УДК 539.3 https://doi.org/10.17721/1812-5409.2419/4.8

П'ятецька О. В., к. ф.-м. н., с. н. с.

Згинні коливання в'якопружних пластин в рамках моделі Кірхгофа-Лява

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, 03680, м. Київ, пр-т. Акад. Глушкова 4-е
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

O. V. Pyatetska, Ph. D. (Phys.-Math.), Sr. Sci. Researcher

Bending vibrations of viscoelastic plates within the Kirchhoff-Love model

Taras Shevchenko National University of Kyiv, 03680, Kyiv, Acad. Glushkova av., 4-e
e-mail: pyatetskaov@gmail.com

В рамках гіпотез класичної теорії Кірхгофа-Лява побудовані повні системи розв'язувальних рівнянь для визначення напружено-деформованого стану і температури дисипативного розігріву при усталених поперечних коливаннях пластин із лінійного в'язкопружного матеріалу, властивості якого залежать від частоти зовнішнього навантаження та температури.

Ключові слова: в'язкопружні пластини, дисипативний розігрів, теорія Кірхгофа-Лява

Within the framework of the hypotheses of the classical Kirchhoff-Love theory, complete systems of resolving equations are constructed to determine the stress-strain state and the temperature of dissipative heating under steady transverse vibrations of plates made of a linear viscoelastic material, the properties of which depend on the frequency of external excitation and temperature. The equations were obtained without any preliminary suggestions about the law of temperature variation over the plate thickness. This law is determined in the process of solving the problem. The unrelated problem of vibrational bending of viscoelastic plates for complicated way of fixing a contour and different types of thermal boundary conditions is considered. Mathematical models of problems on the steady-state transverse vibrations of plates made of a linear viscoelastic material, the properties of which depend on temperature for an arbitrary law of its change over the thickness of the object. If the material characteristics depend on temperature, investigation of the influence of temperature of dissipative heating is reduced to solution of complicated non-linear systems of differential equations.

Key Words: viscoelastic plates, dissipative heating, Kirchhoff-Love theory

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Інтенсивний розвиток науки і техніки, створення нових конструкцій будівельних споруд, використання якісно нових матеріалів, що відповідають сучасному рівню науково-технічного прогресу, вимагають досконалих досліджень нестаціонарної поведінки тонких в'язкопружних пластин, які є компонентами різних інженерних конструкцій, з врахуванням температури. Температурні ефекти особливо важливі для пластин з полімерних матеріалів і композитів на їх основі, які дуже чутливі до зміни температури. При резонансних коливаннях та високих рівнях механічних навантажень виникає необхідність врахування впливу фізичної нелінійності, дисипативних властивостей матеріалів і температури дисипативного розігріву на напружено-деформований стан тонких в'язкопружних пластин. При визначенні напружено-деформованого стану пластин в якості основної приймаємо гіпотезу Кірхгофа-Лява про недеформівний нормальний елемент. Коливальний процес, викликаний поперечним навантаженням з інтенсивністю $q(x, y, t)$ [1]:

$$q(x,y,t)=\sum_{k=1}^{2} q_k(x,y)\cos\left[\omega t-(k-1)\pi/2\right] \tag{1}$$

вважається встановленим, тобто всі характеристики напружено-деформованого стану можуть бути представленими у вигляді:

$$Z(x,y,z,t)=\sum_{k=1}^{2} Z^{(k)}(x,y,z)\cos\left[\omega t-(k-1)\pi/2\right] \tag{2}$$

Тут x, y – декартові координати на серединній площині пластини, z – координата по нормалі до серединної площини пластини. Зв'язок між компонентами тензорів напружень та малих деформацій у точці з координатами x, y, z визначається формулами:

$$\sigma_x = \frac{1}{1-\mu^2}\int\limits_{-\infty}^{t} K\left(\widetilde{T},\omega,t-\tau\right)\left[e_x(x,y,z,t)+\mu\, e_y(x,y,z,t)\right]d\tau$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2(1+\mu)}\int\limits_{-\infty}^{t} K\left(\widetilde{T},\omega,t-\tau\right)e_{xy}(x,y,z,t)\,d\tau\,, \quad (3)$$

