенням до задачі на власні значення для класичних матричних операторів; у роботі [2] опис задачі лінійної дискримінації для евклідових просторів матриць; у роботі [3] формулювання та доведення прямих формул Ґревіля-Кириченка для кортежних операторів, пов'язаних з евклідовими просторами матриць; у роботі [4] формулювання задачі та доведення теорем щодо розв'язків задачі лінійної дискримінації в евклідових просторах матриць; у роботі [5] побудова апарату псевдообернененя для кортежних операторів визначених матричними кортежами, а також для спряжених до них; у роботі [6] постановка задачі та доведення теорем про умови існування розв'язків задачі лінійної дискримінації; у роботі [7] формулювання алгоритму розв'язання задачі лінійної дискримінації, [8] опис множини розв'язків чи псевдорозв'язків СЛАР в концепції кортежних операторів за матричними кортежами.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на кафедрі моделювання складних систем, кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка та представлені на наступних конференціях: міжнародна конференція «International conference Knowledge Dialogue-Solution» (Київ, Україна, 2012), міжнародна конференція «ITHEA-International Conference» (Варна, Болгарія, 2013), 2-га міжнародна науково-практична конференція «Інформаційні технології та взаємодія» (Київ, Україна, 2015), 18-та міжнародна конференція «System Analysis and Information Technology - SAIT» (Київ, Україна, 2016), 5-та міжнародна науково-практична конференція «Проблеми інформатики та комп'ютерної техніки – ПІКТ» (Чернівці, Україна, 2016), 27-а міжнародна конференція «Problems Of Decision Making Under Uncertainties – PDMU» (Тбілісі-Батумі, Грузія, 2016).

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 12 наукових праць, серед яких 5 наукових статей у фахових журналах України [1-3,7,8], 3 наукові статті у виданнях, що включені до міжнародної наукометричної бази [4-6], та 4 тез доповідей у збірниках матеріалів наукових конференцій [9-12].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, додатку та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 136 сторінок, список використаних джерел становить 130 найменувань на 12 сторінках, 2 додатки на 2 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертації, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, темами, сформульовано мету та визначено основні задачі дослідження, описано наукову новизну отриманих результатів та наведено практичне значення отриманих результатів, описано особистий внесок здобувача, наведено інформацію про апробації основних результатів роботи та публікації.

У **першому розділі** проведено огляд існуючих підходів до постановки розв`язання задач розпізнавання, групування інформації і наведені методи дослідження, зокрема, псевдообернення за Муром-Пенроузом, базові структури евклідового простору числових векторів, дослідження системи алгебраїчних рівнянь в евклідовому просторі числових векторів. Принциповою основою роботи є систематичне використання апарату псевдообернення в його класичному варіанті та у варіанті розвитку для нового класу операторів між евклідовими просторами: класу кортежних операторів. Важливою теоремою в такому використанні є розширена теорема про сингулярний розклад лінійного оператора Q, що діє між двома евклідовими просторами $E_1, E_2 : Q : E_1 \to E_2$.

Теорема 1. (розширена SVD). Для будь-якого лінійного оператора $Q : E_1 \to E_2$ існує набір ненульових сингулярностей $(v_i, \lambda_i^2), v_i \in E_1, i = \overline{1, r},\ \ r = \dim \Re(Q)$ та $(u_i, \lambda_i^2), u_i \in E_1, i = \overline{1, r}, r = \dim \Re(Q)$ для операторів Q^*Q та QQ^* відповідно із спільним набором ненульових власних чисел таких, що $u_i = \lambda_i^{-1} Q v_i, v_i = \lambda_i^{-1} Q^* u_i, i = \overline{1, r}$, а сам оператор може бути поданий у вигляді:

$$Qx = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i (v_i, x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i 1_{v_i} x,\ x \in E, \qquad Q^* y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i 1_{u_i} y, y \in E_2 \ ,$$

$\Re(Q)$ - область можливих значень оператора Q,

$1_z = (z, \cdot)$ - лінійний функціонал, породжений елементом евклідового простору.

Важливість використання розширення псевдообернення за Муром-Пенроузом на абстрактний випадок визначається тим, що Q^+Q та QQ^+ є ортогональними проекторами множини можливих значень $\Re(Q^*), \Re(Q)$ операторів Q^* та Q відповідно.

Теорема 2. (подання псевдообернення через SVD). Псевдооберненим (за Муром-Пенроузом) для $Qx = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i u_i (v_i, x), x \in E_1$, називається оператор, який позначається і визначається співвідношенням $Q^+ y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} v_i (u_i, y), y \in E_2$. Ортогональними

проекторами є і оператори $Z(Q) = I_{E_1} - Q^+Q$ та $Z(Q^*) = I_{E_1} - QQ^+$, що є ортогональними проекторами на ядра операторів Q, Q^* відповідно.

Так само, у цьому узагальненому випадку визначаються "групувальні" оператори

$R(Q) = Q^+ Q^{*+}$ та $R(Q^*) = Q^{*+} Q^+$

В цьому розділі також наведені результати підходу концепції відстаней відповідності в задачах кластеризації. Концепція відстаней відповідності полягає в тому, що віднесення вектору ознак y до того чи іншого кластеру Kl, що відповідає навчальній вибірці $a_1, \ldots, a_n$, здійснюється на основі мінімуму певних характеристик відповідності $p^2(y, Kl)$ (відстаней відповідності), які будуються для кожного з кластерів. Теорія псевдообернення за Муром-Пенроузом дозволяє ефективно будувати відстані відповідності на основі пов`язування ("занурення") із кластерами "природних" структур евклідового простору, якому належать елементи навчальної вибірки.

