

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

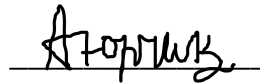
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра обчислювальної математики

**Кваліфікаційна робота  
на здобуття ступеня бакалавра  
за спеціальністю 113 Прикладна математика на тему:**

**ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНИХ ПОТОКІВ**

Виконав студент 4-го курсу:

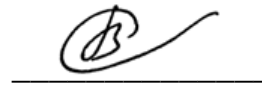
Юрчик Андрій Анатолійович



Науковий керівник:

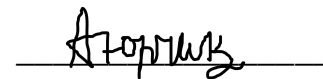
Кандидат фізико-математичних наук

Оноцький В'ячеслав Валерійович



Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з  
праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент



Роботу розглянуто й допущено до захисту на  
засіданні кафедри обчислювальної математики

« 29 » травня 2023 р.,

протокол № 8

Завідувач кафедри

проф. Ляшко С.І.



**Київ – 2023**

## РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 34 сторінок, 8 джерел посилання, 3 ілюстрації, 37 основних формул.

Ключові слова: ТУРБУЛЕНТНІСТЬ, МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТІ, ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, РІВНЯННЯ ПЕРЕНОСУ, ТЕПЛОПЕРЕНОСЕННЯ, МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ.

Об'єкт дослідження – турбулентність та теплоперенесення.

Мета роботи – аналіз, моделювання моделі турбулентності, зв'язок кінетичної енергії турбулентності та енергії дисипації, моделювання теплоперенесення в рідинах та газах.

Результати: дослідження та аналізування турбулентності, теплоперенесення, зв'язок цих величин.

Робота організована наступним чином. На початку наведений список основних позначень. Вступ містить розгляд теорії до даної теми. Теоретична частина складається з 2 розділів та 6 підрозділів. У розділах розглядаються: стандартні моделі, граничні умови та рівняння до них. У практичній частині є аналіз, опис та результати обчислень з наведеним графічним ілюструванням. У кінці наведені висновки.

## ЗМІСТ

РЕФЕРАТ.....	2
ЗМІСТ.....	3
Список основних позначень.....	4
ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТІ.....	6
1.1    Стандартна модель турбулентності.....	6
1.2    Реалізована модель турбулентності та її рівняння.....	9
1.3    Граничні умови в моделях турбулентності.....	12
РОЗДІЛ 2 ТЕПЛОВІДДАЧА ТА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ.....	16
2.1    Способи передачі теплоти та види теплообмінних процесів.....	16
2.2    Математична модель теплопровідності.....	20
2.3    Граничні умови при теплопереносі.....	21
РОЗДІЛ 3 АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОСТІ ТА ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ .....	22
3.1    Алгоритм знаходження розв’язків моделі тубулентності К-епсилон.....	22
3.2    Побудова чисельного розв’язання рівняння переносу.....	27
ВИСНОВКИ.....	32
ЛІТЕРАТУРА.....	34

### Список основных позначень

$C_\nu, C_\varepsilon, C_\mu$  – коефіцієнт пропорційності

$k_T (K)$  – кінетична енергія турбулентності

$\varepsilon_T (\varepsilon)$  – швидкість дисипації кінетичної енергії

$\nu_T$  – коефіцієнт турбулентної в'язкості

$u, v, w$  – компоненти вектора швидкості по відповідних напрямках осей  $x, y, z$

$\rho$  – густина (щільність) середовища

$\mu$  – динамічний коефіцієнт в'язкості

$G_T$  – швидкість генерації енергії турбулентності

$T$  – термодинамічна температура

$\tau$  – час

$\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності

$c$  – теплоємність

$Q_V$  – джерело теплової енергії

$\sigma_K, \sigma_\varepsilon, C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{\varepsilon\varepsilon}$  – емпіричні коефіцієнти

## ВСТУП

Турбулентні потоки є поширеними явищами в природних і технічних системах, і вони використовуються в різних галузях науки та технологіях. Розуміння та чисельне моделювання турбулентних потоків – важливе завданням, оскільки це дозволяє отримати уявлення про їхню природу та дає змогу прогнозувати їх поведінку.

Проблема моделювання турбулентних потоків з теплообміном виникає у багатьох галузях науки, таких як: аеродинаміку, гідродинаміку, метеорологію, енергетику та в процесах змішування. Турбулентність впливає на ефективність теплових обмінників, аеродинамічних профілів, течії рідин у трубопроводах та в багатьох інших процесах. Отже, розробка ефективних методів є актуальною та значущою проблемою.

На сьогоднішні існує значна кількість методів та моделей для чисельного моделювання турбулентних потоків. Однак, врахування теплообміну в них вимагає додаткових ускладнень, апроксимацій, та поправок, оскільки турбулентні потоки й теплообмін є взаємопов'язаними процесами, що впливають одне на одного.

Метою цієї дипломної роботи є аналізування та застосування різницевого алгоритму для апроксимації та реалізація чисельного методу для знаходження чисельних розв'язків системи диференціальних рівнянь, що описують турбулентність процесу та теплообміну.

Очікується, що результати досліджень дозволять покращити розуміння та покращити моделювання турбулентних потоків з урахуванням теплообміну, що допоможе краще дослідити відповідний процес.

Оскільки чисельне моделювання даного завдання є складною задачею, її розробка та удосконалення мають великий потенціал для подальших досліджень і практичних застосувань, що надалі можуть сприяти розвитку наукових досліджень та технологій в цій області.

## РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТІ

### 1.1 Стандартна модель турбулентності

Турбулентність – це фізичне явище, коли в потоці рідини або газу мимоволі утворюються хвилі або вихороподібні потоки різних розмірів. Турбулентний рух є одним з найбільш складних та непередбачуваних явищ в природі, що характеризується хаотичними коливаннями та переміщеннями речовини у рідині або газі. Турбулентні потоки виникають при певних умовах, коли швидкість руху рідини або газу досягає певного критичного значення, відомого як критична швидкість потоку.

Розвинений турбулентний рух зараз моделюється найчастіше за допомогою стандартної моделі дисипації, хоча більш перспективною вважається пряме моделювання турбулентних напруг, яка відома також як модель напруги Рейнольдса. Згідно з гіпотезою Колмогорова, при розвиненому турбулентному русі аналог кінематичного коефіцієнта в'язкості  $\nu_T$  можна вважати пропорційним квадратному кореню з кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  і середньому розміру  $l_T$  вихорів, в яких переважно концентрується енергія турбулентних пульсацій:

$$\nu_T = C_\nu k_T^{1/2} l_T$$

Масштаб турбулентності  $l_T$ , у свою чергу, пов'язаний з наступною функціональною залежністю з кінетичною енергією турбулентності  $k_T$  та швидкістю дисипації турбулентної енергії  $\varepsilon_T$ :

$$\varepsilon_T = C_\varepsilon k_T^{3/2} / l_T,$$

Де  $C_\nu$  і  $C_\varepsilon$  – коефіцієнти пропорційності.

Об'єднавши два останніх рівняння отримуємо формулу за допомогою якої можна обчислити коефіцієнт турбулентної в'язкості  $\nu_T$  за локальними значеннями кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  та швидкості її дисипації  $\varepsilon_T$ :

$$v_T = C_\mu k_T^2 / \varepsilon_T \quad (1.1.1)$$

Де  $C_\mu$  - новий коефіцієнт пропорційності ( $C_\mu = 0.09$ ).