де $\widetilde{T}=\widetilde{T}(x,y,z)$ – температура, що встановилася,

e_x, e_y, e_{xy} – відносні видовження та зсув для направлень x, y у точці (x,y,z), коефіцієнт Пуасона $\mu = const$. Для визначення максимально можливої температури саморозігріву пластини, яка коливається, при обчисленні потужності джерел тепла, що з'являються внаслідок дисипації енергії, і розподілених по об'єму пластини, приймаємо, що вся робота зовнішніх сил при деформуванні одиничного об'єму. переходить в тепло. Тоді для потужності $\widetilde{Q}(x,y,z)$ джерела тепла у точці (x,y,z) одержуємо:

$$\widetilde{Q}(x,y,z) = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi/\omega}\left(\sigma_x\frac{\partial e_x}{\partial t}+\sigma_y\frac{\partial e_y}{\partial t}+\tau_{xy}\frac{\partial e_{xy}}{\partial t}\right)dt \quad (4)$$

Як випливає із (4), з урахуванням характеру розподілу напружень і деформацій по товщині пластини, функція $\widetilde{Q}(x,y,z)$ по змінній z буде змінюватись по квадратичному або більш складному закону, перетворюючись в нуль на серединній поверхні. Тому рівняння теплопровідності для осередненої по часу за один цикл коливань стаціонарної температури $\widetilde{T}=\widetilde{T}(x,y,z)$ записується як тривимірне для пластини:

$$\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial z^2}+\lambda_q^{-1}\,\widetilde{Q}(x,y,z)=0\,, \quad (5)$$

де λ_q – коефіцієнт теплопровідності матеріалу. Надалі при розв'язуванні теплових задач вважаємо, що торці пластини теплоізольовані, а теплообмін із навколишнім середовищем здійснюється через лицьові поверхні. З рівнянь руху малого елемента пластини, що коливається, та виразів для складових внутрішніх зусиль і моментів, які випливають із (2) та (3), одержуємо системи рівнянь для складових напружено-деформованого стану. Змінні коефіцієнти цих систем (складові комплексних жорсткостей) інтегрально залежать від невідомої температури $\widetilde{T}=\widetilde{T}(x,y,z)$. Приєднуючи рівняння теплопровідності (5), одержуємо повну систему розв'язувальних рівнянь. Якщо пластина виготовлена із матеріалу, властивості якого не залежать від температури $\widetilde{T}$, то складові E_k $(k=1,2)$ комплексного модуля пов'язані співвідношенням:

$$E_1(\omega)+i\,E_2(\omega)=\int\limits_0^{\infty}K(\omega,s)\,e^{i\omega s}ds\,. \quad (6)$$

Складові комплексних жорсткостей на розтяг та згин, що виражаються через E_k $(k=1,2)$, будуть у цьому випадку постійними, хоча можуть залежати від частоти, а жорсткість взаємного впливу розтягу та згину перетворюється в нуль. При цьому задача із нелінійної інтегро-диференціальної перетворюється в лінійну диференціальну, яка в свою чергу розпадається на дві послідовно розв'язувані задачі. Перша з них полягає у визначенні напружено-деформованого стану та обчисленні потужності джерел тепла, розподілених по об'єму пластини. Друга задача зводиться до крайової задачі для стаціонарного рівняння теплопровідності, розв'язок якої визначає теплове поле пластини. Зазначимо, що у цьому випадку задача залишається достатньо складною, так як порядок системи диференціальних рівнянь для визначення складових напружено-деформованого стану у два рази перевищує порядок відповідної системи із ідеально пружного матеріалу.

