КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Кафедра дослідження операцій

Випускна кваліфікаційна робота магістра

за спеціальністю 113 Прикладна математика

Граничні теореми для числа нульових приростів у випадковому блуканні з бар'єром

Студента 2 курсу магістратури

кафедри дослідження операцій

Смоковича Олександра Михайловича

Науковий керівник

доктор фізико-математичних наук, професор

Іксанов Олександр Маратович

____

"____"__________2021р.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ДЕК, протокол

Завідувач кафедри дослідження операцій професор Іксанов О.М.

Київ

2021

Зміст

1 Вступ

1.1 Випадкове блукання з бар'єром

Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями випадкової велечини ξ з дискретним розподілом $p_k = \mathbb{P}\{\xi = k\}, k \in \mathbb{N}$.

Означення 1.1. *Випадковим блуканням з бар'єром $n \in \mathbb{N}$ назвемо випадкову послідовність $R(n) := (R_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так*

$$R_0(n) := 0, R_k(n) := R_{k-1}(n) + \xi_k \mathbb{1}_{\{R_{k-1}(n)+\xi_k<n\}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Послідовність $(R(n))_{n\in\mathbb{N}}$ не спадає майже напевно (м.н.) При цьому вона не досягає стану n. Надалі ми припускаємо, що $p_1 > 0$. Згідно з лемою 1.1 ця умова гарантує, що $R(n)$ з ймовірністю один потрапляє у стан $n - 1$ і залишається у ньому назавжди.

Достатньо повна інформація про задане випадкове блукання з бар'єром міститься у таких випадкових величинах

$$\begin{aligned}
M_n &:= \#\{k \in \mathbb{N} : R_{k-1}(n) \neq R_k(n)\} = \sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{R_l(n)+\xi_{l+1}<n\}}; \\
T_n &:= \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : R_k(n) = n - 1\} = \sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{R_l(n)<n-1\}}; \\
V_n &:= T_n - M_n = \#\{k \leq T_n : R_{k-1}(n) = R_k(n)\},
\end{aligned}$$

що визначають число стрибків, час поглинання у стані $n-1$ та число нульових приростів, що відбулися до поглинання, відповідно.

Лема 1.1. *За умови $p_1 > 0$ для кожного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ випадкова величина T_n скінченна майже напевно.*

Доведення. Доведемо за індукцією. Очевидно, що $T_1 = 0$ м.н. Припустивши, що $T_k < \infty$ м.н. для $k = 1, 2, \ldots, n-1$ та натурального $n \geq 2$, покажемо, що

$T_n < \infty$ м.н. Розглянемо послідовність $(\widehat{R}_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначається так

$$\widehat{R}_0(n) := 0 \quad \text{та} \quad \widehat{R}_k(n) = \widehat{R}_{k-1}(n) + \xi_{k+1}\mathbb{1}_{\{\widehat{R}_{k-1}(n)+\xi_{k+1}<n\}}, \quad k \in \mathbb{N}$$

та

$$\widehat{T}_n := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : \widehat{R}_k(n) = n-1\} = \sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{\widehat{R}_l(n)<n-1\}}.$$

Зауважимо, що T_n і $\widehat{T}_n$ мають однакові розподіли, тобто

$$\mathbb{P}\{T_n = k\} = \mathbb{P}\{\widehat{T}_n = k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Дійсно, оскільки

$$\mathbb{P}\{\widehat{R}_k(n) = n-1\} = \mathbb{P}\{\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i = n-1\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\sum_{i=0}^{k} \xi_i = n-1\} = P\{R_k(n) = n-1\},$$

то

$$\mathbb{P}\{T_n = k\} = \mathbb{P}\{\sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{R_l(n)<n-1\}} = k\} = \mathbb{P}\{\sum_{l\geq 0} \mathbb{1}_{\{\widehat{R}_l(n)<n-1\}} = k\}$$
$$= \mathbb{P}\{\widehat{T}_n = k\}.$$