Формула (1.1.1) лежить в основі стандартної двопараметричної дисипативної моделі турбулентності. Значення складових стандартної моделі, - кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  та швидкості її дисипації  $\varepsilon_T$ , знаходять у вузлах сітки чисельного розв'язку двох диференціальних рівнянь. Оскільки кінетична енергія турбулентності  $k_T$  справедлива для закону збереження, то, перетворюючи диференціальне рівняння Рейнольдса, можна отримати для неї теоретичне обґрунтування диференціального рівняння переносу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w k_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial z} \right) = \\ = \rho (G_T - \varepsilon_T) \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Де  $\mu_{\text{еф}}$  - ефективний аналог динамічного коефіцієнта в'язкості;  $\varepsilon_T$  - швидкість дисипації кінетичної енергії турбулентності;  $\rho$  - густина (щільність) середовища;  $u, v, w$  - компоненти вектора швидкості по відповідних напрямках осей  $x, y, z$ ;  $G_T$  - швидкість генерації енергії турбулентності.

$$\begin{aligned} G_T = 2\nu_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \\ + \nu_T \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

У стандартній моделі побудова диференціального рівняння переносу для швидкості дисипації енергії турбулентності  $\varepsilon_T$  виконують приблизно, вважаючи, що члени цього рівняння пропорційні аналогічним доданком у рівнянні для  $k_T$  і застосовуючи поправочні коефіцієнти, отриманих з експериментів [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \varepsilon_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \varepsilon_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \varepsilon_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial z} \right) = \rho \frac{\varepsilon_T}{k_T} (c_{\varepsilon 1} G_T - c_{\varepsilon 2} \varepsilon_T), \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

де  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $c_{\varepsilon 1} = 1.44$ ,  $c_{\varepsilon 2} = 1.92$  – емпіричні коефіцієнти.

Дискретні аналоги диференціальних рівнянь переносу (1.1.2) та (1.1.4) виявляються тісно пов'язаними між собою відношенням  $\varepsilon_T/k_T$ , обчислення якого простим діленням величин, які в них містяться, може виявитися не коректним. Наприклад, випадкове скорочення величини  $k_T$  під час ітераційного процесу може викликати збільшення відношення  $\varepsilon_T/k_T$ , що в свою чергу приведе до подальшого зменшення значення кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  при розрахунках його за допомогою дискретного аналога диференціального рівняння (1.1.2).

Якщо відсутні обмежувальні фактори нестійкості обчислення кінетичної енергії турбулентності може призвести до помітної похибки розрахункових результатів. Тому, більш доцільно при пошуку чисельного розв'язку рівнянь (1.1.2) та (1.1.4) визначати величину  $\varepsilon_T/k_T$  непрямим способом, наприклад, перетворюючи вираз (1.1.1) для турбулентної в'язкості:

$$\frac{\varepsilon_T}{k_T} = \sqrt{C_\mu \frac{\varepsilon_T}{\nu_T}}.$$

Можна відзначити, що при обчисленні швидкості дисипації енергії турбулентності  $\varepsilon_T$  за дискретним аналогом диференціального рівняння (1.1.4) нестійкість не виявляється. Після чисельного розв'язання диференціальних рівнянь (1.1.2) та (1.1.4) коефіцієнт турбулентної в'язкості  $\nu_T$  може бути визначений за формулою (1.1.1) практично на всій області поширеного

турбулентного руху рідини, включаючи рівноважний підшар частини приграничного шару. Незважаючи на популярність стандартної дисипативної моделі турбулентності, її застосування має деякі обмеження. Вона добре пристосована в основному до зсувних течій, що відбуваються без відриву приграничного шару.

## 1.2 Реалізована модель турбулентності та її рівняння

Назва моделі пов'язана з фізичними обмеженнями, що накладаються на рейнольдсові напруги. Реалізована модель турбулентності [2] відрізняється від стандартної моделі уточненим алгоритмом розрахунку турбулентної в'язкості та застосуванням теоретично обґрунтованого диференціального рівняння для швидкості дисипації кінетичної енергії турбулентності. Згідно розрахункам авторів методу, модель здатна моделювати розвинені турбулентні течії з обертанням і рециркуляцією потоку, зі зворотним градієнтом тиску та відривом приграничного шару.

У реалізованій моделі використовується формально та ж формула для турбулентної в'язкості, що і в стандартній моді турбулентності,

$$\nu_T = C_\mu k_T^2 / \varepsilon_T \quad (1.2.1)$$

Але вже коефіцієнт пропорційності  $C_\mu$  не є постійною величиною. Він розраховується за виразом, в якому постійною величиною являється лише параметр  $A_0 = 4$ :

$$C_\mu = \frac{1}{\left( A_0 + A_s U^* \frac{k_T}{\varepsilon_T} \right)}$$

Щоб викласти порядок обчислення множника  $A_s$ , складові тензора швидкості деформації записуються в тензорному вигляді,

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

І далі знаходять його середньоквадратичну величину

$$\tilde{S} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}.$$

Потім обчислюється допоміжний параметр та сам коефіцієнт:

$$W = \frac{S_{ij}S_{jk}S_{ki}}{\tilde{S}^3}, \quad \phi = \frac{1}{3} \arccos(\sqrt{6}W), \quad A_s = \sqrt{6} \cos(\phi)$$

Множник  $U^*$  обчислюється за формулою  $U^* = \sqrt{S_{ij}S_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}}$ , де тензор  $\Omega_{ij}$  враховує локальне обертання елементів середовища. У стаціонарній (без обертання) системі координат його компоненти обчислюються за формулою

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Перемножуючи тензори, слід пам'ятати, що кожному індексу в тензорному записі послідовно присвоюються цифрові значення 1,2 і 3 (залежно від координати по простору  $x, y, z$ ), а вирази з індексами, що повторюються, підсумовуються при заміні цих індексів цифрами В результаті добуток двох тензорів  $S_{ij}S_{ij}$  буде представлено у вигляді суми з дев'яти доданків і враховуючи симетричність тензорів  $S_{ij} = S_{ji}$  отримаємо наступне:

$$S_{ij}S_{ij} = S_{11}S_{11} + S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33} + 2S_{12}S_{12} + 2S_{23}S_{23} + 2S_{31}S_{31}$$

Добуток двох тензорів  $\Omega_{ij}\Omega_{ij}$  виконується враховуючи рівність нулю діагональних компонентів ( $\Omega_{11} = \Omega_{22} = \Omega_{33} = 0$ ):

$$\Omega_{ij}\Omega_{ij} = 2\Omega_{12}\Omega_{12} + 2\Omega_{23}\Omega_{23} + 2\Omega_{31}\Omega_{31}$$

Множення трьох тензорів  $S_{ij}S_{jk}S_{ki}$  складається вже з 27 компонентів, але використавши аналогічні міркування як для добутку двох тензорів  $S_{ij}S_{ij}$  отримаємо наступну формулу:

$$\begin{aligned} S_{ij}S_{jk}S_{ki} = & S_{11}S_{11}S_{11} + S_{22}S_{22}S_{22} + S_{33}S_{33}S_{33} + 3S_{11}S_{12}S_{12} + 3S_{11}S_{31}S_{31} \\ & + 3S_{22}S_{12}S_{12} + 3S_{22}S_{23}S_{23} + 3S_{33}S_{23}S_{23} + 3S_{33}S_{31}S_{31} + 6S_{12}S_{23}S_{31}. \end{aligned}$$

Щоб завершити обчислення турбулентної в'язкості  $\nu_T$  у вузлах сітки за формулою (1.2.1), необхідно чисельно вирішити диференціальні рівняння для кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  та швидкості її дисипації  $\varepsilon_T$ .

