

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Рець Вадим Олександрович

УДК 519.6:519.852

ДИСЕРТАЦІЯ
МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ
ІНФОРМАЦІЙНОГО РОЗПОВСЮДЖЕННЯ З УРАХУВАННЯМ
НЕЧІТКОГО СПРИЙНЯТТЯ ПЛИНУ ЧАСУ

124 — Системний аналіз
Інформаційні технології

Подається на здобуття наукового ступеня
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_____ Рець

Науковий керівник: **Івохін Євген Вікторович**,
доктор фізико-математичних наук, професор

Київ — 2026

АНОТАЦІЯ

Рець В. О. Моделі та методи дослідження процесів інформаційного розповсюдження з урахуванням нечіткого сприйняття плину часу. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 124 — Системний аналіз. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка; Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2026.

Підготовка дисертаційної роботи здійснювалась на кафедрі системного аналізу та теорії прийняття рішень факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Дисертаційна робота присвячена розробці гібридної дворівневої математичної моделі процесів інформаційного розповсюдження в соціальних системах з урахуванням нечіткого характеру часових параметрів. Актуальність дослідження зумовлена зростаючою роллю інформаційних процесів у сучасному суспільстві та необхідністю розробки адекватних математичних інструментів для їх аналізу на різних просторово-часових масштабах.

Прикладні задачі, які пов'язані з вирішенням проблем транспортної та мережевої маршрутизації, з дослідженням процесів розповсюдження інформації наразі привертають велику увагу не лише в логістиці, але й у сфері соціальних комунікацій, маркетингу, управління інформаційними кампаніями та кризовими ситуаціями. Важливою особливістю реальних задач є наявність невизначеності у вхідних даних, що зумовлена неповнотою інформації, варіативністю умов середовища та суб'єктивним характером сприйняття часових та просторових параметрів. За таких умов необхідно

розробити нові нетипові методики розв'язання відомих задач.

Поєднання підходів з комбінаторної оптимізації, теорії нечітких множин, фізичного моделювання дифузійних процесів та методів аналізу соціальних мереж відкриває перспективи для дослідження та моделювання поведінки складних систем інформаційного розповсюдження. Інтеграція цих підходів дозволяє створювати міждисциплінарні моделі, які враховують як об'єктивні фізичні закономірності процесів розповсюдження, так і суб'єктивні когнітивні та соціальні фактори, що впливають на сприйняття та передачу інформації у суспільстві.

Центральною ідеєю роботи, на основі якої проведено дослідження та отримано нові наукові результати, є встановлення аналогії між фізичними процесами теплопровідності та соціальними процесами розповсюдження інформації. На верхньому (зовнішньому або макроскопічному) рівні гібридної моделі процес описується рівняннями дифузійного типу, що характеризують загальну динаміку поширення інформації як неперервний процес. На нижньому (внутрішньому або мікроскопічному) рівні процес послідовного інформування учасників мережі формалізується як задача комівояжера з нечіткими часовими параметрами.

Для зовнішнього рівня моделі розроблено аналітичні методи розв'язання рівняння теплопровідності для одновимірного та двовимірного випадків методом розділення змінних та з використанням функції Гріна. Запропоновано метод багаторівневої декомпозиції прямокутних областей для двовимірної задачі з точковими джерелами.

Для нижнього рівня моделі розглянуто та досліджено задачу комівояжера як модель оптимізації послідовності контактів у мережевих структурах. З метою пошуку оптимальних маршрутів адаптовано метод імітації відпалу для забезпечення роботи з нечіткими вхідними параметрами на основі інтеграції методів дефазифікації. Проведено ряд чисельних експериментів і порівняльний аналіз результатів, отриманих при використанні

трикутних та параболічних нечітких чисел для моделювання суб'єктивного сприйняття часу.

Взаємодія рівнів гібридної моделі реалізується у вигляді ітеративного процесу, в якому результати макрорівневої моделі використовуються як вхідні дані для мікрорівневої оптимізації, а результати мікрорівневої оптимізації можуть коригувати параметри макромоделі.

Процес розповсюдження інформації на основі гібридної моделі описується рівняннями дифузійного типу, що характеризують загальну динаміку інформаційного поширення як неперервний процес, аналогічний процесу теплопровідності. Запропонована модель визначає просторово-часовий розподіл рівня інформованості, враховуючи коефіцієнт дифузії, що відображає сприйнятливність суспільства до нової інформації. Вимоги щодо оперативного поширення інформації передбачає формалізацію процесу послідовного інформування учасників мережі у вигляді задачі комівояжера з нечіткими часовими параметрами, що враховує суб'єктивне сприйняття часу та невизначеність в оцінках тривалості комунікацій.

Доцільність дворівневого підходу обґрунтовано з позицій теорії багатомасштабного моделювання. Розглянуто різні механізми поширення інформації: на макрорівні спрацьовують ефекти дифузії та впливу засобів масової інформації, тоді як на мікрорівні визначальними є особисті контакти, послідовність взаємодій та психологічні особливості сприйняття часу. Гібридна модель дозволяє поєднати переваги неперервного дифузійного опису (аналітичні розв'язки, фізична інтерпретація) з можливостями дискретної комбінаторної оптимізації (врахування структури мережі, суб'єктивних факторів).

Встановлена аналогія між процесами теплопровідності та дифузії інформації відповідає їх спільній природі: так само, як тепло природно поширюється від областей з вищою температурою до областей з нижчою, інформація має тенденцію розповсюджуватися від джерел з високою кон-

центрацією знань до менш поінформованих частин суспільства. Формалізовано відповідність параметрів розглянутих процесів: коефіцієнт теплопровідності відповідає сприйнятливості суспільства до нової інформації, температура джерела – агресивності джерела інформації, порогова температура – бажаному рівню обізнаності. Ця аналогія формує теоретичну основу верхнього рівня гібридної моделі.

Розроблено програмне забезпечення для практичного використання запропонованих методів. Проведено обчислювальні експерименти на тестових задачах з бібліотеки TSPLib з відкритим доступом та для типових конфігурацій задач теплопровідності.

Ключові слова: гібридна дворівнева модель, задача комівояжера, нечіткі числа, метод відпалу, суб'єктивне сприйняття тривалості часових інтервалів, дифузія інформації, рівняння теплопровідності, функція Гріна, метод розділення змінних, дефазифікація, багаторівнева декомпозиція.

ABSTRACT

Rets V. O. Models and methods for studying information dissemination processes considering fuzzy perception of time flow. — Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of philosophy degree in speciality 124 — System analysis. — Taras Shevchenko National University of Kyiv; Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, 2026.

The preparation of the dissertation work was carried out at the Department of Systems and Methods of Decision-making, Faculty of Computer Science and Cybernetics of the Taras Shevchenko National University of Kyiv.

The dissertation is devoted to the development of a hybrid bilevel mathematical model for information dissemination processes in social systems, taking into account the fuzzy nature of temporal parameters. The relevance of the research is driven by the growing role of information processes in modern society and the need to develop adequate mathematical tools for their analysis at different spatiotemporal scales.

Applied problems related to solving transport and network routing problems, as well as studying information dissemination processes, currently attract significant attention not only in logistics but also in social communications, marketing, management of information campaigns and crisis situations. An important feature of real-world problems is the presence of uncertainty in input data, caused by incomplete information, variability of environmental conditions, and the subjective nature of perception of temporal and spatial parameters. Under such conditions, it is necessary to develop new unconventional methods for solving well-known problems.

The combination of approaches from combinatorial optimization, fuzzy set theory, physical modeling of diffusion processes, and social network analysis methods opens perspectives for studying and modeling the behavior of complex information dissemination systems. The integration of these approaches allows creating interdisciplinary models that account for both objective physical regularities of dissemination processes and subjective cognitive and social factors that influence the perception and transmission of information in society.

The central idea of the work, on the basis of which the research was conducted and new scientific results were obtained, is establishing an analogy between physical heat conduction processes and social information dissemination processes. At the upper (external or macroscopic) level of the hybrid model, the process is described by diffusion-type equations characterizing the general dynamics of information spread as a continuous process. At the lower (internal or microscopic) level, the sequential informing of network participants is formalized as a traveling salesman problem with fuzzy temporal parameters.

For the external level of the model, analytical methods for solving the heat equation for one-dimensional and two-dimensional cases have been developed using the method of separation of variables and Green's function. A multi-level decomposition method for rectangular domains is proposed for the two-dimensional problem with point sources.

For the lower level of the model, the traveling salesman problem has been considered and investigated as a model for optimizing the sequence of contacts in network structures. To find optimal routes, the simulated annealing method has been adapted for working with fuzzy input parameters through the integration of defuzzification methods. A series of numerical experiments and comparative analysis of results obtained using triangular and parabolic fuzzy numbers for modeling subjective time perception have

been conducted.

The interaction between levels of the hybrid model is implemented as an iterative process in which the results of the macro-level model are used as input data for micro-level optimization, and the results of micro-level optimization can adjust the parameters of the macro-model.

The information dissemination process based on the hybrid model is described by diffusion-type equations characterizing the general dynamics of information spread as a continuous process analogous to heat conduction. The proposed model determines the spatiotemporal distribution of awareness levels, taking into account the diffusion coefficient that reflects society's susceptibility to new information. Requirements for operational information dissemination involve formalizing the process of sequential informing of network participants as a traveling salesman problem with fuzzy temporal parameters, accounting for subjective time perception and uncertainty in estimates of communication duration.

The feasibility of the bilevel approach is justified from the perspective of multi-scale modeling theory. Various mechanisms of information dissemination are considered: at the macro level, the effects of diffusion and mass media influence operate, while at the micro level, personal contacts, sequence of interactions, and psychological features of time perception are determining factors. The hybrid model allows combining the advantages of continuous diffusion description (analytical solutions, physical interpretation) with the capabilities of discrete combinatorial optimization (accounting for network structure, subjective factors).

The established analogy between heat conduction and information diffusion processes corresponds to their common nature: just as heat naturally spreads from regions of higher temperature to regions of lower temperature, information tends to disseminate from sources with high concentration of knowledge to less informed parts of society. The correspondence of param-

eters of the considered processes has been formalized: the thermal conductivity coefficient corresponds to society's susceptibility to new information, the source temperature corresponds to the aggressiveness of the information source, and the threshold temperature corresponds to the desired level of awareness. This analogy forms the theoretical foundation of the upper level of the hybrid model.

Software has been developed for practical application of the proposed methods. Computational experiments have been conducted on test problems from the open-access TSPLib library and for typical heat conduction problem configurations.

Key words: hybrid bilevel model, traveling salesman problem, fuzzy numbers, simulated annealing, subjective perception of time flow, information diffusion, heat conduction equation, Green's function, separation of variables method, defuzzification, multi-level decomposition.

Перелік умовних позначень і скорочень

ЗК (TSP) – задача комівояжера (Travelling Salesman Problem)

ДЗК (DTSP) – динамічна задача комівояжера (Dynamic Travelling Salesman Problem)

ЗМЗ (VRP) – задача маршрутизації транспортних засобів (Vehicle Routing Problem)

НЧ – нечіткі числа

ТНЧ – трикутні нечіткі числа

ПНЧ – параболічні нечіткі числа

ДРЧП – диференціальні рівняння в частинних похідних

ЗШЛ – задача Штурма-Ліувілля

COG – Center of Gravity (метод центру тяжіння)

BOA – Bisector of Area (метод бісектора площі)

MOM – Mean of Maximum (метод максимального значення)

TSPLib – бібліотека тестових задач комівояжера

a – коефіцієнт теплопровідності ($\text{м}^2/\text{с}$)

L – довжина стрижня або характерний розмір області (м)

T_0 – початкова температура ($^{\circ}\text{C}$)

T_s – температура джерела ($^{\circ}\text{C}$)

T_{target} – цільова температура ($^{\circ}\text{C}$)

Q_0 – потужність джерела тепла

$u(x, t)$ – функція розподілу температури

$G(x, y, t)$ – функція Гріна

λ_n – власні значення задачі Штурма-Ліувілля

$\varphi_n(x)$ – власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$\mu_A(x)$ – функція належності нечіткої множини A

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Статті у наукових фахових виданнях категорії “А” (включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science):

1. Ivohin E., Rets V. Mathematical modeling of information diffusion process based on the principles of thermal conductivity // System research and information technologies. – 2025. – № 3. – С. 128–136. – DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2025.3.10
2. Rets V. Solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2023. – № 2. – С. 226–231. – DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.39
3. Ivohin E.V., Adzhubey L.T., Makhno M.F., Rets V.O. About of the traveling salesman problem solution based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2024. – № 4. – С. 56–63. – DOI: 10.15588/1607-3274-2024-4-5

Статті у наукових фахових виданнях категорії “Б”:

4. Івохін Є.В., Махно М.Ф., Рець В.О. Про один спосіб аналізу тональності текстів за допомогою штучних нейронних мереж // Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава: ПНТУ. – 2022. – Т. 3 (69). – С. 71–74. – DOI: 10.26906/SUNZ.2022.3.071

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Тези доповідей на наукових конференціях:

5. Рець В.О. Про розв'язування однієї нечіткої задачі комівояжера на основі методу відпалу // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції “Шевченківська весна – 2023”. – Київ, 14 квітня 2023 р. – С. 103.
6. Івохін Є.В., Махно М.Ф., Рець В.О., Руських Ю.О. Про спосіб аналізу тональності текстів за допомогою штучних нейронних мереж // П'ята міжнародна науково-практична конференція “Сучасні тенденції розвитку інформаційних систем і телекомунікаційних технологій”. – Київ: НУХТ, 1 червня 2023 р. – С. 45.
7. Івохін Є.В., Рець В.О., Кіптик К.В. Про розв'язання задачі комівояжера з ура-

- хуванням суб'єктивного сприйняття обліку часу // Матеріали XVI міжнародної науково-технічної конференції “АВІА-2023”. – Київ: НАУ, 18–20 квітня 2023 р. – С. 15.32–15.34.
8. Ivohin E.V., Rets V.O., Kiptyk K.V. On one method of solving the traveler problem with regard to the subjective perception of time accounting // XXXVIII міжнародна конференція “Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності” (PDMU-2023). – 11–15 вересня 2023 р. – С. 48–49.
 9. Ivohin E., Rets V., Adzhubey L. About approach to solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference. – 2023. – № 6. – P. 61–64. – DOI: 10.31713/MCIT.2023.015
 10. Івохін Є.В., Рець В.О. Про один підхід до моделювання процесу поширення інформації на основі принципів теплопровідності // Матеріали I Міжнародної науково-практичної конференції “Інформаційні системи та технології: результати і перспективи” (IST 2024). – Київ, 6 березня 2024 р. – С. 347–349.
 11. Івохін Є.В., Рець В.О. Про підхід до розв’язання нечіткої двокритеріальної задачі комівояжера // Матеріали X Міжнародної науково-технічної Internet-конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – Київ: НУХТ, 24 листопада 2023 р. – С. 184.
 12. Івохін Є.В., Рець В.О. Про один підхід до моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі системи клітинних автоматів // Матеріали XII Міжнародної науково-технічної Internet-конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – Київ: НУХТ, 27 листопада 2025 р. – С. 335–336.

ЗМІСТ

Вступ	15
Розділ 1. МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ	23
1.1. Проблеми дослідження процесів інформаційного розповсюдження	23
1.2. Моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі дифузійних рівнянь	27
1.3. Задача комівояжера як модель формалізації процесів поширення інформації	36
1.4. Застосування нечітких чисел для моделювання інформаційних процесів в умовах невизначеності	42
1.5. Гібридна дворівнева модель інформаційного розповсюдження	50
1.6. Висновки до розділу 1	58
Розділ 2. ДИФУЗІЙНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ	62
2.1. Аналітичні методи розв'язання рівняння теплопровідності для моделювання інформаційної дифузії	62
2.2. Методи оптимізації інформаційного розповсюдження на основі рівняння теплопровідності (одновимірний випадок)	64
2.3. Моделювання процесу розповсюдження інформації у двовимірному випадку	69
2.4. Висновки до розділу 2	83

Розділ 3. МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ НЕЧІТКОГО СПРИЙНЯТТЯ ЧАСУ	85
3.1. Метод відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості переміщень на мережі	85
3.2. Визначення методів дефазифікації та порівняння нечітких чисел	91
3.3. Результати застосування методу відпалу для розв'язання задачі комівояжера з нечіткими параметрами	94
3.4. Висновки до розділу 3	98
Розділ 4. АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ	100
4.1. Приклад практичного застосування аналітичного розв'язку одновимірної задачі теплопровідності	100
4.2. Результати апробації роботи розробленого методу моделювання	102
4.3. Обчислювальні експерименти імітаційного моделювання інформаційного розповсюдження у двовимірному випадку . .	106
4.4. Аналіз чисельних результатів розв'язання задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості переміщень	110
4.5. Висновки до розділу 4	111
Висновки	113
Список використаних джерел	116
Додаток А. Результати чисельних розрахунків для моделювання процесів інформаційного розповсюдження	123
Додаток Б. Список публікацій здобувача	130

ВСТУП

Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження. Завдання розповсюдження (поширення, надання) інформаційних та логістичних послуг наразі виникають у різних сферах людської діяльності. Це, як наслідок, потребує знаходження розв'язків для відповідних проблем забезпечення транспортування та обслуговування потоків даних і продукції. Серед багатьох проблем, що потребують пошуку оптимального розв'язку для задач транспортної та логістичної маршрутизації, слід виділити декілька суттєво важливих: забезпечення ефективної логістики, маршрутизація в мережах каналів зв'язку, забезпечення максимальної безпеки при роботі в небезпечних умовах, пошук ефективних рішень для рятувальних операцій тощо.

Прикладні задачі, які пов'язані з проблемою розповсюдження інформації, зараз привертають велику увагу не лише в логістиці, але й у сфері соціальних комунікацій, маркетингу, управління інформаційними кампаніями та кризовими ситуаціями. Важливою особливістю реальних задач є наявність невизначеності у вхідних даних, що зумовлена неповнотою інформації, варіативністю умов середовища та суб'єктивним характером сприйняття часових та просторових параметрів. У подальшому викладі терміни “розповсюдження інформації” та “інформаційне розповсюдження” вживаються як взаємозамінні.

Поєднання підходів з комбінаторної оптимізації, теорії нечітких множин, фізичного моделювання дифузійних процесів та методів аналізу соціальних мереж відкриває нові перспективи для дослідження складних систем інформаційного розповсюдження. Інтеграція цих підходів дозволяє створювати міждисциплінарні моделі, які враховують як об'єктивні фізичні закономірності процесів розповсюдження, так і суб'єктивні когнітивні

та соціальні фактори, що впливають на сприйняття та передачу інформації у суспільстві.

Таким чином, розробка моделей та методів дослідження процесів інформаційного розповсюдження за умов нечіткого вимірювання часу на основі аналізу процесів теплопровідності та методів розв'язання оптимізаційних задач дослідження операцій є актуальним науковим напрямком, який має як теоретичне, так і практичне значення для підтримки прийняття управлінських рішень з урахуванням невизначеності та раціонального забезпечення інформаційних потоків.

Центральною ідеєю даної роботи є розробка гібридної дворівневої моделі інформаційного розповсюдження. На зовнішньому (макроскопічному, верхньому) рівні процес описується рівняннями дифузійного типу, що характеризують загальну динаміку поширення інформації як неперервний процес, аналогічний теплопровідності. На внутрішньому (мікроскопічному, нижньому) рівні процес послідовного інформування учасників мережі формалізується як задача комівояжера з нечіткими часовими параметрами тривалості переміщення на мережі. Такий дворівневий підхід дозволяє поєднати переваги неперервного дифузійного опису (аналітичні розв'язки, фізична інтерпретація) з можливостями дискретної комбінаторної оптимізації (врахування структури мережі, суб'єктивних факторів сприйняття часу).

Поточний стан досліджень у галузі моделювання інформаційного розповсюдження демонструє широке використання епідеміологічних моделей, таких як SIR (Susceptible-Infected-Recovered) та SEIR (Susceptible-Exposed-Infected-Recovered), які були адаптовані для опису поширення інформації, чуток, новин та інновацій у соціальних мережах [1, 2, 3]. Ці моделі дозволяють враховувати різні стани індивідів у процесі сприйняття та передачі інформації, а також динаміку переходів між цими станами. Водночас, класичні дифузійні моделі надають можливість аналізувати просторово-часові

характеристики розповсюдження інформації в неперервних середовищах.

Так, один із підходів до моделювання процесів інформаційного розповсюдження базується на використанні аналогій з фізичними процесами дифузії та теплопровідності [4, 5]. Процес розповсюдження тепла в тілах описується рівняннями, які встановлюють зв'язок між часовими та просторовими змінами температури в матеріалах. Ці моделі широко застосовуються у фізиці та інженерії для аналізу теплових процесів. Подібно до того, як тепло поширюється від більш нагрітих до менш нагрітих областей, інформація розповсюджується від джерел до цільових аудиторій через різноманітні канали комунікації. Аналогія між розповсюдженням тепла та поширенням інформації в суспільстві дозволяє використовувати математичні методи теплопровідності для аналізу динаміки інформаційних потоків та їх впливу на соціальні системи.

З іншого боку, використання оптимізаційних моделей та методів дослідження операцій активно впроваджується для вирішення задач маршрутизації. Однією з найбільш поширених задач серед них є задача комівояжера, розв'язанню якої присвячено багато публікацій [6, 7, 8]. Задача комівояжера є класичною проблемою комбінаторної оптимізації, яка полягає у знаходженні найкоротшого маршруту, що проходить через заданий набір міст і повертається до початкового пункту. Розв'язання задачі комівояжера є NP-складною проблемою, що стимулює розвиток ефективних алгоритмів та евристичних методів для її вирішення. Сучасні дослідження цієї задачі зосереджені на розробці точних та наближених алгоритмів, включаючи метод гілок і меж, генетичні алгоритми, метод імітації відпалу, мурашині алгоритми та квантові підходи, які використовують суперпозицію станів для оптимізації обчислень. У контексті моделювання процесів інформаційного розповсюдження задача комівояжера може бути використана для оптимізації маршрутів передачі інформації, визначення послідовності охоплення цільових аудиторій, а також для моделювання процесів розповсюдження

через мережі з урахуванням часових та просторових обмежень.

Зрозуміло, що пошук розв'язків в задачах моделювання процесів поширення інформації потребує розробки нових та вдосконалення відомих методів дослідження. Такий підхід, що отримав назву “механістичного”, часто базується на формальному використанні методів дослідження фізичних процесів [9, 10]. Застосування методів імітації відпалу та інших механістичних методів та моделей для розв'язання задач аналізу інформаційного розповсюдження демонструє високу ефективність при пошуку наближених розв'язків у задачах різної природи та розмірності [11, 12]. Ці методи дозволяють уникати локальних екстремумів та знаходити якісні розв'язки за прийнятний час.

У роботах, присвячених моделюванню інформаційного розповсюдження, розглядаються різні аспекти процесу: швидкість поширення інформації, охоплення аудиторії, вплив структури соціальних мереж на динаміку розповсюдження, роль ключових вузлів (джерел новин) у процесі поширення, а також механізми посилення та затухання інформаційних сигналів. Важливим напрямком є врахування часових характеристик процесу, зокрема, затримок у передачі інформації, часу реакції учасників, періодів активності та пасивності у соціальних мережах [13, 14].

У ряді досліджень запропоновано використання нечітких чисел та нечіткої логіки для врахування невизначеності в параметрах моделей [15, 16]. Зокрема, методи теорії нечітких множин дозволяють формалізувати якісні оцінки експертів, лінгвістичні змінні та інтервальні оцінки параметрів. Застосування нечітких підходів до розв'язання задачі комівояжера та моделювання процесів розповсюдження дозволяє отримувати ефективні розв'язки, що враховують можливі відхилення від номінальних значень параметрів.

Нечітке сприйняття часу відображає суб'єктивне відчуття тривалості подій, яке може відрізнятися від об'єктивного часу. Це явище має значе-

ння в когнітивних науках, психології та соціології, оскільки впливає на прийняття рішень, планування та оцінку подій. У контексті інформаційного розповсюдження нечітке сприйняття часу проявляється в тому, що різні індивіди та групи можуть по-різному оцінювати швидкість поширення інформації, актуальність повідомлень та терміни їх релевантності. Моделювання нечіткого сприйняття часу дозволяє краще розуміти поведінку індивідів та груп у різних контекстах, враховувати суб'єктивні фактори при прогнозуванні динаміки інформаційних процесів.

Тож, процеси інформаційного розповсюдження у сучасному суспільстві набувають дедалі більшого значення у зв'язку з розвитком цифрових технологій, соціальних мереж та засобів масової комунікації. Тому вивчення механізмів поширення інформації, прогнозування швидкості та масштабів її розповсюдження, а також управління інформаційними потоками є актуальними задачами, що потребують розробки адекватних математичних моделей та методів їх дослідження.

Мета й завдання роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка та дослідження математичних моделей і методів аналізу процесів інформаційного розповсюдження в соціальних системах з урахуванням нечіткого сприйняття часу на основі аналогій з процесами теплопровідності та методів розв'язання задачі комівояжера.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- проаналізувати сучасні моделі та методи дослідження процесів інформаційного розповсюдження в соціальних системах;
- дослідити можливості використання аналогій з процесами теплопровідності для моделювання інформаційного розповсюдження;
- запропонувати і проаналізувати методику моделювання процесів інформаційного розповсюдження з урахуванням нечіткого сприйняття тривалості інтервалів часу;
- розробити моделі оптимізації маршрутів розповсюдження інформації.

- ції на основі задачі комівояжера з нечіткими вхідними параметрами;
- запропонувати програмну реалізацію розроблених моделей та методів для проведення моделювання та аналізу процесів інформаційного розповсюдження;
- провести обчислювальні експерименти для перевірки адекватності та ефективності розроблених моделей і методів.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження роботи є процеси інформаційного розповсюдження в соціальних системах з урахуванням суб'єктивного сприйняття часових характеристик.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є математичні моделі, методи та алгоритми для аналізу та оптимізації процесів інформаційного розповсюдження на основі аналогій з процесами теплопровідності та методів розв'язання оптимізаційних задач дослідження операцій (на прикладі задачі комівояжера).