Такими природними структурами для занурення є базові структури евклідових просторів: підпростори (гіперплощини) чи еліпсоїди та мінімальні еліпсоїди групування. Важливою ланкою, що пов`язує навчальну вибірку $a_1, \ldots, a_n$ із відповідними структурами "занурення" є те, що вони можуть бути описані на основі оператора $A : A = (\alpha_1 \vdots \ldots \vdots \alpha_n)$, тобто оператора, що задається матрицею, побудованою із елементів навчальної вибірки як із "стовпчиків". Для випадку, коли елементи навчальної вибірки є числовими векторами, це дійсно матриця, побудована із векторів вибірки як із стовпчиків, для матричних навчальних вибірок, "стовпчикове" визначення оператора реалізується в концепції кортежного оператора. Пропоновані відстані відповідності через занурення у підпростір чи гіперплощину, власне, є відстанями від відповідних об`єктів. В роботах Т.П. Зінька та А.О. Голіка ця відстань була конструктивно описана через ортогональний проектор, що пов`язаний з відповідним підпростором. У цьому випадку відстань відповідності визначається співвідношенням:

$$\rho^2(y,Kl)=\begin{cases} y^r(E-AA^+)y, & \text{занурення у підпростір } L=L(a_1,\dots,a_n) \\ (y-\overline{a})^T(E-\mathring{A}\mathring{A}^+)(y-\overline{a}) & \text{занурення у гіперплощину } \overline{a}+L, \end{cases}$$

де $\overline{a_i}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i,\ \mathring{A}=(\mathring{a}_1,\dots,\mathring{a}_n),\ \mathring{a}_i=a_i-\overline{a}_i,\ i=\overline{1,n}.$

В тих самих позначеннях відстані відповідності на основі "занурення в еліпсоїди групування", ("центровані" та "нецентровані") визначаються співвідношенням

$$p^2(y,Kl)=\begin{cases} y^r\,\dfrac{R(A^T)}{r}\,y, \quad r=rankA, & \text{- центральний} \\ (y-\overline{a})^T\,\dfrac{R(\mathring{A}^T)}{r}\,(y-\overline{a}),\ r=rankA, & \text{- не центральний} \end{cases}$$

$$R(A^T)=A^{+T}A^+=(AA^T)^+,\ R(\mathring{A}^T)=\mathring{A}^{+T}\mathring{A}^+=(AA^T)^+.$$

У варіанті занурення у "мінімальні" еліпси групування відстані відповідності кластерам для кожного із досліджуваних кластерів - за тих самих позначень, що і раніше, визначаються співвідношеннями:

$$\rho^2(y,Kl)=\begin{cases} y^r\,\dfrac{R(A^T)}{r_{\min}}\,y, & \text{центральний} \\ (y-\overline{a})^T\,\dfrac{R(\mathring{A}^T)}{r_{\min}}\,(y-\overline{a}), & \text{не центральний} \end{cases} \quad r_{\min}=\begin{cases} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_i^T R(A^T)\alpha_i, \\ \max\limits_{i=\overline{1,n}} \mathring{\alpha}_i^T R(\mathring{A}^T)\mathring{\alpha}_i, \end{cases}$$

$r_{\min}\le r=rankA.$

Звернемо увагу, що вирази відстаней відповідності різних класів є різними, а віднесення до того чи іншого кластеру здійснюється за мінімумом значень відстаней відповідності обчислених для різних кластерів, за різними формулами.

У **другому розділі** представлені результати висунення та реалізації концепції кортежних операторів, яка дозволяє перенести властивості псевдообернення із евклідового простору числових векторів у евклідів простір матриць фіксованої розмірності. Наведене визначення матричного кортежу $\alpha=\ A_1,\dots,A_K\ ,A_k\in R^{m\times n},k=\overline{1,K}$ та кортежного оператора $\wp_\alpha$, що визначається матричним кортежем. Розвинена теорія кортежних операторів за матричними кортежами та спряжених до них, побудована теорія псевдообернення для таких кортежних операторів та спряжених. Отримані конструктивні формули для SVD розкладу та визначення ПдО чи спряжених до них. Конструктивність означає, що задача SVD кортежного оператора за матричним кортежем чи його спряженого зводиться до задачі на власні значення для звичайної матриці F- матриці Грама в $R^{m\times n}$ елементів $A_k \in R^{m\times n}, k=\overline{1,K}$ кортежу α.

В прикладних задачах набір $A_1,..,A_K$ представляє навчальну вибірку з "матричних" векторів ознак.

Кортежний оператор $\wp_\alpha$ за матричним кортежем $\alpha = (A_1,...,A_K)$, $A_k \in R^{m\times n}, k=\overline{1,K}$ визначається як лінійний оператор $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$, дія якого визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha x = \sum_{k=1}^{K} x_k A_k, x = (x_1 ... x_K)^T \in R^K.$$

В подальшому використовуватиметься кортежний оператор $\wp_{\tilde\alpha}$ за матричним кортежем $\tilde\alpha = (\tilde A_1,..,\tilde A_K) \in R^{m\times n}$: $\tilde A_k = A_k - \bar A,\ k=\overline{1,K},\quad \bar A = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} A_k$.

Прямим наслідком визначення кортежного оператора є твердження про співпадання лінійного підпростору, породженого набором матриць кортежу (навчальної вибірки в прикладних дослідженнях) , та підпростору можливих значень відповідного кортежного оператора. Це простий але важливий результат, що власне, визначає спосіб "генерації підпростору" слушним лінійний оператор.

При перенесенні теорії псевдообернення на кортежні оператори за матричними кортежами транспонування очевидним чином заміняється спряженістю, а білінійні форми, що визначають відстані відповідності записуватимуться за допомогою скалярного добутку в матричних евклідових просторах – через "слідовий" скалярний добуток $(A,B) \equiv tr(A^T B),\quad A,B \in R^{m\times n}$.

Теорема 3. Спряженим $\wp_\alpha^*$ до оператора $\wp_\alpha : R^K \to R^{m\times n}$ є лінійний оператор, що, діє у зворотному до $\wp_\alpha$ напрямку: $\wp_\alpha^* : R^{m\times n} \to R^K$, і визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \vdots \\ (A_K, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} trX^T A_1 \\ \vdots \\ trX^T A_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \vdots \\ l_{A_K} X \end{pmatrix};\ l_A X = (A, X).$$

Зауваження 1. Загалом структура спряженого кортежного оператора визначається набором значень лінійних функціоналів $l_{A_k}, k=\overline{1,K}$, заданих на евклідовому просторі $R^{m\times n}$. У випадку евклідового простору числових векторів таким набором лінійних функціоналів є рядки матриці лінійного оператора. Таким чином, спряжений до кортежного оператора за матричними кортежами - узагальнення матриці лінійного оператора, що діє між двома евклідовими просторами числових векторів.

*Зауваження 2***.** У варіанті кортежного оператора транспонування замінюється спряженістю, чим, власне є транспонованість, реалізована засобами матричної алгебри.