Диференціальне рівняння для кінетичної енергії турбулентності  $k_T$  у реалізованій моделі практично залишається таким самим, як і рівняння (1.1.2) стандартної моделі. Хоча швидкість генерації енергії турбулентності  $G_T$  може, як і раніше обчислюватися за формулою (1.1.3). Більш природним у реалізованій моделі буде її подання через тензорне подання:

$$G_T = 2\nu_T S_{ij}S_{ij} = \nu_T S^2,$$

де для зручності можна записати нову змінну  $S$  [2]:

$$S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}} = \sqrt{2}\tilde{S}.$$

У результаті диференціальне рівняння для кінетичної енергії турбулентності буде записане в наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho k_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v k_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w k_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu_{\text{еф}} \frac{\partial k_T}{\partial z} \right) = \\ = \rho(\nu_T S^2 - \varepsilon_T) \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Виведення диференціального рівняння для швидкості дисипації  $\varepsilon_T$  у реалізованій моделі теоретично краще обґрунтований, ніж у стандартній моделі турбулентності. Воно відрізняється від рівняння (1.1.4) стандартної моделі членами, які відповідають за процеси генерації та дисипації кінетичної енергії турбулентності та значеннями емпіричних коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u \varepsilon_T}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \varepsilon_T}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \varepsilon_T}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial y} \right) \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left( \left( \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon_T}{\partial z} \right) = \rho \left( C_1 S \varepsilon_T - C_2 \frac{\varepsilon_T^2}{k_T + \sqrt{\nu \varepsilon_T}} \right), \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

де  $\sigma_\varepsilon = 1.2$ ,  $C_2 = 1.9$ ,  $\nu = \mu/\rho$  – кінематичний коефіцієнт в'язкості

Коефіцієнт  $C_1$  можна обчислити за формулою:

$$C_1 = \max \left( 0.43, \frac{\eta}{5 + \eta} \right),$$

де параметр  $\eta$  обчислюється як

$$\eta = S k_T / \varepsilon_T.$$

### 1.3 Граничні умови в моделях турбулентності

Граничні умови в диференціальних рівнянь реалізованої моделі турбулентності формулюються так само, як і в рівняннях стандартної моделі. Бо на обтічній твердій поверхні швидкість потоку газів зазвичай дорівнює нулю і параметри турбулентності не визначаються, то границя розрахункової області для диференціальних рівнянь дисипативних моделей турбулентності переноситься на вузли сітки, що ближчі всього до стінок. Щоб врахувати приглушення турбулентності поблизу стінки, формулу турбулентної в'язкості (1.1.1) вводиться

коригуюча функція, що враховує зниження рівня турбулентності поблизу стінки [1]:

$$\nu_T = C_\mu f_\mu k_T^2 / \varepsilon_T \quad (1.3.1)$$

Теоретично коригувальна функція може бути представлена у вигляді співвідношення величин турбулентної в'язкості  $\nu_T$  обчислених за формулою при експоненціальному та лінійному законах зміни довжини шляху змішування [3]:

$$f_\mu = \frac{\sqrt{4\rho/\rho_{ст}(ky_+)^2[1 - \exp(-y_+/A)]^2 + 1} - 1}{\sqrt{4\rho/\rho_{ст}(ky_+)^2 + 1} - 1}.$$

Де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, що вважається універсальною константою,  $y_+$  - відстань по нормалі до стінки (безрозмірна величина),  $\rho_{ст}$  – густина середовища біля стінки.

Формула показує, що коригувальна функція, дорівнює нуля на поверхні стінки, і поступово зростає до одиниці, що виключає її вплив на величину турбулентної в'язкості у рівноважному підшарі.

Рівність швидкостей дисипації  $\nu_T$  та генерації  $G_T$  енергії турбулентності в рівноважному підшарі можна вважати справедливим для нього наступного виразу, в якому коефіцієнти турбулентної в'язкості  $\nu_T$  представлений формулою (1.1.1),

$$\varepsilon_T = G_T \approx \nu_T \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = C_\mu \frac{k_T^2}{\varepsilon_T} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

З останньої рівності отримаємо форму для локальної похідної від поздовжньої швидкості  $u$  в рівноважному підшарі:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C_\mu^{-1/2} \frac{\varepsilon_T}{k_T},$$

З коефіцієнтом біля стінок  $C_\mu = 0.09$ .

Інший вираз для локальної похідної від швидкості в рівноважному підшарі можна записати так:

$$u_*^2 \approx \nu_T \frac{\partial u}{\partial y},$$

де  $u_*$  - динамічна швидкість. Тоді підставивши рівняння для турбулентної в'язкості (1.1.1) отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_*^2}{\nu_T} = C_\mu^{-1} u_*^2 \frac{\varepsilon_T}{k_T^2}.$$

Прирівнявши праві частини двох попередніх формул для похідної від швидкості можна знайти величину  $k_T^{\text{rp}}$  в рівноважному підшарі, застосувавши граничні умови до диференціального рівняння кінетичної енергії турбулентності:

$$k_T^{\text{rp}} = C_\mu^{-1/2} u_*^2. \quad (1.3.2)$$

При дослідженні граничних умов іноді використовують це співвідношення у всій просторовій області вважаючи, що величина кінетичної енергії турбулентності залишається приблизно постійною по нормалі до стінки. При цьому не враховується підвищення рівня турбулентності на границі в'язкого підшару та його зниження в самому в'язкому шарі, що прилягає до стінки. Доцільно частково скоригувати таке формулювання вважаючи, що за експериментальними даними, згідно[1], кінетична енергія турбулентності на межі в'язкого підшару приблизно на третину більша, ніж у рівноважному підшару. Оскільки коефіцієнт турбулентної в'язкості  $\nu_T^{\text{rp}}$  на границі розрахункової області чисельного моделювання може бути достатньо та точно знайдений, то найбільш доцільно визначати за його величину граничного значення швидкості дисипації енергії

турбулентності за допомогою рівняння (1.3.1) стандартної двопараметричної дисипативної моделі:

$$\varepsilon_T^{\text{gp}} = C_\mu f_\mu \frac{(k_T^{\text{gp}})^2}{\nu_T^{\text{gp}}}. \quad (1.3.3)$$

Формула (1.3.3) дає коректне значення  $\varepsilon_T^{\text{gp}}$  у всіх випадках, коли найближчий до стінки розрахунковий вузол потрапляє в рівноважний, буферний або в'язкий підшар, що дозволяє застосовувати її як граничну умову до диференціальних рівняннях (1.1.4) і (1.2.3) при побудові поблизу різницевої стінки.

## РОЗДІЛ 2 ТЕПЛОВІДДАЧА ТА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

### 2.1 Способи передачі теплоти та види теплообмінних процесів

Будь-яке фізичне тіло має певну кількість теплової енергії, здатної переходити у формі теплоти до менш нагрітих теплоносіїв. У відкритій системі кількість теплової енергії визначають за величиною термодинамічного потенціалу теплоносія – ентальпії  $H$  (теплова функція, яка характеризує термодинамічний стан системи та залежить від таких параметрів як тиск та ентропія).

Якщо за початок шкали відліку прийняти  $0^{\circ}\text{C}$ , то ентальпію можна поставити в залежність від температури теплоносія:

$$H = \int_0^{t_k} c dt + \Delta H \quad (2.1.1)$$

$c$  – питома масова теплоємність за постійного тиску, (Дж/(кг·К));  $\Delta H$  – прихована частина ентальпії, що не впливає на температуру процесу, (Дж/кг);  $t$  – температура по шкалі Цельсія,  $^{\circ}\text{C}$ , що пов'язана з термодинамічною температурою  $T$ , К співвідношенням  $t = T - 273.15$ .

