

УДК 532.595

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.12>

Юрій ГОРСЬКИЙ, провідн. інж.

ORCID ID: 0000-0004-8195-1373

e-mail: yuragv@ukr.net

Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, Київ, Україна

Тетяна КРАСНОПОЛЬСЬКА, д-р фіз.-мат. наук, проф.

ORCID ID: 0000-0002-6197-092X

e-mail: krasnopolska1005@gmail.com

Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, Київ, Україна

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЗБУДЖЕННЯ ХРЕСТОПОДІБНИХ ПОВЕРХНЕВИХ ХВИЛЬ У ВОДІ У БОКАЛАХ ПРИ ВИПРОМІНЮВАННІ БОКАЛАМИ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ

Пояснено появу і структуру хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини, яка міститься у бокалі, що випромінює звукові хвилі. Встановлено, що основним режимом коливань бокалу є вимушена хвиля із чотирма вузлами, рівномірно розташованими вздовж циліндричної скляної стінки. Коли такий бокал частково заповнити рідиною (що змінює частоту звуку), можна спостерігати ще одну дивовижну особливість: складний візерунок хвиль на вільній поверхні рідини. За достатнього освітлення можна побачити хвилі, безпосередньо зумовлені вібрацією стінки в режимі з чотирма вузлами, що рухаються в окружному напрямку з тією ж швидкістю, що й палець, який рухається. Однак у цій картині домінують так звані хрестоподібні хвилі або крайові хвилі, гребені яких перпендикулярні до скляної стінки, що вібрує. Хоча хрестоподібні хвилі були описані ще Фарадеєм (1831), досі не існувало теоретичного обґрунтування можливості їхнього збудження у бокалі, що випромінює звукові хвилі.

Пропонована стаття заповнює цю прогалину: появу хрестоподібних хвиль у бокалі, що випромінює звукові хвилі, математично описано у вигляді резонансних коливань. Для хрестоподібних хвиль отримано нелінійні параметричні рівняння, що їх описують. Побудовано дві математичні моделі. Перша теоретична модель описує появу хрестоподібних хвиль, де на вільній поверхні рідини наявна лише одна власна мода, а другу модель застосовуємо до ситуації, коли маємо щонайменше дві або три власні моди. Коливання вільної поверхні за наближеннями з трьома власними модами відображають основні риси хвильових візерунків, які спостерігаються експериментально у бокалі, що випромінює звукові хвилі.

Ключові слова: хрестоподібні хвилі, бокали, що випромінюють звукові хвилі, параметричний резонанс, вимушені коливання бокала.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 62H30, 34C60.

Вступ

Усім відомий звук, який видає бокал, що випромінює звукові хвилі, коли зволожений палець рівномірно рухається по обідку бокалу, викликаючи його вібрацію. Це явище стало темою багатьох досліджень, більшість з яких були експериментальними і зосереджувалися на генерації звукових хвиль та пружній деформації віброуючого бокалу. Було встановлено, що основним режимом коливань бокалу є вимушена хвиля із чотирма вузлами, рівномірно розташованими вздовж циліндричної скляної стінки. Коли такий бокал, що випромінює звукові хвилі, частково заповнити рідиною (що змінює частоту звуку), можна спостерігати складний візерунок хвиль на вільній поверхні рідини (рис. 1).



Рис. 1. Хрестоподібні хвилі біля краю бокалу, що випромінює звукові хвилі

При освітленні можна побачити хвилі, безпосередньо зумовлені вібрацією стінки бокалу в режимі з чотирма вузлами, що рухаються в окружному напрямку з тією ж швидкістю, що й палець (Krasnopolskaya, & Heijst, 2018). Однак у цій картині домінують так звані хрестоподібні хвилі, гребні яких перпендикулярні до віброуючої скляної стінки. Ці короткі нерухомі хвилі були описані ще Фарадеєм (Faraday, 1831).