Послідовність $(\widehat{R}_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$ і послідовність $\widehat{T}_n$ не залежать від ξ_1. Крім того,

$$T_n = (\widehat{T}_{n-\xi_1} + 1)\mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq n-2\}} + \mathbb{1}_{\{\xi_1 = n-1\}} + (\widehat{T}_n + 1)\mathbb{1}_{\{\xi_1 \geq n\}} \quad \text{м.н.}$$

За припущенням індукції $\widehat{T}_{n-\xi_1} < \infty$ м.н. на події $\{\xi_1 \leq n-1\}$. Тому

$$\widehat{T}_{n-\xi_1}\mathbb{1}_{\{\xi_1\leq n-2\}} = \sum_{k=1}^{n-2} \widehat{T}_{n-k}\mathbb{1}_{\{\xi_1=k\}} < \infty \quad \text{м.н.}$$

Таким чином,

$$\mathbb{P}\{T_n = \infty\} = \mathbb{P}\{\widehat{T}_n + 1 = \infty\}\mathbb{P}\{\xi_1 \geq n\} = \mathbb{P}\{T_n = \infty\}\mathbb{P}\{\xi_1 \geq n\}.$$

Оскільки $p_1 > 0$, то $\mathbb{P}\{\xi_1 \geq n\} < 1$. Отже, $\mathbb{P}\{T_n = \infty\} = 0$. Лему 1.1 доведено. □

1.2 Застосування

В багатьох ситуаціях в реальному житті природньо виникають випадкові блукання з бар'єром. Наведемо декілька прикладів.

Приклад 1.1. Клас одновимірних задач про пакування у ємності природно пов'язаний з випадковими блуканнями з бар'єром. Візьмемо ємність розміру n, в яку може бути поміщена деяка кількість об'єктів, які надходять послідовно. Вважається, що об'єкти є однорідними, що, зокрема, означає, що їхні випадкові розміри є незележними та однаково розподіленими. Об'єкт розміру ξ_j поміщається в ємність, якщо в ній достатньо вільного місця. Однак, якщо вільного місця менше, ніж потрібно, об'єкт відхиляється. В такому випадку M_{n+1} задає кількість об'єктів в ємності, V_{n+1} - кількість відхилених об'єктів, а T_{n+1} - загальну кількість спроб помістити об'єкт в ємність.

Приклад 1.2. Підприємство може сплачувати €50000 на місяць найманим працівникам. Вимоги до зарплатні потенційних працівників є незалежними копіями випадкової величини ξ, що набуває значень €100, €200, €300, ... Тоді M_{50001} задає кількість найнятих працівників, T_{50001} - кількість осіб, що намагалися працевлаштуватись, а V_{50001} - кількість осіб, яким було відмовлено в працевлаштуванні.

Приклад 1.3. Компанія, яка займається транспортуванням вантажу, за один рейс може перевезти максимум 10 тонн. Вага кожної одиниці вантажу є незалежною копією випадкової величини ξ, що набуває значень, кратних 100 кг. Тоді M_{10001} задає кількість перевезених одиниць вантажу, V_{10001} - кількість запитів, які компанія відхилила, а T_{10001} - сумарну кількість запитів.

Приклад 1.4. Клієнт придбав інтернет-пакет розміром n мегабайт. При завантаженні файлів розміром кратним 1 мегабайту сервер отримує запит на завантаження, перевіряє чи не перевищує розмір файлу доступний об'єм і починає завантаження, або відхиляє запит, якщо розмір файлу завеликий. Тоді M_{n+1} задає кількість завантажених файлів, V_{n+1} - кількість відхилених запитів, а T_{n+1} - загальну кількість запитів.

Приклад 1.5. Нехай $\{Z_n : k \in \mathbb{N}_0\}$ – це незростаючий ланцюг Маркова з множиною станів $\mathbb{N}$ і ймовірностями переходу π_{ij} для $i < j$ і $\pi_{ij} = 0$ в іншому випадку. Визначимо випадкову величину

$$X_n := \inf\{k \geq 1 : Z_k = 1 \ \text{ за умови, що } \ Z_0 = n\}$$

яка буде часом поглинання ланцюга Маркова. У випадку коли

$$\pi_{n,n-k} = \frac{\mathbb{P}\{\xi = k\}}{\mathbb{P}\{\xi < n-1\}},$$

розподіл X_n збігається з розподілом M_n.