Перенесення теплоти відбувається трьома способами: Теплопровідністю (кондуктивне перенесення), конвекцією (у складі конвективного перенесення) і тепловим випромінюванням (радіаційне перенесення). Кондуктивне перенесення реалізується в чистому вигляді у твердих тілах. Конвективне перенесення здійснюється в рідинах та газах спільно з конвекцією та теплопровідністю. У газоподібному середовищі може відбуватися складний теплообмін одночасно теплопровідністю, конвекцією та тепловим випромінюванням.

Тепловим потоком  $Q$ , називають кількість теплоти, що проходить через поверхню теплообміну за одиницю часу, а його щільністю  $q$  - локальну величину теплового потоку, що припадає на одиницю цієї поверхні і спрямовану по

нормалі до неї. Відповідно до закону Фур'є, вектор щільності кондуктивного теплового потоку пропорційний градієнту температури:

$$q_T = -\lambda \cdot \text{grad } t = -\rho a c \cdot \text{grad } T, \quad (2.1.2)$$

де  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності. Для рідкого та газоподібного середовища формула перенесення теплоти конвекції виглядає так:

$$q_K = \rho v c t, \quad (2.1.3)$$

де  $v$  – вектор швидкості середовища.

Відповідно до рівностей (2.1.2) та (2.1.3), теплові потоки теплопровідності та конвекції залежать від локальних значень температури, швидкості, градієнта температури та локальних теплофізичних властивостей теплоносія.

Закони радіаційного перенесення теплоти набагато складніші. Тверді тіла та газоподібне середовище, як правило, мають здатністю створювати теплове випромінювання, мимоволі випускаючи в навколишнє середовище у вигляді променів електромагнітних хвиль (або фотонів). Променева енергія переноситься в газоподібному середовищі зі швидкістю світла, частково поглинається по довжині променів середовищем та іншими тілами і знову переходить при цьому в теплову енергію. Оскільки в радіаційному теплообміні беруть участь фізичні тіла, що знаходяться один від одного на деякій відстані, то його результати виявляються в сильній інтегральній залежності не тільки від температури і радіаційних властивостей цих тіл, а й від умов випромінювання, поглинання та розсіювання променів енергії газоподібним середовищем у просторі між ними.

Розглянемо, теплопередачу через стінку від одного рідкого або газоподібного теплоносія до іншого, як схематично показано на рис. 2.1. Теплопередача складається з трьох послідовних теплообмінних процесів - тепловіддачі від

гарячого теплоносія до стінки, теплопровідності через стінку та тепловіддачі від стінки до менш нагрітого теплоносія.

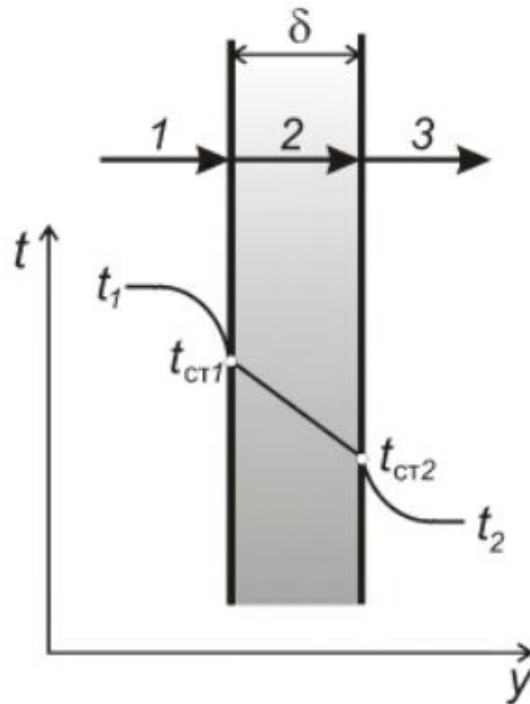


Рис 2.1 Теплопередача відбувається через плоску стінку товщиною  $\delta$

1– тепловіддача до стінки; 2 – теплопровідність через стінку;

3– тепловіддача від стінки;  $t_1, t_2$  – температура теплоносіїв;

$t_{ст1}, t_{ст2}$  – температура поверхонь стінки

За постійної величини коефіцієнта теплопровідності  $\lambda$  у рівнянні (2.1.2) щільність потоку теплоти  $q$ , що переноситься стаціонарною теплопровідністю через стінку товщиною  $\delta$ , що пропорційна температурному напору, тобто різниці значень температури  $t_{ст1}$  та  $t_{ст2}$  поверхонь стінок:

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (t_{ст1} - t_{ст2}).$$

Формальна пропорційність щільності теплового потоку відповідного температурного напору зберігається в більшості випадків також і в формулах

конвективної тепловіддачі при обтіканні поверхонь стінки теплоносіями, що мають температуру  $t_1, t_2$ :

$$q = \alpha_1(t_1 - t_{ct1}),$$

$$q = \alpha_2(t_{ct2} - t_2),$$

де  $\alpha_1, \alpha_2$  – коефіцієнти тепловіддачі.

У результаті розрахункове рівняння для теплопередачі через одношарову плоску стінку набуває наступного вигляду:

$$q = k(t_1 - t_2),$$

де  $k$  – коефіцієнт теплопередачі через плоску стінку,

$$k = \frac{1}{1/\alpha_1 + \delta/\lambda + 1/\alpha_2}. \quad (2.1.4)$$

Доданки в знаменнику являють собою термічний опір теплообмінних процесів, що відповідають за теплопередачу.

Коефіцієнти конвективної тепловіддачі залежить від багатьох факторів, таких як: від форми і шорсткості обтічної поверхні стінки, від фізичних властивостей теплоносіїв, від швидкості та ступеня турбулентності потоку. Тому в реальних умовах теплообміну коефіцієнти конвективної тепловіддачі практично завжди розраховуються за емпіричними рівняннями, зведеними до безрозмірного вигляду за допомогою чисел подібності.

Наприклад, для вимушеної конвекції, що виникає при турбулентному примусовому рух повітря на ділянці стабілізованого теплообміну у трубах [4]:

$$Nu = 0.023Re^{0.8}Pr^{0.43}, \quad (2.1.5)$$

де  $Nu$  – число Нуссельта;  $Re$  – число Рейнольдса;  $Pr$  – число Прандтля.

Але не завжди вдається знайти в літературі емпіричне рівняння, що задовольняє даний процес для розрахунку коефіцієнта тепловіддачі. Перевага математичного моделювання якраз і полягає в тому, що воно дає можливість знаходити чисельні розв'язання складних завдань конвективного теплоперенесення.