Теорема 4. Добутком двох операторів $\wp_\alpha^*, \wp_\alpha$ є лінійний оператор $\wp_\alpha^* \wp_\alpha : R^K \to R^K$, що задається матрицею F, - що її ототожнюватимемо із самим оператором, - яка визначається співвідношенням:

$$\wp_\alpha^*\wp_\alpha = ((A_i, A_j)) = \begin{pmatrix} trA_1^T A_1,...,trA_1^T A_K \\ \mathrm{L} \\ trA_K^T A_1,...,trA_K^T A_K \end{pmatrix} = F\,. \qquad (1)$$

Зауважимо, що оператор $\wp_\alpha^*\wp_\alpha : R^K \to R^K$ з матрицею F є звичайною матрицею лінійного оператором між Евклідовими просторами числових векторів R^K . Матриця F цього оператора визначена співвідношенням і є матрицею Грама в $R^{m\times n}$ елементів $A_1,..,A_K$ матричного кортежу $\alpha = (A_1 \mathrm{M} \mathrm{M} A_K)$, що задає оператор $\wp_\alpha$.

Сингулярний розклад для матриці F з (1) це сингулярний розклад звичайної симетричної невід'ємно визначеної матриці. Це означає, що задача побудови сингулярного розкладу для кортежного оператора за матричним кортежем, зважаючи на те, що $F = \wp_\alpha^*\wp_\alpha$ та абстрактну теорему про сингулярний розлад, зводиться до класичної задачі сингулярного розкладу для операторів між евклідовими просторами числових векторів. Цей розклад визначається набором ненульових сингулярностей $(v_k, \lambda_k^2) = \overline{1,r}, r = rankF$ матриці F: ортонормованим набором власних векторів $\| v_i \| = 1, v_i \perp v_j, i \neq j; i,j = \overline{1,r};$, та відповідних їм ненульових власних чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_r > 0$ що є власними для оператора

$$\wp_\alpha^*\wp_\alpha : R^K \to R^K : \wp_\alpha^*\wp_\alpha v_i = \lambda_i^2 v_i, i = \overline{1,r}\ .$$

Наслідок 1. Визначені за сингулярностями $(v_k, \lambda_k^2) = \overline{1,r}$ матриці $U_i \in R^{m\times n} : U_i = \frac{1}{\lambda_i}\wp_\alpha v_i, i = \overline{1,r}$ є повним набором ненульових сингулярностей $(U_i, \lambda_i^2), i = \overline{1,r}$ оператора $\wp_\alpha\wp_\alpha^*$.

Сингулярності двох операторів $\wp_\alpha^*\wp_\alpha$, $\wp_\alpha\wp_\alpha^*$ очевидним чином визначають сингулярний розклад оператора $\wp_\alpha$, як це випливає із розширеної теореми про сингулярний розклад оператора, що діє між двома евклідовими просторами E_1, E_2.

Теорема 5. (SVD-подання кортежного оператора). Для кортежного оператора $\wp_\alpha$ за матричним кортежем $\alpha = A_1,...,A_K$, $A_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$ у введених вище позначеннях є справедливим подання

$$\wp_\alpha = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k v_k^T = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k (v_k, \cdot) = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k 1_{v_k}.$$

Варіант сингулярного розкладу для кортежного оператора можна отримати, якщо зважити на те, що всі $U_i \in R^{m\times n}, i = \overline{1,r}$ визначаються співвідношенням $U_i = \frac{1}{\lambda_i}\wp_\alpha v_i, i = \overline{1,r}$, так що $\lambda_i U_i = \wp_\alpha v_i, i = \overline{1,r}$, а, отже,

$$\wp_\alpha = \sum_{k=1}^r \lambda_k U_k v_k^T = \sum_{k=1}^r \ \wp_\alpha v_k \ \ v_k^T\ .$$

Зауваження 3. Перехід від вектору $a \in R^n$ до a^T власне, є переходом до лінійного функціоналу, реалізованого засобами матричної алгебри. В матричних евклідових просторах той самий перехід є еквівалентним переходу до відповідної лінійної форми $l_A X = (A,X), A, X \in R^{m\times n}$.

Твердження теореми 5 свідчить, що побудова сингулярного розкладу кортежного оператора чи спряженого до нього зводиться до задачі на власні значення для лінійного оператора над R^K, що задається матрицею

$$F = \left(A_i, A_j \right)_{i,j=\overline{1,K}} : R^K \to R^K,$$

- матрицею Грама набору матриць $A_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$ в евклідовому просторі $R^{m\times n}$.
Крім того, є справедливими наступні теореми.

Теорема 6. Нехай $v_i, \lambda_i^2, i = \overline{1,r}$ - набір ненульових сингулярностей матриці $F, r = rank F \le K$, $\lambda_1^2 \ge \ldots \ge \lambda_r^2 > 0$ та $U_i = \dfrac{\wp_\alpha v_i}{\lambda_i}, i = \overline{1,r}$. Тоді є справедливим SVD - подання двох пов'язаних між собою операторів:

$$\wp_\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i U_i v_i^T, \; \wp_\alpha^* X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i \left(U_i, X \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i v_i l_{U_i} X.$$

Визначення ПдО для кортежних операторів та спряжених до них може бути визначена багатьма різними способами, зокрема, за сингулярним розкладом. Наявність сингулярного розкладу для кортежних операторів та спряжених до них забезпечує конструктивне визначення псевдообернення для них. Нагадаємо, що задача на побудову сингулярного розкладу для кортежних операторів за матричними кортежами зводиться до задачі на власні значення матриці Грама F набору матриць $A_k \in R^{m\times n}, k = \overline{1,K}$ кортежу α.