Приклад 1.6. Переставний коалесцент з множинними зіткненнями – це марківський процес, який стартує у момент часу 0 з n блоками і має таку динаміку. За наявності m блоків кожні k з них зіштовхується і зливаються в один блок з інтенсивністю

$$\lambda_{mk} = \int\limits_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(dx), \quad 2 \leq k \leq m,$$

де Λ – це скінченна міра на $[0, 1]$. В [8] було доведено, що за умови

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = \mathrm{const} \times x^{\alpha-1}\, \mathbb{1}_{(0,1)}(x)(\mathrm{d}x)$$

для деякого $\alpha \in (0, 2)$, число X_n зіткнень коалесцента має той самий розподіл, що і M_n, де M_n є числом стрибків випадкового блукання з бар'єром n у випадку

$$p_k = \frac{(2-\alpha)\Gamma(\alpha + k - 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(k+2)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Приклад 1.7. Мейр і Мун в [12] запропонували процедуру відокремлення кореня випадкового рекурсивного дерева з n вершинами за допомогою послідовних видалень ребер. Після видалення ребра, вибраного навмання, дерево розпадається на два піддерева. На наступному кроці розглядається лише піддерево, яке містить корінь, і в ньому також видаляється ребро, вибране навмання. Цей рекурсивний процес зупиняється, як тільки корінь виявляється відокремленим, тобто, як тільки піддерево, що містить корінь, отримане після видалення ребра, складається з однієї вершини. Позначимо через X_n число видалених ребер, необхідних для відокремлення кореня. В [8] було показано, що X_n має такий ж розподіл як і M_n у випадковому блуканні з бар'єром n за умови

$$p_k = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

2 Граничні теореми для числа нульових приростів

Основними результатами даної дипломної роботи є слабкий закон великих чисел (теорема 2.1) та центральна гранична теорема з випадковим центруванням (теорема 2.4) для числа нульових приростів V_n у випадковому блуканні з бар'єром n. Ці твердження встановлені за припущення (2.1), що полягає у правильній зміні хвоста розподілу випадкової величини ξ. Зокрема, вважається, що $\mathbb{E}\xi = \infty$. Нагадаємо, що у випадку $\mathbb{E}\xi < \infty$ асимптотична поведінка V_n є абсолютно відмінною: згідно з теоремою 1.1 роботи [9] числа нульових приростів V_n збігаються за розподілом (без центрування та нормалізації).

Надалі $\psi(x) := \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ для $x > 0$ позначає логарифмічну похідну гамма функції. Покладемо

$$m(x) := \mathbb{E}\min(\xi, x) = \int_0^x \mathbb{P}\{\xi > y\}\mathrm{d}y, \quad x \geq 0.$$

Теорема 2.1. *Припустимо, що для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *і деякої функції* L*, яка повільно змінюється в* ∞*, виконується*

$$\sum_{k=n}^{\infty} p_k \quad \sim \quad n^{-\alpha}L(n), \quad n \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\sup_{n\geq 0} \frac{np_n}{\sum_{k=n+1}^{\infty} p_k} < \infty \quad \text{для} \quad \alpha \in [0, 1/2], \tag{2.2}$$

і $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \infty$ *у випадку* $\alpha = 1$*. Тоді при* $n \to \infty$

$$\frac{V_n}{\mathbb{E}V_n} \xrightarrow{P} 1, \tag{2.3}$$

і $\mathbb{E}V_n \sim (\psi(1) - \psi(1-\alpha))^{-1}\log n$*, якщо* $\alpha \in (0,1)$ *і* $\mathbb{E}V_n \sim \log m(n)$*, якщо* $\alpha = 1$*.*

Для доведення теореми 2.1 нам знадобиться допоміжний результат.