1. Основні результати

Для того, щоб проаналізувати хвилі на вільній поверхні рідини у бокалі, що випромінює звукові хвилі (рис. 1), зробимо деякі припущення щодо геометрії ділянки течії (Krasnopolskaya, & Heijst, 1996; Krasnopolskaya, & Heijst, 2018): чашоподібну ємність замінимо циліндричним контейнером радіусом R з круглим перерізом і плоским горизонтальним дном (рис. 2). Стінка циліндра здійснює коливання по другій моді в окружному напрямку, тобто із залежністю $\cos(2\theta)$ від азимутальної координати θ .

© Горський Юрій, Краснополська Тетяна, 2024

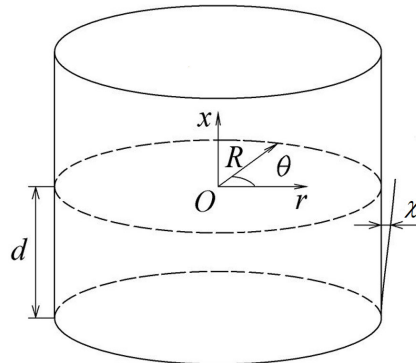


Рис. 2. Геометрія об'єкта

Розглянемо в такому контейнері рідину з вільною поверхнею. Рух рідини описуємо в циліндричній системі координат (r, θ, x) , вісь Ox спрямовано вгору. Рідина має середню глибину d , середнє положення вільної поверхні прийнято $x = 0$, для дна резервуара $x = -d$. Стінка циліндра здійснює гармонічні коливання з частотою ω так, що її радіус змінюється як $R^*(x, \theta, t) = R + \chi(\theta, x, t)$, де χ має такий вигляд:

$$\chi = a \cos(2\theta) \cos\left[\frac{\pi x}{2d}\right] \cos(\omega t). \tag{1}$$

Член $\cos(2\theta)$ відповідає другій власній моді коливань циліндричної стінки, a – амплітуда коливань циліндра. Припускаємо, що рідина є невязкою і нестисливою. Крім того, вважаючи, що індукований рух рідини не є обертальним, поле швидкості \mathbf{v} можна записати в термінах потенціалу швидкості $\phi(r, \theta, x, t)$, де $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Визначальне рівняння для ϕ має вигляд:

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{2}$$

на $(0 \leq r \leq R + \chi(\theta, x, t), 0 \leq \theta \leq 2\pi, -d \leq x \leq \zeta)$, де $\zeta(r, \theta, t)$ – переміщення вільної поверхні.

Припускаючи, що вплив поверхневого натягу не є незначним, динамічні та кінематичні граничні умови для вільної поверхні можна записати у вигляді (Frolov, & Krasnopol'skaya, 1987; Краснопольская, & Швец, 1993; Shvets, & Krasnopol'skaya, 2008):

$$\phi_t + \frac{(\nabla\phi)^2}{2} + g\zeta = \frac{T}{\rho} \left[\nabla^2\zeta - \frac{1}{2}\nabla\zeta \cdot ((\nabla\zeta)^2 \nabla\zeta) \right] + F(t) \text{ за } x = \zeta(r, \theta, t) \tag{3}$$

$$\phi_x = \nabla\phi \nabla\zeta + \zeta_t \text{ за } \zeta(r, \theta, t), \tag{4}$$

де g – гравітаційне прискорення, T – поверхневий тиск повітря – рідина, ρ – густина рідини, а $F(t)$ – функція часу (Lamb, 1932). Підрядкові індекси вказують на часткове диференціювання.

Швидкість нормальної течії дорівнює нулю на дні резервуара: $\phi_x = 0$ за $x = -d$. На стінці циліндра формулюється кінематична умова $\phi_r = \chi_r + \nabla\phi \nabla\chi$ за $r = R + \chi(\theta, x, t)$, тоді як $\phi_r < \infty$ за $r = 0$.

Доцільно припустити, що вібраційна стінка циліндра індукує хвильову картину в рідині, яка може бути описана в термінах нормальних мод із характерними власними частотами. Розкладемо потенціал $\phi(r, \theta, x, t)$ і переміщення $\zeta(r, \theta, t)$ по повній системі власних функцій, що визначаються лінійною теорією. Покроково лінійна та нелінійна теорії розглянуті в роботі (Krasnopol'skaya, & Heijst, 2018).