Означення. Псевдообренення кортежного оператора $\wp_\alpha$ за матричним кортежем α та його спряженого визначається співвідношеннями:

$$\wp_\alpha^+ X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} v_i \left(U_i, X \right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} v_i l_{U_i} X : R^{m\times n} \to R^K,$$

$$\wp_\alpha^{*+} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} U_i v_i^T = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^{-1} U_i \mathrm{l}_{v_i} : R^K \to R^{m\times n}.$$

Зауваження 4. Як і в стандартному варіанті визначення ПдО, спряження та перехід до ПдО комутують між собою:

$$\left(\wp_\alpha^* \right)^+ = \left(\wp_\alpha^+ \right)^*.$$

Для кортежного оператора за матричним кортежем α та спряженого до нього розглядатимуться відповідні пари за розширеним кортежем $\alpha | A = \left(A_1, \ldots, A_K, A \right)$, що позначатимуться відповідно $\wp_{\alpha,A}, \wp_{\alpha,A}^*$:

$$\wp_{\alpha,A} \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = \wp_{\alpha|A} \begin{pmatrix} z \\ \beta \end{pmatrix} = \wp_\alpha z + \beta A = \sum_{k=1}^{K} z_k A_k + \beta A \quad \forall z \in R^K, \beta \in R^1,$$

$$\wp_{\alpha,A}^* X = \begin{pmatrix} (A_1, X) \\ \ldots \\ (A_K, X) \\ (A, X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{A_1} \\ \ldots \\ l_{A_m} \\ l_A \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} l_{A_1} X \\ \ldots \\ l_{A_m} X \\ l_A X \end{pmatrix} : R^{m\times n} \to R^{K+1},$$

де $l_A, A \in R^{m\times n}$ позначає, як і раніше, лінійний функціонал, що визначається скалярним добутком:

$$l_A X = (A, X), X, A \in R^{m\times n}.$$

Зауваження 5. КорО $\wp^*_{\alpha,A}$ є спряженим до КорО $\wp_{\alpha,A}$:

$$\wp_{\alpha,A}{}^* = \wp^*_{\alpha,A}.$$

Обидва оператори визначаються за набором елементів $A, A_k \in R^{m\times n}, k=\overline{1,K}$, що очевидним чином визначають набори лінійних функціоналів $l_A X = (A,X), X \in R^{m\times n}$ чи $l_{A_k} X = (A_k, X), k=\overline{1,K}, X \in R^{m\times n}$ відповідно.

Зауваження 6. Спряжений до лінійного функціоналу має вигляд:

$$l^*_A z_1 = z_1 A, \quad z_1 \in R^1, \text{ тобто } l^*_A = A$$

Зауваження 7. Спряжений оператор $Ql_A{}^*$ до оператора $Ql_A : R^{m\times n} \to R^{m\times n}, Q, A \in R^{m\times n}$, дія якого визначається як $Ql_A X = Q\ A,X\ , X \in R^{m\times n}$, задається співвідношенням:

$Ql_A{}^* = Al_Q$, тобто для довільного $Y \in R^{m\times n}$ $Ql_A{}^* Y = A\ Q,Y$.

Теорема 7. Оператори, позначені як $P(\wp^*_\alpha), P(\wp_\alpha)$ та визначені співвідношеннями

$$P(\wp^*_\alpha) = \sum_{k=1}^{r} U_k (U_k,\cdot)_{tr}, P(\wp_\alpha) = \sum_{k=1}^{r} v_k (v_k,\cdot) = \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T.$$

є ортогональними проекторами $P_{L_{\wp_\alpha}}, P_{L_{\wp^*_\alpha}}$ на підпростори $L_{\wp_\alpha}, L_{\wp^*_\alpha}$ можливих значень операторів $\wp_\alpha, \wp^*_\alpha$ відповідно:

$$P(\wp^*_\alpha) = P_{L_{\wp_\alpha}}, P(\wp_\alpha) = P_{L_{\wp^*_\alpha}}.$$

а самі ці підпростори є лінійними оболонками відповідних ортонормованих наборів

$$L_{\wp_\alpha} = L(U_1,...,U_r), L_{\wp^*_\alpha} = L(v_1,...,v_r).$$

Теорема 8. Оператори $Z(\wp^*_\alpha), Z(\wp_\alpha)$, що є доповненням до тотожного оператора ортогональних проекторів: $P(\wp^*_\alpha), P(\wp_\alpha)$ відповідно:

$$Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - P(\wp_\alpha), Z(\wp^*_\alpha) \equiv E_{m\times n} - P(\wp^*_\alpha)$$

є ортогональними проекторами на ядра операторів $\wp_\alpha, \wp^*_\alpha$ відповідно.

В роботах А.О. Голіка наведені теореми для визначення відстаней відповідності на основі занурення у лінійні підпростори та гіперплощини, відстані до яких визначаються квадратичними формами з оператором $Z(\wp^*_\alpha)$.

Зауважимо, що зважаючи на конструктивну побудову сингулярного розкладу, так само конструктивно визначаються псевдообернення, а отже Z і P оператори.

Нагадаємо, $Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - P(\wp_\alpha), Z(\wp^*_\alpha) \equiv E_{m\times n} - P(\wp^*_\alpha)$ $E_K, E_{m\times n}$- тотожні оператори у відповідних просторах.

Відповідно до властивостей псевдообернення, мають місце наступні властивості:

$$P(\wp_\alpha) = \cdot\ \wp_\alpha \wp^+_\alpha, P(\wp^*_\alpha) = \wp^*_\alpha\ \ \wp^*_\alpha{}^+ = \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T.$$

Відповідно:

$$Z(\wp_\alpha) \equiv E_K - \wp^+_\alpha \cdot \wp_\alpha, \quad Z(\wp^*_\alpha) \equiv E_{m\times n} - \wp_\alpha \cdot \wp^+_\alpha = E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T.$$

В розділі 2 наведені також результати дослідження СЛАР з кортежними операторами. Ця задача досліджується так само як і у векторному випадку, з точністю до заміни $Z(A), Z(A^*)$ на відповідно $Z(\wp_\alpha), Z(\wp^*_\alpha)$ та A^+ на $\wp^+_\alpha$ у формулах, що визначають дослідження стандартної СЛАР над евклідовими просторами типу R^n . Можливість такого перенесення визначається повним співпадінням властивостей ПдО для матриць та ПдО для кортежного оператора за матричним кортежем. Це повною мірою стосується і концепції псевдорозв'язків як найкращих квадратичних наближень правої частини СЛАР значеннями лівої частини СЛАР. В рамках дослідження СЛАР наведені необхідні та достатні умови розв'язності СЛАР для кортежних операторів у евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності. Побудований множини розв'язків та псевдорозв'язків СЛАР для кортежних операторів за матричними кортежами. Теорія СЛАР для кортежних операторів чи спряжених до них повністю повторює як і в частині розв'язності так і в частині псевдорозв'язків відповідну теорію для СЛАР над евклідовим простором числових векторів.

У **третьому розділі** представлені результати використання теорії кортежних операторів за матричними кортежами, розвинутої в розглянутого в другому розділі: сингулярного розкладу, псевдообернення, дослідження СЛАР в евклідових просторах матриць фіксованої розмірності, - для постановки та розв'язання задачі лінійної дискримінації (ЛД задачі) в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності.