Методи дослідження. Дослідження базуються на використанні сучасних інформаційних технологій, методів системного аналізу, математичного моделювання, теорії нечітких множин, методів комбінаторної оптимізації, механістичних методів та моделей, методів обчислювальної математики для розв'язування рівнянь теплопровідності, а також методів проведення обчислювальних експериментів та статистичного аналізу результатів.

Наукова новизна отриманих результатів.

У процесі розв'язання сформульованих задач запропоновано системний підхід до моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі гібридних моделей процесів теплопровідності та оптимальної маршрутизації, отримано нові наукові результати, які полягають в наступному:

вперше:

- запропоновано системний підхід до моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі аналогії з процесами теплопровідності, що включає формалізацію відповідності параметрів тепло-

- фізичної моделі характеристикам інформаційного процесу;
- розроблено метод багаторівневої декомпозиції прямокутних областей для двовимірної задачі розповсюдження інформації з незалежно каліброваними точковими джерелами;
- отримано аналітичні розв’язки в задачах розподілу температури в одновимірних та двовимірних задачах з граничними умовами Неймана та точковими джерелами;

вдосконалено:

- метод імітації відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості маршрутів, обґрунтовано вибір методу центру тяжіння для розв’язання даного класу задач.

набули подальшого розвитку:

- моделі та методи планування інформаційних кампаній у соціальних мережах і середовищах на основі моделей дифузійного типу та оптимізації маршрутів переміщень з урахуванням невизначеності тривалості руху на мережі.

Практичне значення отриманих результатів полягає у застосовності розроблених моделей та методів до задач планування інформаційних кампаній у соціальних мережах, оптимізації маршрутів з урахуванням невизначеності часу переміщення, а також моделювання та візуалізації процесів дифузійного типу у різних прикладних областях.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, викладені в дисертаційній роботі, отримані автором особисто. У наукових працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: розробка математичних моделей інформаційного розповсюдження на основі рівняння теплопровідності, адаптація методу імітації відпалу для роботи з нечіткими параметрами, програмна реалізація та проведення обчислювальних експериментів.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на 8 міжна-

родних наукових конференціях: XXI Міжнародна науково-практична конференція “Шевченківська весна – 2023” (Київ, 2023), П’ята міжнародна науково-практична конференція “Сучасні тенденції розвитку інформаційних систем і телекомунікаційних технологій” (Київ, 2023), XVI міжнародна науково-технічна конференція “ABIA-2023” (Київ, 2023), XXXVIII міжнародна конференція “Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності” (2023), Modeling, Control and Information Technologies (2023), X Міжнародна науково-технічна Internet-конференція “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами” (Київ, 2023), I Міжнародна науково-практична конференція “Інформаційні системи та технології: результати і перспективи” (Київ, 2024), XII Міжнародна науково-технічна Internet-конференція “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами” (Київ, 2025).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 12 наукових праць, у тому числі 3 статті у наукових фахових виданнях категорії “А” (включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science), 1 стаття у науковому фаховому виданні категорії “Б”, 8 тез доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 84 найменувань (на 7 сторінках) і двох додатків (на 10 сторінках). Загальний обсяг роботи становить 132 сторінки.

РОЗДІЛ 1

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

1.1. Проблеми дослідження процесів інформаційного розповсюдження

Процеси інформаційного розповсюдження у сучасному суспільстві набувають дедалі більшого значення у зв'язку з розвитком цифрових технологій, соціальних мереж та засобів масової комунікації [17, 18]. Розуміння механізмів поширення інформації, прогнозування швидкості та масштабів її розповсюдження, а також управління інформаційними потоками є актуальними задачами, що потребують розробки адекватних математичних моделей та методів їх дослідження.

Розповсюдження інформації представляє собою фундаментальний процес, що лежить в основі суспільної еволюції та прийняття рішень [19]. Якщо розглядати новини як опис поточних, реальних та важливих подій, що впливають на людей, то фейкові новини являють собою цілу екосистему інформації, що включає як поширення достовірної інформації, так і розповсюдження дезінформації [20]. Фейкові новини використовуються для створення дезінформаційних статей, містифікацій, чуток, пародій, некоректних редакційних матеріалів, неправдивих фактів тощо. Така різноманітність цілей, каналів, джерел та мотивацій ускладнює розуміння механізмів їх поширення. В останні роки кількість випадкових та навмисних наслідків використання платформ соціальних мереж для розповсюдження дезінформації значно зросла.

Щоб навчитися правильно використовувати інформацію як інструмент, який діятиме на користь користувача, необхідно вміти її моделювати. Математична модель розповсюдження інформації може бути представлена на основі попередньо визначених параметрів, що включають сприйняття нової інформації суспільством, обмеження на кількість та агресивність джерел інформації, а також часові рамки, протягом яких відбувається процес розповсюдження новин [21].

Завдання маршрутизації, як завдання пошуку рішень проблем транспортування продукції та потоку даних, виникають у різних сферах людської діяльності. Серед багатьох проблем, що вимагають оптимальних рішень задач маршрутизації, слід виділити кілька дуже важливих: забезпечення ефективної логістики, маршрутизація в мережах каналів зв'язку, забезпечення максимальної безпеки при роботі в небезпечних умовах, пошук ефективних рішень для рятувальних операцій тощо.

Прикладні задачі, які пов'язані з проблемою маршрутизації та інформаційним розповсюдженням, наразі привертають велику увагу не лише в логістиці, але й у сфері соціальних комунікацій, маркетингу, управління інформаційними кампаніями та кризовими ситуаціями [22]. Важливою особливістю реальних задач є наявність невизначеності у вхідних даних, що зумовлена неповнотою інформації, варіативністю умов середовища та суб'єктивним характером сприйняття часових та просторових параметрів.

Епідемічні моделі розповсюдження інформації, такі як моделі SIR (Susceptible – Infected – Recovered) та SEIR (Susceptible – Exposed – Infected – Recovered), які спочатку розроблялися для опису поширення інфекційних захворювань, є добре дослідженими компартментальними моделями математичної епідеміології [1]. Їхня математична основа базується на системі звичайних диференціальних рівнянь для опису динаміки поширення захворювань у популяції. Ключова ідея полягала у поділі населення на три групи: сприйнятливих (S), які ще не контактували з інфекцією; інфікова-

них (I), які є активними носіями та поширювачами; та тих, що одужали (R), які набули імунітету та більше не беруть участі в процесі поширення.

Математично модель SIR описується системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (1.1)$$

де β – параметр інтенсивності контактів (швидкість передачі), γ – швидкість одужання (або “забування” в контексті інформації), $S(t) + I(t) + R(t) = N$ – загальна чисельність популяції, що залишається постійною. Ключовим параметром моделі є базове репродуктивне число $R_0 = \beta N / \gamma$, яке визначає, чи буде поширення мати характер епідемії ($R_0 > 1$) чи затухне ($R_0 < 1$).

Розширена модель SEIR додає проміжний стан E (Exposed) – осіб, які вже контактували з інфекцією, але ще не стали активними поширювачами [2]. Цей латентний період має суттєве значення для багатьох реальних процесів: в епідеміології він відповідає інкубаційному періоду захворювання, а в інформаційному розповсюдженні – часу між отриманням інформації та початком її активного поширення. Динаміка SEIR моделі описується системою:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dE}{dt} = \beta SI - \sigma E, \quad \frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I, \quad (1.2)$$

де σ – швидкість переходу з латентного стану в активний. Цей параметр визначає середній час затримки між експозицією та активним поширенням, що в інформаційному контексті відображає час обдумування, перевірки або просто затримку реакції.

Зв’язок епідеміологічних моделей з дифузійними рівняннями стає очевидним при переході до просторово-часового опису. Якщо ввести просторову координату та розглянути щільність інфікованих як функцію місця та часу $I(x, t)$, а також припустити, що інфіковані особи можуть переміщати-

ся (дифундувати) у просторі, отримуємо реакційно-дифузійне рівняння:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D \nabla^2 I + f(S, I), \quad (1.3)$$

де D – коефіцієнт дифузії, що описує мобільність носіїв, а $f(S, I)$ – функція реакції, що відповідає епідеміологічній динаміці. Таким чином, класичне рівняння теплопровідності можна розглядати як граничний випадок епідеміологічної моделі при певних спрощеннях.

Модель поширення чуток Дейлі-Кендала [3] адаптувала епідеміологічний підхід безпосередньо для моделювання поширення чуток, запропонувавши модель “поширювач – невіглас – пригнічувач” (Spreader – Ignorant – Stifler). У цій моделі поширювачі активно передають чутку, “невігласи” ще не чули інформацію, а “пригнічувачі” – ті, хто втратив інтерес до поширення після зустрічі з іншим поширювачем або пригнічувачем. Принципова відмінність від класичної SIR моделі полягає в механізмі переходу до стану “одужання”: якщо в епідеміології одужання відбувається автоматично з часом, то припинення поширення чутки викликається соціальною взаємодією – людина перестає ділитися інформацією, коли усвідомлює, що вона вже є загальновідомою.

Застосування епідеміологічних моделей до інформаційного розповсюдження потребує переосмислення параметрів. Коефіцієнт передачі β в інформаційному контексті відображає ймовірність того, що контакт між поінформованою та непоінформованою особою призведе до передачі інформації – цей параметр залежить від привабливості та важливості інформації, довіри між учасниками, якості каналу комунікації. Швидкість “одужання” γ відповідає процесу втрати інтересу до поширення: з часом будь-яка новина стає “застарілою”, і люди припиняють активно її обговорювати. Латентний період в SEIR моделі відповідає часу, необхідному для осмислення отриманої інформації, прийняття рішення про її важливість та варто ділитися нею з іншими.

Поєднання підходів з комбінаторної оптимізації, теорії нечітких множин, фізичного моделювання дифузійних процесів та методів аналізу соціальних мереж відкриває нові перспективи для дослідження складних систем інформаційного розповсюдження. Інтеграція цих підходів дозволяє створювати міждисциплінарні моделі, які враховують як об'єктивні фізичні закономірності процесів розповсюдження, так і суб'єктивні когнітивні та соціальні фактори, що впливають на сприйняття та передачу інформації у суспільстві.

Таким чином, розробка моделей та методів дослідження процесів інформаційного розповсюдження з урахуванням нечіткого сприйняття часу на основі аналогій з процесами теплопровідності та методів розв'язання задачі комівояжера є актуальним науковим напрямком, що має як теоретичне, так і практичне значення для аналізу та управління інформаційними потоками в сучасному суспільстві.

1.2. Моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі дифузійних рівнянь

Процес розповсюдження інформації має доведені аналогії з термодинамічними явищами, зокрема з процесами теплопровідності [4]. Так само, як тепло природно поширюється від областей з вищою температурою до областей з нижчою, прагнучи до термодинамічної рівноваги, інформація має тенденцію розповсюджуватися від джерел з високою концентрацією знань до менш поінформованих частин суспільства. Температурний градієнт в фізичній системі знаходить свій аналог в градієнті інформаційного потенціалу – різниці в рівні обізнаності між різними частинами соціальної мережі.

Дифузійний підхід є одним з найбільш значущих підходів, що використовуються в дослідженні процесів розповсюдження інформації. Одним з

найбільш впливових напрямків є модель дифузії інновацій [23], запропонована для прогнозування поширення нових продуктів на споживчому ринку. Ця модель описує кумулятивну частку ринку $F(t)$, яку займає новий продукт до моменту часу t , через диференціальне рівняння:

$$\frac{dF}{dt} = (p + qF)(1 - F), \quad (1.4)$$

де p – коефіцієнт інноваційності (швидкість, з якою споживачі приймають продукт під впливом зовнішньої реклами), а q – коефіцієнт імітації (швидкість, з якою споживачі наслідують інших, хто вже прийняв продукт). Розв’язок цього рівняння має характерну S-подібну форму: повільний початковий ріст (фаза впровадження), швидке прискорення (фаза зростання), уповільнення та вихід на плато (фаза насичення).

Зв’язок моделі Басса з рівнянням теплопровідності стає очевидним при переході до просторово-часового опису. Якщо $p = 0$ (відсутність зовнішнього впливу, тільки “зараження” від сусідів) і ввести просторову координату, рівняння набуває вигляду реакційно-дифузійного рівняння, де член $qF(1 - F)$ описує нелінійну “реакцію”, а просторова дифузія – переміщення інформації в географічному або соціальному просторі. При малих значеннях F (початкова стадія поширення) нелінійний член можна лінеаризувати, і рівняння зводиться до класичного рівняння теплопровідності з джерелом.

Емпірична валідація моделі Басса на сотнях випадків поширення інновацій (від телевізорів та мікрохвильових печей до мобільних телефонів та соціальних мереж) підтвердила її прогностичну силу та універсальність [19]. Типові значення параметрів для споживчих товарів становлять $p \approx 0.03$ та $q \approx 0.38$, що означає домінування імітаційного механізму над інноваційним – більшість людей приймає нову ідею чи продукт, наслідуючи оточення, а не реагуючи на зовнішню рекламу.

Використовуючи результати досліджень про взаємозв’язок між рівня-

ннями термодинаміки та теорією інформації [4], можна провести більш глибоку паралель і побудувати модель розподілу тепла в одновимірному стержні для моделювання розповсюдження інформації в лінійному графі соціальних відносин, розглядаючи лінійний граф як підграф дерева соціальної ієрархії.

Рівняння теплопровідності є фундаментальним диференціальним рівнянням в частинних похідних, яке широко використовується у фізиці, інженерії та різних наукових галузях [24]. Воно описує, як розподіл тепла змінюється з часом у певній області простору. Математично воно пов'язує швидкість зміни температури з просторовим розподілом температури та часом.

Загальна форма рівняння теплопровідності в одновимірному просторі представлена формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.5)$$

де функція $u(x, t)$ представляє температуру або розподіл тепла в матеріалі у точці x в момент часу t , змінна t позначає час, x позначає просторову координату, α – коефіцієнт теплопровідності, який є константою для кожного матеріалу і характеризує швидкість дифузії тепла через матеріал.

Рівняння теплопровідності (1.5) належить до класу параболічних диференціальних рівнянь у частинних похідних і описує процес дифузії тепла в середовищі [5]. Це рівняння було вперше виведене французьким математиком і фізиком Жаном-Батистом Жозефом Фур'є на початку XIX століття [25] і відіграло фундаментальну роль у розвитку математичної фізики. Коефіцієнт теплопровідності α залежить від властивостей матеріалу і визначає швидкість вирівнювання температури в середовищі.

Фізична інтерпретація рівняння теплопровідності базується на законі збереження енергії: зміна теплової енергії в елементарному об'ємі пропор-

ційна різниця між кількістю тепла, що надходить в об'єм, і кількістю тепла, що його залишає. Математично це призводить до рівняння (1.5), де перша похідна за часом відображає швидкість зміни температури, а друга похідна за просторовою координатою характеризує кривизну температурного профілю і, відповідно, інтенсивність теплового потоку.

На основі природи обох явищ може бути встановлена аналогія між процесами теплопровідності та дифузії інформації в соціальних системах. Так само, як тепло природно поширюється від областей з вищою температурою до областей з нижчою, прагнучи до термодинамічної рівноваги, інформація має тенденцію розповсюджуватися від джерел з високою концентрацією знань до менш поінформованих частин суспільства. Температурний градієнт в фізичній системі знаходить свій аналог в градієнті інформаційного потенціалу – різниці в рівні обізнаності між різними частинами соціальної мережі.

Математична структура цієї аналогії дозволяє застосовувати добре розвинений апарат теорії теплопровідності до аналізу інформаційних процесів. Коефіцієнт теплопровідності α у фізичній системі відповідає коефіцієнту сприйнятливості суспільства до нової інформації – чим вища ця сприйнятливість, тим швидше інформація поширюється в соціальній мережі. Початкова температура, що дорівнює нулю, відповідає повній відсутності інформації про певну тему в суспільстві на початковий момент часу. Джерела тепла з температурою T_1 моделюють джерела інформації (медіа, лідери думок, офіційні канали комунікації) з певним рівнем інтенсивності трансляції інформації.

Важливою особливістю запропонованої моделі є припущення про відсутність теплообміну з навколишнім середовищем, що в інформаційному контексті означає відсутність ефекту “забування” інформації. Хоча це спрощення не завжди відповідає реальності (люди дійсно забувають отриману інформацію з часом), воно дозволяє отримати базову модель, яку нада-

лі можна ускладнити введенням додаткових членів, що описують процеси забування або деградації інформації.

У реальних фізичних системах існують три основні механізми теплопередачі: теплопровідність, конвекція та випромінювання. Кожен з цих механізмів має свій аналог в процесах розповсюдження інформації. Теплопровідність, що відбувається через безпосередній контакт частинок речовини, аналогічна передачі інформації через прямі міжособистісні комунікації – розмови, зустрічі, особисті повідомлення. Конвекція, при якій тепло переноситься рухомим середовищем (рідиною або газом), знаходить аналогію в розповсюдженні інформації через мобільних агентів – людей, що переміщуються між різними частинами соціальної мережі і переносять інформацію з собою. Випромінювання, що дозволяє передавати енергію без матеріального носія, відповідає масовим комунікаціям – телебаченню, радіо, інтернет-трансляціям, які можуть одночасно охоплювати велику аудиторію без необхідності прямого контакту.

Епідемічні моделі розповсюдження інформації, такі як моделі SIR (Susceptible – Infected – Recovered) та SEIR (Susceptible – Exposed – Infected – Recovered) [1, 3], які спочатку розроблялися для опису поширення інфекційних захворювань, також базуються на схожих принципах дифузії та можуть розглядатися як дискретні аналоги неперервної моделі теплопровідності. В цих моделях популяція поділяється на групи: сприйнятливі до інформації (ще не отримали), інфіковані (активно поширюють), та такі, що одужали (отримали інформацію, але більше її не поширюють). Динаміка переходу між цими станами описується системою диференціальних рівнянь, структурно подібною до рівняння теплопровідності.

Практичне застосування моделі охоплює широке коло задач інформаційного розповсюдження – від маркетингових і політичних кампаній до управління кризовими ситуаціями, протидії дезінформації [26], освітніх процесів та корпоративних комунікацій.

Серед перспективних напрямків подальшого розвитку моделі – узагальнення на тривимірний випадок, де додатковий вимір може відображати неоднорідні характеристики аудиторії (соціальний статус, вік тощо), створюючи багатовимірний простір для аналізу інформаційних потоків.

У реальному світі доцільно розглядати процес розповсюдження інформації з декількома джерелами, що мають певні обмеження. Це можуть бути телевізійні канали, інтернет-блоги або навіть просто люди, які так чи інакше повідомляють оточуючих про відомі їм новини чи факти.

Поставивши за мету підвищення обізнаності суспільства про певну новину (яка може бути як правдивою, так і навмисно некоректною), необхідно розрахувати оптимальне розміщення джерел інформації для досягнення бажаного рівня обізнаності на основі попередньо встановлених обмежень, серед яких: максимальна кількість джерел; “агресивність” джерела, тобто наскільки швидко частини суспільства, пов’язані з ним, отримують нову інформацію; максимально відведений час.

У цьому випадку, знаючи дані про ставлення та сприйнятливість суспільства до нової інформації, можна провести паралель з процесами, характерними для термодинаміки – розповсюдження інформації в суспільстві може бути формалізоване на основі поширення тепла в матеріалі [27]. При цьому теплопровідність матеріалу можна розглядати як сприйнятливість до нової інформації, а “агресивність” джерел визначатиметься максимальною температурою нагрівального елемента. Для спрощення початкових розрахунків можна припустити, що інформація не втрачається в системі, тобто відсутній ефект “забування”, що означає відсутність теплообміну матеріалу з навколишнім середовищем.

Для проведення дослідження розглянемо лінійний граф соціальних відносин, механістичним аналогом якого буде повністю ізольований одновимірний стержень з коефіцієнтом теплопровідності α . Тоді досягнення бажаного рівня обізнаності можна розглядати як нагрівання стержня щонай-

менше на ΔT градусів за допомогою нагрівальних джерел температури T_1 , рівномірно розташованих у стержні, протягом максимального часу t_{max} при початковій температурі стержня, рівній нулю (що дорівнює температурі навколишнього середовища).

Враховуючи задані обмеження (на кількість нагрівальних елементів, їх максимальну температуру та час нагрівання), можна зробити висновок, що за певних умов не вдасться нагріти весь стержень одним джерелом, тому варто розглянути розділення стержня на рівні частини, в центрі кожної з яких можна розмістити нагрівальний елемент. Оскільки стержень розділено на ідентичні частини, а нагрівальні елементи мають однакову потужність, кожна підзадача нагрівання частини стержня $U_i(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, де n – кількість підзадач, є еквівалентною іншим. Це дозволяє розв'язати лише одну з них, а загальний розподіл температури $U_L(x, t)$ вздовж стержня довжиною L отримати як суперпозицію розв'язків усіх підзадач:

$$U_L(x, t) = \sum_{i=1}^n U_i(x, t). \quad (1.6)$$

Оскільки нагрівання частини стержня відбувається в середині рівномірно в обидва боки, підзадачу можна розкласти на дві більш ідентичні проблеми обчислення $U_{i/2}(x, t)$ при нагріванні частини стержня з одного боку. При цьому для кожної $U_i(x, t)$ межі сусідніх проблем U_{i-1} та U_i не матимуть теплообміну через однакову динаміку тепла (через однаковий розмір областей визначення сусідніх підзадач і однакову потужність їх нагрівальних елементів), що означає, що в задачах $U_{i/2}$ можна розглядати повністю ізольований стержень за винятком нагрітої сторони.

Через повністю ідентичні умови для кожної частини стержня задачі $U_{i/2}(x, t)$ є ідентичними, тому їх розв'язок можна позначити як $u(x, t)$. Задача формулюється наступним чином: знайти розв'язок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < L_p/2, t > 0, \quad (1.7)$$

з граничними умовами

$$u(0, t) = T_1, t > 0, \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L_p/2} = 0, \quad t > 0, \quad (1.9)$$

та початковою умовою

$$u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq L_p/2, \quad (1.10)$$

де L_p – довжина частини стержня, яка підлягає нагріванню одним джерелом.

Гранична умова (1.8) означає, що на лівому кінці стержня підтримується постійна температура T_1 (джерело інформації), а умова (1.9) означає відсутність теплового потоку через правий кінець (ізоляція або симетрія).

Розв’язок цієї задачі дозволяє визначити функцію розподілу температури $u(x, t)$ у будь-якій точці стержня в будь-який момент часу. Підставивши $t = t_{max}$ у отриману формулу, можна отримати функцію розподілу температури стержня $u(x)$ у максимально допустимий момент часу. Оскільки в контексті поставленої задачі необхідно підняти температуру стержня щонайменше на ΔT , тобто від 0 до певної $T_2 < T_1$, необхідно знайти таку довжину L_p , при якій значення T_2 буде досягнуто в найбільш віддаленій від джерела точці $x = L_p/2$.

Взаємозв’язок між поширенням інформації та термодинамікою полягає у властивій їм схильності шукати рівноважний або оптимальний стан. Враховуючи цю подібність, розв’язане рівняння теплопровідності можна використовувати як потужний інструмент для моделювання динаміки по-

ширення інформації, аналогічно потоку теплової енергії у фізичних системах.

Параметри моделі мають наступну інтерпретацію в термінах інформаційного розповсюдження:

- Коефіцієнт теплопровідності α відповідає сприйнятливості суспільства до нової інформації. Високе значення α означає, що інформація швидко поширюється в соціальній мережі.
- Температура джерела T_1 характеризує агресивність джерела інформації, тобто інтенсивність, з якою воно транслює інформацію.
- Порогова температура T_2 відповідає бажаному рівню обізнаності або поінформованості в суспільстві.
- Часове обмеження t_{max} визначає максимально допустимий час для досягнення необхідного рівня поширення інформації.
- Довжина стержня L моделює розмір соціальної групи або мережі, в якій відбувається розповсюдження інформації.

Таким чином, задача оптимального розміщення джерел інформації зводиться до визначення мінімальної кількості джерел та їх оптимального розташування, які забезпечать досягнення заданого рівня обізнаності T_2 у всіх частинах соціальної мережі протягом часу t_{max} при заданій агресивності джерел T_1 та сприйнятливості суспільства α .

У реальних соціальних мережах інформація поширюється у більш складних структурах, які неможливо адекватно описати одновимірною моделлю. Для таких випадків доцільним є перехід до двовимірної моделі на площині. Розглянемо квадратну область $\Omega = [0, L] \times [0, L]$, що моделює фрагмент соціальної мережі з двовимірною топологією. Рівняння теплопровідності у двовимірному випадку набуває вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1.11)$$

де $u(x, y, t)$ – рівень інформованості в точці (x, y) в момент часу t , α –

коефіцієнт дифузії інформації, q_0 – інтенсивність джерела, (x_0, y_0) – координати джерела інформації, $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака, що описує точкове зосередження потужності джерела в заданій координаті (імпульсний інформаційний вплив).

Двовимірна модель дозволяє враховувати просторову структуру соціальних мереж більш адекватно, моделюючи розповсюдження інформації на площині – наприклад, географічне поширення в межах міста або країни [14]. При цьому зберігаються всі аналогії між теплофізичними та інформаційними процесами: коефіцієнт теплопровідності відповідає сприйнятливості суспільства, джерела тепла – джерелам інформації, а граничні умови визначають характер взаємодії з зовнішнім середовищем. Методи розв’язання двовимірної задачі (метод розділення змінних, побудова функції Гріна) дозволяють отримати аналітичні розв’язки для різних конфігурацій джерел та граничних умов [5].

1.3. Задача комівояжера як модель формалізації процесів поширення інформації

При дослідженні процесів інформаційного розповсюдження виникає потреба в оптимізації послідовності відвідування вузлів мережі для ефективного донесення інформації до цільової аудиторії. Задача комівояжера є потужним математичним інструментом для такої оптимізації: вузли соціальної мережі можна розглядати як “міста”, а час або вартість передачі інформації між ними – як “відстані”. Це дозволяє застосовувати добре розвинений апарат комбінаторної оптимізації для аналізу інформаційних потоків. Для повноцінного використання цього підходу необхідно спочатку формально визначити задачу комівояжера та її основні властивості.