Лема 2.2. *Якщо для $\alpha \in (0,1)$ виконується (2.1), і для $\alpha \in [0,1/2]$ виконується (2.2), то при $n \to \infty$*

$$\mathbb{E}\log Y_n = \log n - (\psi(1) - \psi(1-\alpha)) + o(1) \tag{2.4}$$

та

$$\mathbb{E}\log^2 Y_n = \log^2 n - 2(\psi(1) - \psi(1-\alpha))\log n + o(\log n). \tag{2.5}$$

Якщо для $\alpha = 1$ виконується (2.1) та $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \infty$, то при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\log m(Y_n) = \log m(n) - 1 + o(1)$$

та

$$\mathbb{E}\log^2 m(Y_n) = \log^2 m(n) - 2\log m(n) + o(\log m(n)).$$

Доведення. Якщо (2.1) виконується для $\alpha \in [0,1)$, то згідно з теоремою 8.6.5 у [1]

$$\log n - \log Y_n \xrightarrow{d} (-\log \eta_\alpha), \quad n \to \infty,$$

де випадкова величина η_α має бета-розподіл з параметрами $(1-\alpha)$ і α, тобто

$$\mathbb{P}\{\eta_\alpha \in \mathrm{d}x\} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} x^{-\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{d}x$$

і $\mathbb{P}\{\eta_0 = 1\} = 1$. Якщо ми доведемо, що для всіх $\delta \in (0, 1-\alpha)$,

$$\sup_{n\ge1} \mathbb{E}(n/Y_n)^\delta = \sup_{n\ge1} \mathbb{E} f_k(\log^k(n/Y_n)) < \infty, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

де $f_k(x) := \exp\{\delta x^{1/k}\}$, то за теоремою Валлє-Пуссена [13] для всіх $k \in \mathbb{N}$ послідовність $\{(\log n - \log Y_n)^k : n \in \mathbb{N}\}$ буде рівномірно інтегровною. У такому випадку ми будемо мати

$$\lim_{n\to\infty} (\log n - \mathbb{E}\log Y_n) = \mathbb{E}(-\log \eta_\alpha) = \psi(1) - \psi(1-\alpha) < \infty,$$

що доведе (2.4), і

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\log n - \log Y_n)^2 = \mathbb{E}\log^2 \eta_\alpha = (\psi(1-\alpha)-\psi(1))^2 + \psi'(1-\alpha) - \psi'(1) < \infty,$$

що разом з (2.4) доведе (2.5). Тепер ми маємо перевірити виконання (2.6). Для $j \in \mathbb{N}_0$ покладемо $u_j := \sum_{k=0}^{j} \mathbb{P}\{S_k = j\}$. Тоді

$$\mathbb{E}Y_n^{-\delta} = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^{-\delta} \mathbb{P}\{\xi \geq n-k\} u_k. \tag{2.7}$$

З теореми 1.1 в [5] відомо, що якщо $\alpha \in (1/2, 1)$, то

$$u_n \sim \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} n^{\alpha-1}/L(n), \quad n \to \infty.$$

Разом з додатковою умовою (2.2) те ж саме виконується і для $\alpha \in [0, 1/2]$. Таким чином, з (2.7) маємо

$$\mathbb{E}Y_n^{-\delta} \sim n^{-\delta} \frac{\Gamma(1-\alpha-\delta)\Gamma(\alpha)\sin\pi\alpha}{\Gamma(1-\delta)\pi}$$

що доводить (2.6).

Припустимо тепер, що (2.1) виконується для $\alpha = 1$, та що $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \infty$. За теоремою 6 з [4]

$$\log m(n) - \log m(Y_n) \xrightarrow{d} (-\log R), \quad n \to \infty,$$

де R – це випадкова величина з рівномірним розподілом на $[0, 1]$. Необхідно показати, що послідовність $\{(\log m(n) - \log m(Y_n))^k : n \in \mathbb{N}\}, k = 1, 2$ є рівномірно інтегровною. Це буде випливати з такої нерівності: для кожного $\epsilon \in (0, 1)$

$$\sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(\frac{m(n)}{m(Y_n)}\right)^{\epsilon} < \infty. \tag{2.8}$$