Якщо розглянемо незв'язану задачу про вібраційний згин в'язкопружних тонких пластин, то визначення напружено-деформованого стану зводиться до розв'язування крайової задачі для складових згину $w^{(k)}(x,y)\,(k=1,2)$. Система рівнянь для цих функцій має вигляд:

$$D_1\nabla^2\nabla^2 w^{(1)} - D_2\nabla^2\nabla^2 w^{(2)} - \rho\,h\,\omega^2 w^{(1)}(x,y) = q_1(x,y)$$
$$(7)$$
$$D_2\nabla^2\nabla^2 w^{(1)} - D_1\nabla^2\nabla^2 w^{(2)} - \rho\,h\,\omega^2 w^{(2)}(x,y) = q_2(x,y)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

Для шарнірно закріпленої по контуру прямокутної пластини маємо:

$$q_1(x,y)=q_0\sin\frac{m\pi\,x}{a}\sin\frac{n\,\pi\,y}{b}\,, q_2=0\,,\ q_0=const\,.$$

Використання ідеї відомого розв'язку Нав'є задачі стаціонарного згину прямокутної пластини з ідеально пружного матеріалу дозволило одержати точні аналітичні вирази для функцій $w^{(k)}(x,y)$ та складових внутрішніх зусиль і моментів [2]. Теплова задача розв'язується за припущення, що через площини $\varsigma = \pm 1/2$ відбувається тепловіддача по закону Ньютона у зовнішнє середовище, температура якого $T_1^0 = const$ при $\varsigma = -1/2$ і $T_2^0 = const$ при $\varsigma = 1/2$. Граничні умови для температури $\widetilde{T}$ у цьому випадку мають вигляд:

$$l_1 \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \varsigma} = \widetilde{T} - T_1^0, \text{ при } \varsigma = -1/2,$$
$$l_2 \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial \varsigma} = -\widetilde{T} + T_2^0, \text{ при } \varsigma = 1/2, \quad (8)$$

де $\varsigma = \gamma/h$, $l_k = \lambda_q/(\alpha_s^{(k)} h)$, $\alpha_s^{(k)}$ − коефіцієнт тепловіддачі в середовище з температурою T_k^0 $(k = 1,2)$, h − товщина пластини. Аналіз одержаних розв'язків показує, що максимуми амплітудних значень характеристик напружено-деформованого стану скінченні при будь-якій ω і досягаються в центрі пластини. Максимальна температура саморозігріву досягається в точці нормалі до серединної площини, що проходить через центр пластини. Положення цієї точки визначається умовами теплообміну із зовнішнім середовищем (значеннями l_k).

Якщо температура зовнішнього середовища поблизу граней $\varsigma = \pm 1/2$ змінна, або умови теплообміну мають розривний характер, то задача визначення теплового поля пластини зводиться до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Як приклад, можна розглянути пластину. у якої грань $\varsigma = -1/2$ теплоізольована, а на грані $\varsigma = 1/2$ є прямокутна область розмірами $2\xi_0 \times 2\eta_0$, через яку проходить віддача тепла у зовнішнє середовище, а вся інша частина її − теплоізольована. У цьому випадку виконуються умови Коха, що дозволяє при розв'язуванні системи застосувати метод редукції. Точний розв'язок крайових задач для системи рівнянь (7) вдається одержати і для пластин, у яких дві сторони $(\xi = 0, \xi = 1)$ шарнірно закріплені, а дві інші закріплені довільно. У цьому випадку використовуються ідеї відомого розв'язку Леві для стаціонарного згину ідеально пружної пластини. Якщо

$$q_1(\xi,\eta) = q_0(\eta)\sin m\pi\xi, \quad q_2 = 0, \quad (9)$$

то для $w^{(k)}(\xi,\eta)\,(k = 1,2)$, що задовільняють рівняням (7) та граничним умовам при $(\xi = 0, \xi = 1)$, одержуємо наступні вирази:

$$w^{(k)} = W_k(\eta)\sin m\,\pi\,\xi \quad (k = 1,2); \quad (10)$$

$$W_1(\eta) = W_1^{(0)}(\eta) + \sum_{j=1}^{2}\left[a_j X_j(\eta) + a_{j+2} X_J(\eta_1) - b_j Y_j(\eta) - b_{j+2} Y_j\right]$$
$$W_2(\eta) = W_2^{(0)}(\eta) + \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\left[b_j X_j(\eta) + b_{j+2} X_J(\eta_1) + {}\right.$$
$$\left. {} + a_j Y_j(\eta) + a_{j+2} Y_j\right]. \quad (11)$$