У роботах М.Ф Кириченко так само була поставлена та розв'язана ЛД задача у вигляді побудови гіперплощини занурення, у вигляді розв'язків слушної СЛАР: така постановка задачі дозволяє стискати інформацію про лінійний підпростір чи гіперплощину занурення до матриці чи вільного члену параметрів цієї СЛАР.

ЛД задача полягає в розділенні на два класи наборів матриць, представлених навчальною вибіркою, слушною гіперплощиною в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності. Гіперплощина в цьому контексті розумітиметься як лінійний підпростір на одиницю меншої розмірності ніж весь простір. ЛД задача полягає в тому, щоб елементи набору матриць у "матричному просторі ознак" $X(j)\in R^{m\times n}$, $j=\overline{1,N}$ - навчальної вибірки, - кожна з яких належить одному з двох класів кластерів Kl_1, Kl_2, побудувати гіперплощину, яка два піднабори "гарантовано" розділяє.

Для евклідових просторів числових векторів така задача була поставлена і розв'язана М.Ф Кириченком в наступному вигляді: для навчальної вибірки $x(j)\in R^m$, $j=\overline{1,N}$ такої що

$$x(j)\in Kl_1,\, j\in J_1, x(j)\in Kl_2,\, j\in J_2 : J_1\cap J_2=\varnothing, J_1\cup J_2=\{1,2,...,N\},$$

необхідно знайти $\Delta>0$ і визначити лінійний функціонал $1_a=a^T:R^m\to R^1$ таким чином щоб $(a^T,x_j)\ge\Delta, j\in J_1, (a^T,x_j)\le-\Delta, j\in J_2$.

Загалом, у такому самому вигляді задача лінійної дискримінації буде ставитися для евклідових просторів матриць.

Задача лінійної робастної дискримінації для евклідових просторів матриць матиме наступний вигляд: нехай $X_1,...,X_K\in R^{m\times n}$ множина матриць з навчальної вибірки представлена двома класами, такими що:

$$X_j\in Kl_1, j\in J_1, X_j\in Kl_2, j\in J_2 : \quad J_1\cap J_2=\varnothing, J_1\cup J_2=\{1,2,...,K\}.$$

необхідно знайти $\Delta > 0$ і визначити лінійний функціонал $l_A : R^{m\times n} \to R^1$ таким чином щоб $l_A X = (A, X_j) \geq \Delta,\ j \in J_1,\qquad l_A X = (A, X_j) \leq -\Delta,\ j \in J_2$.

Позначимо $\Omega(\Delta)$ множину числових векторів $y^T = (y_1,...,y_K)$ з R^K з компонентами, які задовольняють наступним обмеженням

$$y_j \geq \Delta,\ j \in J_1, y_j \leq -\Delta,\ j \in J_2.$$

Теорема 9. ЛД задача є рівносильною задачі існуванню в області $\Omega(\Delta)$ числового вектору $y \in \Omega(\Delta)$ для якого СЛАР $\wp_\chi^* X = y$ є розв'язною з кортежем χ, що визначається кортежем $\chi = (X_1 \ldots X_K)$, який відповідає "об'єднаній" навчальній вибірці.

Теорема 10. Якщо існує $y_* \in \Omega(\Delta) \subseteq R^K$ для якого СЛАР $\wp_\chi^* X = y_*$ є розв'язною, то задача ЛД має розв'язки, найменший за нормою з яких визначається співвідношенням:

$$A = \wp_\chi^{*+} y_*$$

Наслідок 2. ЛД задача має розв'язок якщо існує $y_* \in \Omega(\Delta) \subseteq R^K$ для якого виконується умова:

$$y_*^T Z(\wp_\chi) y_* = y_*^T (E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T) y_* = 0.$$

Теорема 11. ЛД задача рівносильна задачі квадратичної оптимізації в області $\Omega(\Delta)$ для квадратичної форми :

$$y^T Z(\wp_\chi) y = y^T (E_K - \sum_{k=1}^{r} v_k v_k^T) y$$

з нульовим значенням мінімуму.

Наслідок 3. Якщо в області $\Omega(\Delta) \subseteq R^K$ існує розв'язок оптимізаційної задачі, мінімізації квадратичної форми з нульовим значенням в точці мінімуму, тоді матриця A - розв'язок ЛД задачі і визначається через співвідношення:

$$A = \wp_\chi^{*+} y_*$$

згаданий розв'язок є мінімальним за нормою в $R^{m\times n}$.

Загалом, наведені твердження про існування розв'язку ЛД задачі реалізовуються у алгоритмі за фіксованого значення $\Delta > 0$.

Алгоритм розв'язання ЛД задачі з двома класами-кластерами для набору матриць $X_1,...,X_K \in R^{m\times n}$ складається з наступних кроків:

1-й крок: визначення матриці Грама для набору матриць "навчальної вибірки" визначаємо $X_1,...,X_N \in R^{m\times n}$:

$$F = \begin{pmatrix} trA_1^T A_1,...,trA_1^T A_K \\ \ldots \\ trA_K^T A_1,...,trA_K^T A_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle A_1, A_1 \rangle_{tr},..., \langle A_1, A_K \rangle_{tr} \\ \ldots \\ \langle A_K, A_1 \rangle_{tr},..., \langle A_K, A_K \rangle_{tr} \end{pmatrix};$$

2-й крок: визначення ненульових сингулярностей

$(v_i, \lambda_i^2), \lambda_i^2 > 0,\ v_i \in R^N, i = \overline{1,r},\quad r = rankF, v_i^T = (v_{1i},...,v_{Ni}), i = \overline{1,r},$ матриці F ;

3-й крок: визначення матриці $E_N - \sum_{i=1}^{r} v_i v_i^T$ квадратичної форми $Z(\wp_\chi)$;

4-й крок: розв’язання задачі на мінімуму квадратичної форми $y^T\left(E_N-\sum_{i=1}^{r}v_iv_i^T\right)y$ в області $\Omega(\Delta)\subseteq R^K$ числовими методами і визначення точки мінімуму y_*;

5-й крок: перевірка умови рівності мінімуму нулю екстремуму (мінімуму): $y_*^T\left(E_N-\sum_{i=1}^{r}v_iv_i^T\right)y_*=0$;

6-й крок: обчислення розв’язку ЛД задачі за нульового мінімуму:

- якщо задовольняється умова: $y_*^T\left(E_N-\sum_{i=1}^{r}v_iv_i^T\right)y_*=0$, тоді знаходження розв’язку A - ЛД задачі записується співвідношенням:

$$A=\wp_{\chi}^{*+}y_*=\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{-1}\frac{1}{\lambda_i}\sum_{n=1}^{N}X_nv_{ni}v_i^Ty_*=\sum_{i=1}^{r}\sum_{n=1}^{N}\lambda_i^{-2}v_{ni}X_nv_i^Ty_*$$

- якщо умова не задовольняється, тоді задача лінійної дискримінації не розв’язна.