Задача комівояжера (traveling salesman problem, TSP) є однією з найвідоміших та найінтенсивніше досліджуваних обчислювальних задач опти-

мізації. Історія задачі сягає XIX століття: перші згадки про проблему оптимального обходу міст з'являються в роботах ірландського математика Вільяма Рована Гамільтона та британського математика Томаса Кіркмана у 1850-х роках.

Математична формалізація задачі набула сучасного вигляду у 1954 році, коли вперше було застосовано методи лінійного програмування для точного розв'язання задачі з 49 містами [6] – рекордний на той час результат. Підхід, заснований на послідовному додаванні обмежень для виключення підциклів, заклав основу для сучасних методів гілок та границь (branch-and-bound) та методів площин, що відсікають (cutting planes). Ця робота не лише продемонструвала практичну можливість точного розв'язання великих комбінаторних задач, але й стимулювала розвиток цілочисельного програмування як окремої галузі математичної оптимізації.

Фундаментальне дослідження обчислювальної складності TSP було проведено в 1970-х роках у контексті становлення теорії NP-повноти [7]. Було доведено, що задача комівояжера належить до класу NP-важких задач, що означає відсутність (за умови $P \neq NP$) поліноміального алгоритму для її точного розв'язання в загальному випадку. Цей результат мав глибокі наслідки: з одного боку, він пояснив, чому багаторічні спроби знайти ефективний точний алгоритм виявилися безуспішними; з іншого – стимулював розвиток наближених та евристичних методів, які здатні знаходити достатньо якісні розв'язки за прийнятний час.

Сучасне дослідження задачі комівояжера, систематизоване в монографії Еплгейта та співавторів [8], охоплює широкий спектр методів – від точних алгоритмів, здатних оптимально розв'язувати задачі з десятками тисяч міст, до механістичних підходів, що знаходять близькі до оптимальних розв'язки для задач з мільйонами вузлів. Бібліотека тестових задач TSPLIB [28] стала стандартним бенчмарком для порівняння алгоритмів, забезпечуючи відтворюваність та об'єктивність досліджень.

Класичне формулювання задачі комівояжера полягає у пошуку найкоротшого замкненого маршруту (гамільтонового циклу), що проходить через кожне місто рівно один раз і повертається до початкового пункту.

Математична постановка задачі комівояжера формулюється наступним чином. Нехай задано n міст, які можна розглядати як вершини деякого графу $G = (V, E)$, де $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – множина вершин, E – множина ребер. Між усіма парами вершин визначені відстані (або час пересування), які утворюють матрицю вартостей $D = [d_{ij}]$, де $d_{ij} \geq 0$ представляє вартість переміщення з вершини i до вершини j .

Змінними задачі є елементи бінарної матриці переходів між вершинами $X = [x_{ij}]$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, які дорівнюють 1, якщо у побудованому маршруті присутнє ребро (i, j) , та 0 – в іншому випадку. Оптимальним вважається найкоротший замкнений маршрут, який проходить через усі вершини графу по одному разу. Цільова функція задачі має вигляд:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \quad (1.12)$$

з обмеженнями:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.13)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (1.14)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset \quad (1.15)$$

Остання нерівність забезпечує зв'язність маршруту обходу вершин – він не може складатися з двох і більше незв'язаних частин.

Задача комівояжера належить до класу NP-важких задач комбінаторної оптимізації [7], що означає відсутність відомих алгоритмів, які гаранто-

вано знаходять точний розв’язок за поліноміальний час. Складність задачі експоненційно зростає зі збільшенням кількості міст, що робить повний перебір усіх можливих маршрутів практично неможливим навіть для порівняно невеликих задач. Для задачі з n містами загальна кількість можливих маршрутів становить $(n - 1)!/2$, оскільки напрямок обходу не має значення для симетричних варіантів задачі.

Окрім згаданих раніше логістичних задач, TSP застосовується у виробничих процесах (планування послідовності обробки на верстатах, свердління друкованих плат у мікроелектроніці), у біоінформатиці (секвенування ДНК) та в маршрутизації безпілотних апаратів [8, 29].

Кількість альтернативних шляхів для TSP з n вузлами становить $(n - 1)!$. Отже, навіть для порівняно невеликих задач, наприклад, з 20 вузлами, кількість альтернативних шляхів становить близько 1.2×10^{17} , що робить повний перебір практично неможливим через відсутність відповідних обчислювальних потужностей.

У реальних умовах поняття тривалості або вартості подорожі між окремими пунктами транспортної мережі не може бути фіксованим. Ці величини визначаються наближено, часто з впливом суб’єктивних факторів на оцінку тривалості переміщення. Спосіб прийняття рішень в соціумі в багатьох випадках залежить від емоційного стану людини. Емоції можуть бути причиною поведінки, яка підходить для конкретної ситуації, навіть якщо вона не є найефективнішою, але дозволяє уникнути будь-яких наслідків, які можуть виникнути через перевищення певного часового обмеження.

Дослідження в галузі нейронауки показують, що емоційний стан людини безпосередньо впливає на суб’єктивне відчуття плину часу. В станах тривоги, стресу або очікування небезпеки внутрішній “годинник” людини прискорюється, що призводить до відчуття, ніби час тече повільніше. Це пояснюється підвищенням активності дофамінергічної системи мозку, яка відповідає за сприйняття часових інтервалів. Навпаки, в станах спокою,

задоволення або глибокого зосередження на цікавій діяльності час здається таким, що “пролітає непомітно”. Цей феномен має важливі практичні наслідки для планування та організації діяльності, особливо в умовах обмежених часових ресурсів.

Встановлено, що позитивні емоції прискорюють суб’єктивний плин часу (час здається коротшим), тоді як негативні емоції, особливо пов’язані з очікуванням, роблять його повільнішим. Цей ефект необхідно враховувати при моделюванні процесів прийняття рішень, де часовий фактор відіграє критичну роль. Зокрема, в логістиці та транспортних системах водії та диспетчери можуть по-різному оцінювати тривалість маршрутів в залежності від умов руху, погоди, часу доби та власного фізичного стану.

Нечіткий облік часу дозволяє формалізувати це явище математично. Замість того, щоб задавати тривалість поїздки як точне число (наприклад, 30 хвилин), більш реалістичним є представлення її у вигляді нечіткого числа $(25, 30, 40)$, де 30 хвилин – найбільш очікувана тривалість, 25 хвилин – оптимістична оцінка (при сприятливих умовах та позитивному емоційному стані), а 40 хвилин – песимістична оцінка (при несприятливих умовах або тривожному стані). Така модель значно краще відображає реальність, ніж детерміністичний підхід.

Час є важливим ресурсом у діяльності, яка передбачає участь людини. Оцінка часових інтервалів є фундаментальною для розуміння часових рамок, навіть якщо точні межі інтервалу можуть бути не визначені, доки процес не досягне певної стадії. Таким чином, період часу зазвичай визначається невизначеним інтервалом, який можна приблизно передбачити, враховуючи характер плину часу. Щоб виміряти часові інтервали, їх можна виразити такими фразами, як “швидка відповідь”, “звичайний часовий відлік” або “тривале очікування”. Це означає, що при вирішенні задач, які вимагають вербальних термінів для посилення на час, важливо брати до уваги варіацію часу. Зрозуміло, що емоції мають великий вплив на розумі-

ння часу в процесах, які залучають людину.

Для врахування цих факторів розглянемо динамічну задачу комівояжера (DTSP, Dynamic Traveling Salesman Problem), яка визначається динамічною матрицею вартості (відстані):

$$D(t) = [d_{ij}(t)], \quad (1.16)$$

де $d_{ij}(t)$ – вартість переміщення від міста i до міста j у момент часу t . У цьому визначенні як кількість міст $n(t)$, так і матриця витрат можуть залежати від часу. Динамічна задача комівояжера полягає в тому, щоб знайти маршрут з мінімальною вартістю, який містить усі $n(t)$ вузлів.

Іншими словами, маючи всі $n(t)$ точок $(P_1, P_2, \dots, P_{n(t)})$ та відповідну матрицю витрат $D(t)$, потрібно знайти маршрут з мінімальною вартістю, що містить усі $n(t)$ точок:

$$\min \sum_{i=1}^{n(t)} d_{T_i T_{i+1}}(t) \quad (1.17)$$

де $(T_1, T_2, \dots, T_{n(t)})$ – перестановка множини $\{1, 2, \dots, n(t)\}$, $d_{T_i T_{i+1}}(t)$ – вартість переміщення між послідовними містами маршруту, $T_{n(t)+1} = T_1$.

Зміна матриці витрат D з часом є неперервним процесом. Практично ж для побудови аналітичних моделей необхідно дискретизувати цей процес змін. Таким чином, D стає серією задач оптимізації:

$$D^{(0)}, D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(m-1)}, \quad (1.18)$$

де $k = 0, 1, 2, \dots, m-1$, з часовими вікнами $[t_k, t_{k+1}]$, де $\{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ – це послідовність часових точок.

Зв'язок задачі комівояжера з процесами розповсюдження інформації полягає у спільній природі оптимізації потоків – як матеріальних (у випадку транспортних маршрутів), так і нематеріальних (у випадку інформаційних потоків) [22, 30]. Час, необхідний для проходження інформації через

певні вузли соціальної мережі, може бути змодельований аналогічно до часу переміщення між містами. При цьому суб'єктивне сприйняття плинності часу відіграє ключову роль у формуванні ефективності розповсюдження інформації, що вимагає розробки спеціальних математичних підходів для формалізації невизначеності та неточності у часових оцінках [31].

1.4. Застосування нечітких чисел для моделювання інформаційних процесів в умовах невизначеності

У повсякденному житті часто вживаються такі вирази, як “майже шість”, “досить високий”, “недостатньо короткий”, щоб визначити певну величину в наближеному форматі. Такий спосіб оцінювання, як наслідок, потребує формалізації недостатньо чітко визначених оцінок для їх практичного застосування у математичних моделях. З цією метою використовуються поняття, які дозволяють подати суб'єктивне або інтуїтивне значення розмитих понять у конструктивному вигляді. Одним з таких понять формалізації невизначеності є нечіткі числа.

Теорія нечітких множин була запроваджена Лотфі Аскером Заде у 1965 році у фундаментальній роботі “Fuzzy Sets” [15] як розширення класичної теорії множин для роботи з невизначеністю та неточністю. Мотивацією для створення теорії стало усвідомлення того, що класична бінарна логіка (“належить” або “не належить”) є надто обмежувальною для опису реальних систем, де границі між категоріями часто є розмитими. Заде запропонував узагальнення поняття множини, в якому приналежність елемента визначається не бінарно, а градуйовано – через ступінь належності від 0 до 1. Ця ідея набула широкого поширення та знайшла застосування в теорії керування, штучному інтелекті, обробці природної мови, медичній діагностиці та багатьох інших галузях.

Формально, нехай E – універсальна множина зі скінченною або нескін-

ченною кількістю елементів. Нечітка підмножина A множини E визначається через функцію належності $\mu_A : E \rightarrow [0, 1]$, яка кожному елементу $x \in E$ ставить у відповідність число $\mu_A(x)$, що інтерпретується як ступінь належності x до A . Якщо $\mu_A(x) = 1$, елемент повністю належить множині; якщо $\mu_A(x) = 0$ – повністю не належить; проміжні значення відображають часткову належність. Нечітка множина A може бути записана як множина впорядкованих пар:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in E\}. \quad (1.19)$$

Носій (support) нечіткої множини A – це множина всіх елементів $x \in E$, для яких $\mu_A(x) > 0$:

$$\text{supp}(A) = \{x \in E \mid \mu_A(x) > 0\}. \quad (1.20)$$

Ядро (core) нечіткої множини – множина елементів з максимальним ступенем належності $\mu_A(x) = 1$. Висота нечіткої множини визначається як $h(A) = \sup_{x \in E} \mu_A(x)$; якщо висота дорівнює одиниці, множина називається нормальною.

Важливим інструментом аналізу нечітких множин є α -зрізи. α -зріз нечіткої множини A при рівні $\alpha \in (0, 1]$ – це чітка множина

$$A_\alpha = \{x \in E \mid \mu_A(x) \geq \alpha\}, \quad (1.21)$$

яка містить усі елементи зі ступенем належності не меншим за α . Теорема про представлення стверджує, що будь-яка нечітка множина може бути однозначно відновлена за своїми α -зрізами, що є основою для багатьох обчислювальних методів.

Нечітке число є узагальненням звичайного дійсного числа. Воно відноситься до зв'язної множини можливих значень, де кожне можливе значення має власну вагу від 0 до 1. Таким чином, нечітке число є окремим випадком опуклої нормалізованої нечіткої множини на просторі дійсних чисел.

Серед можливих типів нечітких чисел особливе значення мають трикутні та параболічні числа [16], які широко використовуються для моделювання суб'єктивних оцінок у задачах прийняття рішень.

Нечітке число $\tilde{A} = (a, b, c)$ називається трикутним нечітким числом, якщо його функція належності має вигляд:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases} \quad (1.22)$$

Тут a – нижня межа носія, b – модальне значення (пік функції належності), c – верхня межа носія. Трикутне нечітке число характеризує ситуацію, коли найбільш очікуване значення дорівнює b , а можливі відхилення від нього рівномірно розподілені в інтервалах $[a, b]$ та $[b, c]$.

Над трикутними числами можна визначити основні арифметичні операції для подальшого застосування у розрахунках. Нехай $A = (a, b, c)$ і $B = (a_1, b_1, c_1)$ – два трикутні числа. Тоді:

Сума визначається як:

$$A + B = (a + a_1, b + b_1, c + c_1). \quad (1.23)$$

Різниця визначається як:

$$A - B = A + (-B) = (a - c_1, b - b_1, c - a_1), \quad (1.24)$$

де $-B = (-c_1, -b_1, -a_1)$ визначається як число, протилежне B .

Іншими словами, протилежні трикутні числа, а також їх сума та різниця також є трикутними числами. При цьому результати обернення та множення трикутних чисел таку властивість не зберігають і не завжди представляють собою трикутні числа.

Розглянемо детальніше властивості арифметичних операцій над нечіткими числами. Для додавання нечітких чисел використовується принцип розширення Заде, згідно з яким функція належності суми визначається через функції належності доданків. У випадку трикутних чисел це зводиться до простого додавання відповідних параметрів, що робить обчислення ефективними та інтуїтивно зрозумілими.

Важливою особливістю нечітких чисел є те, що віднімання не є оберненою операцією до додавання в класичному розумінні. Якщо A та B – нечіткі числа, то $A - B + B \neq A$ у загальному випадку. Це пов'язано з тим, що операції над нечіткими числами завжди збільшують невизначеність результату. Кожна операція розширює носій нечіткого числа, що відображає накопичення невизначеності при послідовних обчисленнях. У практичних застосуваннях це означає, що довгі ланцюги обчислень з нечіткими числами потребують періодичної дефазифікації для запобігання надмірному зростанню невизначеності.

Множення нечітких чисел є складнішою операцією. Для трикутних чисел $A = (a, b, c)$ та $B = (a_1, b_1, c_1)$ добуток не завжди є трикутним числом, але може бути апроксимований трикутним числом. Для позитивних чисел наближена формула має вигляд:

$$A \times B \approx (a \cdot a_1, b \cdot b_1, c \cdot c_1). \quad (1.25)$$

Однак ця апроксимація є точною лише для спеціальних випадків. У загальному випадку потрібно застосовувати α -зрізи та інтервальну арифметику для кожного рівня належності, що призводить до більш складних обчислень.

Параболічне нечітке число задається аналогічно і має ті ж властивості, але з іншою функцією належності:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1 - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^2, & a \leq x \leq b, \\ 1 - \left(\frac{x-b}{c-b}\right)^2, & b \leq x \leq c, \\ 0, & x > c. \end{cases} \quad (1.26)$$

Параболічна функція належності надає більшу вагу значенням, близьким до модального b , порівняно з трикутною, що робить її більш реалістичною для моделювання багатьох практичних ситуацій. Для суб'єктивної переоцінки чи недооцінки сприйняття плин timer часу справедливе правило: чим більше можливе відхилення у сприйнятті, тим менша ймовірність його отримання. Саме цю властивість краще відображає параболічне нечітке число.

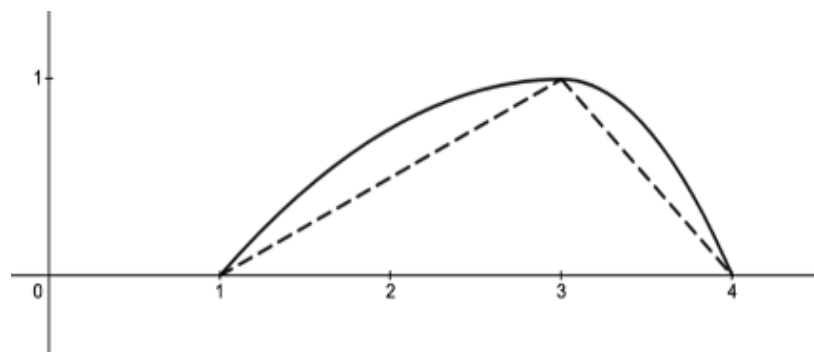


Рис. 1.1: Графічне представлення трикутного та параболічного нечітких чисел

На рисунку 1.1 показано графічне представлення трикутного (пунктирна лінія) та параболічного (суцільна лінія) нечітких чисел з однаковими параметрами носія $[a, c]$ та модальним значенням b . Як видно з графіку, параболічна функція належності має більш гладку форму і надає вищі значення належності для точок, близьких до модального значення, що краще відповідає природі багатьох суб'єктивних оцінок.

Незважаючи на те, що інформацію про невизначеність можна формалізувати за допомогою нечітких чисел, процедура прийняття рішень має

базуватися на чітких значеннях. Кінцевий вихід нечітких систем та вибір відповідних рішень мають бути обґрунтовані на основі значення, що характеризується показником впевненості (важливості). Для отримання чіткого значення використовуються методи розрахунку рангів (дефазифікації) нечітких чисел, що по суті є чіткими числами-представниками і можуть бути використані як узагальнені значення для подальших розрахунків.

Одним із найбільш поширених методів розрахунку рангу нечіткого числа є метод Ягера [32], за яким обчислюється ранг Ягера першого типу у вигляді:

$$F_1(\tilde{A}) = \int_0^1 g(\alpha) \cdot [\inf \tilde{A}_\alpha + \sup \tilde{A}_\alpha] / 2 d\alpha, \quad (1.27)$$

де $g(\alpha)$ – вагова функція, що вимірює важливість значення на рівні α -зрізу $\tilde{A}_\alpha = \{x \in R | \mu_a(x) \geq \alpha\}$. Якщо $g(\alpha) = \alpha$, індекс можна розглядати як геометричний центр нечіткого числа $\tilde{A}$. Носієм нечіткого числа в даному випадку є відрізок $[0, 1]$.

Якщо $g(\alpha) = \alpha$ та нечітке число є трикутним, індекс F_1 зводиться до простішого вигляду:

$$F_1(\tilde{A}) = (a + 2b + c) / 4, \quad (1.28)$$

а у випадку параболічного числа:

$$F_1(\tilde{A}) = (a + 3b + c) / 5, \quad (1.29)$$

де $a = \inf \tilde{A}$, b – модальне значення, $c = \sup \tilde{A}$.

Даний метод дефазифікації також називають методом центру тяжіння (COG, Center of Gravity). Серед інших відомих методів виділяють метод бісектора площі (BOA, Bisector of Area), за яким знаходиться таке значення

x , щоб проведена через нього вертикальна лінія розділяла нечітке число на дві рівні за площею частини.

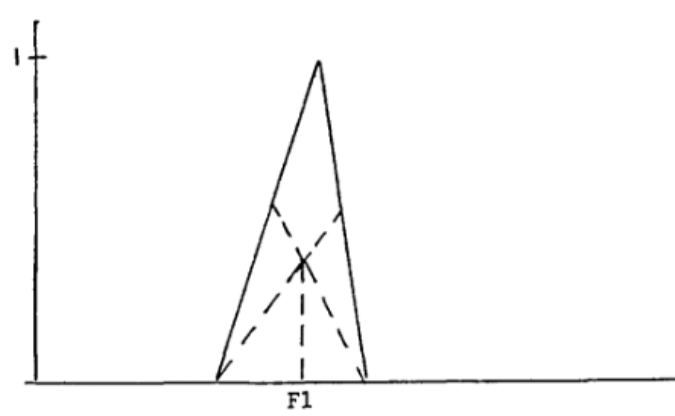


Рис. 1.2: Ілюстрація методу дефазифікації нечіткого числа. Точка F1 позначає результат застосування методу центру тяжіння

Графічна ілюстрація процесу дефазифікації представлена на рисунку 1.2. Тут показано трикутне нечітке число (сувільна лінія) та його дефазифіковане значення F1, отримане за методом центру тяжіння. Пунктирна лінія демонструє альтернативний варіант функції належності, що може використовуватися для порівняння різних підходів до визначення чіткого представника нечіткого числа. Значення F1 відповідає точці, в якій зосереджена “маса” нечіткого числа, що робить цей метод інтуїтивно зрозумілим та математично обґрунтованим.

Застосування нечітких чисел для моделювання суб’єктивного сприйняття плинності часу є природним і обґрунтованим. Враховуючи, що “вартість” подорожі між містами у часовому вимірюванні може різнитися в залежності від ситуації, більш точним представленням такої вартості є задання у вигляді трикутних або параболічних чисел. Якщо в якості вартості обрати суб’єктивне сприйняття часу, відносна тривалість подорожі між містами може змінюватися в залежності від факторів, що впливають на шлях – затори, погана погода, емоційний стан особи, що приймає рішення, тощо.

Навіть у більш простому сприйнятті динамічної тривалості дороги між

містами, коли вимірюється фактичний час, що потрібен на подолання шляху із рекомендованою середньою швидкістю, ті ж фактори змінюють дану тривалість, і тому є сенс представляти досліджуваний час шляху у вигляді трикутних чи параболічних чисел. Для того, щоб знайти найбільш успішне чи ефективне рішення проблем, необхідно враховувати фактори, що впливають на емоції людини і, отже, на швидкість сприйняття часу, розподіл ресурсів і календарне планування.

Застосування апарату нечітких чисел виходить далеко за межі моделювання часового сприйняття. Нечітка логіка, запроваджена Лотфі Заде, знайшла широке практичне використання в системах керування, штучному інтелекті та підтримці прийняття рішень. Системи на основі нечіткої логіки успішно застосовуються в автомобільній промисловості для керування антиблокувальними системами гальм (ABS) та системами круїз-контролю, в побутовій техніці (пральні машини, кондиціонери, мікрохвильові печі), у фінансових системах для оцінки ризиків та прогнозування ринкових тенденцій.

У контексті прийняття рішень в умовах невизначеності нечіткі числа дозволяють формалізувати якісні оцінки експертів типу “дуже швидко”, “приблизно сім годин”, “значно довше”. Такі оцінки часто зустрічаються в реальних ситуаціях, де точні вимірювання недоступні або недоцільні, а судження базуються на досвіді, інтуїції або неповній інформації. Використання нечітких чисел у моделюванні дозволяє враховувати цю природну невизначеність без штучного зведення всіх параметрів до чітких значень, що могло б призвести до втрати важливої інформації.

У задачах оптимізації з нечіткими параметрами, зокрема в нечіткій задачі комівояжера, матриця вартостей $D = [\tilde{d}_{ij}]$ складається не з чітких чисел, а з нечітких, що відображають невизначеність у тривалості переміщення між містами. Така невизначеність може виникати через непередавані дорожні умови, погодні фактори, технічні несправності або, як

розглядається в даній роботі, через суб'єктивне сприйняття плину часу особами, що приймають рішення. Розв'язок такої задачі також має нечіткий характер і вимагає застосування спеціальних методів порівняння та вибору оптимального маршруту.

Емоційний стан людини суттєво впливає на сприйняття часових інтервалів. Дослідження в галузі психофізики та нейронауки показують, що в стресових ситуаціях або станах підвищеної уваги час може здаватися таким, що плине повільніше, тоді як в станах релаксації або зайнятості цікавою діяльністю – значно швидше. Формалізація цього ефекту за допомогою нечітких чисел дозволяє враховувати людський фактор у математичних моделях, що робить їх більш адекватними реальності та придатними для застосування в системах підтримки прийняття рішень, де беруть участь люди.

1.5. Гібридна дворівнева модель інформаційного розповсюдження

Розглянуті в попередніх підрозділах моделі – дифузійна модель на основі рівнянь у частинних похідних та задача комівояжера з нечіткими параметрами – не є альтернативними підходами, а утворюють єдину гібридну дворівневу модель інформаційного розповсюдження. Така ієрархічна структура дозволяє одночасно враховувати макроскопічні закономірності дифузії інформації на рівні всієї мережі та мікроскопічні особливості оптимізації доставки повідомлень на рівні окремих груп.

Масштабування та декомпозиція інформаційних процесів.

Ефективність моделювання інформаційного розповсюдження суттєво залежить від вибору масштабу опису. Континуальні дифузійні моделі добре описують глобальну динаміку, коли деталі мікровзаємодій усереднюються [2, 33]. Водночас дискретні мережеві структури соціальних систем потребу-

ють врахування локальної топології для точного прогнозування каскадних ефектів [34].

Принцип декомпозиції масштабів полягає у розділенні задачі на ієрархічні рівні: на глобальному рівні домінує дифузійний механізм, коли інформація поширюється через “мости” між віддаленими частинами мережі; на локальному рівні критичну роль відіграє структура зв’язків та послідовність активації вузлів [14]. Ефективна відстань між регіонами визначається не географічною близькістю, а інтенсивністю комунікаційних потоків між ними [35], що дозволяє застосовувати континуальні моделі до складних мережових структур.

Ієрархічна організація соціальних систем природно відповідає дворівневному підходу: великі міста функціонують як хаби, через які інформація поширюється між регіонами (макрорівень), а всередині кожного регіону процес визначається локальною структурою спільнот та персональними контактами (мікрорівень) – таке розділення відображає реальну модульність соціальних мереж.

Часові та просторові масштаби поширення.

Комунікаційні процеси в соціальних системах охоплюють часові масштаби від секунд (миттєві повідомлення) до місяців (формування громадської думки), причому на різних масштабах діють принципово різні механізми: короткочасна динаміка визначається індивідуальною поведінкою та доступністю каналів, довгострокова – структурними властивостями мережі та культурними факторами [13].