Тут $\{W_1^{(0)}, W_2^{(0)}\}\sin m\pi\xi$ − будь-який частинний розв'язок рівнянь (7), що відповідає навантаженню із складовими (9);

$X_k(\eta) + i\,Y_k(\eta) = \exp((-\alpha_k + i\,\beta_k)\eta)$ $(k = 1,2)$; α_k та β_k − постійні величини, що виражаються через значення $\rho,\ \mu,\ E_1,\ tg\delta,\ \omega, h, a, m$; a_j, b_j $(j = \overline{1,4})$ – довільні константи, які підбираються, щоб виконувались умови при $\eta = 0$ і $\eta = c^{-1}$. Похідні від X_k та Y_k виражаються через ці ж функції. Тому складові внутрішніх зусиль і моментів в пластині можна представити лінійними комбінаціями функцій $X_k(\eta), Y_k(\eta), X_k(\eta_1), Y_k(\eta_1)$, де $\eta_1 = c^{-1} - \eta$. Вирази (10), (11) використовуємо при визначенні напружено-деформованого стану пластини, у якої сторони $(\xi = 0, \xi = 1)$ шарнірно закріплені, навантаження $q(\xi,\eta,t)$ відсутнє, а сторони $(\eta = 0, \eta = c^{-1})$ знаходяться під впливом розподілених згинних моментів і поперечних сил вібраційного типу [2]. Розглядаючи теплову задачу для пластини, дві протилежні сторони якої шарнірно закріплені, маємо вираз для функції

$$\widetilde{Q}(\xi,\eta,\varsigma) = B\varsigma^2\left[\Phi_1(\eta) + \Phi_2(\eta)\cos 2m\pi\xi\right],$$

де $\Phi_k(\eta)\,(k = 1,2)$ визначаються через квадрати та добутки функцій $W_j(\eta);\ dW_j/d\eta;\ d^2W_j/d\eta^2$ $(j = 1,2)$. Якщо зберегти умови теплообміну пластини із зовнішнім середовищем у вигляді (8) і температуру саморозігріву $T(\xi,\eta,\varsigma)$ визначати у вигляді:

$$T(\xi,\eta,\varsigma) = \Theta_1(\eta,\varsigma) + \Theta_2(\eta,\varsigma)\cos 2m\pi\xi,$$

то тривимірна крайова задача для функції $T(\xi,\eta,\varsigma)$ розпадається на дві двовимірні крайові задачі:

$$\frac{\partial^2\Theta_k}{\partial\eta^2}+\frac{1}{h_0^2}\frac{\partial^2\Theta_k}{\partial\varsigma^2}-\lambda_k^2\Theta_k(\eta,\varsigma)=B\varsigma^2\,\Phi_k(\eta),$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=2m\pi,$$

$$\frac{\partial\Theta_k}{\partial\eta}=0,\ \text{при}\quad \eta=0,\ \eta=c^{-1};$$

$$l_1\frac{\partial\Theta_k}{\partial\varsigma}-\Theta_k=0,\ \text{при}\quad \varsigma=-1/2; \tag{12}$$

$$l_2\frac{\partial\Theta_k}{\partial\varsigma}+\Theta_k=0,\ \text{при}\quad \varsigma=1/2.$$

Після представлення функцій $\Phi_k(\eta)$ та $\Theta_k(\eta,\varsigma)$ у вигляді рядів

$$\Phi_k(\eta)=\sum_{r=0}^{\infty}g_r^{(k)}\cos rc\pi\eta,$$

$$\Theta_k(\eta,\varsigma)=B\sum_{r=0}^{\infty}\varphi_r^{(k)}(\varsigma)\cos rc\pi\eta, \tag{13}$$