## 2.2 Математична модель теплопровідності

Диференціальне рівняння збереження теплової енергії за відсутності перенесення її випромінюванням впливає з рівняння збереження загального виду

$$\frac{\partial \rho \Phi}{\partial \tau} + \operatorname{div} J_K + \operatorname{div} J_D = S_V, \quad (2.2.1)$$

де  $\rho$  – густина середовища;  $\tau$  – час;  $\Phi$  - збережена фізична величина, що має розмірність її масової концентрації;  $J$  – вектор густини потоку цієї фізичної величини;  $S_V$  - джерельний член рівняння. Індокси позначають два можливі способи перенесення фізичної величини: "к" - конвекцією, "д" - дифузиею. Якщо як збережену і переносну величини розглядати ентальпію  $H$ , то рівняння (2.2.1) набуває наступного вигляду:

$$\frac{\partial \rho H}{\partial \tau} + \operatorname{div} q_K + \operatorname{div} q_T = Q_V, \quad (2.2.2)$$

де  $q_K$  і  $q_T$  - щільності потоків теплоти, що переноситься за допомогою конвекції та теплопровідності;  $Q_V$  - "джерело" теплової енергії, що виділяється в елементарному об'ємі, наприклад, при хімічних реакціях, зведених до одиниці об'єму та одиницю часу. Враховуючи, що в твердому тілі конвективного перенесення немає, і застосовуючи співвідношення (2.1.1) і (2.1.2), отримують диференціальне рівняння нестационарної теплопровідності:

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = Q_V. \quad (2.2.3)$$

В частковому випадку, коли локальна температура не змінюється за часом, то з рівності (2.2.3) впливає диференціальне рівняння для стаціонарної теплопровідності:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_V = 0. \quad (2.2.4)$$

### 2.3 Граничні умови при теплопереносі

Насамперед, задається температура нагріваючої поверхні стін або вона обчислюється, виходячи з рівності потоків теплоти, що знаходяться біля стін із простору теплотехнологічної установки та відводяться через них в навколишнє середовище. На кожній ділянці границі розраховується конвективна тепловіддача до поверхні стін на основі закономірностей турбулентного приграничного шару. Односторонню похідну від температури на поверхні стінки можна визначити з урахуванням наближеного розподілу температури та швидкості в приграничному шарі. Якщо застосувати поняття безрозмірної температури [5]:

$$T_+ = \rho_{ст} c_{ст} u_* (t - t_{ст}) / q_{ст},$$

де  $\rho_{ст}$ ,  $c_{ст}$  – густина та теплоємність рідини або газу біля стінки;  $u_*$  - динамічна швидкість;  $t, t_{ст}$  – температура середовища відповідно біля стінки та на її поверхні;  $q_{ст}$  – щільність теплового потоку на поверхні стінки.

## РОЗДІЛ 3 АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОСТІ ТА ТЕПЛОПЕРЕНЕСЕННЯ

### 3.1 Алгоритм знаходження розв'язків моделі турбулентності К-епсилон

Модель турбулентності К-ε (К-epsilon) є однією з найпоширеніших моделей турбулентності, яка використовується в обчислювальних розрахунках струменевих потоків рідини або газу. Ця модель базується на розкладі турбулентної кінетичної енергії (K) та поправках до кінетичної енергії дисипації (ε).

У моделі К-ε розглядається взаємодія між двома основними турбулентними параметрами: кінетичною енергією (K) та енергією дисипації (ε). Кінетична енергія представляє суму кінетичної енергії руху рідини або газу, яка вноситься турбулентними вихорами, та локальної кінетичної енергії, яка розсіюється дисипацією. Енергія дисипації (ε) відображає швидкість зникнення кінетичної енергії. Модель враховує цю взаємодію за допомогою диференціальних рівнянь, які враховують приріст та втрату кінетичної енергії та дисипації внаслідок турбулентних процесів. Ці рівняння враховують вплив турбулентної в'язкості, випадкових коливань турбулентної кінетичної енергії та дисипації, а також інших фізичних параметрів.

Рівняння для моделі турбулентності К-ε (К-epsilon) складаються з двох основних рівнянь: рівняння для кінетичної енергії (K) та рівняння для енергії дисипації (ε).

Рівняння для кінетичної енергії (K):

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i K)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \rho \varepsilon + P_K. \quad (3.1.1)$$

Рівняння для енергії дисипації (ε):

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{P_K \varepsilon}{K} - C_{2\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon^2}{K} + C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon}{K}. \quad (3.1.2)$$

В цих рівняннях:

- $K$  - кінетична енергія турбулентності,
- $\varepsilon$  - енергія дисипації турбулентності,
- $\rho$  - густина рідини або газу,
- $t$  - час,
- $u_i$  - компоненти швидкості потоку ( $u, v, w$  у тривимірному випадку),
- $x_i$  - просторові координати ( $x, y, z$  у тривимірному випадку),
- $\mu$  - динамічна в'язкість,
- $\mu_t$  - турбулентна в'язкість,
- $\sigma_K, \sigma_\varepsilon$  - поправки для турбулентної в'язкості,
- $P_K$  - джерела/поглинання кінетичної енергії,
- $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{\varepsilon\varepsilon}$  - константи моделі.

Константи мають наступні значення:

$$\sigma_K = 1, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_{1\varepsilon} = 1.44, C_{2\varepsilon} = 1.92, C_{\varepsilon\varepsilon} = 0.09.$$

Якщо припустити, що похідні за часом дорівнюють нулю, то рівняння для кінетичної енергії (3.1.1) та рівняння для енергії дисипації (3.1.2) можуть бути записані наступним чином у стаціонарному вигляді:

$$\frac{\partial(\rho u_i K)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] - \rho \varepsilon + P_K. \quad (3.1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\varepsilon} \frac{P_K \varepsilon}{K} - C_{2\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon^2}{K} + C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon}{K}. \quad (3.1.4)$$

Ці рівняння враховують конвективний потік, дифузійний потік і джереловий/поглинаючий член для  $K$  та  $\varepsilon$ .

Для побудови різницевої схеми для рівнянь  $K$ - $\varepsilon$  моделі, ми можемо використати центральні різниці для апроксимації похідних за просторовими змінними. Для

зручності запису будемо використовувати двовимірний простір (x, y). Тоді рівняння можна записати у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \rho u_i \frac{K_{ij} - K_{i-1j}}{\Delta x} + \rho u_j \frac{K_{ij} - K_{ij-1}}{\Delta y} = \\ = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \left[ \frac{K_{i+1j} - 2K_{ij} + K_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{K_{ij+1} - 2K_{ij} + K_{ij-1}}{\Delta y^2} \right] - \rho \varepsilon_{ij} + P_K \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \rho u_i \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i-1j}}{\Delta x} + \rho u_j \frac{\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij-1}}{\Delta y} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \left[ \frac{\varepsilon_{i+1j} - 2\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{i-1j}}{\Delta x^2} + \frac{\varepsilon_{ij+1} - 2\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij-1}}{\Delta y^2} \right] + \\ + C_{1\varepsilon} \frac{P_K \varepsilon_{ij}}{K_{ij}} - C_{2\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon_{ij}^2}{K_{ij}} + C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon_{ij}}{K_{ij}}. \end{aligned}$$

З рівнянь видно, що вони взаємопов'язані між собою і коли намагаємось знайти чисельний розв'язок для рівняння для кінетичної енергії, то треба зважати на інше рівняння й одночасно знаходити чисельні розв'язки для енергії дисипації. Оскільки і одне і друге рівняння записані в неявному вигляді, то знайти чисельні розв'язки такої моделі не тривіальні.

Розглянемо одновимірний випадок. Тоді рівняння для кінетичної енергії та енергії дисипації будуть мати наступний вигляд:

$$\rho u_i \frac{K_i - K_{i-1}}{\Delta x} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{K_{i+1} - 2K_i + K_{i-1}}{\Delta x^2} - \rho \varepsilon_i + P_K, \quad (3.1.5)$$

$$\rho u_i \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}}{\Delta x} = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\varepsilon_{i+1} - 2\varepsilon_i + \varepsilon_{i-1}}{\Delta x^2} + C_{1\varepsilon} \frac{P_K \varepsilon_i}{K_i} - C_{2\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon_i^2}{K_i} + C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon_i}{K_i}. \quad (3.1.6)$$

Розрахуємо якою може бути енергії дисипації за відомою кінетичною енергією. Для зручності будемо вважати  $P_K = const$ , тобто джереловий або поглинаючий член для К має постійне значення та не залежить по змінних ні від часу ні від розташування. Тоді з (3.1.5) значення  $\varepsilon$  всередині різницевої сітки спадає при

зростанні  $K$  та наступних значеннях постійних параметрів ( $\rho = 1.2$ ,  $\mu = 10^{-5}$ ,  $\mu_t = 10^{-3}$ ,  $\sigma_K = 0.7$ ,  $\sigma_\varepsilon = 1.3$ ,  $C_{1\varepsilon} = 1.44$ ,  $C_{2\varepsilon} = 1.92$ ,  $C_{\varepsilon\varepsilon} = 0.09$ ).