Розглянемо далі хвильову картину, яка реалізується при параметричному резонансі за частоти збудження ω (див. (1)). Для параметричного резонансу частота збудження ω згідно з (1) має бути:

$$\omega \approx 2\omega_{nm} / s \text{ для } s = 1, 2, 3, 4, \dots, \tag{5}$$

де ω_{nm} – власна частота власної форми моди ψ_{nm} ($n > 4; m = 1, 2, 3, \dots$). Коливання поверхні для цієї резонансної моди записуємо як $\zeta \approx \zeta_{nm} \psi_{nm}(r, \theta) / N_{nm}$, де $\psi_{nm}(r, \theta) = J_n(k_{nm} r) \cos n \theta = \psi$; J_i – функція Бесселя i -го порядку першого роду, а k_{nm} – корені рівняння $J'_n(k_{nm} R) = 0$. Крім того, власні частоти коливань вільної поверхні рідини у бокалі визначаємо за формулою (Krasnopol'skaya, & Heijst, 2018):

$$\omega_{ij} = \left[\left(g k_{ij} + \frac{T}{\rho} k_{ij}^3 \right) \tanh k_{ij} d \right]^{1/2}. \tag{6}$$

Ураховуючи суттєву нелінійність цієї математичної задачі, ми будемо використовувати малий додатний параметр, який визначаємо так: $\varepsilon = a \omega_{nm}^2 / g$.

Ми шукаємо резонансні рішення $\zeta_{nm}(t)$, що можуть бути істотнішими за амплітуди коливань стінки бокала a і становлять $O(\epsilon^{11/4})$. З огляду на це для резонансної амплітуди хрестоподібних хвиль можна отримати рівняння у вигляді:

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_{nm} + \omega_{nm}^2 \zeta_{nm} - (\gamma_{12} - 3\gamma_{13} + \gamma_{15}) \dot{\zeta}_{nm}^2 \zeta_{nm} + \gamma_{13} \dot{\zeta}_{nm} \zeta_{nm}^2 - \\ - 0.5 \gamma_{14} \dot{\zeta}_{nm} (\cos 2\omega t + 1) + \omega \gamma_{14} \dot{\zeta}_{nm} \sin 2\omega t = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

де коефіцієнти доданків $\dot{\zeta}_{nm}$ і $\ddot{\zeta}_{nm}$ у рівнянні (7) періодично змінюються в часі, тому вони можуть приводити до параметричного резонансу, решта коефіцієнтів є постійними. Стосовно задачі, яку розглядаємо, це означає, що на вільній поверхні можуть виникати резонансні хрестоподібні хвилі з ненульовими амплітудами та із частотою коливань, близькою до ω . Проте Фарадей визначив, що на вільній поверхні рідини у бокалі, що випромінює звукові хвилі, спостерігаємо хвилі за субгармонійного резонансу, тобто із частотою $\omega/2$.

Під час розгляду хвильової картини, зображеної на рис. 1, можна помітити наявність чотирьох вузлів, майже рівномірно розташованих по бічній стінці. Можна стверджувати, що ці вузли пов'язані з коливаннями скла по моді $\cos(2\theta)$. Однак така чотиривузлова структура в поверхневій хвильовій картині може бути резонансним ефектом хрестоподібних хвиль, зумовленим резонансним збудженням ще двох додаткових різних власних мод на вільній поверхні рідини, що збуджуються одночасно. Причому власні частоти цих мод задовольняють умову резонансу (5) з деякими невеликими відхиленнями, тому що спектр частот є дуже щільним. Отже, якщо мода Ψ_{nm} ($n > 4$) задовольняє умову резонансу (5) із власною частотою ω_{nm} , то легко і можливо визначити дві інші моди з власними числами $(n-2)p$ та $(n+2)h$ такі, що $\omega_{nm} \approx \omega_{(n-2)p} \approx \omega_{(n+2)h}$. За цієї умови коливання вільної поверхні рідини можна апроксимувати наступними трьома резонансними власними модами: $\zeta \approx \zeta_{nm} \Psi_{nm} / N_{nm} + \zeta_{(n-2)p} \Psi_{(n-2)p} / N_{(n-2)p} + \zeta_{(n+2)h} \Psi_{(n+2)h} / N_{(n+2)h}$.