Каскади інформації формуються переважно в межах щільно зв’язаних спільнот, де учасники мають високий рівень довіри та інтенсивні контакти [36]. Поширення між спільнотами відбувається через так звані “слабкі зв’язки” – контакти між особами з різних соціальних груп, які виконують роль мостів для інформаційних потоків. Ця структурна двоїстість соціаль-

них мереж підтверджує необхідність різних моделей для опису локальної та глобальної динаміки.

Механізм порогової активації пояснює, чому деякі ідеї швидко набувають масового поширення, тоді як інші затухають: індивід приймає нову інформацію або змінює поведінку лише тоді, коли достатня частка його оточення вже активована [37, 38]. На глобальному рівні цей механізм проявляється як фронт дифузії з чітким переходом між “інфікованими” та “здоровими” областями; на локальному – як критична залежність від послідовності активації: правильний порядок “зараження” вузлів може ініціювати каскад, тоді як неоптимальна послідовність призводить до затухання.

Експериментальні дослідження поширення поведінкових інновацій підтверджують, що складні паттерни (які потребують соціального підкріплення) розповсюджуються переважно через кластеризовані локальні структури, а не через випадкові далекі контакти [39]. Це означає, що для складної інформації, яка потребує пояснення, переконання або демонстрації, оптимізація послідовності донесення до учасників групи має критичне значення.

Оптимізація послідовності локальних взаємодій.

На рівні окремої групи або спільноти задача донесення інформації до всіх учасників набуває характеру комбінаторної оптимізації. Кожен контакт потребує часу та зусиль, причому ефективність наступного контакту може залежати від результатів попередніх. Це створює природну постановку, аналогічну задачам маршрутизації: учасники групи відповідають “клієнтам”, яких необхідно “відвідати”, а час та зусилля комунікації – “відстані” між ними [40].

Принципова відмінність інформаційного розповсюдження від класичної логістики полягає в динамічній природі “відстаней”: час, необхідний для переконання або інформування конкретної особи, залежить від поточного контексту – її емоційного стану, зайнятості, попередньої обізнаності з те-

мою, довіри до джерела [41]. Ці фактори неможливо точно виміряти або передбачити, що обґрунтовує застосування нечітких чисел для їх формалізації.

Вибір початкових “насіненних” вузлів для запуску інформаційного каскаду належить до класу NP-складних задач [22], подібно до задачі комівояжера. Обидві задачі потребують пошуку в експоненційно великому просторі рішень, що виправдовує застосування механістичних методів – зокрема, алгоритму імітації відпалу [42].

Ефективність інформаційної кампанії критично залежить від послідовності активації учасників: вдало обрана послідовність створює ефект “снігової кулі”, коли кожен наступний контакт підсилюється соціальним доказом від попередніх; невдала послідовність призводить до того, що потенційні учасники отримують інформацію ізольовано, без соціального підкріплення, і відмовляються від прийняття [30]. Саме ця залежність від порядку робить задачу комівояжера адекватним математичним інструментом для оптимізації локального розповсюдження.

Верхній рівень: макроскопічна дифузійна модель.

На верхньому (макроскопічному) рівні процес інформаційного розповсюдження описується моделлю на основі рівнянь у частинних похідних дифузійного типу (1.5)–(1.11). Ця модель характеризує загальну динаміку поширення інформації в соціальній мережі як неперервний процес, аналогічний теплопровідності. Модель визначає просторово-часовий розподіл рівня інформованості $u(x, t)$ або $u(x, y, t)$, враховуючи коефіцієнт дифузії α , що відображає сприйнятливність суспільства до нової інформації. Вплив джерел інформації описується через граничні умови та точкові джерела, що дозволяє аналітично розв’язувати задачі оптимізації розміщення джерел для досягнення бажаного рівня охоплення за мінімальний час. Результатом розв’язання задач верхнього рівня є оптимальна кількість інфор-

маційних джерел, їх просторове розміщення та часові параметри процесу розповсюдження на макрорівні.

Нижній рівень: оптимізація доставки в групах.

На нижньому (мікроскопічному) рівні розглядається задача оптимізації послідовності донесення інформації до учасників конкретної групи або підмережі. Ця задача формалізується як задача комівояжера з нечіткими параметрами, де вузли соціальної мережі відповідають учасникам групи, яких необхідно поінформувати, а нечіткі вартості переміщення $\tilde{d}_{ij}$ відображають суб'єктивне сприйняття часу передачі інформації між учасниками. Метою оптимізації є визначення послідовності обходу (маршруту), що забезпечує найшвидше донесення інформації до всіх учасників групи з урахуванням невизначеності, зумовленої емоційним станом, комунікаційними бар'єрами та іншими суб'єктивними факторами.

Взаємозв'язок рівнів моделі.

Ключовою особливістю гібридної моделі є взаємозв'язок між рівнями. Від макрорівня до мікрорівня результати дифузійної моделі визначають структуру задачі комівояжера: декомпозиція мережі на сегменти (підмережі) на основі оптимального розміщення джерел задає множину вузлів для кожної локальної задачі комівояжера; часові обмеження дифузійної моделі ($t_{\max}$) визначають граничний час для розв'язання задачі маршрутизації в кожній групі; рівень інформованості, досягнутий на макрорівні, визначає пріоритетність груп для подальшого охоплення.

У зворотному напрямку, від мікрорівня до макрорівня, результати задачі комівояжера впливають на параметри дифузійної моделі: оптимальний маршрут доставки інформації в групі визначає послідовність активації джерел у підобласті; нечіткі оцінки часу проходження маршруту враховуються при уточненні граничних умов дифузійної задачі; ефективність локальної доставки впливає на загальний коефіцієнт дифузії в даному се-

гменті мережі.

Схема застосування гібридної моделі.

Практичне застосування гібридної дворівневої моделі передбачає наступну послідовність дій:

Етап 1. На основі характеристик соціальної мережі формулюється та розв’язується макрорівнева задача: визначається оптимальна кількість джерел інформації та їх розміщення (декомпозиція мережі на сегменти).

Етап 2. Для кожного сегмента (групи учасників) формулюється задача комівояжера з нечіткими часовими параметрами: визначається оптимальна послідовність донесення інформації до всіх учасників групи.

Етап 3. Результати локальної оптимізації агрегуються для уточнення параметрів макромоделі та коригування загальної стратегії розповсюдження.

Етап 4. За необхідності виконується ітеративне уточнення: якщо локальні часові оцінки суттєво відрізняються від початкових припущень, коригуються параметри макромоделі та повторюється процес оптимізації.

Така гібридна модель дозволяє поєднати переваги неперервного дифузійного опису (аналітичні розв’язки, фізична інтерпретація) з можливостями дискретної комбінаторної оптимізації (врахування структури мережі, суб’єктивних факторів), що забезпечує адекватне моделювання реальних процесів інформаційного розповсюдження.

Математичні засади дворівневої оптимізації.

Дворівнева оптимізація є математичним апаратом для задач з ієрархічною структурою прийняття рішень [43, 44]. У такій постановці рішення верхнього рівня (“лідера”) визначає обмеження для задачі нижнього рівня (“послідовника”), а оптимальний відгук нижнього рівня впливає на якість рішення верхнього. Процес інформаційного розповсюдження природно вписується в цю схему: стратегічні рішення про розміщення джерел та розпо-

діл ресурсів (верхній рівень) визначають умови для тактичної оптимізації послідовності контактів у кожній групі (нижній рівень).

Реальні соціальні мережі мають виражену модульну структуру: усередині спільнот (сім'я, колеги, друзі) зв'язки значно щільніші та інтенсивніші, ніж між спільнотами [45, 18]. Ця неоднорідність структури призводить до якісно різної динаміки поширення на різних рівнях. Між кластерами інформація передається через поодинокі “мостові” контакти, і успіх передачі визначається характеристиками цих критичних зв'язків. Усередині кластерів поширення підсилюється множинними контактами та соціальним підкріпленням, а ефективність залежить від послідовності активації учасників [46].

Каскади інформації у великих системах демонструють характерну ієрархічну послідовність: спочатку інформація досягає ключових “хабів” – осіб з великою кількістю контактів та високим впливом, а потім від них поширюється до периферійних учасників [47]. Ця ієрархія відповідає структурі “макрорівень $\rightarrow$ мікрорівень” у запропонованій моделі: дифузійна модель описує поширення між хабами та регіонами, задача комівояжера оптимізує донесення до кінцевих учасників.

Поширення інформації в реальних системах зумовлене двома паралельними процесами: внутрішньомережевим (peer-to-peer), коли інформація передається від особи до особи через соціальні контакти, та зовнішнім впливом медіа, реклами, офіційних повідомлень [48]. Дифузійна модель верхнього рівня природно описує обидві компоненти через поєднання граничних умов (зовнішні джерела) та внутрішньої дифузії (peer-to-peer), тоді як мікрорівнева оптимізація зосереджується на ефективності локальних взаємодій.

Переваги гібридного підходу.

Гібридна дворівнева модель має суттєві переваги порівняно з однорів-

невими підходами.

Обчислювальна ефективність досягається через декомпозицію: замість єдиної задачі великої розмірності розв'язується макрозадача з меншою кількістю змінних (визначення кількості та розміщення джерел) та множина локальних мікрозадач (оптимізація маршрутів всередині кластерів). Ієрархічний підхід до комбінаторних задач дозволяє скоротити обчислювальні витрати на порядки для великомасштабних систем [49], оскільки складність TSP зростає факторіально з кількістю вузлів, а декомпозиція на менші підзадачі радикально зменшує простір пошуку.

Адаптивність до невизначеності забезпечується диференціацією підходів на різних рівнях. На макрорівні використовуються усереднені характеристики (коефіцієнт дифузії як інтегральна властивість середовища), що є стійкими до локальних флуктуацій та шуму у вхідних даних. На мікрорівні застосовуються нечіткі параметри, які явно формалізують невизначеність у часових оцінках без потреби у точних статистичних розподілах, що часто недоступні для соціальних систем.

Інтерпретованість результатів є критичною для практичного застосування. Макрорівень надає стратегічні рекомендації (кількість джерел, їх географічне розміщення, необхідний часовий горизонт), що безпосередньо транслуються у бюджетні та організаційні рішення. Мікрорівень генерує тактичні вказівки (послідовність інформування учасників конкретної групи), які можуть бути реалізовані виконавцями без додаткової інтерпретації.

Ітеративне уточнення забезпечує адаптивність моделі до нових даних. Якщо фактичні результати локальної оптимізації суттєво відрізняються від початкових припущень макромоделі (наприклад, реальний час комунікації виявився більшим за очікуваний), параметри макромоделі коригуються, і процес оптимізації повторюється з уточненими даними.

Порівняння з альтернативними підходами.

Чисто дискретні мережеві моделі (каскадні моделі [22], моделі порогової активації [37]) детально враховують топологію зв'язків та індивідуальні характеристики вузлів, проте потребують повної інформації про структуру мережі – даних, які рідко доступні для великих соціальних систем. Крім того, обчислювальна складність таких моделей зростає з розміром мережі, що обмежує їх застосовність для масштабних задач.

Стохастичні епідеміологічні моделі [50, 51] ефективні для опису та прогнозування глобальної динаміки поширення, але вони є переважно описовими: дозволяють оцінити, як процес буде розвиватися за заданих умов, але не надають прямих механізмів оптимізації – визначення, як змінити умови для досягнення бажаного результату.

Агентні моделі забезпечують максимальну деталізацію, дозволяючи моделювати індивідуальну поведінку кожного учасника системи. Однак така деталізація має високу ціну: значні обчислювальні витрати та необхідність калібрування великої кількості параметрів, що потребує обсягу даних, який рідко доступний для реальних соціальних систем.

Запропонована гібридна модель займає проміжне положення в цьому спектрі підходів. Вона використовує аналітичну потужність континуальних дифузійних моделей для стратегічного планування (скільки джерел, де розмістити, який часовий горизонт) та комбінаторну оптимізацію для тактичної реалізації (в якій послідовності інформувати учасників групи). Такий баланс дозволяє отримувати практично корисні результати без надмірних вимог до вхідних даних або обчислювальних ресурсів.

1.6. Висновки до розділу 1

У першому розділі дисертаційної роботи проаналізовано проблеми дослідження процесів інформаційного розповсюдження та розглянуто основні моделі, що складають теоретичну основу їх вивчення з урахуванням нечі-

ткого сприйняття часу.

Проаналізовано сучасний стан проблеми інформаційного розповсюдження в контексті розвитку цифрових технологій та соціальних мереж. Показано актуальність розробки математичних моделей для аналізу механізмів поширення як достовірної інформації, так і дезінформації. Виявлено необхідність врахування невизначеності у вхідних даних та суб'єктивного характеру сприйняття часових параметрів.

Обґрунтовано застосування рівнянь дифузійного типу для моделювання інформаційного розповсюдження на основі аналогії з процесами теплопровідності. Проаналізовано модель дифузії інновацій Басса (1.4) та її зв'язок з рівнянням теплопровідності. Сформульовано одновимірну математичну постановку задачі (1.7)–(1.10) та встановлено відповідність між параметрами теплофізичної моделі та характеристиками інформаційного процесу: коефіцієнт теплопровідності α – сприйнятливність суспільства; температура джерела T_1 – агресивність джерела; порогова температура T_2 – бажаний рівень обізнаності.

Досліджено епідеміологічні моделі SIR (1.1) та SEIR (1.2) як математичний апарат для опису динаміки поширення інформації в популяціях. Показано зв'язок цих моделей з реакційно-дифузійними рівняннями (1.3) та обґрунтовано застосовність епідеміологічного підходу до моделювання інформаційних процесів. Проаналізовано модель Дейлі-Кендала для поширення чуток та її відмінності від класичних епідеміологічних моделей.

Розроблено двовимірну модель (1.11) для адекватного опису розповсюдження інформації у соціальних мережах з площинною топологією, що дозволяє враховувати просторову структуру мереж та моделювати географічне поширення інформації.

Проаналізовано класичну та динамічну постановки задачі комівояжера як моделі оптимізації процесів з урахуванням часового фактору. Розглянуто історію розвитку задачі від робіт Данцига та співавторів до сучасних

механістичних підходів. Обґрунтовано застосування TSP для оптимізації послідовності відвідування вузлів мережі при донесенні інформації до цільової аудиторії та встановлено зв'язок між оптимізацією транспортних маршрутів та процесами розповсюдження інформації через спільну природу оптимізації потоків на графах.

Систематизовано теорію нечітких множин Заде як математичний апарат для формалізації невизначеності. Розглянуто означення нечіткої множини (1.19), носія (1.20) та α -зрізів (1.21). Обґрунтовано доцільність застосування трикутних (1.22) та параболічних (1.26) нечітких чисел для моделювання суб'єктивного сприйняття плину часу.

Описано арифметичні операції над нечіткими числами (1.23)–(1.25) та методи їх дефазифікації, зокрема метод центру тяжіння (1.27)–(1.29), які дозволяють отримувати чіткі значення для прийняття рішень на основі нечітких вхідних даних у задачах оптимізації.

Проаналізовано багатомасштабний характер процесів інформаційного розповсюдження та обґрунтовано необхідність дворівневого підходу з позицій теорії дворівневої оптимізації. Показано, що на різних просторово-часових масштабах домінують різні механізми поширення. Виявлено переваги гібридного підходу порівняно з альтернативами: обчислювальна ефективність через декомпозицію, адаптивність до невизначеності, інтерпретованість результатів, можливість ітеративного уточнення.

Запропоновано гібридну дворівневу модель інформаційного розповсюдження, яка поєднує макроскопічний опис на основі рівнянь у частинних похідних (верхній рівень) та мікроскопічну оптимізацію на основі задачі комівояжера з нечіткими параметрами (нижній рівень). Визначено чотириетапну схему практичного застосування моделі та взаємозв'язки між рівнями.

Запропонована гібридна модель та розглянуті математичні постановки задач створюють теоретичну базу для розробки методів розв'язування, які

детально досліджуються в наступних розділах.

РОЗДІЛ 2

ДИФУЗІЙНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

У попередньому розділі обґрунтовано гібридну дворівневу модель інформаційного розповсюдження та показано, що на верхньому (макроскопічному) рівні процес описується рівняннями дифузійного типу. Даний розділ присвячено розробці аналітичних методів розв’язання цих рівнянь, що формують інструментарій верхнього рівня гібридної моделі. Для одновимірного та двовимірного випадків розглядаються: метод розділення змінних (метод Фур’є) для знаходження власних функцій та побудови загального розв’язку у вигляді ряду, метод функції Гріна для задач з точковими джерелами, а також методи декомпозиції складних областей на прості підобласті [52]. Отримані аналітичні розв’язки дозволяють визначати оптимальну декомпозицію мережі на сегменти, що є необхідною передумовою для формулювання задач нижнього рівня моделі.

2.1. Аналітичні методи розв’язання рівняння теплопровідності для моделювання інформаційної дифузії

Рівняння теплопровідності, введене в розділі 1, описує процес дифузії тепла (або інформації в нашій інтерпретації) в просторі та часі [53, 54]. Для одновимірного випадку маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

з відповідними граничними та початковими умовами. У даному розділі

розглянемо аналітичні методи розв'язання цього рівняння, що дозволяють отримати точні розв'язки для певних класів задач [55].

Метод розділення змінних (метод Фур'є). Метод розділення змінних є одним з найпотужніших аналітичних методів розв'язання лінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних [5]. Основна ідея методу полягає в припущенні, що розв'язок можна представити у вигляді добутку функцій, кожна з яких залежить лише від однієї змінної:

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (2.2)$$

Підставляючи цей вираз у рівняння теплопровідності (2.1), отримуємо:

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t) \quad (2.3)$$

Розділяючи змінні, отримуємо:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha T(t)} = -\lambda \quad (2.4)$$

де $-\lambda$ – константа розділення. Це призводить до двох звичайних диференціальних рівнянь:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (2.5)$$

$$T'(t) + \alpha\lambda T(t) = 0 \quad (2.6)$$

Розв'язок рівняння для часової компоненти (2.6):

$$T(t) = Ae^{-\alpha\lambda t} \quad (2.7)$$

Розв'язок просторового рівняння (2.5) залежить від граничних умов задачі. Граничні умови визначають власні значення λ_n та відповідні власні функції $X_n(x)$. Загальний розв'язок будується як суперпозиція часткових розв'язків:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-\alpha \lambda_n t} \quad (2.8)$$

Коефіцієнти A_n визначаються з початкової умови за допомогою властивості ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля [56].

2.2. Методи оптимізації інформаційного розповсюдження на основі рівняння теплопровідності (одновимірний випадок)

Застосування аналітичних методів розв'язання рівняння теплопровідності дозволяє побудувати практичні підходи до оптимізації процесів інформаційного розповсюдження [57]. Розглянемо методи визначення оптимальних параметрів системи для одновимірного випадку – лінійного графа соціальних відносин.

Постановка одновимірної задачі. Розглядається стержень (сегмент соціальної мережі) довжиною $L_p/2$ з джерелом інформації на лівому кінці. Температура T_1 характеризує інтенсивність джерела інформації, α – коефіцієнт сприйнятливості суспільства до нової інформації. Математична постановка задачі має вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L_p/2, \quad t > 0, \quad (2.9)$$

з граничними умовами:

$$u(0, t) = T_1, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L_p/2} = 0, \quad t > 0, \quad (2.10)$$

та початковою умовою:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_p/2. \quad (2.11)$$

Гранична умова $u(0, t) = T_1$ означає постійну температуру джерела інформації, а умова $\partial u / \partial x|_{x=L_p/2} = 0$ – ізоляцію правого кінця (симетрія

відносно центру сегмента). Цільова температура $T_2 < T_1$ визначає бажаний рівень обізнаності суспільства, який має бути досягнутий за час $t_{\max}$ у найвіддаленішій точці сегмента.

Розв'язання задачі для моделі інформаційного розповсюдження.

Застосуємо метод розділення змінних для знаходження розв'язку задачі [5, 52]. Спочатку визначимо стаціонарний розв'язок u_s , який визначає стан рівноваги [57]. Розв'язуючи диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 u_s}{dx^2} = 0 \quad (2.12)$$

маємо

$$\begin{aligned} u_s = Ax + B \implies u(0) = B = T_1 \implies u'(L) = A = 0 \\ \implies u_s = T_1. \end{aligned} \quad (2.13)$$

У цьому випадку, до моменту рівноваги, на $u(x, t)$ буде впливати функція $\nu(x, t)$, тоді $u(x, t)$ можна записати як:

$$u(x, t) = T_1 + \nu(x, t). \quad (2.14)$$

Розв'яжемо подібну задачу відносно ν :

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2}. \quad (2.15)$$

Граничні умови:

$$\begin{cases} \nu(0, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial \nu(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = \nu_x(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Початкова умова:

$$\nu(x, 0) = -T_1. \quad (2.17)$$

Застосуємо метод розділення змінних:

$$\nu(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.18)$$

Підставляючи в рівняння, отримуємо

$$X(x)T'(t) = \alpha X''(x)T(t), \quad (2.19)$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha T} = -\lambda. \quad (2.20)$$

Маємо два рівняння:

$$X'' + \lambda X = 0 \quad (2.21)$$

$$T' + \alpha \lambda T = 0. \quad (2.22)$$

Розв'яжемо (2.21):

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(L) = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Розглядаючи наступні інтервали

1. $\lambda = \beta^2 > 0,$
 2. $\lambda = 0,$
 3. $\lambda = -\gamma^2 < 0,$
- (2.24)

отримуємо, що розв'язки є нетривіальними тільки для першого інтервалу, і маємо наступні значення:

$$\lambda_n = \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Отже, розв'язки (2.21) мають наступний вигляд:

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})}{L}x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.26)$$

Повернемося до рівняння (2.22):

$$T' + \alpha\lambda T = 0. \quad (2.27)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд:

$$T(t) = Ae^{-\alpha\lambda t}. \quad (2.28)$$

Для кожного $X_n(x)$ з власним значенням λ_n , встановимо $T_n(t)$ як:

$$T_n(t) = A_n e^{-\alpha\lambda_n t}. \quad (2.29)$$

Тепер можемо записати загальну форму розв'язку (2.18):

$$\nu(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} e^{-\alpha\lambda_n t}. \quad (2.30)$$

Розглянемо початкову умову для знаходження A_n :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} = -T_1. \quad (2.31)$$

Використовуючи властивість ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля [56]:

$$A_n = \frac{\langle X_n, \varphi \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle}. \quad (2.32)$$

Звідки:

$$A_n = -\frac{2T_1}{L} \int_0^L \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} dx \quad (2.33)$$

$$A_n = -\frac{2T_1}{L} \left(-\frac{2L \cos \frac{2\pi n + \pi}{2} - 1}{\pi(2n+1)} \right) = \frac{4T_1(\cos \frac{2\pi n + \pi}{2} - 1)}{\pi(2n+1)} \quad (2.34)$$

Підставляючи це значення в (2.14), маємо розв'язок задачі для половини однієї частини стрижня:

$$u(x, t) = \frac{4T_1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi n + \pi}{2} - 1}{2n+1} \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} e^{-\alpha \frac{\pi(n + \frac{1}{2})^2}{L^2} t} + T_1 \quad (2.35)$$

Дослідження збіжності ряду розв'язку.

Для обґрунтування коректності отриманого розв'язку (2.35) необхідно довести збіжність функціонального ряду. Застосуємо ознаку Вейєрштрасса (М-тест) для рівномірної збіжності.

Крок 1: Оцінка загального члена ряду.

Загальний член ряду має вигляд:

$$a_n(x, t) = \frac{4T_1}{\pi} \cdot \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1}{2n+1} \cdot \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} \cdot e^{-\alpha \frac{\pi^2(n + \frac{1}{2})^2}{L^2} t}. \quad (2.36)$$

Оцінимо кожен множник:

- $\left| \cos \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1 \right| \leq 2$, оскільки $\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$ для всіх цілих n ;
- $\left| \sin \frac{\pi(n + \frac{1}{2})x}{L} \right| \leq 1$ для всіх $x \in [0, L]$;
- $e^{-\alpha \frac{\pi^2(n + \frac{1}{2})^2}{L^2} t} \leq e^{-\alpha \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t}$ для $t > 0$.

Отже, для $t > 0$:

$$|a_n(x, t)| \leq \frac{8T_1}{\pi(2n+1)} \cdot e^{-\alpha \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t} =: M_n(t). \quad (2.37)$$

Крок 2: Застосування ознаки Вейєрштрасса.

Для фіксованого $t_0 > 0$ маємо:

$$M_n(t_0) = \frac{8T_1}{\pi(2n+1)} \cdot e^{-\alpha \frac{\pi^2 n^2}{L^2} t_0}. \quad (2.38)$$

Експоненційний множник e^{-cn^2} (де $c = \alpha \pi^2 t_0 / L^2 > 0$) спадає швидше за будь-який поліном, зокрема:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k e^{-cn^2} = 0 \quad \text{для будь-якого } k > 0. \quad (2.39)$$

Для достатньо великих n виконується $e^{-cn^2} < n^{-3}$, тому:

$$M_n(t_0) < \frac{8T_1}{\pi(2n+1)} \cdot n^{-3} < \frac{4T_1}{\pi n^4}. \quad (2.40)$$

Оскільки числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ збігається (це ряд Діріхле з показником $p = 4 > 1$), за ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд (2.35) збігається рівномірно на $[0, L] \times [t_0, +\infty)$ для будь-якого $t_0 > 0$.

Висновок. Ряд (2.35) збігається:

1. рівномірно на $[0, L] \times [t_0, +\infty)$ для будь-якого $t_0 > 0$;
2. поточною на $(0, L)$ при $t = 0$;
3. сума ряду є неперервною функцією (x, t) на $[0, L] \times (0, +\infty)$.

Швидкість збіжності визначається експоненціальним множником: для практичних обчислень достатньо $N \approx 20\text{--}30$ членів ряду, щоб досягти точності 10^{-6} .