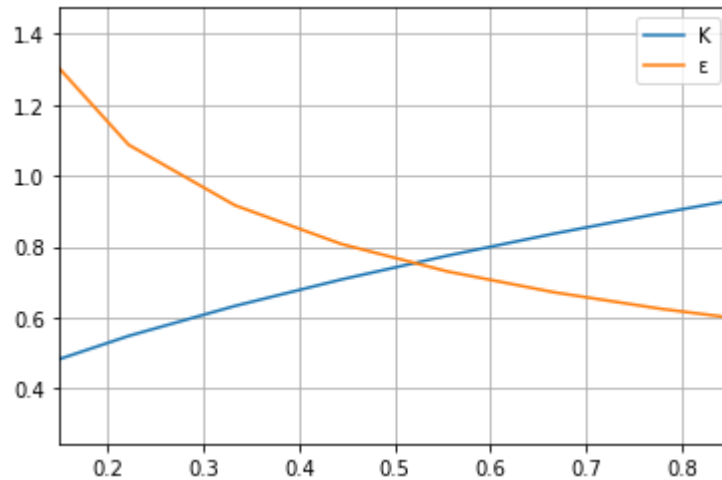


Рис. 3.1

Якщо подивитися на рівняння (3.1.6), то значення енергії дисипації для  $i$ -го вузла можна знайти як розв'язок квадратного рівняння, знаючи значення кінетичної енергії  $K$  у відповідному вузлі та знаючи значення  $\varepsilon_{i+1}$ . Проте, якщо до формул (3.1.5) та (3.1.6) дописати ще доданок апроксимації зміни за часом:

$$\frac{\partial(\rho K)}{\partial t} \approx \rho \frac{K_i^{k+1} - K_i^k}{\Delta t}, \quad \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} \approx \rho \frac{\varepsilon_i^{k+1} - \varepsilon_i^k}{\Delta t},$$

то знаючи всі значення на  $k$ -му шарі можна виразити та записати ітераційний процес для знаходження відповідних значень на  $k + 1$ -му шарі.

Оскільки модель турбулентності  $K$ - $\varepsilon$  є не лінійною, то можна спробувати інший підхід для розв'язати систему з рівнянь (3.1.1) та (3.1.2). Для використання методу Ньютона [6], потрібно лінеаризувати систему рівнянь навколо поточного розв'язку. Для цього потрібно записати систему з відповідних рівнянь в матричній формі:

$$F(U) = 0,$$

де

$$F(U) = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i K)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_j} \right] + \rho \varepsilon - P_K \\ \frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i \varepsilon)}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - C_{1\varepsilon} \frac{P_K \varepsilon}{K} + C_{2\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon^2}{K} - C_{\varepsilon\varepsilon} \frac{\rho \varepsilon}{K} \end{array} \right],$$

і в свою чергу

$$U = \begin{bmatrix} K \\ \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Тепер за даної постановки можна розписати схему застосування ітераційного процесу для методу Ньютона:

1. Ініціалізування початкового значення  $U^{(0)}$ ,
2. Для кожної ітерації  $k$ 
  - Обчислити матрицю Якобі:  $J^{(k)} = \frac{\partial F}{\partial U}(U^{(k)})$ ,
  - Обчислити вектор нев'язки  $r^{(k)} = -F(U^{(k)})$ ,
  - Обчислити приріст  $\Delta U^{(k)}$  як розв'язок системи рівнянь  $J^{(k)} \Delta U^{(k)} = r^{(k)}$ ,
  - Оновити значення  $U^{(k+1)} = U^{(k)} + \Delta U^{(k)}$ ,
  - Перевірити умову зупинки: для точності зупинки ітераційного процесу  $\varepsilon_0 \left| \Delta U^{(k)} \right| < \varepsilon_0$ ,
3. Вивести значення  $U^{(k+1)}$  як чисельний розв'язок системи рівнянь.

Цей алгоритм можна використати для знаходження чисельного розв'язку системи рівнянь турбулентної моделі, використовуючи ітераційний підхід.

### 3.2 Побудова чисельного розв'язання рівняння переносу

Турбулентність в теплопереносі може виникати через різні механізми, наприклад, конвекцію або турбулентну дифузію. В турбулентних потоках характеристики, такі як температура, швидкість і тиск, можуть змінюватися випадковим чином у просторі і часі. Турбулентні процеси можуть бути складними для математичного опису, і в них можуть виникати нелінійні ефекти.

Для математичного моделювання турбулентних процесів, які впливають на теплоперенос, зазвичай використовуються статистичні або числові методи, такі як моделі Рейнольдса. Ці методи враховують випадкову природу турбулентних процесів і можуть використовуватися для аналізу взаємодії турбулентності з процесами теплопереносу. Отже, теплопровідність і турбулентність в теплопереносі є двома взаємопов'язаними, але різними аспектами фізичних процесів.

Розглянемо диференціальне рівняння (2.2.4) для стаціонарної теплопровідності (рівняння переносу):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q_V = 0,$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;  $Q_V$  - "джерело" теплової енергії.

Якщо коефіцієнт теплопровідності не змінний, то рівняння можна переписати в наступному вигляді:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{Q_V}{\lambda}, \quad (3.2.1)$$

що є рівнянням Пуассона для зміни термодинамічної температури  $T$  в просторі. Для зручності спочатку розглянемо випадок у двовимірному просторі, коли рівняння (2.2.3) набуде вигляду (у нестационарному випадку)

$$\frac{\partial \rho c T}{\partial \lambda t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{Q}{\lambda}. \quad (3.2.2)$$

або якщо розписати різницю за часом вперед, то буде

$$\frac{\rho c T_{ij}^{k+1} - T_{ij}^k}{\lambda \Delta t} = \frac{\partial^2 T^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T^k}{\partial y^2} + \frac{Q}{\lambda}. \quad (3.2.3)$$

За просторовими змінними можна зробити апроксимацію за центральними різницями для другого порядку [7]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i+1j} - 2T_{ij} + T_{i-1j}}{\Delta x^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T_{ij+1} - 2T_{ij} + T_{ij-1}}{\Delta y^2},$$

і тоді рівняння (3.2.3) приймає наступний вигляд для  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ :

$$T_{ij}^{k+1} = T_{ij}^k + \frac{\lambda \Delta t}{\rho c \Delta^2} [T_{i+1j}^k + T_{i-1j}^k + T_{ij+1}^k + T_{ij-1}^k - 4T_{ij}^k - \Delta^2 \xi_{ij}], \quad (3.2.4)$$

де для зручності запису  $\xi_{ij} = -\frac{Q_{ij}}{\lambda}$ . Перевіримо чи доданок  $\xi_{ij}$  має вплив на стійкість рівняння. Будемо розглядати умови Діріхле та позначимо через  $T^\infty$  - кінцевий різницевий розв'язок. Тоді відхилення  $e_{ij}^k$  значення  $T_{ij}^k$  після  $k$  ітерацій буде виглядати:

$$e_{ij}^k = T_{ij}^\infty - T_{ij}^k.$$

Підставивши отриману рівність в рівняння (3.2.1) для певного часу, отримуємо рівняння Лапласа для відхилення на  $k$ -ій ітерації:

$$\frac{\partial^2 e^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^k}{\partial y^2} = 0.$$