З огляду на це отримано систему рівнянь

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}_{(n-2)p} + \omega_{(n-2)p}^2 \zeta_{(n-2)p} - \dot{\zeta}_{nm} A_{(n-2)p} a \cos \omega t + \dot{\zeta}_{nm} V_{(n-2)p} a \sin \omega t - \zeta_{nm} \omega M_{(n-2)p} a \cos \omega t = 0; \\ \ddot{\zeta}_{nm} + \omega_{nm}^2 \zeta_{nm} - \dot{\zeta}_{(n-2)p} A_{nm} a \cos \omega t - \dot{\zeta}_{(n+2)h} B_{nm} a \cos \omega t + \dot{\zeta}_{(n-2)p} V_{nm} a \sin \omega t + \\ + \dot{\zeta}_{(n+2)h} V_{nm}^* a \sin \omega t - \dot{\zeta}_{(n-2)p} \omega Q_{(n-2)p} a \cos \omega t - \zeta_{nm} \omega Q_{(n+2)h} a \cos \omega t = 0; \\ \ddot{\zeta}_{(n+2)h} + \omega_{(n+2)h}^2 \zeta_{(n+2)h} - \dot{\zeta}_{nm} A_{(n+2)h} a \cos \omega t + \dot{\zeta}_{nm} V_{(n+2)h} a \sin \omega t - \zeta_{nm} \omega M_{(n+2)h} a \cos \omega t = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

що описує пов'язані коливання при параметричному субгармонійному резонансі, коли $\omega \approx 2\omega_{nm} \approx 2\omega_{(n-2)p} \approx 2\omega_{(n+2)h}$.

За наявності параметричної нестійкості розв'язки таких систем будуть необмежено зростати. Якщо ж до системи додати нелінійний опір, то розв'язки обмежуються й у фазовому просторі з'являються аттрактори, а це означає, що на вільній поверхні можуть виникати резонансні хрестоподібні хвилі з ненульовими амплітудами. Крім того, амплітуда коливань у першій моделі на порядок менша, ніж у другій. Для резонансної моди в першій моделі рівняння має вигляд (7), а у другій моделі ми для резонансної моди отримали систему рівнянь (8). У (7) частота вдвічі більша за частоту коливань поверхні згідно з (8). Друга модель передбачає збудження принаймні двох резонансних форм одночасно: без збудження моди Ψ_{nm} з власними числами n, m , інша мода Ψ_{n-2p} або Ψ_{n+2h} не буде реалізовуватися. Яка із двох розроблених моделей відповідає реальному випадку, можна визначити експериментально, вимірявши частоти вібрації циліндра і порівнявши їх із власними частотами спостережуваних хрестоподібних хвиль.

Дискусія і висновки

Отже, у статті пояснено появу і структуру хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини, яка міститься в бокалі, що випромінює звукові хвилі. Хрестоподібні хвилі на поверхні води мають гребні, перпендикулярні стінці бокала, яка вібрує, що приводиться в рух зволоженим пальцем, який рівномірно рухається вздовж краю бокала. Згідно з експериментальними дослідженнями, поздовжні хвилі на стінці бокала мають чотири вузли (тобто охоплюють дві хвилі) в азимутальному напрямку. Для математичного пояснення появи хрестоподібних хвиль було виведено два типи нелінійних параметричних рівнянь.

Внесок авторів: Юрій Горський – збір і перевірка експериментальних даних; Тетяна Краснопольська – концептуалізація, теоретичні дослідження, пояснення результатів.

Подяка, джерела фінансування. Робота виконувалась згідно з планом фундаментальних бюджетних досліджень.

Список використаних джерел

Краснопольская, Т. С., & Швец, А. Ю. (1993). Свойства параметрических колебаний жидкости в цилиндрических баках. *Прикладная механика*, 29(9), 52–61.