2.3. Моделювання процесу розповсюдження інформації у двовимірному випадку

У попередньому розділі розглянуто одновимірну модель розповсюдження інформації вздовж лінійного графа соціальних відносин. У реальних соціальних мережах інформація поширюється у більш складних структурах, які можна апроксимувати двовимірною моделлю [54]. Розглянемо задачу теплопровідності на площині з точковим джерелом [53], яка моделює розповсюдження інформації від центрального вузла мережі.

Постановка задачі.

Розглянемо квадратну область $\Omega = [0, L] \times [0, L]$, що моделює фрагмент соціальної мережі, з точковим джерелом інформації потужності Q_0 у точці $(0, 0)$. Усі межі області вважаємо ізольованими, що відповідає замкненій мережі без зовнішнього впливу.

Рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u + q_0 \delta(x) \delta(y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad t > 0, \quad (2.41)$$

де $u(x, y, t)$ – рівень інформованості (або температура), α – коефіцієнт дифузії інформації (температуропровідності), $q_0 = Q_0/(c\rho)$ – нормована інтенсивність джерела, δ – дельта-функція Дірака.

Крайові умови Неймана (ізоляція меж):

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.42)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор зовнішньої нормалі до межі $\partial\Omega$. Для квадратної області це означає:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=L} = 0. \quad (2.43)$$

Початкова умова:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (2.44)$$

Розв'язок однорідного рівняння: власні функції.

Розглянемо спектральну задачу для оператора Лапласа з умовами Неймана:

$$\begin{cases} \nabla^2 \phi + \lambda \phi = 0, & (x, y) \in \Omega, \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

Застосовуємо метод розділення змінних: $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$.

Підставляючи у рівняння:

$$\frac{\partial^2(XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(XY)}{\partial y^2} + \lambda XY = 0, \quad (2.46)$$

отримуємо:

$$YX'' + XY'' + \lambda XY = 0. \quad (2.47)$$

Ділимо на XY :

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda. \quad (2.48)$$

Позначимо $\lambda = \lambda_x + \lambda_y$. Оскільки ліва частина є сумою функцій різних змінних, кожна функція має дорівнювати константі:

$$\frac{X''}{X} = -\lambda_x, \quad \frac{Y''}{Y} = -\lambda_y. \quad (2.49)$$

Маємо дві незалежні задачі Штурма-Ліувілля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda_x X = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y'' + \lambda_y Y = 0, \\ Y'(0) = 0, \quad Y'(L) = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Розв'язки задачі з умовами Неймана мають вигляд:

$$X_m(x) = \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right), \quad \lambda_{x,m} = \frac{\pi^2 m^2}{L^2}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.51)$$

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{\pi n y}{L}\right), \quad \lambda_{y,n} = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.52)$$

Власні функції двовимірної задачі:

$$\phi_{mn}(x, y) = \cos\left(\frac{\pi m x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{L}\right), \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.53)$$

Власні значення:

$$\lambda_{mn} = \lambda_{x,m} + \lambda_{y,n} = \frac{\pi^2}{L^2}(m^2 + n^2). \quad (2.54)$$

Ортогональність власних функцій.

Власні функції ϕ_{mn} ортогональні в просторі $L^2(\Omega)$ з нормою $\|f\|_{L^2(\Omega)} = (\int_{\Omega} |f|^2 dA)^{1/2}$:

$$\int_{\Omega} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dA =$$

$$= \int_0^L \int_0^L \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi px}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi ny}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{L}\right) dx dy. \quad (2.55)$$

За теоремою Фубіні розділяємо інтеграл на добуток:

$$\left[\int_0^L \cos\left(\frac{\pi mx}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi px}{L}\right) dx \right] \cdot \left[\int_0^L \cos\left(\frac{\pi ny}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi qy}{L}\right) dy \right]. \quad (2.56)$$

Обчислюємо інтеграл $\int_0^L \cos\left(\frac{\pi kz}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi jz}{L}\right) dz$:

При $k = j$:

$$\int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi kz}{L}\right) dz = \begin{cases} L, & k = 0, \\ \frac{L}{2}, & k \neq 0. \end{cases} \quad (2.57)$$

При $k \neq j$ використовуємо формулу:

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) + \cos(A + B)]. \quad (2.58)$$

Звідси:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \cos\left(\frac{\pi kz}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi jz}{L}\right) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left[\cos\left(\frac{\pi(k-j)z}{L}\right) + \cos\left(\frac{\pi(k+j)z}{L}\right) \right] dz = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(k-j)} \sin\left(\frac{\pi(k-j)z}{L}\right) + \frac{L}{\pi(k+j)} \sin\left(\frac{\pi(k+j)z}{L}\right) \right]_0^L = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(k-j)} \sin(\pi(k-j)) + \frac{L}{\pi(k+j)} \sin(\pi(k+j)) \right] = 0, \end{aligned} \quad (2.59)$$

оскільки $\sin(\pi n) = 0$ для цілих n .

Вводимо коефіцієнт $\varepsilon_k = 1$ при $k = 0$ та $\varepsilon_k = 2$ при $k \geq 1$. Тоді:

$$\boxed{\int_{\Omega} \phi_{mn} \phi_{pq} dA = \frac{L^2}{\varepsilon_m \varepsilon_n} \delta_{mp} \delta_{nq}}, \quad (2.60)$$

де δ_{ij} – символ Кронекера.

Зауваження. Ортогональність власних функцій є фундаментальною властивістю простору $L^2(\Omega)$ і не може бути отримана в просторі $L^\infty(\Omega)$ з нормою максимуму $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{(x,y) \in \Omega} |f(x,y)|$. Причина полягає в тому, що L^∞ не є гільбертовим простором: у ньому відсутній скалярний добуток, який індукує норму. Ортогональність визначається через скалярний добуток $\langle f, g \rangle = \int_\Omega f \cdot g \, dA$, який природно породжує саме L^2 -норму: $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle}$.

Побудова функції Гріна.

Функція Гріна [58] $G(x, y, t; x', y', t')$ задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \alpha \nabla^2 G + \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t'), \quad G = 0 \text{ при } t < t', \quad (2.61)$$

з крайовими умовами Неймана.

Розкладаємо функцію Гріна за власними функціями:

$$G(x, y, t; x', y', t') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}(t; t') \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y'). \quad (2.62)$$

Підставляємо у (2.61):

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \frac{\partial a_{mn}}{\partial t} \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y') &= \alpha \sum_{m,n} a_{mn} \nabla^2 \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y') \\ &+ \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Оскільки $\nabla^2 \phi_{mn} = -\lambda_{mn} \phi_{mn}$:

$$\sum_{m,n} \left[\frac{\partial a_{mn}}{\partial t} + \alpha \lambda_{mn} a_{mn} \right] \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(t - t'). \quad (2.64)$$

Множимо обидві частини на $\phi_{pq}(x, y)$ та інтегруємо по Ω :

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \left[\frac{\partial a_{mn}}{\partial t} + \alpha \lambda_{mn} a_{mn} \right] \phi_{mn}(x', y') \int_{\Omega} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dA \\ = \phi_{pq}(x', y') \int_{\Omega} \phi_{pq}(x, y) \delta(x - x')\delta(y - y') dA \cdot \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Використовуючи ортогональність:

$$\left[\frac{\partial a_{pq}}{\partial t} + \alpha \lambda_{pq} a_{pq} \right] \phi_{pq}(x', y') \frac{L^2}{\varepsilon_p \varepsilon_q} = \phi_{pq}(x', y') \delta(t - t'). \quad (2.66)$$

Ділячи ліву та праву частини на вираз $\phi_{pq}(x', y') L^2 / \varepsilon_p \varepsilon_q$:

$$\frac{\partial a_{pq}}{\partial t} + \alpha \lambda_{pq} a_{pq} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2} \delta(t - t'). \quad (2.67)$$

Для $t \neq t'$ рівняння однорідне:

$$\frac{\partial a_{pq}}{\partial t} + \alpha \lambda_{pq} a_{pq} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{pq} = C e^{-\alpha \lambda_{pq}(t-t')}. \quad (2.68)$$

Інтегруємо ліву та праву частини рівняння в околі точки t' :

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \left[\frac{\partial a_{pq}}{\partial t} + \alpha \lambda_{pq} a_{pq} \right] dt = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2} \delta(t - t') dt. \quad (2.69)$$

Для лівої частини при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$a_{pq}(t' + \epsilon) - a_{pq}(t' - \epsilon) + \alpha \lambda_{pq} \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} a_{pq} dt \approx a_{pq}(t' + \epsilon) - 0, \quad (2.70)$$

оскільки інтеграл $\rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Для правої частини за властивістю дельта-функції:

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2} \delta(t - t') dt = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2}. \quad (2.71)$$

Отже, $C = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2}$, і з урахуванням причинності ($a_{pq} = 0$ при $t < t'$):

$$a_{pq}(t; t') = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{L^2} e^{-\alpha \lambda_{pq}(t-t')} H(t - t'), \quad (2.72)$$

де H – функція Хевісайда.

Функція Гріна має вигляд:

$$G(x, y, t; x', y', t') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{L^2} \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(x', y') e^{-\alpha \lambda_{mn}(t-t')} H(t - t') \quad (2.73)$$

Розв'язок для постійного джерела: послідовність імпульсів.

Для моделювання процесу інформаційного розповсюдження обрано модель постійного (неперервного) джерела потужності q_0 . Такий вибір обумовлений наступними причинами:

1. *Відповідність реальним процесам*: у соціальних мережах джерела інформації (новинні портали, блогери, офіційні канали) працюють як миттєві імпульси (новини, пости у соціальних медіа) неперервно протягом тривалого часу;
2. *Кумулятивний ефект*: інформаційний вплив накопичується з часом – повторювані повідомлення від одного джерела посилюють загальний ефект;
3. *Стационарність процесу*: при достатньо тривалому часі дії джерела система досягає стаціонарного стану, що дозволяє оцінити максимальний рівень інформованості.

Математично постійне джерело потужності q_0 у точці $(0, 0)$ можна представити як послідовність миттєвих імпульсів величини $q_0 dt'$ у моменти часу $t' \in [0, t]$. Кожен імпульс створює відгук $G(x, y, t; 0, 0, t') \cdot q_0 dt'$.

Застосовуючи принцип суперпозиції, інтегруємо внески всіх імпульсів:

$$u(x, y, t) = q_0 \int_0^t G(x, y, t; 0, 0, t') dt'. \quad (2.74)$$

Підставляючи (2.73):

$$u(x, y, t) = q_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{L^2} \phi_{mn}(x, y) \phi_{mn}(0, 0) \int_0^t e^{-\alpha \lambda_{mn}(t-t')} dt'. \quad (2.75)$$

Обчислюємо інтеграл заміною $\tau = t - t'$, $d\tau = -dt'$:

$$\int_0^t e^{-\alpha \lambda_{mn}(t-t')} dt' = \int_t^0 e^{-\alpha \lambda_{mn}\tau} (-d\tau) = \int_0^t e^{-\alpha \lambda_{mn}\tau} d\tau = \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn}t}}{\alpha \lambda_{mn}}. \quad (2.76)$$

Оскільки $\phi_{mn}(0, 0) = \cos(0) \cos(0) = 1$:

$$u(x, y, t) = \frac{q_0}{L^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \phi_{mn}(x, y) \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t}}{\alpha \lambda_{mn}}. \quad (2.77)$$

Для пари індексів $(m, n) = (0, 0)$ маємо $\lambda_{00} = 0$, тому застосовуємо правило Лопітала:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha \lambda t}}{\alpha \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\alpha t e^{-\alpha \lambda t}}{\alpha} = t. \quad (2.78)$$

Виділяючи окремо внесок $(0, 0)$ (з $\varepsilon_0 \varepsilon_0 = 1 \cdot 1 = 1$):

$$\boxed{u(x, y, t) = \frac{q_0 t}{L^2} + \frac{q_0}{L^2} \sum_{\substack{m, n=0 \\ (m, n) \neq (0, 0)}}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \times \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t}}{\alpha \lambda_{mn}}.} \quad (2.79)$$

Перший доданок $\frac{q_0 t}{L^2}$ – це середній рівень інформованості (температури), який зростає лінійно з часом. Другий доданок описує просторовий розподіл відхилень від середнього значення.

Збіжність розв'язку у формі подвійного ряду.

Для обґрунтування коректності розв'язку (2.79) необхідно довести, що подвійний ряд збігається для будь-якого фіксованого $t > 0$, що дозволяє обчислити температуру $u(x, y, t)$ у довільній точці області в заданий момент часу. Застосуємо ознаку Вейерштрасса (М-тест) для рівномірної збіжності.

Крок 1: Оцінка загального члена ряду.

Загальний член подвійного ряду (при $(m, n) \neq (0, 0)$) має вигляд:

$$a_{mn}(x, y, t) = \frac{q_0 \varepsilon_m \varepsilon_n}{L^2} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \cdot \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t}}{\alpha \lambda_{mn}}, \quad (2.80)$$

де $\lambda_{mn} = \frac{\pi^2}{L^2}(m^2 + n^2)$, $\varepsilon_k = 1$ при $k = 0$ та $\varepsilon_k = 2$ при $k \geq 1$.

Оцінимо кожен множник:

— $|\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)| \leq 1$ та $|\cos\left(\frac{n\pi y}{L}\right)| \leq 1$ для всіх $(x, y) \in [0, L]^2$;

- $\varepsilon_m \varepsilon_n \leq 4$ для всіх $m, n \geq 0$;
- $0 \leq 1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t} \leq 1$ для $t > 0$.

Крок 2: Застосування ознаки Вейєрштрасса.

Для фіксованого $t_0 > 0$ оцінимо загальний член:

$$|a_{mn}(x, y, t)| \leq \frac{4q_0}{L^2} \cdot \frac{1}{\alpha \lambda_{mn}} = \frac{4q_0 L^2}{L^2 \alpha \pi^2 (m^2 + n^2)} = \frac{4q_0}{\alpha \pi^2 (m^2 + n^2)} =: M_{mn}. \quad (2.81)$$

Числовий ряд $\sum_{m,n \geq 0, (m,n) \neq (0,0)} M_{mn}$ збігається, оскільки:

$$\sum_{\substack{m,n=0 \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \frac{1}{m^2 + n^2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{k^2}, \quad (2.82)$$

де c_k – кількість пар (m, n) з $m^2 + n^2 = k^2$, яка обмежена величиною порядку $O(\sqrt{k})$. Отже, ряд мажорується збіжним рядом $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3/2}$ (ряд Діріхле з показником $p = 3/2 > 1$).

За ознакою Вейєрштрасса функціональний ряд (2.79) збігається абсолютно та рівномірно на $[0, L]^2$ для будь-якого фіксованого $t > 0$.

Висновок. Подвійний ряд (2.79) збігається для будь-якого $t > 0$, що гарантує можливість обчислення температури $u(x, y, t)$ у довільній точці $(x, y) \in [0, L]^2$ в заданий момент часу.

Оцінка верхньої межі потужності джерела.

Для визначення практичного діапазону потужності джерела q_0 оцінимо його верхню межу. При $t \rightarrow \infty$ експоненти загасають, і температура у точці джерела досягає максимального значення відносно середньої температури.

З розв'язку (2.79) для точки $(0, 0)$ (де всі косинуси дорівнюють 1) отримуємо оцінку:

$$q_0^{\max} \approx \frac{T_{\max} L^2 \alpha \pi^2}{4}, \quad (2.83)$$

де $T_{\max}$ – максимально допустима температура.

Ця оцінка використовується як верхня межа для чисельного пошуку оптимальної потужності q_0 методом дихотомії (див. підрозділ 2.3).

Узагальнення на прямокутну область: декомпозиція на квадратні підобласті.

Розглянемо задачу нагрівання прямокутної пластини розмірами $W \times H$ (ширина $\times$ висота) до характерного рівня T_1 за обмежений час $t_{\max}$. Безпосереднє застосування методу функції Гріна для прямокутної геометрії призводить до складних обчислень через несиметричність власних функцій. Натомість запропоновано метод декомпозиції прямокутної області на квадратні підобласті, для яких розв'язок вже отримано.

Стратегія декомпозиції.

Нехай задано:

- Розміри прямокутної пластини: $W \times H$
- Цільовий рівень інформованості: T_1
- Параметри матеріалу: α, c, ρ
- Часове обмеження: $t_{\max}$

Крок 1: Вибір розміру базової квадратної підобласті.

Визначаємо розмір квадрата L виходячи з умови, що за час $t_{\max}$ просторовий профіль встигає стабілізуватися. Час релаксації першої гармоніки: $\tau_1 = L^2/(\alpha\pi^2)$. Вимагаємо $3\tau_1 \leq t_{\max}$, звідки:

$$L \leq \sqrt{\frac{\alpha\pi^2 t_{\max}}{3}}. \quad (2.84)$$

Для спрощення обираємо L як найбільший дільник меншого з розмірів $\min(W, H)$, що задовольняє цю нерівність.

Крок 2: Розбиття прямокутника на квадрати.

Позначимо $n_W = \lfloor W/L \rfloor$ та $n_H = \lfloor H/L \rfloor$ – кількість квадратів розміру $L \times L$ вздовж ширини та висоти відповідно.

Залишки (несиметричні смуги):

$$\Delta W = W - n_W L, \quad \Delta H = H - n_H L. \quad (2.85)$$

Пріоритезуємо рівномірне розбиття вздовж однієї з осей:

- Якщо $\Delta W = 0$: розбиття рівномірне по ширині, залишається смуга висоти ΔH вздовж верхньої межі.
- Якщо $\Delta H = 0$: розбиття рівномірне по висоті, залишається смуга ширини ΔW вздовж правої межі.
- Якщо $\Delta W, \Delta H > 0$: обираємо розбиття, що мінімізує площу несиметричної смуги: якщо $\Delta W \cdot H < W \cdot \Delta H$, залишаємо вертикальну смугу ширини ΔW , інакше – горизонтальну смугу висоти ΔH .

Крок 3: Побудова розв’язку для квадратної підобласті з центральним джерелом.

Кожна квадратна підобласть $L \times L$ нагрівається від центральної точки $(L/2, L/2)$. Розв’язок для нагрівання від центра отримується з розв’язку для кутової точки методом суперпозиції дзеркальних відображень.

Розглянемо квадрат $[0, L] \times [0, L]$ з джерелом у точці $(L/2, L/2)$. Цей розв’язок можна представити як суму чотирьох розв’язків для джерел у кутах:

$$u_{\text{center}}(x, y, t) = u_{\text{corner}}(x, y, t) + u_{\text{corner}}(L - x, y, t) + u_{\text{corner}}(x, L - y, t) + u_{\text{corner}}(L - x, L - y, t), \quad (2.86)$$

де $u_{\text{corner}}(x, y, t)$ – розв’язок (2.79) для джерела в точці $(0, 0)$.

Фізично це означає, що кожна квадратна підобласть розбивається на 4 квадранти розміром $(L/2) \times (L/2)$, і в кожному квадранті застосовується розв’язок для кутового джерела, що забезпечує симетричний розподіл навколо центральної точки.

Крок 4: Мінімізація кількості джерел тепла.

Загальна кількість джерел: $N_{\text{sources}} = n_W \times n_H$. Потужність кожного джерела q_0 визначається чисельним методом дихотомії з умови досягнення цільової температури T_{min} у найвіддаленіших точках. Мінімізація N_{sources} досягається вибором максимально допустимого L (за умови обмеження t_{max}), що зменшує $n_W \cdot n_H$.

Крок 5: Обробка несиметричної смуги.

Для несиметричної смуги (наприклад, шириною ΔW та висотою H вздовж правої межі) можливі наступні підходи:

- *Одновимірна апроксимація*: якщо $\Delta W \ll L$, смугу можна моделювати як сукупність паралельних одновимірних стержнів, нагрівання яких описується розв'язком з розділу 3.2.
- *Додаткові джерела з коригованою потужністю*: розмістити джерела вздовж осі смуги з інтервалом L та скоригувати їх потужність пропорційно до $\Delta W/L$, щоб забезпечити рівномірне нагрівання.
- *Чисельні методи*: для смуг складної геометрії застосувати метод скінченних різниць або скінченних елементів з граничними умовами, узгодженими з розв'язком для квадратних підобластей.

Детальний аналіз оптимального методу нагрівання несиметричної смуги залишається предметом подальших досліджень та залежить від конкретних обмежень задачі (кількість доступних джерел, обмеження на потужність, допустима неоднорідність температурного поля).

Приклад декомпозиції.

Розглянемо прямокутну пластину розмірами $W = 1.5$ м, $H = 1.2$ м з параметрами: $\alpha = 0.01$ м²/с, $t_{\max} = 50$ с, $T_1 = 100$ °С.

Крок 1: Визначення розміру квадрата.

З умови часового обмеження:

$$L \leq \sqrt{\frac{\alpha \pi^2 t_{\max}}{3}} = \sqrt{\frac{0.01 \cdot \pi^2 \cdot 50}{3}} \approx \sqrt{1.645} \approx 1.28 \text{ м.} \quad (2.87)$$

Обираємо найбільший дільник $\min(W, H) = 1.2$ м, що не перевищує 1.28 м. Можливі варіанти: $L = 1.2$ м, $L = 0.6$ м, $L = 0.4$ м, тощо.

Для $L = 0.6$ м:

- $n_W = \lfloor 1.5/0.6 \rfloor = 2$, $\Delta W = 1.5 - 2 \cdot 0.6 = 0.3$ м
- $n_H = \lfloor 1.2/0.6 \rfloor = 2$, $\Delta H = 1.2 - 2 \cdot 0.6 = 0$ м

Розбиття рівномірне по висоті. Основна область покривається $2 \times 2 = 4$ квадратами 0.6×0.6 м, кожен з центральним джерелом потужності:

$$Q_0 = \frac{T_1 L^2 \alpha \pi^2}{4} c\rho = \frac{100 \cdot 0.36 \cdot 0.01 \cdot \pi^2}{4} c\rho \approx 0.089 c\rho \text{ Вт.} \quad (2.88)$$

Залишається вертикальна смуга 0.3×1.2 м вздовж правої межі, для якої застосовується одна з зазначених вище стратегій.

Альтернатива: Для $L = 0.5$ м отримуємо $n_W = 3$, $n_H = 2$, $\Delta W = 0$ м, $\Delta H = 0.2$ м – рівномірне розбиття по ширині з $3 \times 2 = 6$ квадратами та горизонтальною смугою 1.5×0.2 м.

Вибір конкретного L залежить від компромісу між кількістю джерел (N_{sources}) та розміром несиметричної смуги. У даному випадку перший варіант ($L = 0.6$ м, 4 джерела) потребує менше джерел, але залишає більшу смугу (0.3 м проти 0.2 м).

Такий підхід дозволяє розв'язувати задачі нагрівання складних прямокутних областей, використовуючи аналітичний розв'язок для квадратної геометрії як базовий будівельний блок, що значно спрощує обчислення та забезпечує контрольовану точність результату.

Оптимізація параметрів нагрівання.

Розглянемо задачі оптимізації процесу нагрівання прямокутної пластини. Мета: забезпечити мінімальний цільовий рівень температури $T_{\min}$ у всій нагріваній області при мінімізації одного з ресурсів (часу або максимальної температури).

Спільна структура задач оптимізації:

Температура в кутовій точці квадранта (найдалша точка від джерела) визначається з (2.79). У локальних координатах квадранта розміром $L/2 \times L/2$ з джерелом у точці $(0, 0)$ кутова точка має координати $(L/2, L/2)$:

$$u_{\text{corner}}(t; q_0) = \frac{q_0 t}{(L/2)^2} + \frac{q_0}{(L/2)^2} \sum_{\substack{m,n=0 \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \cos(m\pi) \cos(n\pi)$$

$$\times \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t}}{\alpha \lambda_{mn}}, \quad (2.89)$$

де $\lambda_{mn} = \frac{\pi^2}{(L/2)^2}(m^2 + n^2)$.

Оскільки $\cos(m\pi) = (-1)^m$, маємо:

$$u_{\text{corner}}(t; q_0) = \frac{4q_0 t}{L^2} + \frac{4q_0}{L^2} \sum_{\substack{m,n=0 \\ (m,n) \neq (0,0)}}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n (-1)^{m+n} \frac{1 - e^{-\alpha \lambda_{mn} t}}{\alpha \lambda_{mn}}. \quad (2.90)$$

Мінімізація часу процесу. При фіксованій максимальній температурі $T_{\max}$ та заданій цільовій температурі $T_{\min}$ у найвіддаленіших точках (кутах квадратів), мінімальний час t^* та відповідна потужність q_0^* визначаються з системи умов:

$$u_{\text{corner}}(t^*; q_0^*) = T_{\min}, \quad u_{\text{center}}(t^*; q_0^*) \leq T_{\max}. \quad (2.91)$$

Розв'язок знаходиться методом вкладеної дихотомії: зовнішній цикл виконує пошук по часу на інтервалі $[0, t_{\max}]$, а для кожного фіксованого t внутрішній цикл знаходить потужність q_0 на інтервалі $[0, q_0^{\max}]$, де $q_0^{\max}$ оцінюється з (2.83). Точність зовнішнього циклу складає $\varepsilon_t = 0.5$ с, внутрішнього – $\varepsilon_q = 0.1$ °C.

Мінімізація температури джерела. При фіксованому часі $t_{\max}$ та заданій цільовій температурі $T_{\min}$, мінімальна температура джерела $T_{\max}^*$ та відповідна потужність q_0^* визначаються з умов:

$$u_{\text{corner}}(t_{\max}; q_0^*) = T_{\min}, \quad u_{\text{center}}(t_{\max}; q_0^*) = T_{\max}^*. \quad (2.92)$$

Структура алгоритму аналогічна попередньому випадку, але зовнішня дихотомія виконується по $T_{\max} \in [T_{\min}, T_{\max}^{\text{initial}}]$ з точністю $\varepsilon_T = 0.5$ °C.

Базовий режим. Для порівняння використовуються максимально допустимі значення обох параметрів: $t = t_{\max}$, $T_{\max} = T_{\max}^{\text{initial}}$. Потужність q_0 визначається з умови $u_{\text{corner}}(t_{\max}; q_0) = T_{\min}$ методом дихотомії.