Якщо ця задача не розв’язна, то, як і у евклідовому просторі числових векторів, можна рекурентно з певною дискретизацією зменшувати до нуля $\Delta>0$ чи застосовувати нелінійне покомпонентне перетворення для рядків матриць “навчальної вибірки”.

У **четвертому розділі** досліджується задача побудови рекурентних формул пседообернення за розширення матричного кортежу кортежного оператора додатковою матрицею. Власне, дослідження цього розділу представляють собою перенесення формул Ґревіля-Кириченка з матриць на кортежні оператори за матричними кортежами, операторів чи спряжених до них за розширенням кортежу новою матрицею. кортежними операторами в евклідових просторах, що надає нові. Як відомо в класичних формулах Ґревіля-Кириченка, прямих чи обернених, мова йде про рекурентні формули обчислення псевдообернення матриць за їхнім розширенням чи скороченням, рядками чи стовпчиками. У класичному варіанті цього результату мова йде про дослідження того, як змінюється ПдО матриці за її розширення рядком чи стовпчиком. Зважаючи на комутування ПдО та транспонування, результат формулюють зазвичай для варіанту розширення рядком. Результат перетворення залежить від того, чи є рядок, яким розширюється матриця лінійно залежним чи ні від решти рядків матриці. Можна говорити також про таку саму задачу, але пов’язану з викреслюванням рядку чи стовпчика. Комбінація двох варіантів: викреслювання та розширення дають можливість досліджувати задачу опису зміни ПдО матриці за заміни рядка чи стовпчика на інший. Прикладне значення формул Ґревіля-Кириченка в прямому варіанті: розширення, - чи в оберненому: викреслювання, - визначається тим, що техніка ПдО в лінійному регресійному аналізі дозволяє з одного боку - отримати повний опис задачі МНК- оцінювання параметрів як за виконання умови однозначності розвязку рівнянь Ґаусса-Маркова (повний стовпчиковий ранг матриці плану), так і без її виконанняю З іншого боку - формули Ґревіля-Кириченка дозволяють конструктивно реалізувати етапи статистичного аналізу, пов’язані із появою у вибірці нових спостережень, вилученням певних спостережень - аутлайєрів, заміну одних спостережень на інші. Пропонований варіант розширення сфери дії формул Ґревіля-Кириченка на матричні евклідові простори так само може бути використаний в задачах МНК - оцінювання лінійних форм від матричних аргументів.

В розділі представлені перенесення формул Ґревіля-Кириченка на кортежні оператори за матричними кортежами. Як і у класичному варіанті цих формул: для матриць - вигляд рекурентної залежності для псевдообернення визначається тим, чи є матриця, якою розширюється кортеж, лінійно залежною чи незалежною від решти матриць кортежу. Так само, умова лінійної залежності конструктивно описується в термінах слушних операторів ортогонального проектування, що будується за сингулярним розкладом кортежного оператора.

Так само, як і для просторів числових векторів, з ПдО кортежних операторів асоціюються дві пари операторів: ортогональні проектори та групувальні оператори (зважені проекційні) із тими самим способом використання, у зв’язку із вихідною матрицею та ПдО визначаються дві пари асоційованих з ПдО операторів:

- ортогональні проектори: $Z(\wp_{\alpha}) = E_K - \wp_{\alpha}^{*}\wp_{\alpha}$, $\quad Z(\wp_{\alpha}^{*}) = E_{m\times n} - \wp_{\alpha}^{*}{}^{+}\wp_{\alpha}^{*} \overset{теорема}{=} E_{m\times n} - \wp_{\alpha}\wp_{\alpha}^{+}$,

  $E_{m\times n}$ - тотожній в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності; один з них: $Z(\wp_{\alpha}^{*})$ - визначає необхідну і достатню умову лінійної залежності - незалежності доданої матриці від решти матриць-елементів кортежу: $A, Z(\wp_{\alpha}^{*})A = 0$ - лінійна залежність, $A, Z(\wp_{\alpha}^{*})A > 0$ - лінійна незалежність;

- групувальні оператори:

  $R(\wp_{\alpha}) = \wp_{\alpha}^{+}\wp_{\alpha}^{+*} \overset{теорема}{=} \wp_{\alpha}^{*}\wp_{\alpha}{}^{+}$, $\quad R(\wp_{\alpha}^{*}) = \wp_{\alpha}^{*}{}^{+}\left(\wp_{\alpha}^{*}{}^{+}\right)^{T} \overset{теорема}{=} \wp_{\alpha}\wp_{\alpha}^{*}{}^{+}$.

Загалом, формулювання результату має вигляд наступної теореми.

Теорема 12. Псевдообернення спряженого $\wp_{\alpha,A}^{*}$ до кортежного оператора за розширеним кортежем за лінійної незалежності чи залежності A від решти елементів $A_1,...,A_K$ кортежу $\alpha = (A_1,...,A_K)$ визначається співвідношенням:

$$\wp_{\alpha,A}^{+} = \begin{pmatrix} \wp_{\alpha}^{*} \\ l_A \end{pmatrix}^{+} = E_{m\times n} - Ql_A \;\; \wp_{\alpha}^{*+} \mathrm{M}Q \;, \qquad Q = \begin{cases} \dfrac{Z(\wp_{\alpha}^{*})l_A}{A, Z(\wp_{\alpha}^{*})A} A & лін.\ нез. \Leftrightarrow\ A, Z(\wp_{\alpha}^{*})A > 0 \\ \dfrac{R(\wp_{\alpha}^{*})A}{1 + (A, R(\wp_{\alpha}^{*})A)} & лін.зал. \Leftrightarrow\ A, Z(\wp_{\alpha}^{*})A = 0 \end{cases}.$$