одержані задачі розв'язуються методом розділення змінних. Слід зазначити, що практична реалізація такого розв'язку досить складна, так як навіть для нескладних $W_k(\eta)$ аналітичне обчислення коефіцієнтів $g_r^{(k)}$ є досить громіздким. Крім того, з'являються труднощі при обчисленні довільних сталих, що входять у вирази для функцій $\varphi_r^{(k)}(\varsigma)$. Тому доцільним буде розв'язування даних задач чисельними методами. Складові напружено-деформованого стану пластини, що відповідають навантаженню (9), представляємо у вигляді:

$$\left\{w_k,\ \vartheta_y^{(k)},M_x^{(k)},M_x^{(k)},\ Q_y^{(k)},\widetilde{Q}_y^{(k)}\right\}=$$
$$=\left\{W_k(\eta),\Theta_k(\eta),m_x^{(k)}(\eta),m_y^{(k)}(\eta),q_y^{(k)}(\eta),\widetilde{q}_y^{(k)}(\eta)\right\}\sin m\pi\xi$$

$$\left\{\vartheta_x^{(k)},\ H_{xy}^{(k)},\ Q_x^{(k)}\right\}=\left\{\Theta_x^{(k)}(\eta),h_{xy}^{(k)}(\eta),q_x^{(k)}(\eta)\right\}\cos m\pi\xi \tag{14}$$

Тут $\vartheta_x^{(k)}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial\xi}$, $\vartheta_y^{(k)}=\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial w^{(k)}}{\partial\eta}$ $(k=1,2)$ –

складові кутів повороту нормального елемента до серединної площини пластини. Величини $W_k,\ \Theta_k,m_y^{(k)},\widetilde{q}_y^{(k)}$ приймаються за основні невідомі. Систему рівнянь для їх визначення одержуємо з рівнянь руху малого елемента пластини та співвідношень, що виражають моменти через похідні від прогину. Після деяких перетворень ця система може бути записана у векторній формі:

$$\frac{d\,\overline{Y}}{d\,\eta}=A\overline{Y}(\eta)+\bar{f}(\eta), \tag{15}$$

де $\overline{Y}(\eta)$ – невідомий вектор, $A=\{a_{ij}\}$, $\bar{f}=\{f_i\}$ – відомі квадратна матриця та вектор. Граничні умови для $\overline{Y}(\eta)$:

$$H_1\overline{Y}(0)=\bar{e}_1,\ \ H_2\overline{Y}\left(c^{-1}\right)=\bar{e}_2, \tag{16}$$

H_1, H_2 – відомі матриці, а компоненти векторів $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ визначаються умовами для відповідних основних невідомих функцій $W_k,\ \Theta_k,m_y^{(k)},\ \widetilde{q}_y^{(k)}$.
Для чисельного розв'язування задачі (15) - (16) доцільно використовувати метод дискретної ортогоналізації.

Список використаних джерел

1. *Карнаухов В.Г., Михайленко В.В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. - Житомир: ЖТТУ, 2005. - 428 с.
2. *Вильде М.В.,Недорезов П.Ф., Сироткина Н.С.* Определение температуры саморазогрева при установившихся поперечных колебаниях вязкоупругой пластинки для случая сложного закрепления контура// Механика деформируемых сред: науч. сб.- Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1997. - Вып.13.- С.66-72.

References

1. KARNAUKHOV, V. G.,MIKHAILENKO, V. V. (2005). *Nelineynaya termomekhanika piezoelektricheskyh neuprugikh tel pri monogarmonicheskom nagruzhenii.* Zhitomir: ZHTTU.
2. VILDE, M.V., NEDOREZOV, P.F. & SIROTKINA, N.S. (1997) Opredeleniye temperaturi samorazogreva pri ustanovivshihsya poperechnyh kolebaniyah vyazkouprugoy plastiny dlya sluchaya slozhnogo zakrepleniya kontura. *Mehanika deformiruyemih sred: nauch. sb. Saratov.* 13. pp. 66-72.

Надійшла до редколегії 20.12.19