Для типових параметрів ($W = 1.5$ м, $H = 1.2$ м, $\alpha = 0.01$ м²/с, $T_{\max}^{\text{initial}} = 100$ °C, $T_{\min} = 50$ °C, $t_{\max} = 10$ с) режим мінімізації часу дає $t^* \approx 7.5$ с при

$q_0^* \approx 0.30$ Вт, режим мінімізації температури – $T_{\max}^* \approx 75$ °С при $q_0^* \approx 0.22$ Вт, базовий режим – $t = 10$ с, $T_{\max} = 100$ °С, $q_0 \approx 0.22$ Вт.

2.4. Висновки до розділу 2

У другому розділі дисертаційної роботи детально досліджено аналітичні методи розв’язання рівнянь дифузійного типу для моделювання інформаційного розповсюдження.

Представлено метод розділення змінних (метод Фур’є) для розв’язання рівняння теплопровідності (2.1). Розв’язок представляється у вигляді добутку функцій (2.2), що призводить до задачі на власні значення (2.5)–(2.6). Загальний розв’язок (2.8) будується як суперпозиція часткових розв’язків з коефіцієнтами, що визначаються за властивістю ортогональності власних функцій задачі Штурма-Ліувілля.

Сформульовано одновимірну задачу оптимізації інформаційного розповсюдження (2.9) з граничними умовами Діріхле-Неймана. Отримано аналітичний розв’язок у вигляді ряду Фур’є (2.35). Доведено рівномірну збіжність ряду на $[0, L] \times [t_0, +\infty)$ для будь-якого $t_0 > 0$ за ознакою Вейерштрасса.

Побудовано двовимірну модель інформаційного розповсюдження на площині для квадратної області $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ з точковим джерелом та граничними умовами Неймана. Отримано власні функції та власні значення двовимірної спектральної задачі методом розділення змінних.

Побудовано функцію Гріна для двовимірної задачі теплопровідності з умовами Неймана. Розроблено метод багаторівневої декомпозиції для прямокутних областей довільних розмірів на квадратні підобласті з подальшим композуванням розв’язків.

Розроблено підхід до врахування симетрії задачі: розв’язок для підобласті з центральним джерелом конструється з чотирьох розв’язків для

квадрантів з кутовим джерелом шляхом відзеркалення та суперпозиції.

Розроблені аналітичні методи створюють теоретичну основу для практичної оптимізації процесів інформаційного розповсюдження, що застосовується та експериментально досліджується у наступних розділах.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ НЕЧІТКОГО СПРИЙНЯТТЯ ЧАСУ

У розділі 1 обґрунтовано гібридну дворівневу модель інформаційного розповсюдження, де на нижньому (мікроскопічному) рівні оптимізується послідовність донесення інформації до учасників конкретних груп. Даний розділ присвячено розробці методів розв’язування задач цього рівня – задачі комівояжера з нечіткими параметрами, що відображають суб’єктивне сприйняття часу передачі інформації. Розглядається метод імітованого відпалу як ефективний евристичний підхід до комбінаторної оптимізації [11, 12], методи дефазифікації для порівняння нечітких маршрутів [59, 60], а також результати обчислювальних експериментів на тестових задачах з бібліотеки TSPLib. Отримані результати дозволяють визначати оптимальну послідовність обходу вузлів у кожному сегменті мережі, виділеному на верхньому рівні гібридної моделі.

3.1. Метод відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості переміщень на мережі

Метод імітації відпалу (simulated annealing) є одним з найефективніших механістичних підходів до розв’язування комбінаторних оптимізаційних задач, зокрема задачі комівояжера [9, 61]. Назва методу походить від фізичного процесу відпалу металів, при якому матеріал спочатку нагрівають до високої температури, а потім повільно охолоджують для досягнення стану з мінімальною внутрішньою енергією та покращеними структурними

властивостями.

Фізична аналогія та основна ідея методу.

У фізиці процес відпалу описується розподілом Больцмана [10], згідно з яким ймовірність знаходження системи в стані з енергією E при температурі T визначається виразом:

$$P(E) = \exp(-E/(kT)), \quad (3.1)$$

де k - константа Больцмана. При високій температурі система може переходити як в стани з нижчою енергією, так і в стани з вищою енергією, що дозволяє їй “вибратися” з локальних мінімумів. При поступовому зниженні температури ймовірність переходів до станів з вищою енергією зменшується, і система поступово “заморожується” у стані близькому до глобального мінімуму енергії.

В контексті задачі комівояжера стан системи відповідає певному маршруту, а енергія - довжині або вартості цього маршруту. Температура T виступає як параметр управління, який регулює ймовірність прийняття гірших рішень. При високій температурі алгоритм може приймати маршрути, що мають більшу довжину, ніж поточний, що дозволяє уникнути застрягання в локальних мінімумах. При зниженні температури алгоритм стає більш “жадібним” і з меншою ймовірністю приймає гірші рішення.

Алгоритм методу відпалу для задачі комівояжера.

Базовий алгоритм методу відпалу для задачі комівояжера складається з наступних кроків:

Крок 1. Ініціалізація:

- Генерується початковий маршрут S_0 (випадково або за допомогою жадібного алгоритму)
- Обчислюється його вартість $f(S_0)$
- Встановлюється початкова температура T_0

- Визначається швидкість охолодження α (зазвичай $0.8 \leq \alpha \leq 0.99$)
- Встановлюється критерій зупинки (мінімальна температура T_{min} або максимальна кількість ітерацій)

Крок 2. Генерація нового рішення:

На кожній ітерації при поточній температурі T :

- Генерується сусіднє рішення S' шляхом невеликої модифікації поточного рішення S
- Найпоширеніші операції модифікації:
 - 2-opt: обирається два ребра маршруту і змінюється порядок міст між ними
 - Swap: міняються місцями два випадкові міста в маршруті
 - Insert: одне місто вилучається і вставляється в іншу позицію
- Обчислюється вартість нового маршруту $f(S')$

Крок 3. Прийняття рішення:

Обчислюється зміна вартості: $\Delta E = f(S') - f(S)$

- Якщо $\Delta E < 0$ (нове рішення краще), воно приймається безумовно: $S := S'$
- Якщо $\Delta E \geq 0$ (нове рішення гірше або однакове), воно приймається з ймовірністю:

$$P(\text{прийняття}) = \exp(-\Delta E/T) \quad (3.2)$$

Для прийняття рішення генерується випадкове число $r \in [0, 1]$. Якщо $r < P(\text{прийняття})$, то $S := S'$.

Крок 4. Охолодження:

Після виконання певної кількості ітерацій при поточній температурі (зазвичай це кількість міст n або n^2), температура знижується згідно з обраним графіком охолодження:

$$T := \alpha T \quad (3.3)$$

Крок 5. Перевірка критерію зупинки:

Якщо $T < T_{min}$ або досягнута максимальна кількість ітерацій, алгоритм завершується. Інакше повертаємося до кроку 2.

Графіки охолодження.

Вибір графіка (розкладу) охолодження суттєво впливає на ефективність методу [62, 29]. Основні типи графіків охолодження:

Геометричне охолодження (найпоширеніше):

$$T_{k+1} = \alpha T_k, \text{ де } 0.8 \leq \alpha \leq 0.99 \quad (3.4)$$

Лінійне охолодження:

$$T_{k+1} = T_k - \beta, \beta - const > 0 \quad (3.5)$$

Логарифмічне охолодження:

$$T_k = T_0 / \ln(1 + k) \quad (3.6)$$

Експоненційне охолодження:

$$T_k = T_0 \alpha^k \quad (3.7)$$

Адаптивне охолодження [63, 64, 65]:

Температура зменшується швидше, якщо не знаходяться кращі рішення, і повільніше, якщо алгоритм активно покращує результати.

Застосування методу відпалу до нечіткої задачі комівояжера.

При розв'язуванні задачі комівояжера з нечіткими вартостями переміщення між містами матриця відстаней $D = [\tilde{d}_{ij}]$ містить нечіткі числа

замість чітких [66, 67, 68]. Для застосування методу відпалу необхідно модифікувати крок обчислення вартості маршруту [69].

Нехай маршрут S представлений послідовністю міст $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$. Тоді загальна нечітка вартість маршруту обчислюється як:

$$\tilde{f}(S) = \sum_{i=1}^n \tilde{d}_{v_i, v_{i+1}} \quad (3.8)$$

де $\tilde{d}_{ij}$ – нечітке число, що представляє вартість переміщення від міста i до міста j (з урахуванням суб'єктивного сприйняття плинності часу).

Оскільки сума нечітких трикутних чисел також є трикутним числом, якщо $\tilde{d}_{ij} = (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$, то:

$$\tilde{f}(S) = \left(\sum_i a_{ij}, \sum_i b_{ij}, \sum_i c_{ij} \right) \quad (3.9)$$

Для порівняння двох нечітких маршрутів $\tilde{f}(S)$ та $\tilde{f}(S')$ використовуються методи дефазифікації (ранжування нечітких чисел), розглянуті в розділі 1. Найчастіше застосовується метод центру тяжіння (COG):

Для трикутного числа $\tilde{f}(S) = (a, b, c)$:

$$F(S) = (a + 2b + c)/4 \quad (3.10)$$

Для параболічного числа:

$$F(S) = (a + 3b + c)/5 \quad (3.11)$$

Тоді зміна вартості ΔE при переході від маршруту S до S' обчислюється як:

$$\Delta E = F(S') - F(S) \quad (3.12)$$

Весь алгоритм відпалу залишається незмінним, але замість чітких вартостей використовуються дефазифіковані значення нечітких вартостей.

Параметри методу відпалу та їх налаштування.

Ефективність методу відпалу значною мірою залежить від правильного вибору параметрів:

- **Початкова температура T_0 :** Повинна бути достатньо високою, щоб на початку алгоритм приймав майже будь-які переходи. Емпіричне правило: T_0 обирається таким чином, щоб початкова ймовірність прийняття гіршого рішення була близько 0.8-0.9. Для цього можна оцінити середнє збільшення вартості при випадкових переходах ΔE_{avg} і покласти:

$$T_0 = -\Delta E_{avg} / \ln(0.8) \quad (3.13)$$

- **Швидкість охолодження α :** Повинна забезпечувати достатньо повільне охолодження для дослідження простору рішень. Типові значення: $\alpha \in [0.85, 0.99]$. Більші значення α означають повільніше охолодження і кращу якість рішення, але довший час роботи алгоритму.
- **Кількість ітерацій при кожній температурі:** Зазвичай обирається пропорційною до розміру задачі. Для задачі комівояжера з n містами типовий вибір - від n до n^2 ітерацій при кожній температурі.
- **Кінцева температура T_{min} :** Визначає момент зупинки алгоритму. Типовий вибір: $T_{min} = 0.01 \cdot T_0$ або $T_{min} \approx 0.001$.
- **Альтернативний критерій зупинки:** Алгоритм може зупинятися, якщо протягом певної кількості послідовних температурних рівнів не знайдено покращення поточного найкращого рішення.

3.2. Визначення методів дефазифікації та порівняння нечітких чисел

Після застосування арифметичних операцій над нечіткими числами результат також має нечіткий характер [70, 71]. Для прийняття конкретних рішень необхідно перетворити нечіткі результати у чіткі значення або встановити відношення порядку між нечіткими числами [72]. Цей процес називається дефазифікацією або ранжуванням нечітких чисел.

Метод центру тяжіння (Center of Gravity, COG).

Метод центру тяжіння (метод Ягера першого типу) є одним з найпоширеніших методів дефазифікації [73, 74, 75]. Для нечіткого числа $\tilde{A}$ з функцією належності $\mu_{\tilde{A}}(x)$ ранг обчислюється як:

$$F_1(\tilde{A}) = \int_0^1 \alpha [\inf \tilde{A}_\alpha + \sup \tilde{A}_\alpha] / 2 d\alpha, \quad (3.14)$$

де $\tilde{A}_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ – α -зріз нечіткого числа.

Для трикутного нечіткого числа $\tilde{A} = (a, b, c)$ формула спрощується до:

$$F_1(\tilde{A}) = (a + 2b + c) / 4 \quad (3.15)$$

Для параболічного нечіткого числа:

$$F_1(\tilde{A}) = (a + 3b + c) / 5 \quad (3.16)$$

Геометрично цей метод знаходить абсцису центру тяжіння області під функцією належності нечіткого числа.

Метод бісектора площі (Bisector of Area, BOA).

Метод бісектора площі знаходить таке значення x_0 , що вертикальна лінія, проведена через цю точку, ділить площу під функцією належності нечіткого числа на дві рівні частини:

$$\int_{-\infty}^{x_0} \mu_{\tilde{A}}(x) dx = \int_{x_0}^{+\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) dx \quad (3.17)$$

Для трикутного нечіткого числа (a, b, c) значення x_0 знаходиться з рівняння:

$$(x_0 - a)^2 / (2(b - a)) = (c - x_0)^2 / (2(c - b)) \quad (3.18)$$

Розв'язуючи відносно x_0 , отримуємо:

$$x_0 = \frac{a\sqrt{c-b} + c\sqrt{b-a}}{\sqrt{c-b} + \sqrt{b-a}}. \quad (3.19)$$

Метод максимального значення (Mean of Maximum, MOM).

Цей метод використовує середнє значення всіх точок, в яких функція належності досягає максимуму:

$$F_{MOM}(\tilde{A}) = \frac{1}{|X_{max}|} \cdot \sum_{x \in X_{max}} x, \quad (3.20)$$

де $X_{max} = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) = \max_y \mu_{\tilde{A}}(y)\}$.

Для трикутного числа (a, b, c) з унімодальною функцією належності $F_{MOM}(\tilde{A}) = b$.

Метод порівняння на основі α -зрізів.

Для порівняння двох нечітких чисел $\tilde{A}$ та $\tilde{B}$ можна використовувати їх α -зрізи. Нечітке число $\tilde{A}$ вважається меншим або рівним $\tilde{B}$ з ступенем μ , якщо:

$$\mu(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min\{\alpha, \mu_{\alpha}(\tilde{A} \leq \tilde{B})\}, \quad (3.21)$$

де $\mu_{\alpha}(\tilde{A} \leq \tilde{B}) = 1$, якщо $\sup \tilde{A}_{\alpha} \leq \inf \tilde{B}_{\alpha}$, і 0 в іншому випадку.

Метод порівняння на основі функцій належності.

Альтернативний підхід полягає в обчисленні ступеня, з якою одне нечітке число переважає інше:

$$\mu(\tilde{A} > \tilde{B}) = \sup_{x,y} \min \mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(y), I(x > y) \quad (3.22)$$

де $I(x > y)$ - індикаторна функція, що дорівнює 1, якщо $x > y$, і 0 в іншому випадку.

Практично це можна обчислити як площу перетину функцій належності в області, де значення першого числа більші за значення другого.

Порівняльний аналіз методів дефазифікації.

Різні методи дефазифікації мають різні властивості та застосовність [60, 59]:

— Метод центру тяжіння (COG):

- Враховує всю інформацію про форму нечіткого числа
- Має гарні математичні властивості (лінійність для трикутних чисел)
- Найпоширеніший у практичних застосуваннях
- Може бути обчислювально складним для довільних функцій належності

— Метод бісектора площі (BOA):

- Більш стійкий до викидів у хвостах розподілу
- Дає медіанне значення замість середнього
- Обчислювально складніший за COG
- Не має властивості лінійності

— Метод максимального значення (MOM):

- Дуже простий в обчисленні
- Підходить, коли найважливішим є найбільш типове значення
- Ігнорує форму функції належності поза максимумом
- Може бути нестійким при плоских піках

У контексті задачі комівояжера з нечіткими параметрами найбільш доцільним є використання методу центру тяжіння через його обчислювальну простоту для трикутних та параболічних чисел і властивість збереження лінійності операцій.

3.3. Результати застосування методу відпалу для розв'язання задачі комівояжера з нечіткими параметрами

Для дослідження ефективності запропонованого підходу до розв'язання задачі комівояжера з нечіткими параметрами [76, 77, 31] було розроблено програмне забезпечення на мові Python з використанням бібліотеки TSPLib [28], яка містить в своєму каталозі відомі умови TSP у вигляді масивів координат або матриць умовних відстаней між містами. Нечіткі початкові умови були згенеровані випадковим чином з максимальним відхиленням від очікуваного значення в області сторони. Для перевірки запропонованого підходу проводилось порівняння часу найкращих побудованих результатів для кожного типу нечітких чисел з середніми значеннями витраченого часу кожного типу, що складає 10^5 випадкових проходжень побудованим маршрутом.

Постановка експерименту.

В ході дослідження було реалізовано описаний алгоритм на основі методу відпалу з використанням нечітких чисел для представлення суб'єктивного сприйняття плину часу на ділянках дороги між містами. Для проведення чисельних розрахунків запропоновано багатопотокову реалізацію моделі. В процесі роботи обрається метод врахування рангу нечіткого числа та порівняння значень рангів різних методів (використовуючи пікова абсциса, BOA, COG) із середніми значеннями випадкових проходжень. Зроблено висновок, що найкращих результатів отримано методом центру тяжіння (COG).

Метод імітованого відпалу є потужним механістичним алгоритмом, який імітує процес відпалу в металургії. У фізичному процесі відпалу матеріал нагрівається до високої температури, а потім поступово охолоджується, що дозволяє атомам перебудовуватися в більш стабільну кристалічну структуру з мінімальною енергією. Аналогічно, в оптимізації алгоритм починає з високої “температури”, при якій дозволяються значні випадкові зміни поточного розв’язку, навіть якщо вони його погіршують. Це дозволяє уникнути застрягання в локальних мінімумах. Поступово, зі зниженням температури, алгоритм стає більш консервативним і приймає лише покращуючі зміни.

Особливим у методі відпалу є критерій Метрополіса для прийняття рішення про перехід до нового стану. Якщо новий розв’язок кращий за поточний, він приймається безумовно. Якщо ж новий розв’язок гірший, він все одно може бути прийнятий з ймовірністю $P = \exp(-\Delta E/T)$, де ΔE – погіршення цільової функції, а T – поточна температура. Така стратегія дозволяє алгоритму досліджувати простір розв’язків більш широко на початкових етапах і зосереджуватися на локальному пошуку на пізніших стадіях.

Для проведення експериментів використовувалися наступні тестові задачі з бібліотеки TSPLib:

- u16 – задача з 16 містами
- gr4 – задача з 4 містами
- pr76 – задача з 76 містами
- rd100 – задача з 100 містами
- rd400 – задача з 400 містами

Нечіткі початкові умови генерувалися випадковим чином з максимальним відхиленням від очікуваного значення в області сторони. Процедура генерації нечітких параметрів відбувалася наступним чином: для кожної пари міст (i, j) з відомою відстанню d_{ij} (або часом проїзду) створювалося

нечітке число, де базове значення $b = d_{ij}$ відповідало відстані з вхідних даних, а параметри розкиду обиралися випадково в межах заданого діапазону. Це дозволило імітувати реалістичні сценарії, де фактична тривалість поїздки може відхилятися від очікуваної через різні фактори: дорожні умови, погоду, час доби, суб'єктивне сприйняття водія тощо.

Для генерації трикутних нечітких чисел [70] використовувалася формула $\tilde{d}_{ij} = (d_{ij} - \delta_l, d_{ij}, d_{ij} + \delta_r)$, де δ_l та δ_r – випадкові величини, що визначають ліве та праве відхилення. Для параболічних нечітких чисел використовувалися ті ж параметри, але з іншою функцією належності, як описано у розділі 1 [71].

Параметри алгоритму.

Для всіх експериментів використовувалися наступні параметри методу відпалу:

- Початкова температура: $T_0 = 1000$
- Коефіцієнт охолодження: $\alpha = 0.995$
- Кінцева температура: $T_{min} = 0.01$
- Кількість ітерацій при кожній температурі: n (де n – кількість міст)
- Операція модифікації маршруту: 2-opt

Порівняння методів дефазифікації нечітких чисел проводилося для трьох основних підходів:

- Метод пікової абсциси (використання модального значення нечіткого числа)
- Метод бісектора площі (BOA)
- Метод центру тяжіння (COG)

Результати експериментів.

Порівняння методів дефазифікації маршруту наведено у таблиці 3.1, де випадковий маршрут характеризує час руху за маршрутом з урахуванням середньої швидкості, розрахованого маршруту – отриману оцінку тривало-

сті обраним методом:

Таблиця 3.1

Порівняння методів дефазифікації для різних типів нечітких чисел

Метод	Випадковий маршрут	Розрахований маршрут
Пікова абсциса	5367.78	5046.0
ВОА (трикутні НЧ)	5332.54	5291.72
ВОА (параб. НЧ)	5369.91	5341.70
COG (трикутні НЧ)	5332.40	5332.86
COG (параб. НЧ)	5369.67	5368.72

Таким чином, зроблено висновок, що використання нечітких чисел у алгоритмі відпалу дозволяє отримати конструктивні результати при розв'язуванні задачі комівояжера з нечіткими вхідними параметрами.

Під час роботи програми відбувається порівняння трьох можливих підходів для пошуку розв'язків (використання чітких, трикутних та параболічних чисел) з допомогою методу відпалу. Наведено результати чисельних експериментів, які показують, що використання нечітких чисел, зокрема трикутних і параболічних, з методом відпалу покращує результати задачі TSP порівняно з використанням чітких чисел за умов припущення реалістичності моделі з можливими відхиленнями від очікуваного середнього.

Результати роботи наведено у таблиці 3.2, де для кожної тестової задачі порівнюються очікуваний час маршруту та фактичний час з урахуванням середньої швидкості для трьох типів чисел – чітких, трикутних та параболічних:

Таблиця 3.2

Результати застосування методу відпалу з різними типами чисел

Задача	Тип чисел	Очікуваний час	Фактичний час
u16	чіткі	6859.0	7247.38
	трик.	6859.0	7129.38
	параб.	6859.0	7128.92
gr4	чіткі	5046.0	5369.57
	трик.	5071.0	5369.30
	параб.	5070.0	5363.88
pr76	чіткі	108273.0	115105.75
	трик.	108894.0	114102.55
	параб.	109295.0	114563.41
rd100	чіткі	8185.0	8653.50
	трик.	7975.0	8390.85
	параб.	8049.0	8447.22
rd400	чіткі	18070.0	19087.33
	трик.	18089.0	19008.33
	параб.	17808.0	18713.72

3.4. Висновки до розділу 3

У даному розділі представлено методи розв’язування задачі комівояжера з нечіткими параметрами, що формують інструментарій нижнього (мікроскопічного) рівня гібридної дворівневої моделі інформаційного розповсюдження.

Досліджено застосування методу імітованого відпалу до задачі комівояжера з нечіткими вхідними параметрами, що моделюють невизначеність у часі проходження маршруту та суб’єктивне сприйняття плину часу учасниками комунікації. Детально описано алгоритм методу відпалу (3.1)–(3.3),

включаючи фізичну аналогію з металургійним процесом, критерій Метрополіса для прийняття рішень та різні графіки охолодження (3.4)–(3.7).

Адаптовано метод відпалу для роботи з нечіткими параметрами шляхом інтеграції методів дефазифікації. Вартість нечіткого маршруту обчислюється як сума нечітких чисел (3.8)–(3.9), а порівняння маршрутів здійснюється через дефазифіковані значення (3.10)–(3.12).

Проведено порівняльний аналіз трьох методів дефазифікації нечітких чисел: методу центру тяжіння (COG) (3.14)–(3.16), методу бісектора площі (BOA) (3.17)–(3.18) та методу максимального значення (MOM) (3.20). Обґрунтовано вибір методу центру тяжіння як оптимального для даного класу задач через його обчислювальну простоту та властивість збереження лінійності операцій.

Обчислювальні експерименти на тестових задачах з бібліотеки TSPLib (від 4 до 400 міст) показали, що метод центру тяжіння забезпечує результати, найближчі до статистичного очікування при 10^5 випадкових реалізаціях нечітких параметрів (таблиця 3.1). Порівняння трикутних та параболічних нечітких чисел (таблиця 3.2) підтвердило, що використання нечітких чисел покращує результати порівняно з чіткими значеннями за умов реалістичної моделі з можливими відхиленнями від очікуваного середнього.

Отримані результати формують методологічну основу для оптимізації послідовності донесення інформації до учасників конкретних груп у межах сегментів мережі, виділених на верхньому рівні гібридної моделі засобами дифузійного моделювання.

РОЗДІЛ 4

АНАЛІЗ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

У попередніх розділах розроблено методи для обох рівнів гібридної моделі інформаційного розповсюдження: аналітичні методи розв’язання рівнянь дифузійного типу (верхній рівень) та метод відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами (нижній рівень). Даний розділ присвячено практичній апробації цих методів: застосуванню отриманих аналітичних розв’язків до оптимізаційних задач, програмній реалізації розроблених алгоритмів та аналізу результатів обчислювальних експериментів [78]. Особлива увага приділяється порівнянню різних режимів оптимізації та інтерпретації отриманих результатів у контексті гібридної моделі інформаційного розповсюдження.

4.1. Приклад практичного застосування аналітичного розв’язку одновимірної задачі теплопровідності

Отриманий у розділі 2 аналітичний розв’язок (2.35) одновимірної задачі теплопровідності дозволяє сформулювати та розв’язати практичні оптимізаційні задачі для процесу інформаційного розповсюдження [79].

Визначення оптимальної довжини сегмента. Підставляючи $t = t_{\max}$ у формулу розв’язку, отримуємо функцію $u(x)$ розподілу температури (рівня інформованості) в момент максимально допустимого часу. Для досягнення цільової температури $T_2 < T_1$ у найвіддаленішій точці сегмента необхідно знайти таке $x = x_{T_2}$, при якому $u(x_{T_2}, t_{\max}) = T_2$. Це досягається методом дихотомії [80], після чого довжина сегмента визначається як:

$$L_p = \left\lceil \frac{L}{2x_{T_2}} \right\rceil \quad (4.1)$$

Оптимізація параметрів процесу.