Якщо граничні умови задані на всіх границях  $T^k$ , то рівняння для отримання  $e_{ij}^{k+1}$ , буде мати схожий вигляд як (3.2.4):

$$e_{ij}^{k+1} = e_{ij}^k + \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\Delta t}{\Delta^2} [e_{i+1j}^k + e_{i-1j}^k + e_{ij+1}^k + e_{ij-1}^k - 4e_{ij}^k], \quad (3.2.5)$$

Але що вже не залежить від  $\xi_{ij}$ . Для асимптотичної збіжності покладемо  $\Delta t = \frac{\rho c \Delta^2}{4\lambda}$ , і тоді отримаємо

$$T_{ij}^{k+1} = \frac{1}{4} [T_{i+1j}^k + T_{i-1j}^k + T_{ij+1}^k + T_{ij-1}^k - \Delta^2 \xi_{ij}], \quad (3.2.6)$$

Якщо  $\Delta x \neq \Delta y$ , то рівняння (3.2.6) набуває наступного вигляду:

$$T_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2(1 + \beta^2)} [T_{i+1j}^k + T_{i-1j}^k + \beta^2 T_{ij+1}^k + \beta^2 T_{ij-1}^k - \Delta x^2 \xi_{ij}], \quad (3.2.7)$$

де  $\beta = \Delta x / \Delta y$ .

Остання рівність є двошаровим рівнянням і в пам'яті обчислювальної машини зберігається масиви для двох величин  $T^k$  та  $T^{k+1}$ . Для обходу розрахункових точок в напрямку зростання індексів і використовуючи де можливо вже значення з  $T^{k+1}$  (для більшої точності розв'язку):

$$T_{ij}^{k+1} = \frac{1}{2(1 + \beta^2)} [T_{i+1j}^k + T_{i-1j}^{k+1} + \beta^2 T_{ij+1}^k + \beta^2 T_{ij-1}^{k+1} - \Delta x^2 \xi_{ij}], \quad (3.2.8)$$

Застосовуючи метод послідовної верхню релаксацію для (3.2.2) та відповідні апроксимуючі формули, отримуємо наступну рівність [8]:

$$\begin{aligned} & \frac{(T_{i+1j}^k - 2(\frac{1}{\omega} T_{ij}^{k+1} + \frac{\omega-1}{\omega} T_{ij}^k) + T_{i-1j}^{k+1})}{\Delta x^2} \\ & + \frac{(T_{ij+1}^k - 2(\frac{1}{\omega} T_{ij}^{k+1} + \frac{\omega-1}{\omega} T_{ij}^k) + T_{ij-1}^{k+1})}{\Delta y^2} = \xi_{ij}, \quad (3.2.9) \end{aligned}$$

ітераційний процес до якої в явному вигляді записується так:

$$T_{ij}^{k+1} = T_{ij}^k + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)} [T_{i+1j}^k + T_{i-1j}^{k+1} + \beta^2 T_{ij+1}^k + \beta^2 T_{ij-1}^{k+1} - \Delta x^2 \xi_{ij} - 2(1+\beta^2) T_{ij}^k]. \quad (3.2.10)$$

Аналогічне ітераційний процес для рівняння Пуассона в тривимірному просторі буде виглядати так:

$$\begin{aligned} T_{ijl}^{k+1} = T_{ijl}^k + \frac{\omega}{2(\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2)} & [\Delta y^2 \Delta z^2 T_{i+1jl}^k + \Delta y^2 \Delta z^2 T_{i-1jl}^{k+1} \\ & + \Delta x^2 \Delta z^2 T_{ij+1l}^k + \Delta x^2 \Delta z^2 T_{ij-1l}^{k+1} + \Delta x^2 \Delta y^2 T_{ijl+1}^k + \Delta x^2 \Delta y^2 T_{ijl-1}^{k+1} \\ & - \Delta x^2 \Delta y^2 \Delta z^2 \xi_{ij} - 2(\Delta x^2 \Delta y^2 + \Delta y^2 \Delta z^2 + \Delta z^2 \Delta x^2) T_{ijl}^k]. \quad (3.2.11) \end{aligned}$$

Якщо припустити, що  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ , з (3.2.11) отримаємо

$$\begin{aligned} T_{ijl}^{k+1} = T_{ijl}^k + \frac{\omega}{6} [T_{i+1jl}^k + T_{i-1jl}^{k+1} + T_{ij+1l}^k + T_{ij-1l}^{k+1} + T_{ijl+1}^k \\ + T_{ijl-1}^{k+1} - \Delta^2 \xi_{ij} - 6T_{ijl}^k], \quad (3.2.12) \end{aligned}$$

де  $i, j, l$  – індексація відповідно вузлів по просторових координатах  $x, y, z$ . Однак, тривимірний варіант не зручно представити чисельний розв'язок ні в векторному, ні в графічному форматі, тому більш практичний варіант для аналізування результатів у двовимірному просторі.

Реалізація рівняння Пуассона на мові Python для наступних умов Діріхле (нормовані значення):

$$\begin{aligned} T(0, y) &= 0, \\ T(1, y) &= e^y \sin \pi, \\ T(x, 0) &= \sin(\pi x), \\ T(x, 1) &= e \sin(\pi x), \\ \xi(x, y) &= -e^y (\pi^2 - 1) \sin(\pi x). \end{aligned}$$

Відомим розв'язок  $T(x, y) = e^y \sin(\pi x)$ . На графіках зображено чисельний розв'язок та відомий за даних умов. Похибка становить  $\varepsilon_0 = 10^{-4}$  на 351 ітерації, при параметрі  $\omega = 1.5$ .

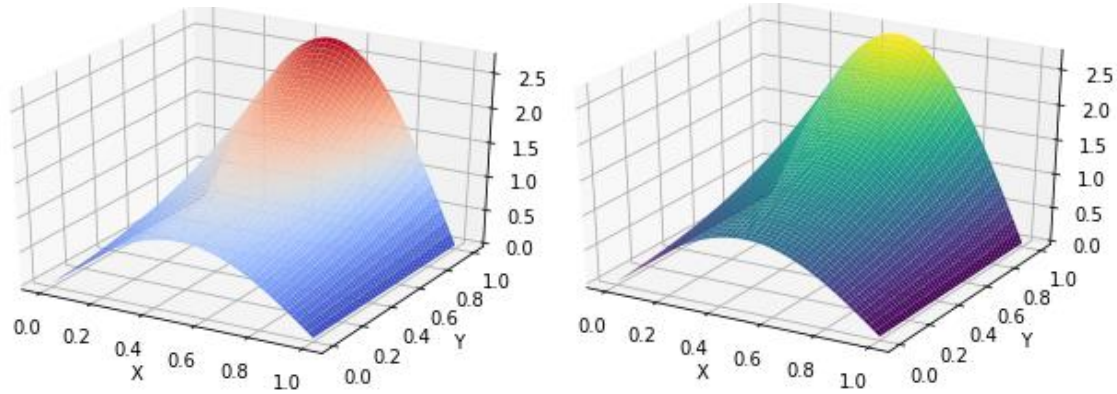


Рис. 3.2 Зліва чисельний розв'язок, справа - відомий

Метод послідовної верхньої релаксації є універсальним чисельним методом, який широко застосовується в розв'язанні різних типів рівнянь. Його переваги включають швидкість збіжності, простоту реалізації, гнучкість, можливість та стійкість.