Теорема 13. Псевдообернення кортежного оператора $\wp_{\alpha,A}$ за розширеним кортежем за лінійної залежності A від елементів $A_1,...,A_K$ кортежу $\alpha = (A_1,...,A_K)$ визначається співвідношенням:

$$\wp_{\alpha}\mathrm{M}A^{+}Y = \begin{pmatrix} \wp_{\alpha}^{+}\left(E_{m\times n} - A\dfrac{Y, R(\wp_{\alpha}^{*})A}{1 + (A, R(\wp_{\alpha}^{*})A)} \right) \\ \dfrac{Y, R(\wp_{\alpha}^{*})A}{1 + (A, R(\wp_{\alpha}^{*})A)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wp_{\alpha}^{+}\left(E_{m\times n} - Al_{\frac{R(\wp_{\alpha}^{*})A}{1 + (A, R(\wp_{\alpha}^{*})A)}} Y \right) \\ l_{\frac{R(\wp_{\alpha}^{*})A}{1 + (A, R(\wp_{\alpha}^{*})A)}} Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \wp_{\alpha}^{+} \;\; E_{m\times n} - Al_Q \\ l_Q \end{pmatrix} Y ,$$

$Y \in R^{m\times n}$,

де

$$Q=(R(\wp_{\alpha}^{*})A)/(1+(A,R(\wp_{\alpha}^{*})A)) \ .$$

Тобто:

$$\wp_{\alpha} \mathrm{M}A^{+}=\begin{pmatrix} \wp_{\alpha}^{+} \ \ E_{m\times n}-Al_{Q} \\ l_{Q} \end{pmatrix}.$$

ВИСНОВКИ

Дисертація є завершеним науковим дослідженням, в якому розв`язується важлива наукова проблема – побудова математичних засобів групування інформації для евклідових просторів матриць фіксованої розмірності. Розв'язання згаданої задачі досягнуто реалізацією концепції кортежних операторів за матричними кортежами: введенням спеціального класу операторів, дослідження яких і дозволяє перенести засоби групування інформації з евклідових просторів числових векторів на евклідові простори матриць фіксованої розмірності.

В роботі введений спеціальний клас лінійних операторів: кортежних за матричними кортежами, побудований конструктивний математичний апарат сингулярного розкладу та псевдообернення за Муром–Пенроузом. Конструктивність означає, що відповідні задачі зводяться до задачі на власні значення для звичайних матриць. Сингулярний розклад та псевдообренення, в такий самий спосіб, як і випадку R^n, застосовано для побудови та дослідження базових структур в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності. Отримані результати дозволяють реалізувати методи, моделі та алгоритми кластеризації, загалом групування інформації для важливих класів задач з матричними представниками. При цьому отримані наступні нові наукові та практичні результати:

- реалізовано концепцію кортежних операторів для матричних кортежів, що дало можливість побудувати конструктивну теорію SVD (сингулярний розклад) та псевдообернення для таких операторів;
- вичерпно та конструктивно досліджено систему лінійних алгебраїчних рівнянь для кортежних операторів та спряжених до них;
- сформульовано та розв’язано задачу лінійної робастної дискримінації в матричних евклідових просторах;
- сформульовано та розв'язано задачу рекурентного обчислення псевдообернення для кортежних операторів та спряжених до них за розширення кортежів новими матричним елементами для матриць: побудовано аналоги прямих формул Ґревіля-Кириченка;
- удосконалено засоби дослідження лінійних та нелінійних базових структур в матричних евклідових просторах;
- побудовано низку методів розв'язання задач групування інформації для представників з матричних евклідових просторів.

Результати наукового дослідження методів та алгоритмів псевдообернення в евклідовому просторі матриць для розв'язання прикладних задач у сучасних інформаційних системах, отримані в рамках підготовки кандидатської дисертації впроваджені у 2013-2014 н.р. у навчальний процес кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка при викладанні курсу "Обробка інформації в умовах невизначеності" для студентів 1 курсу магістратури за спеціальністю "Системи і методи прийняття рішень", а також застосовано при виконанні науково-дослідної теми №11БФ015-06 "Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж".

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях

1. Donchenko V. S. Development of pseudo inverse techniques: cortege operators and applications in grouping information problem / V. S. Donchenko, F. M. Skotarenko // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – No. 1. – С. 85–90.

2. Donchenko V.S. Cortege operators in grouping information problem: linear discrimination of matrix 'Feature Vectors' / V. S. Donchenko, F. M. Skotarenko // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2014. – No. 3. – С. 101–104.

3. Donchenko V. S. Direct formulas Greevil – Kirichenko for matrix Euclidean spaces / V. S. Donchenko, F. M. Skotarenko // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – No. 1. – С. 119–123.

4. Скотаренко Ф. Алгоритм лінійної дискримінації для матричних просторів та його основи / Ф.М Скотаренко // Вісник Київського національного університету ім. Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2015. – No 2. – С. 121–127.

Статті [1-4] опубліковані у виданні України, яке включене до міжнародної наукометричної бази ВІНІТІ РАН, української реферативної бази даних «Україніка наукова» та українського реферативного журналу «Джерело».

5. Donchenko, V. S. "'Feature vectors' in grouping information problem in applied mathematics: vectors and matrices" / V. S. Donchenko, T. P. Zinko, F. M. Skotarenko // Problems of Computer Intellectualization, Kyiv, Ukraine, ITHEA.–2012. – P. 111–124.

6. Donchenko V. S. Spreading the Moore-Penrose pseudo inverse on matrixes Euclidean spaces: theory and applications / V. S. Donchenko, T. P. Zinko, F. M. Skotarenko // ITHEA International Journal Information content and processing (IJI CP), Varna, Bulgaria – 2014. Vol. 1, No. 2. –P.115–123.

7. Donchenko V. S. Matrix 'Feature Vectors' in Grouping Information Problem: linear discrimination / V. S. Donchenko, F. M. Skotarenko // ITHEA International

Journal Information Technologies and Knowledge" (IJ ITK) Varna, Bulgaria– 2014. – Vol. 21, No. 1. –P. 40–47.

Статті [5-7] опубліковані у міжнародному журналі, який включений до міжнародних наукометричних баз Worldcat, ROAD Directory of Open Access scholarly Resources, Google Scholar, CiteseerX, ITHEA.

8. Донченко В.С Концепція кортежності для лінійних операторів та її реалізація для матричних кортежів / В. С. Донченко, Т. П. Зінько, Ф. М. Скотаренко // Журнал Обчислювальної та прикладної математики. –2015, –№3. –С. 127–140. ISSN – 0868–6912.