Центральним об'єктом аналізу є температура у найвіддаленішій точці сегмента (на відстані $L/2$ від джерела), яка визначається з (2.35) при $x = L$:

$$u_{\text{end}}(t; T_{\text{max}}) = T_{\text{max}} + \frac{4T_{\text{max}}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} e^{-\alpha \frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{L} t}. \quad (4.2)$$

Враховуючи, що $\sin \frac{(2n+1)\pi}{2} = (-1)^n$, вираз спрощується до:

$$u_{\text{end}}(t; T_{\text{max}}) = T_{\text{max}} + \frac{4T_{\text{max}}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1)}{2n+1} e^{-\alpha \frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{L} t}. \quad (4.3)$$

Реалізовано три режими оптимізації:

Мінімізація часу процесу. При фіксованій максимальній температурі джерела T_{max} та заданій цільовій температурі T_{min} , мінімальний час t^* визначається з умови:

$$u_{\text{end}}(t^*; T_{\text{max}}) = T_{\text{min}}. \quad (4.4)$$

Розв'язок знаходиться методом дихотомії на інтервалі $[0, t_{\text{max}}]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Мінімізація температури джерела. При фіксованому часі процесу t_{max} , мінімальна температура джерела T_{max}^* визначається з умови:

$$u_{\text{end}}(t_{\text{max}}; T_{\text{max}}^*) = T_{\text{min}}. \quad (4.5)$$

Розв'язок знаходиться методом дихотомії на інтервалі $[0, T_{\text{max}}^{\text{initial}}]$.

Базовий режим. Використовуються максимально допустимі значення обох параметрів: $t = t_{\text{max}}$, $T_{\text{max}} = T_{\text{max}}^{\text{initial}}$.

Визначення оптимальної довжини сегмента.

Перед застосуванням оптимізаційних процедур визначається максимальна довжина сегмента $L_{\max}$, при якій температура у найвіддаленішій точці досягає $T_{\min}$ за час $t_{\max}$ при заданій $T_{\max}$. Якщо умова

$$u_{\text{end}}(t_{\max}; T_{\max}) \geq T_{\min} \quad (4.6)$$

виконується для всього стрижня (при $L = L_{\text{rod}}/2$), то $L_{\max} = L_{\text{rod}}/2$. В іншому випадку $L_{\max}$ знаходиться методом дихотомії на інтервалі $[0, L_{\text{rod}}/2]$. Кількість сегментів визначається як:

$$N = \left\lceil \frac{L_{\text{rod}}}{2L_{\max}} \right\rceil. \quad (4.7)$$

Таблиця 4.1

Результати оптимізації для одновимірної моделі

Режим	Час t , с	$T_{\max}$, °C	Сегмент, м	Джерел
Базовий	0.00500	100.0	3.14	4
Мін. часу	0.00312	100.0	3.14	4
Мін. темп.	0.00500	62.5	3.14	4

Результати демонструють компроміс між часом процесу та температурою джерела: режим мінімізації часу дає $t^* \approx 0.00312$ с при $T_{\max} = 100$ °C, тоді як режим мінімізації температури дає $T_{\max}^* \approx 62.5$ °C при $t = 0.005$ с.

4.2. Результати апробації роботи розробленого методу моделювання

Для практичної апробації розроблених аналітичних методів створено програмну систему мовою Python з використанням науково-обчислювальних бібліотек NumPy [81] (для чисельних обчислень температурного профілю) та Matplotlib [82] (для візуалізації динаміки процесу нагрівання). Система реалізує обчислення температурного профілю за формулою (2.35) з автоматичним визначенням кількості членів ряду за критерієм збіжності.

Метод дихотомії реалізовано як універсальну процедуру пошуку кореня рівняння $f(x) = y_{\text{target}}$ для монотонних функцій на заданому інтервалі $[x_a, x_b]$. Алгоритм автоматично визначає напрямок зростання функції та виконує ітеративне звуження інтервалу до досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$. Збіжність методу є логарифмічною: для досягнення заданої точності потрібно $\log_2((x_b - x_a)/\varepsilon)$ ітерацій.

Результати обчислювальних експериментів.

Проведено серію обчислювальних експериментів для типової конфігурації: $L_{\text{rod}} = 20$ м, $\alpha = 401$ м²/с, $T_{\text{max}}^{\text{initial}} = 100$ °C, $T_{\text{min}} = 40$ °C, $t_{\text{max}} = 0.005$ с.

Візуалізація процесу нагрівання.

Для ілюстрації роботи програмної системи розглянемо задачу нагрівання алюмінієвого стрижня довжиною 30 сантиметрів з максимальною температурою джерел 100°C та максимальним часом 2 хвилини. Після виконання розрахунків отримано, що для досягнення бажаного результату необхідно розбити стрижень на 6 рівних частин. Етапи моделювання процесу нагрівання наведено на рис. 4.1–4.3.

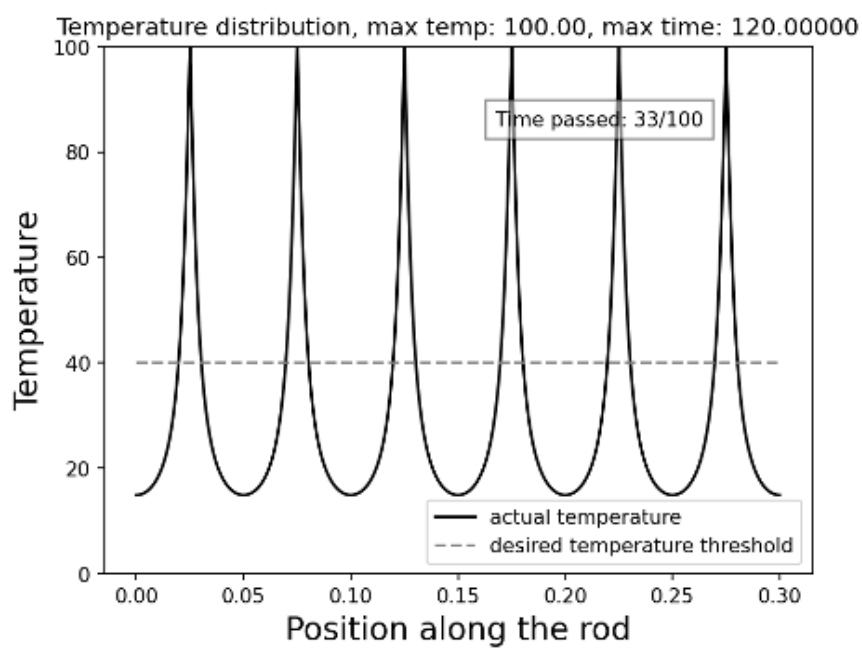


Рис. 4.1: Розподіл температури на початку моделювання (33% від максимального часу). Температура максимальна в точках нагрівання та розподіляється відповідно до відстані від нагрівальних елементів. Пунктирною лінією позначено бажану температуру вздовж стрижня, яка має бути досягнута за заданий час.

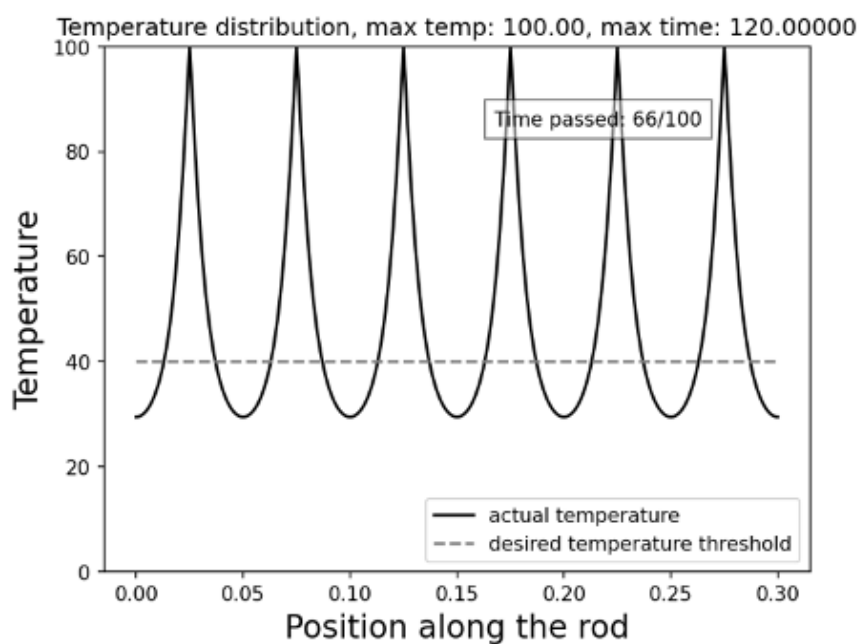


Рис. 4.2: Розподіл температури на етапі двох третин від максимального часу (66%). Температура вздовж усього стрижня значно зросла, поступово наближаючись до бажаного рівня.

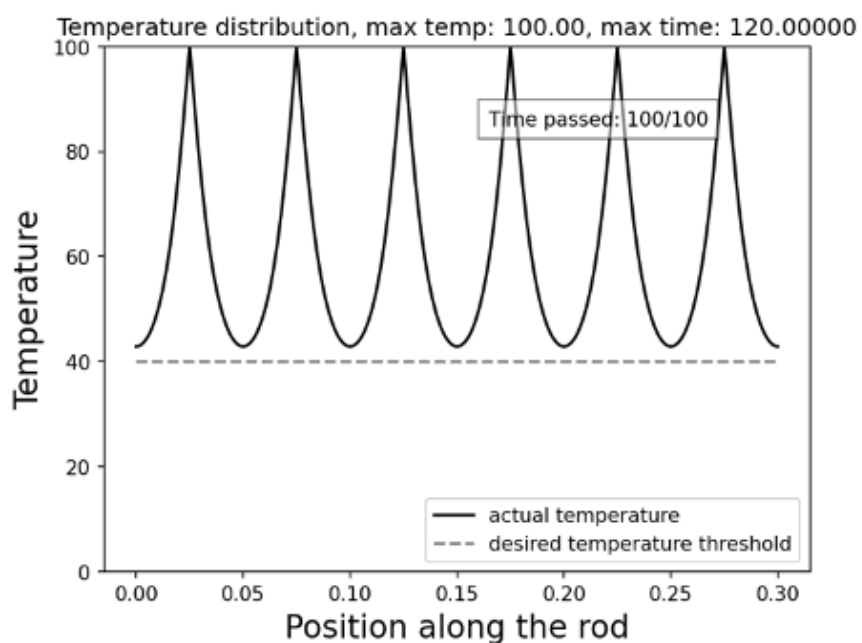


Рис. 4.3: Фінальний стан – бажана температура досягнута вздовж усього стрижня, що означає завершення виконання програми.

4.3. Обчислювальні експерименти імітаційного моделювання інформаційного розповсюдження у двовимірному випадку

Для двовимірної моделі створено програмну систему, що моделює процес інформаційного розповсюдження у двовимірних соціальних мережах. Реалізація виконана мовою Python з використанням бібліотек NumPy, Matplotlib та Pillow (для генерації анімацій процесу дифузії повідомлень).

Архітектура системи моделювання.

Програмна система реалізує метод функції Гріна для розв'язання задачі інформаційного розповсюдження від точкових джерел у прямокутних фрагментах соціальної мережі. Ключовою особливістю є використання багаторівневої декомпозиції простору: велика мережа розбивається на менші квадратні підмережі, для кожної з яких розв'язок будується незалежно з подальшим композуванням загальної картини поширення інформації.

Процес моделювання здійснюється у кілька етапів:

Етап 1: Декомпозиція мережі. Вхідний прямокутний фрагмент соціальної мережі розмірами $W \times H$ розбивається на квадратні підмережі розміру $L \times L$. Розмір L визначається з умови, що за доступний час $t_{\max}$ інформація встигне досягти характерного рівня інформованості в межах кожної підмережі. Якщо після розбиття залишаються несиметричні смуги, процес декомпозиції повторюється рекурсивно.

Етап 2: Калібрування інтенсивності джерел. Для кожного рівня декомпозиції незалежно визначається оптимальна інтенсивність джерел інформації q_0 . Програма реалізує три режими оптимізації: базовий режим, мінімізація часу та мінімізація інтенсивності.

Етап 3: Обчислення розподілу інформованості. Для кожної квадратної підмережі обчислюється розподіл рівня інформованості як функція координат та часу за допомогою розкладу за власними функціями опера-

тора Лапласа з граничними умовами Неймана.

Етап 4: Композиція та візуалізація. Розв'язки для всіх рівнів декомпозиції об'єднуються у єдине поле інформованості. Результат зберігається як анімація у форматі GIF.

Порівняльний аналіз режимів оптимізації.

Ефективність різних режимів оптимізації продемонстровано на тестових конфігураціях мереж. Результати наведено у таблиці 4.2.

Таблиця 4.2

Порівняння режимів оптимізації для різних конфігурацій мережі

Конфігурація	Режим	Час t , с	Інтенсивність $T_{\max}$, °C	Потужність q_0 , Вт	Джерел шт
1.5×1.2 м $\alpha = 0.01$ м ² /с $T_{\min} = 50$ °C	none	10.0	100	0.22	12
	max_time	7.5	100	0.30	12
	max_temp	10.0	75	0.22	12
2.0×1.5 м $\alpha = 0.01$ м ² /с $T_{\min} = 50$ °C	none	10.0	100	0.36	12
	max_time	7.5	100	0.50	12
	max_temp	10.0	73	0.36	12

Візуалізація процесу нагрівання на площині.

Для ілюстрації роботи програмної системи розглянемо задачу нагрівання прямокутної пластини розмірами 1.4×1.0 м². Параметри моделювання: $\alpha = 0.01$ м²/с, $T_{\max} = 100$ °C, $T_{\min} = 70$ °C, $t_{\max} = 10$ с. Етапи моделювання процесу нагрівання наведено на рис. 4.4–4.6.

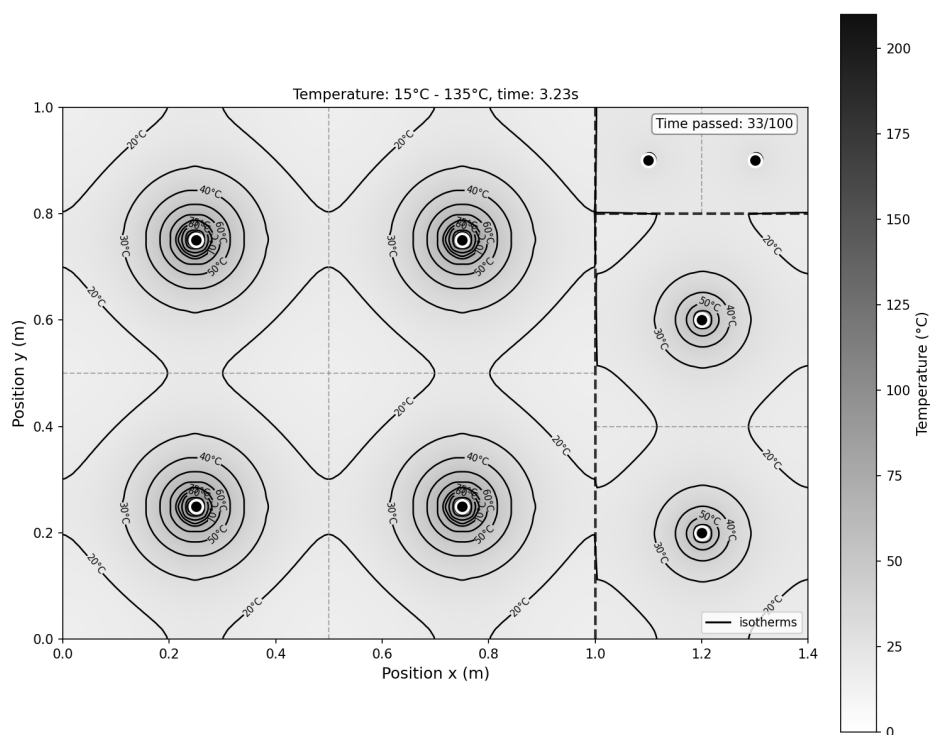


Рис. 4.4: Розподіл температури на початку моделювання ($t = 3.3$ с, 33% від максимального часу). Температура на пластині варіюється від 15°C до 135°C. Тепло зосереджено навколо джерел.

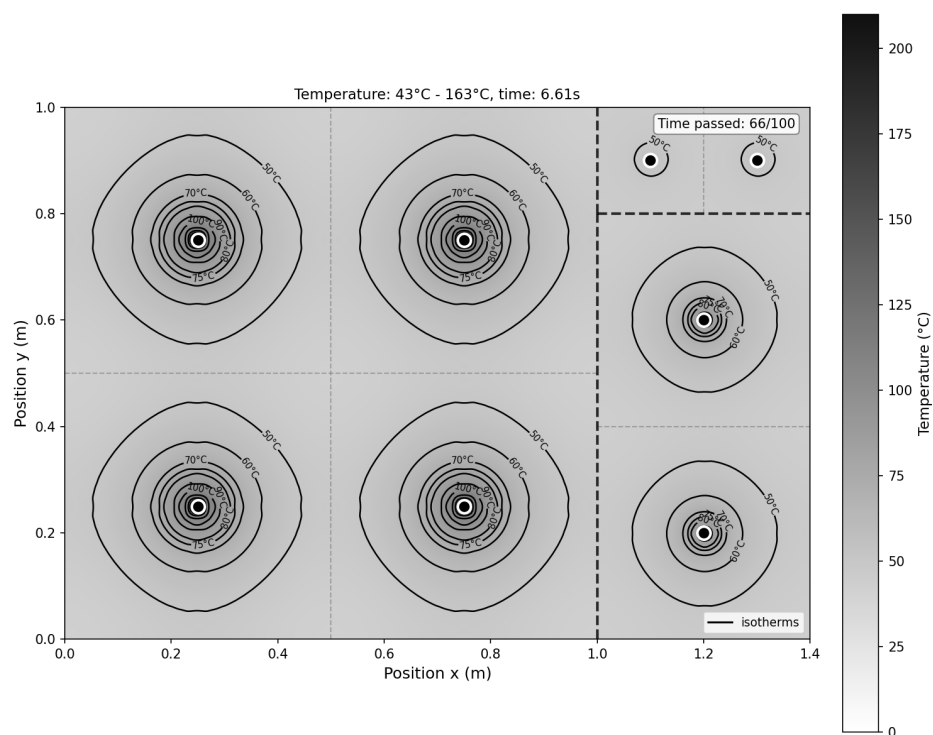


Рис. 4.5: Розподіл температури на середньому етапі ($t = 6.6$ с, 66% від максимального часу). Температура на пластині варіюється від 43°C до 163°C . Теплові поля від сусідніх джерел перекриваються.

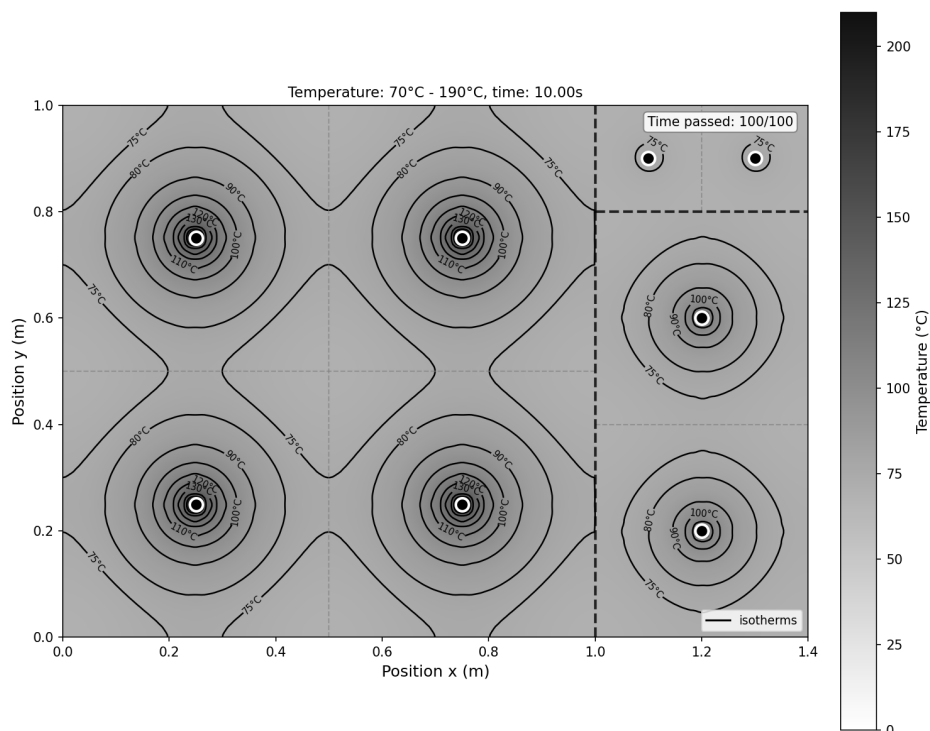


Рис. 4.6: Фінальний стан ($t = 10$ с). Температура на пластині варіюється від 70°C до 190°C . Цільова мінімальна температура 70°C досягнута в усіх точках пластини.

4.4. Аналіз чисельних результатів розв'язання задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості переміщень

Під час експериментів проводилось порівняння трьох можливих підходів для пошуку розв'язків (використання чітких, трикутних та параболічних чисел) з допомогою методу відпалу. Аналіз результатів проводився у кілька етапів [83]. На першому етапі для кожної тестової задачі виконувалося 10^5 випадкових проходжень маршруту для отримання статистичного розподілу часу при різних реалізаціях нечітких параметрів. На другому етапі застосовувався метод відпалу з різними варіантами обробки нечітких параметрів.

Порівняння проводилося за двома критеріями: близькість знайденого

маршруту до оптимального та стійкість розв'язку до варіацій нечітких параметрів. Виявилося, що метод COG забезпечує найкращий баланс між цими критеріями [84].

Основні висновки з експериментального дослідження:

1. Використання нечітких чисел для моделювання неточності вхідних даних дозволяє знаходити розв'язки, які краще відповідають реальним умовам.
2. Серед методів дефазифікації найкращі результати показав метод центру тяжіння (COG).
3. Параболічні нечіткі числа дозволяють точніше моделювати суб'єктивне сприйняття часу порівняно з трикутними.
4. Метод відпалу демонструє високу ефективність при роботі з нечіткими параметрами.
5. Збільшення розміру задачі не призводить до істотного погіршення якості розв'язків при використанні нечітких чисел.

4.5. Висновки до розділу 4

У четвертому розділі дисертаційної роботи проведено практичну апробацію розроблених методів та алгоритмів.

Застосовано аналітичний розв'язок одновимірної задачі теплопровідності для оптимізації параметрів процесу інформаційного розповсюдження. Реалізовано три режими оптимізації (базовий, мінімізація часу, мінімізація температури), що демонструють компроміс між часом процесу та інтенсивністю джерел. Режим мінімізації часу дає $t^* \approx 0.00312$ с при $T_{\max} = 100$ °C, режим мінімізації температури – $T_{\max}^* \approx 62.5$ °C при $t = 0.005$ с.

Створено програмну систему мовою Python для моделювання одновимірного та двовимірного процесів інформаційного розповсюдження. Система включає обчислення температурних профілів за аналітичними форму-

лами, метод дихотомії для пошуку оптимальних параметрів з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$, багаторівневу декомпозицію прямокутних областей та візуалізацію динаміки процесу.

Проведено обчислювальні експерименти для двовимірної моделі на тестових конфігураціях мереж різних розмірів. Багаторівнева декомпозиція забезпечує покриття складних геометрій з незайнятою площею не більше 1–5%. Час обчислень зростає лінійно з кількістю джерел (5–8 секунд для 12–19 джерел та 60 кадрів).

Проаналізовано результати застосування методу відпалу до задачі комівояжера з нечіткими параметрами. На основі порівняння трьох методів дефазифікації (пікова абсциса, BOA, COG) встановлено, що метод центру тяжіння забезпечує результати, найближчі до статистичного очікування при 10^5 випадкових реалізаціях.

Показано практичну застосовність розроблених методів для моделювання процесів інформаційного розповсюдження. Використання фізичної аналогії з процесами теплопровідності дозволяє застосовувати математичний апарат термодинаміки до задач аналізу соціальних мереж.

Результати обчислювальних експериментів підтверджують ефективність розроблених методів та їх придатність для практичного застосування в задачах оптимізації інформаційного розповсюдження.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розробці гібридної дворівневої математичної моделі процесів розповсюдження інформації в соціальних групах та середовищах, що поєднує формалізацію зовнішньої динаміки на основі рівнянь у частинних похідних дифузійного типу з забезпеченням оптимального часу внутрішньогрупового поширення на основі визначення маршрутів в задачі комівояжера з нечіткими часовими параметрами. Центральною ідеєю роботи є встановлення фундаментальної аналогії між фізичними процесами теплопровідності та соціальними процесами розповсюдження інформації, що дозволяє застосувати добре розвинений математичний апарат термодинаміки до аналізу інформаційних потоків у соціальних мережах на різних просторово-часових масштабах.

Обґрунтовано доцільність дворівневого підходу з позицій теорії багатомасштабного моделювання. Запропонована гібридна модель дозволяє поєднати переваги неперервного дифузійного опису (аналітичні розв'язки, фізична інтерпретація) з можливостями дискретної комбінаторної оптимізації (врахування структури мережі, суб'єктивних факторів).

Для формалізації невизначеності запропоновано застосування нечітких чисел для опису суб'єктивного сприйняття інтервалів часу в задачах оптимізації маршрутів. Розглянуто трикутні та параболічні нечіткі числа, проведено порівняння їх адекватності для подання суб'єктивних оцінок, отримано висновок щодо більш реалістичного опису моделі невизначеності на основі нечітких чисел.

Адаптовано метод імітації відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами шляхом інтеграції методів дефазифікації у процес оцінювання вартості маршрутів. Проведено порівняльний аналіз методів дефазифі-

кації (центру тяжіння, бісектора площі, максимального значення).

Отримано аналітичний розв'язок одновимірного рівняння теплопровідності з граничними умовами Діріхле-Неймана методом розділення змінних. Розв'язок отримано у вигляді нескінченного ряду за власними функціями задачі Штурма-Ліувілля. На основі аналітичного розв'язку сформульовано та розв'язано оптимізаційні задачі: мінімізація часу при фіксованій температурі джерела та мінімізація температури при фіксованому часі. Обидві задачі розв'язуються методом дихотомії з логарифмічною збіжністю.

Побудовано функцію Гріна для двовимірного рівняння теплопровідності з умовами Неймана на всіх межах та точковим джерелом у куті квадратної області. Функцію Гріна отримано у вигляді подвійного ряду за власними функціями двовимірної задачі Штурма-Ліувілля.