Фролов, К. В., & Краснопольская, Т. С. (1987). Эффект Зоммерфельда в системах без внутреннего демпфирования. *Прикладная механика*, 23(12), 2–7.

Fraraday, M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, A121, 299–340.

Krasnopolskaya, T. S., & Heijst, G. J. F. van. (2018). Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass. *EJM/B Fluids*, 67, 116–124. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.011>

Krasnopolskaya, T. S., & Heijst, G. J. F. van. (1996). Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 328, 229–252.

Lamb, H. (1932) *Hydrodynamics*. Cambridge Univ. Press.

Shvets, A. Yu., & Krasnopolskaya, T. S. (2008). Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply. *Solid Mechanics and its Applications*, 6, 313–322.

References

- Faraday, M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical Transactions of Royal Society of London*, A121, 299–340.
- Frolov, K. V., & Krasnopolskaya, T. S. (1987). Sommerfeld effect in systems without internal damping. *Soviet Applied Mechanics*, 23(12), 1122–1126.
- Krasnopolskaya, T. S., & Heijst, G. J. F. van. (1996). Wave pattern formation in a fluid annulus with a vibrating inner shell. *Journal of Fluid Mechanics*, 328, 229–252.
- Krasnopolskaya, T. S., & Shvets, A. Y. (1993). Parametric resonance in the system: Liquid in tanks +electric motor, *Internashinal Applied Mechanics*, 29(9), 722–730.
- Krasnopolskaya, T. S., & Heijst, G. J. F. van. (2018). Fluid surface waves in a partially filled 'singing wine glass. *EJM/B Fluids*, 67, 116–124. <https://doi.org/10.1016/j.euromechflu.2017.08.011>
- Lamb, H. (1932). *Hydrodynamics*. Cambridge Univ. Press.
- Shvets, A. Yu., & Krasnopolskaya, T. S. (2008). Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply. *Solid Mechanics and its Applications*, 6, 313–322.

Отримано редакцією журналу / Received: 11.03.24
Прорецензовано / Revised: 25.04.24
Схвалено до друку / Accepted: 20.05.24

Yuriy GORSKIY, Leading Engineer
ORCID ID: 0000-0004-8195-1373
e-mail: yuragv@ukr.net
Institute of Hydromechanics NASU, Kyiv, Ukraine

Tetiana KRASNOPOLSKAYA, DSc (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0000-0002-6197-092X
e-mail: krasnopolska1005@gmail.com
Institute of Hydromechanics NASU, Kyiv, Ukraine

CONSTRUCTION OF MATHEMATICAL MODELS OF THE SURFACE CROSS-WAVES EXCITATION IN FLUIDS IN "SINGING GLASSES" WHEN THE GLASSES EMIT SOUND WAVES

The appearance and structure of cross-shaped waves on the free surface of the liquid contained in the 'singing glass' is explained. It was found that the main mode of vibration of the glass is a forced wave, with four nodes evenly spaced along the cylindrical glass wall. When such a singing glass is partially filled with a liquid (which changes the frequency of sound), one can observe another amazing feature: a complex pattern of waves on the free surface of the liquid. With sufficient illumination, one can observe waves directly caused by the vibration of the wall in the four-node mode moving in the circumferential direction at the same speed as the moving finger. However, this picture is dominated by so-called 'cross waves' or 'edge waves', the crests of which are perpendicular to the vibrating glass wall. Although cross-shaped waves were described by Faraday (1831), until now there was no theoretical justification for the possibility of their excitation in a 'singing glass'. This paper fills this gap: the appearance of cross waves in a 'singing glass' has been mathematically described as resonant oscillations. Non-linear parametric equations describing them were obtained for cross-shaped waves. Two mathematical models were built. The first theoretical model describes the appearance of cross-shaped waves, where only one eigenmode is present on the free surface of the liquid, and the second model applies to the situation where at least two or three eigenmodes are present. The oscillations of the free surface in approximations with three eigenmodes reflect the main features of the wave patterns observed experimentally in the 'singing glass'.

Keywords: cross-waves, singing glasses, parametric resonance, forced vibration of glass.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.