## ВИСНОВКИ

Дипломна робота присвячена чисельному моделюванню турбулентних потоків та тепло переносу кінетичної енергії. Було розглянуто різні моделі та аспекти при дослідженні цих процесів та використано чисельні методи для отримання результатів.

У першій частині роботи було розглянуто модель турбулентності, яка базується на рівняннях Нав'є-Стокса. Ключовою концепцією в моделі була кінетична енергія турбулентності, що характеризує інтенсивність турбулентних процесів у потоці, а також було розглянуто зв'язок з енергією турбулентності та дисипацію кінетичної енергії. Також було досліджено як змінюється термодинамічна температура в просторі і як саме відбувається цей процес.

Далі були розглянуті чисельні методи для розв'язання відповідних рівнянь та розглянуто як змінюється моделювання процесу при спрощенні основних рівнянь. Використовуючи чисельні методи, було проведено дискретизацію просторових та часових похідних. Ітераційний процес був застосований для оновлення значень термодинамічної температури та графічно було зображено результат, який доволі точно збігався з відомим розв'язком. Для досягнення стійкості та точності розв'язку були використані граничні умови, коефіцієнт згладжування та параметри розмірності.

У результаті було отримано алгоритм для моделювання процесу турбулентності, що складається з двох рівнянь, та чисельний розв'язок рівняння Пуассона для дослідження зміни термодинамічної температури системи. Структура потоку виявилась складною і вона має залежить від багатьох емпіричних параметрів моделі та граничних умов – тому було отримано лише алгоритм для пошуку чисельного розв'язку. Також було досліджено зв'язок термодинамічної температури та швидкості дисипації кінетичної енергії, що має обернену

пропорційність. Отримані результати можуть допомогти в подальшому аналізі та моделювання у галузі досліджень галузі турбулентних потоків та їх впливу на різноманітні технології та процеси.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Пейтел В. К. Модели турбулентности для течений в пристеночной области с малыми числами Рейнольдса / В. К. Пейтел, В. Роди, Г. Шойерер // Аэрокосмическая техника. 1986. № 2. - С. 184-197.
2. Shih T.-H. A new  $k$ - $\epsilon$  eddy viscosity model for high Reynolds number turbulent flows / T.-H. Shih, W. W. Liou, A. Shabbir, Z. Yang, J. Zhu // Computers Fluids. 1995. Vol. 24. No. 3. - P. 227-238.
3. Кузнецов, В. А. Математические модели тепломассопереноса в высокотемпературных установках: монография / В. А. Кузнецов, П. А. Трубаев. 2017. – с.94-135.
4. Тепловой расчет котельных агрегатов. Нормативный метод. - М.: Энергия, 1973.
5. Жукаускас А. А. Конвективный перенос в теплообменниках / А. А. Жукаускас. - М.: Наука, 1982.
6. <https://www.mathros.net.ua/metod-njutona-dlja-rozvjazku-systemy-dvoh-nelinijnyh-rivnjan.html>
7. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.:Мир, 1980. 616 с.
8. Оноцький В. В. Чисельне та комп'ютерне моделювання процесів переносу з використанням двокрокових симетризованих алгоритмів

**Відгук наукового керівника на кваліфікаційну роботу бакалавра на  
тему:**

**«Чисельне моделювання турбулентних потоків»**

**студента 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики**

**Київського національного університету імені Тараса Шевченка**

**Юрчика Андрія Анатолійовича**

Робота присвячена дослідженню поведінки та моделюванню турбулентних потоків та процесів теплообміну. Студент розглянув модель турбулентності та її зв'язок з теплообміном, що є важливими процесами в природних та технічних системах.

Чисельні методи, що використовуються для отримання розв'язків системи диференціальних рівнянь, були розглянуті та застосовані з достатньою точністю. Було використано дискретизацію просторових та часових похідних, ітераційний процес та граничні умови для знаходження чисельного розв'язку процесу переносу, що досить гарно збігається з даним розв'язком. Вдалося розробити алгоритм для моделювання турбулентності, оскільки модель складається з рівняння для кінетичної енергії турбулентності та дисипації, а також розв'язати рівняння Пуассона для зміни термодинамічної температури системи. Результати можуть бути використані для подальшого дослідження та розуміння впливу турбулентних потоків з теплообміном на різноманітні технології та процеси.

Вважаю, що кваліфікаційна робота студента Юрчика Андрія Анатолійовича відповідає вимогам, які висуваються до бакалаврських робіт, і заслуговує на оцінку «відмінно», а її автор заслуговує на присвоєння кваліфікації бакалавра.

Асистент кафедри обчислювальної математики,  
кандидат фізико-математичних наук,

 В. В. Оноцький

**Рецензія на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:**

**«Чисельне моделювання турбулентних потоків»**

**студента 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики**

**Київського національного університету імені Тараса Шевченка**

**Юрчика Андрія Анатолійовича**

У дипломній роботі відбувається чисельним моделюванням турбулентних потоків з теплообміном, що є важливою проблемою в різних галузях науки. Було розглянуто різні моделі та аспекти турбулентності, а також розроблено алгоритм та застосовано чисельні методи для отримання чисельних розв'язків диференціальних рівнянь, що описують ці процеси.

Студент дослідив модель турбулентності, що базується на рівняннях Нав'є-Стокса, та описав зв'язок з енергією турбулентності та дисипацією кінетичної енергії. Використаний чисельний метод, апроксимація просторових та часових похідних і використання граничних умов, дозволили з хорошою точністю знайти розв'язок задачі переносу. Отриманий алгоритм моделювання процесу турбулентності та чисельний розв'язок рівняння переносу для зміни термодинамічної температури системи можуть бути використані в подальших дослідженнях та аналізі впливу турбулентних потоків на різноманітні процеси.

Робота може бути використана для подальших досліджень у цій області. Недоліком роботи є відсутність теоретичного обґрунтування збіжності методів.

Вважаю, що кваліфікаційна робота студента Юрчика Андрія Анатолійовича відповідає вимогам, які висувуються до бакалаврських робіт, і заслуговує на оцінку «відмінно», а її автор заслуговує на присвоєння кваліфікації бакалавра.

Доцент кафедри дослідження операцій  
факультету комп'ютерних наук та кібернетики

Київського національного університету імені Тараса Шевченка,

кандидат фізико-математичних наук, доцент



ЯКИМІВ Р.Я.

# КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

## СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр



Ім'я користувача:  
Оноцький В'ячеслав ФКомпНаук

ID перевірки:  
1015310647

Дата перевірки:  
30.05.2023 08:52:09 EEST

Тип перевірки:  
Doc vs Internet + Library

Дата звіту:  
30.05.2023 08:53:16 EEST

ID користувача:  
100002816

Назва документа: Юрчик Андрій Анатолійович

Кількість сторінок: 32 Кількість слів: 5569 Кількість символів: 38272 Розмір файлу: 227.56 KB ID файлу: 1014981786

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

**5.05%**  
**Схожість**

Найбільша схожість: 1.51% з Інтернет-джерелом (<https://et.bstu.ru/shared/attachments/199964>)

4.22% Джерела з Інтернету

57

Сторінка 34

1.87% Джерела з Бібліотеки

63

Сторінка 34

**0% Цитат**

Вилучення цитат вимкнено

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнено

**0%**  
**Вилучень**

Немає вилучених джерел

**Модифікації**

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи

295

Підозріле форматування

7

сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником :

*Робота виконана студентом Юрчиком самостійно і не містить суттєвих запозичень без відповідних посилань*

Науковий керівник:

Оноцький В.В.

Оператор:

(ПІБ)

Оноцький В.В.

(підпис)

(ПІБ)