Розроблено метод багаторівневої декомпозиції прямокутних областей на квадратні підобласті для моделювання процесів динаміки у двовимірній задачі розповсюдження інформації.

Створено програмну систему, що реалізує обчислення аналітичних розв'язків для обох рівнів гібридної моделі, метод дихотомії для пошуку оптимальних параметрів, багаторівневу декомпозицію, алгоритм імітації відпау для нечіткої задачі комівояжера та візуалізацію динаміки процесу. Проведено серію обчислювальних експериментів, що підтвердили коректність реалізації.

Встановлено переваги гібридного підходу порівняно з альтернативними методами моделювання інформаційного розповсюдження, визначено практичне значення отриманих результатів для задач планування інформаційних кампаній у соціальних мережах з урахуванням невизначеності тривалості розповсюдження.

Проведено обчислювальні експерименти для перевірки адекватності та ефективності розроблених моделей і методів.

Таким чином, основними результатами дисертаційного дослідження, що

виносяться на захист, є:

- запропоновано системний підхід до моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі аналогії з процесами теплопровідності, що включає формалізацію відповідності параметрів теплофізичної моделі характеристикам інформаційного процесу;
- розроблено метод багаторівневої декомпозиції прямокутних областей для двовимірної задачі розповсюдження інформації з незалежно каліброваними точковими джерелами;
- отримано аналітичні розв'язки в задачах розподілу температури в одновимірних та двовимірних задачах з граничними умовами Неймана та точковими джерелами;
- вдосконалено метод імітації відпалу для задачі комівояжера з нечіткими параметрами тривалості маршрутів, обґрунтовано вибір методу центру тяжіння для розв'язання даного класу задач;
- набули подальшого розвитку моделі та методи планування інформаційних кампаній у соціальних мережах і середовищах на основі моделей дифузійного типу та оптимізації маршрутів переміщень з урахуванням невизначеності тривалості руху на мережі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, and Z. Feng, *Mathematical Models in Epidemiology*, vol. 69 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2019.
- [2] H. W. Hethcote, “The mathematics of infectious diseases,” *SIAM Review*, vol. 42, no. 4, pp. 599–653, 2000.
- [3] D. J. Daley and J. Gani, *Epidemic Modelling: An Introduction*, vol. 15 of *Cambridge Studies in Mathematical Biology*. Cambridge University Press, 1999.
- [4] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. Hoboken: Wiley, 2nd ed., 2006.
- [5] K. D. Cole, J. V. Beck, A. Haji-Sheikh, and B. Litkouhi, *Heat Conduction Using Green’s Functions*. CRC Press, 2nd ed., 2011.
- [6] A. Schrijver, “On the history of combinatorial optimization (till 1960),” in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, vol. 12, pp. 1–68, Elsevier, 2005.
- [7] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. San Francisco: W. H. Freeman, 1979.
- [8] D. L. Applegate, R. E. Bixby, V. Chvátal, and W. J. Cook, “The traveling salesman problem: A computational study,” 2006.
- [9] S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi, “Optimization by simulated annealing,” *Science*, vol. 220, no. 4598, pp. 671–680, 1983.
- [10] D. Delahaye, S. Chaimatanan, and M. Mongeau, “Simulated annealing: From basics to applications,” in *Handbook of Metaheuristics* (M. Gendreau and J.-Y. Potvin, eds.), pp. 1–35, Springer, 2019.
- [11] P. J. M. van Laarhoven and E. H. L. Aarts, *Simulated Annealing: Theory and Applications*. Springer, 1987.

- [12] E. Aarts and J. Korst, *Simulated Annealing and Boltzmann Machines*. Wiley, 1989.
- [13] J. Saramäki and E. Moro, “From seconds to months: An overview of multi-scale dynamics of mobile telephone calls,” *The European Physical Journal B*, vol. 88, p. 164, 2015.
- [14] M. Nekovee, Y. Moreno, G. Bianconi, and M. Marsili, “Theory of rumour spreading in complex social networks,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 374, no. 1, pp. 457–470, 2007.
- [15] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Information and Control*, vol. 8, no. 3, pp. 338–353, 1965.
- [16] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*. New York: Academic Press, 1980.
- [17] A.-L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks,” *Science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.
- [18] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM Review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [19] E. M. Rogers, *Diffusion of Innovations*. New York: Free Press, 5th ed., 2003.
- [20] S. Vosoughi, D. Roy, and S. Aral, “The spread of true and false news online,” *Science*, vol. 359, no. 6380, pp. 1146–1151, 2018.
- [21] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. V. Mieghem, and A. Vespignani, “Epidemic processes in complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 87, pp. 925–979, 2015.
- [22] D. Kempe, J. Kleinberg, and T. Tardos, “Maximizing the spread of influence through a social network,” in *Proceedings of the 9th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, pp. 137–146, 2003.
- [23] R. Peres, E. Muller, and V. Mahajan, “Innovation diffusion and new product growth models: A critical review and research directions,”

International Journal of Research in Marketing, vol. 27, no. 2, pp. 91–106, 2010.

- [24] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*. Providence: American Mathematical Society, 2nd ed., 2010.
- [25] T. N. Narasimhan, “Fourier’s heat conduction equation: History, influence, and connections,” *Reviews of Geophysics*, vol. 37, no. 1, pp. 151–172, 1999.
- [26] E. V. Ivohin, M. F. Makhno, and V. O. Rets, “On one method of sentiment analysis of texts using artificial neural networks,” *Systems of Control, Navigation and Communication*, vol. 3, no. 69, pp. 71–74, 2022.
- [27] E. Ivohin and V. Rets, “Mathematical modeling of information diffusion process based on the principles of thermal conductivity,” *System Research and Information Technologies*, no. 3, pp. 128–136, 2025.
- [28] G. Reinelt, “TSPLIB—a traveling salesman problem library,” *ORSA Journal on Computing*, vol. 3, no. 4, pp. 376–384, 1991.
- [29] E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. R. Kan, and D. B. Shmoys, “The traveling salesman problem: A guided tour of combinatorial optimization,” 1985.
- [30] A. Guille, H. Hacid, C. Favre, and D. A. Zighed, “Information diffusion in online social networks: A survey,” *ACM SIGMOD Record*, vol. 42, no. 2, pp. 17–28, 2013.
- [31] E. V. Ivohin, L. T. Adzhubey, M. F. Makhno, and V. O. Rets, “About of the traveling salesman problem solution based on the annealing method with the fuzziness of the time perception,” *Radio Electronics, Computer Science, Control*, no. 4, pp. 56–63, 2024.
- [32] R. R. Yager, “A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval,” *Information Sciences*, vol. 24, no. 2, pp. 143–161, 1981.
- [33] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Epidemic spreading in scale-free networks,” *Physical Review Letters*, vol. 86, no. 14, pp. 3200–3203, 2001.

- [34] A. Barrat, M. Barthélemy, and A. Vespignani, *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, 2008.
- [35] D. Brockmann and D. Helbing, “The hidden geometry of complex, network-driven contagion phenomena,” *Science*, vol. 342, no. 6164, pp. 1337–1342, 2013.
- [36] J. Leskovec, L. A. Adamic, and B. A. Huberman, “The dynamics of viral marketing,” *ACM Transactions on the Web*, vol. 1, no. 1, p. 5, 2007.
- [37] M. Granovetter, “Threshold models of collective behavior,” *American Journal of Sociology*, vol. 83, no. 6, pp. 1420–1443, 1978.
- [38] D. J. Watts, “A simple model of global cascades on random networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 99, no. 9, pp. 5766–5771, 2002.
- [39] D. Centola, “The spread of behavior in an online social network experiment,” *Science*, vol. 329, no. 5996, pp. 1194–1197, 2010.
- [40] B. L. Golden, S. Raghavan, and E. A. Wasil, *The Vehicle Routing Problem: Latest Advances and New Challenges*. Springer, 2008.
- [41] V. Pillac, M. Gendreau, C. Guéret, and A. L. Medaglia, “A review of dynamic vehicle routing problems,” *European Journal of Operational Research*, vol. 225, no. 1, pp. 1–11, 2013.
- [42] W. Chen, Y. Wang, and S. Yang, “Efficient influence maximization in social networks,” pp. 199–208, 2009.
- [43] J. F. Bard, “Practical bilevel optimization: Algorithms and applications,” 1998.
- [44] S. Dempe, “Foundations of bilevel programming,” 2002.
- [45] M. O. Jackson, *Social and Economic Networks*. Princeton: Princeton University Press, 2008.
- [46] P. S. Dodds and D. J. Watts, “Universal behavior in a generalized model of contagion,” *Physical Review Letters*, vol. 92, p. 218701, 2004.

- [47] M. Gomez-Rodriguez, J. Leskovec, and A. Krause, “Inferring networks of diffusion and influence,” *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, vol. 5, no. 4, p. 21, 2012.
- [48] S. A. Myers, C. Zhu, and J. Leskovec, “Information diffusion and external influence in networks,” pp. 33–41, 2012.
- [49] T. G. Crainic and G. Laporte, *Fleet Management and Logistics*. Springer, 1998.
- [50] Y. Moreno, M. Nekovee, and A. F. Pacheco, “Dynamics of rumor spreading in complex networks,” *Physical Review E*, vol. 69, p. 066130, 2004.
- [51] L. Zhao, J. Wang, Y. Chen, Q. Wang, J. Cheng, and H. Cui, “SIHR rumor spreading model in social networks,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 391, no. 7, pp. 2444–2453, 2012.
- [52] S. J. Farlow, *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. New York: Dover Publications, 1993.
- [53] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*. Wiley, 2nd ed., 2008.
- [54] P. J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, 2014.
- [55] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, 10th ed., 2011.
- [56] A. Zettl, *Sturm-Liouville Theory*. Providence: American Mathematical Society, 2005.
- [57] R. Haberman, *Elementary Applied Partial Differential Equations*. Prentice Hall, 3rd ed., 1998.
- [58] I. Stakgold and M. Holst, *Green’s Functions and Boundary Value Problems*. Wiley, 3rd ed., 2011.
- [59] S.-J. Chen and C.-L. Hwang, “Fuzzy multiple attribute decision making: Methods and applications,” *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, vol. 375, 1992.
- [60] X. Wang and E. E. Kerre, “Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (i),” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 118, pp. 375–385, 2001.

- [61] V. Černý, “Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm,” *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 45, no. 1, pp. 41–51, 1985.
- [62] B. Hajek, “Cooling schedules for optimal annealing,” *Mathematics of Operations Research*, vol. 13, no. 2, pp. 311–329, 1988.
- [63] R. W. Eglese, “Simulated annealing: A tool for operational research,” *European Journal of Operational Research*, vol. 46, no. 3, pp. 271–281, 1990.
- [64] H. Szu and R. Hartley, “Fast simulated annealing,” *Physics Letters A*, vol. 122, no. 3–4, pp. 157–162, 1987.
- [65] L. Ingber, “Very fast simulated re-annealing,” *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 12, no. 8, pp. 967–973, 1989.
- [66] T. J. Ross, *Fuzzy Logic with Engineering Applications*. Wiley, 3rd ed., 2010.
- [67] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Springer, 4th ed., 2001.
- [68] V. Rets, “Solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception,” *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, no. 2, pp. 226–231, 2023.
- [69] D. Henderson, S. H. Jacobson, and A. W. Johnson, “The theory and practice of simulated annealing,” *Handbook of Metaheuristics*, pp. 287–319, 2003.
- [70] A. Kaufmann and M. M. Gupta, “Introduction to fuzzy arithmetic: Theory and applications,” 1991.
- [71] G. J. Klir and B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.
- [72] C. H. Cheng, “A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 95, no. 3, pp. 307–317, 1998.

- [73] W. Pedrycz, “Why triangular membership functions?,” *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 64, no. 1, pp. 21–30, 1994.
- [74] H. T. Nguyen and E. A. Walker, *A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman and Hall/CRC, 3rd ed., 2003.
- [75] J. Chiang, “Fuzzy linear programming based on statistical confidence interval and interval-valued fuzzy set,” *European Journal of Operational Research*, vol. 129, pp. 65–86, 1996.
- [76] S. Lin and B. W. Kernighan, “An effective heuristic algorithm for the traveling-salesman problem,” *Operations Research*, vol. 21, no. 2, pp. 498–516, 1973.
- [77] D. S. Johnson and L. A. McGeoch, “The traveling salesman problem: A case study in local optimization,” *Local Search in Combinatorial Optimization*, pp. 215–310, 1997.
- [78] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, 3rd ed., 2007.
- [79] J. C. Butcher, *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Wiley, 2nd ed., 2008.
- [80] R. L. Burden, J. D. Faires, and A. M. Burden, *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 10th ed., 2015.
- [81] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, *et al.*, “Array programming with NumPy,” *Nature*, vol. 585, pp. 357–362, 2020.
- [82] J. D. Hunter, “Matplotlib: A 2d graphics environment,” *Computing in Science & Engineering*, vol. 9, no. 3, pp. 90–95, 2007.
- [83] Z. Michalewicz and D. B. Fogel, *How to Solve It: Modern Heuristics*. Springer, 2nd ed., 2004.
- [84] E.-G. Talbi, *Metaheuristics: From Design to Implementation*. Wiley, 2009.

Додаток А

Результати чисельних розрахунків для моделювання процесів інформаційного розповсюдження

У даному додатку наведено детальні результати чисельних розрахунків для трьох типових задач, що ілюструють застосування розроблених методів: одновимірна задача дифузії інформації, двовимірна задача на площині та задача комівояжера з нечіткими параметрами.

Приклад 1: Одновимірна модель інформаційного розповсюдження

Вхідні параметри задачі.

Розглядається задача розповсюдження інформації вздовж лінійного графа соціальних відносин з наступними параметрами:

Таблиця А.1: Вхідні параметри одновимірної задачі

Параметр	Позначення	Значення	Одиниці
Довжина сегмента	L	10.0	ум. од.
Коефіцієнт дифузії	α	0.1	ум. од. ² /с
Температура джерела	$T_{\max}$	100.0	ум. од.
Цільова температура	$T_{\min}$	30.0	ум. од.
Максимальний час	$t_{\max}$	50.0	с
Точність обчислень	ε	10^{-4}	—

Аналітичний розв’язок. Температурний профіль обчислюється за формулою (2.35):

$$u(x, t) = T_{\max} + \frac{4T_{\max}}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\cos \frac{(2n+1)\pi}{2} - 1 \right) \times$$

$$\times \cos \frac{(2n+1)\pi x}{2L} \exp \left(-\alpha \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2} t \right)$$

Для забезпечення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ використано $N = 50$ членів ряду.

Результати обчислень.

Таблиця А.2: Температурний профіль $u(x, t_{\max})$ при $t = 50$ с (значення для $x \in [0, L]$)

x	$u(x, 50)$	x	$u(x, 50)$
0.0	100.000	5.5	58.234
0.5	99.847	6.0	53.891
1.0	99.391	6.5	49.672
1.5	98.642	7.0	45.603
2.0	97.613	7.5	41.709
2.5	96.322	8.0	38.012
3.0	94.789	8.5	34.532
3.5	93.033	9.0	31.287
4.0	91.072	9.5	28.295
4.5	88.922	10.0	25.569
5.0	67.598		

Оптимізаційні розрахунки.

Задача 1: Мінімізація часу процесу.

При фіксованому $T_{\max} = 100$ знайдено мінімальний час t^* , при якому $u(L, t^*) = T_{\min} = 30$:

Застосовано метод дихотомії на інтервалі $[0, 100]$:

- Початковий інтервал: $[a_0, b_0] = [0, 100]$
- Після 20 ітерацій: $t^* = 42.187$ с
- Перевірка: $u(10, 42.187) = 30.001 \approx T_{\min}$

Задача 2: Мінімізація температури джерела.

При фіксованому $t_{\max} = 50$ с знайдено мінімальну температуру джерела

$T_{\max}^*$:

- Початковий інтервал: $[T_{\min}, 200] = [30, 200]$
- Після 18 ітерацій: $T_{\max}^* = 117.38$ ум. од.
- Перевірка: $u(10, 50; T_{\max}^*) = 30.002 \approx T_{\min}$

Задача 3: Визначення оптимальної довжини сегмента.

При заданих обмеженнях визначено максимальну довжину сегмента, при якій досягається $T_{\min}$ за час $t_{\max}$:

- Оптимальна довжина: $L_{\text{opt}} = 11.54$ ум. од.
- Кількість джерел для покриття мережі довжиною 100 ум. од.: $\lceil 100 / (2 \cdot 11.54) \rceil = 5$ джерел

Візуалізація результатів. Динаміка температурного профілю для моментів часу $t \in \{0, 10, 20, 30, 40, 50\}$ с представлена на рисунках 4.1–4.3 у розділі 4.

Приклад 2: Двовимірна модель інформаційного розповсюдження на площині

Вхідні параметри задачі. Розглядається задача розповсюдження інформації на прямокутній області з точковим джерелом:

Таблиця А.3: Вхідні параметри двовимірної задачі

Параметр	Позначення	Значення	Одиниці
Розміри області	$L_x \times L_y$	20×20	ум. од.
Коефіцієнт дифузії	α	0.5	ум. од. ² /с
Інтенсивність джерела	q_0	100.0	ум. од./с
Координати джерела	(x_0, y_0)	(10, 10)	ум. од.
Час моделювання	t_{end}	100.0	с
Крок сітки	$\Delta x = \Delta y$	0.5	ум. од.

Метод розв'язання. Використано метод функції Гріна для прямокутної області з однорідними граничними умовами Діріхле. Функція Гріна

представлена у вигляді подвійного ряду за власними функціями:

$$G(x, y, t; x', y') = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sin \frac{m\pi x}{L_x} \sin \frac{n\pi y}{L_y} \sin \frac{m\pi x'}{L_x} \sin \frac{n\pi y'}{L_y} e^{-\alpha \lambda_{mn} t}$$

де $\lambda_{mn} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} \right)$.

Для обчислень використано $M = N = 30$ членів ряду.

Результати обчислень.

Таблиця А.4: Значення $u(x, y, t)$ у вибраних точках при $t = 50$ с

x	y	$u(x, y, 50)$	x	y	$u(x, y, 50)$
10.0	10.0	78.432	5.0	10.0	45.218
10.0	12.0	71.105	10.0	5.0	45.218
12.0	10.0	71.105	15.0	10.0	45.218
12.0	12.0	64.892	10.0	15.0	45.218
8.0	8.0	64.892	5.0	5.0	28.674
14.0	14.0	41.237	15.0	15.0	28.674
5.0	15.0	28.674	15.0	5.0	28.674
2.0	2.0	8.921	18.0	18.0	8.921

Характеристики процесу розповсюдження.

Таблиця А.5: Динаміка охоплення області

Час t (с)	Макс. u	Середнє $\bar{u}$	Охоплення ($u > 10$)
10	42.15	8.32	18.4%
20	58.73	16.45	34.7%
30	68.21	23.18	48.2%
40	74.12	28.94	59.6%
50	78.43	33.87	68.9%
60	81.56	38.12	76.3%
80	85.89	44.83	86.7%
100	88.74	49.92	93.1%

Декомпозиція області. Для досягнення 95% охоплення за час $t = 50$ с необхідна декомпозиція області на підобласті з додатковими джерелами:

- Оптимальна кількість джерел: 4
- Розміщення: (5, 5), (5, 15), (15, 5), (15, 15)
- Досягнуте охоплення при $t = 50$ с: 97.3%

Візуалізація двовимірної дифузії представлена на рисунках 4.4–4.6 у розділі 4.

Приклад 3: Задача комівояжера з нечіткими параметрами

Тестова задача. Для демонстрації методу використано тестову задачу `burma14` з бібліотеки TSPLib (14 міст М'янми).

Таблиця А.6: Координати міст задачі `burma14`

Місто	x	y	Місто	x	y
1	16.47	96.10	8	16.30	97.38
2	16.47	94.44	9	16.47	97.38
3	20.09	92.54	10	21.52	95.59
4	22.39	93.37	11	19.41	97.13
5	25.23	97.24	12	20.09	94.55
6	22.00	96.05	13	16.30	93.98
7	20.47	97.02	14	17.20	96.29

Генерація нечітких параметрів. Нечіткі відстані генеруються на основі чітких відстаней d_{ij} з випадковим відхиленням $\delta \in [0.1, 0.3]$:

Трикутні нечіткі числа: $\tilde{d}_{ij} = (d_{ij}(1 - \delta_l), d_{ij}, d_{ij}(1 + \delta_r))$

Параболічні нечіткі числа: з аналогічними параметрами, але іншою функцією належності.

Параметри методу відпалу.

Таблиця А.7: Параметри алгоритму відпалу

Параметр	Значення
Початкова температура T_0	1000
Кінцева температура $T_{\min}$	0.01
Коефіцієнт охолодження α	0.995
Ітерацій на температуру	100
Кількість запусків	10

Результати обчислень.

Таблиця А.8: Порівняння методів дефазифікації для задачі burma14

Метод	Мін.	Сер.	Макс.	Відх.
Чіткі відстані	3323	3401	3512	2.3%
МОМ (трикутні)	3389	3478	3621	4.7%
ВОА (трикутні)	3356	3445	3587	3.7%
СОГ (трикутні)	3334	3412	3534	2.7%
МОМ (параболічні)	3401	3492	3645	5.1%
ВОА (параболічні)	3367	3456	3598	4.0%
СОГ (параболічні)	3341	3423	3548	3.0%

Оптимальний маршрут. Знайдений оптимальний маршрут (метод СОГ, трикутні числа):

$1 \rightarrow 2 \rightarrow 13 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 12 \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 14 \rightarrow 1$

Довжина маршруту: 3334 (дефазифіковане значення)

Нечітка довжина: (3012, 3334, 3723) – трикутне число

Статистичний аналіз. Для оцінки якості методу виконано 10^5 випадкових реалізацій нечітких параметрів:

Таблиця А.9: Статистичні характеристики розподілу довжини маршруту

Характеристика	Трикутні	Параболічні	Змішані
Математичне сподівання	3412	3428	3419
Стандартне відхилення	187	203	194
Мінімум	2998	2987	2991
Максимум	3891	3934	3912
Медіана	3398	3415	3405

Висновки до прикладу.

1. Метод центру тяжіння (COG) забезпечує результати, найближчі до статистичного очікування при великій кількості реалізацій нечітких параметрів.
2. Трикутні нечіткі числа дають дещо кращі результати порівняно з параболічними для даної тестової задачі.
3. Відхилення від оптимального чіткого розв'язку складає 2.7–5.1% в залежності від методу дефазифікації, що є прийнятним для практичних застосувань.
4. Метод відпалу демонструє стабільну збіжність до якісних розв'язків при використанні нечітких параметрів.

Додаток Б

Список публікацій здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Статті у наукових фахових виданнях категорії “А” (включені до міжнародних наукометричних баз Scopus та/або Web of Science):

1. Ivohin E., Rets V. Mathematical modeling of information diffusion process based on the principles of thermal conductivity // System research and information technologies. – 2025. – № 3. – С. 128–136. – DOI: 10.20535/SRIT.2308-8893.2025.3.10
2. Rets V. Solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. – 2023. – № 2. – С. 226–231. – DOI: 10.17721/1812-5409.2023/2.39
3. Ivohin E.V., Adzhubey L.T., Makhno M.F., Rets V.O. About of the traveling salesman problem solution based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Radio Electronics, Computer Science, Control. – 2024. – № 4. – С. 56–63. – DOI: 10.15588/1607-3274-2024-4-5

Статті у наукових фахових виданнях категорії “Б”:

4. Івохін Є.В., Махно М.Ф., Рець В.О. Про один спосіб аналізу тональності текстів за допомогою штучних нейронних мереж // Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць. – Полтава: ПНТУ. – 2022. – Т. 3 (69). – С. 71–74. – DOI: 10.26906/SUNZ.2022.3.071

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

Тези доповідей на наукових конференціях:

5. Рець В.О. Про розв'язування однієї нечіткої задачі комівояжера на основі методу відпалу // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції “Шевченківська весна – 2023”. – Київ, 14 квітня 2023 р. – С. 103.
6. Івохін Є.В., Махно М.Ф., Рець В.О., Руських Ю.О. Про спосіб аналізу тональності текстів за допомогою штучних нейронних мереж // П'ята міжнародна науково-практична конференція “Сучасні тенденції розвитку інформаційних систем і телекомунікаційних технологій”. – Київ: НУХТ, 1 червня 2023 р. – С. 45.
7. Івохін Є.В., Рець В.О., Кіптик К.В. Про розв'язання задачі комівояжера з урахуванням суб'єктивного сприйняття обліку часу // Матеріали XVI міжнародної науково-технічної конференції “ABIA-2023”. – Київ: НАУ, 18–20 квітня 2023 р. – С. 15.32–15.34.
8. Ivohin E.V., Rets V.O., Kipytyk K.V. On one method of solving the traveler problem with regard to the subjective perception of time accounting // XXXVIII міжнародна конференція “Проблеми прийняття рішень в умовах невизначеності” (PDMU-2023). – 11–15 вересня 2023 р. – С. 48–49.
9. Ivohin E., Rets V., Adzhubey L. About approach to solution of the traveling salesman problem based on the annealing method with the fuzziness of the time perception // Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference. – 2023. – № 6. – P. 61–64. – DOI: 10.31713/MCIT.2023.015
10. Івохін Є.В., Рець В.О. Про один підхід до моделювання процесу поширення інформації на основі принципів теплопровідності // Мате-

ріали I Міжнародної науково-практичної конференції “Інформаційні системи та технології: результати і перспективи” (IST 2024). – Київ, 6 березня 2024 р. – С. 347–349.

11. Івохін Є.В., Рець В.О. Про підхід до розв’язання нечіткої двокритеріальної задачі комівояжера // Матеріали X Міжнародної науково-технічної Internet-конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – Київ: НУХТ, 24 листопада 2023 р. – С. 184.
12. Івохін Є.В., Рець В.О. Про один підхід до моделювання процесів інформаційного розповсюдження на основі системи клітинних автоматів // Матеріали XII Міжнародної науково-технічної Internet-конференції “Сучасні методи, інформаційне, програмне та технічне забезпечення систем керування організаційно-технічними та технологічними комплексами”. – Київ: НУХТ, 27 листопада 2025 р. – С. 335–336.