Стаття 8 опублікована у виданні України, яке включене до міжнародних наукометричних баз DOAJ (Directory of Open Access Journals) , Index Copernicus International, Google Scholar, eLIBRARY, ВІНІТІ РАН, української реферативної бази даних «Україніка наукова» та українського реферативного журналу «Джерело».

Тези наукових конференцій

9. Скотаренко Ф. Лінійна Дискримінація в задачах розпізнавання з матричними представниками / Ф. Скотаренко // 2-га Міжнародна Науково-Практична Конференція 'Інформаційні технології та взаємодія' (IT&I), 3-5 листопада 2015. –С. 273–274.
10. Скотаренко Ф. Формули Ґревіля-Кириченка для матричних Евклідових просторів / Ф. Скотаренко // 5-та Міжнародна Науково-Практична Конференція «Проблеми інформатики та комп’ютерної техніки» ПІКТ.–2016. –С. 123–124.
11. Скотаренко Ф. Базові структури евклідових просторів в прикладних задачах: кортежні оператори для матричних кортежів / В.С. Донченко, Т.П. Зінько, Ф.М. Скотаренко // 18-th International Conference SAIT 2016 (System Analysis and Information Technology). –2016.–С. 78–79.
12. Skotarenko F. Grouping Information Problem: Linear Discrimination Matrix ‘Feature Vectors’ / F.M. Skotarenko // XXVII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties. –2016.–С. 215–216.

АНОТАЦІЯ

Скотаренко Ф.М. Розробка математичних методів групування інформації з матричними ознаками. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

В дисертаційній роботі пропонується розвиток моделей, методів та алгоритмів кластеризації в задачах розпізнавання мови та мови жестів. Запропоновані різні підходи до формування векторів ознак у векторній та матричній формі.

Пропонується розвиток теорії псевдообернення за Муром–Пенроузом, зокрема, в матричних евклідових просторах, поставлено та розв’язано задачу лінійної робастної дискримінації в матричних евклідових просторах, побудовано аналоги прямих формул Ґревіля-Кириченка для матричних евклідових просторів.

Введений спеціальний клас лінійних операторів: кортежних за матричними кортежами, побудований конструктивний математичний апарат сингулярного розкладу та псевдообернення за Муром–Пенроузом. Конструктивність означає, що відповідні задачі зводяться до задачі на власні значення для звичайних матриць. Сингулярний розклад та псевдообренення, в такий самий спосіб, як і випадку R^n, застосовано для побудови та дослідження базових структур в евклідовому просторі матриць фіксованої розмірності. Отримані результати дозволяють реалізувати методи, моделі та алгоритми кластеризації, загалом групування інформації для важливих класів задач з матричними представниками.

Ключові слова: кластеризація, розпізнавання мови, розпізнавання жестів, вектори ознак, псевдообернення, базові структури евклідового простору, задача групування інформації, рекурентні формули Ґревіля-Кириченка, сингулярний розклад, задача лінійної робастної дискримінації.

АННОТАЦИЯ

Скотаренко Ф.М. Разработка математических методов группировки информации с матричными характеристиками – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

В диссертации предлагается развитие моделей, методов и алгоритмов кластеризации в задачах распознавания речи и языка жестов. Предложены разные подходы к формированию векторов признаков в векторной и матричной форме. Предлагается развитие теории псевдообращение за Муром-Пенроузом, в часности, в матричных евклидовых пространствах, была поставлена та решена задача линейной робастной дискриминации в матричных евклидовых пространствах, сформулированы аналоги прямых формул Гревиля-Кириченка в матричных евклидовых.

При этом были получены следующие новые научные и практические результаты:

- реализована концепция кортежных операторов для матричных кортежей, что позволило построить конструктивную теорию SVD-(сингулярный разложение) и псевдообращения для таких операторов;
- сформулирована и решена задача линейной робастной дискриминации в матричных евклидовых пространствах;
- исчерпывающе и конструктивно исследована система линейных алгебраических уравнений для кортежных операторов и сопряженных с ними;

- сформулирована и решена задача рекуррентного вычисления псевдообращения для кортежных операторов и сопряженных с ними за расширением кортежей новыми матричным элементами, для матриц построены аналоги прямых формул Гревиля-Кириченко;
- усовершенствованы методы исследования линейных и нелинейных базовых структур в матричных евклидовых пространствах;
- получило дальнейшего развития решения задачи построения сингулярного представления как самих кортежных операторов, так и сопряженных с ними, сведением к задаче на собственные значения для классических матричных операторов;
- предложено конструктивное построение псевдообратных операторов до самых кортежных и сопряженных с ними, что позволило создание основы к построению ряда методов решения задач группировки информации для представителей из матричных евклидовых пространств.

Ключевые слова: кластеризация, распознавание речи, векторы признаков, псевдообращения, базовые структуры евклидового пространства, задача группировки информации, рекуррентные формулы Гревиля-Кириченко, сингулярное разложение, задача линейной робастной дискриминации.

ANNOTATION

Skotarenko F.M. Development of mathematical methods for group information problem with matrices characteristics. – Manuscript.

The dissertation for obtaining the candidate of physico-mathematical sciences on the specialty 01.05.04 – system analysis and theory of optimal decisions. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation is devoted to development of models, methods and algorithms for clustering of speech and gestures. Different approaches to formation of feature vectors in vector and matrix form are covered. Development of the Moore–Penrose pseudoinverse theory, in particular, in matrix Euclidean spaces, raised and solved the problem of linear matrix robust discrimination in Euclidean spaces, built analogues Greevil – Kirichenko direct formulas for the matrix of Euclidean space.

Introduced a special class of linear operators: cortege for cortege of matrixes built constructive mathematical tools singular decomposition and pseudoinverse Moore-Penrose. Constructability means that the relevant tasks are reduced to the eigen value problem for ordinary matrices. Singular value decomposition and in the same way as the case used in R^n, to construct and learn the basic structures in Euclidean space matrices fixed dimension. The results allow to realize the methods, models and algorithms for clustering, grouping general information for important classes of problems with matrix representatives.

Key words: clustering, speech recognition, feature vectors, pseudoinverse, the basic structure of Euclidean space, group information problem, recurrence formula Greevil-

Kirichenko, singular value decomposition, linear robust discrimination.