У випадку $\alpha = 1$ ми маємо $u_n \sim \frac{1}{m(n)}$ і $\sum_{k=0}^{n} u_n \sim \frac{n}{m(n)}$. Зафіксуємо будь-які $\epsilon, \Delta \in (0, 1)$. Маємо

$$\mathbb{E}m(Y_n)^{-\epsilon} = \sum_{k=0}^{n-1} m(n-k)^{-\epsilon} \mathbb{P}\{\xi \geq n-k\} u_k \leq \sum_{k=0}^{[\Delta n]} + \sum_{k=[\Delta n]}^{n-1} := I_1(n) + I_2(n).$$

Використовуючи монотонність $k \mapsto \mathbb{P}\{\xi \geq n-k\}$ та m, отримуємо

$$I_1(n) \leq \frac{\mathbb{P}\{\xi \geq n-[\Delta n]\}}{m^\epsilon(n-[\Delta n])} \sum_{k=0}^{[\Delta n]} u_k \sim \frac{\mathbb{P}\{\xi \geq n-[\Delta n]\}}{m^\epsilon(n-[\Delta n])} \frac{[\Delta n]}{m([\Delta n])}$$

Оскільки

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > x\}x}{m(x)} = \frac{xm'(x)}{m(x)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

то

$$m^\epsilon(n) I_1(n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Для $I_2(n)$ (так як $m(k)u_k \leq C$ для великих k)

$$\begin{aligned} I_2(n) &= \sum_{k=[\Delta n]}^{n-1} m(n-k)^{-\epsilon} \mathbb{P}\{\xi \geq n-k\} \frac{m(k)u_k}{m(k)} \leq \\ &\leq \frac{C}{m(\Delta n)} \sum_{k=1}^{n-[\Delta n]} m(k)^{-\epsilon} \mathbb{P}\{\xi \geq k\}. \end{aligned}$$

Функція

$$r_\epsilon(x) := \int_0^x m^{-\epsilon}(y) \mathbb{P}\{\xi \geq y\} \mathrm{d}y, \quad x \geq 0$$

повільно змінюється на ∞, і $\sum_{k=1}^n m^{-\epsilon}(k) \mathbb{P}\{\xi \geq k\} \sim r_\epsilon(n)$. За правилом Лопіталя $r_\epsilon(n)/m(n) \sim (1-\epsilon)^{-1} m^{-\epsilon}(n)$. Тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} m^\epsilon(n) I_2(n) \leq C \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{m(n)}{\Delta n} = C. \tag{2.9}$$

Тепер з (2.9) випливає (2.8). □

Ми готові довести теорему 2.1.

Доведення теореми 2.1. Припустимо, що (2.1) виконується для $\alpha \in (0,1)$. Покладемо $a_n := \mathbb{E} V_n$ і $b_n := \mathbb{E} V_n^2$. Маємо $a_1 = 1$ та

$$a_n = \frac{1}{1-\mathbb{P}\{Y_n = n\}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \mathbb{P}\{Y_n = k\} + 1 - 2\mathbb{P}\{Y_n = 1\} \right), \quad n \geq 2, \tag{2.10}$$

і $b_1 = 1$ та

$$b_n = \frac{1}{1 - \mathbb{P}\{Y_n = n\}} \left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k \mathbb{P}\{Y_n = k\} + 2a_n - 1 \right), \quad n \geq 2. \tag{2.11}$$

Потрібно перевірити, що

$$b_n \sim a_n^2 \sim k_\alpha^2 \log^2 n, \quad n \to \infty, \tag{2.12}$$

де $k_\alpha := (\psi(1) - \psi(1-\alpha))^{-1}$. Припустимо, що співвідношення

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{\log n} \leq k_\alpha \tag{2.13}$$

не виконується. Тоді можна вибрати значення $\epsilon > 0$ таким, що нерівність

$$a_n > (k_\alpha + \epsilon) \log n + c$$

виконується нескінченно часто для кожного фіксованого додатнього c. Покладемо

$$n_c := \inf\{n \geq 1 : a_n > (k_\alpha + \epsilon) \log n + c\}$$

Тоді

$$a_n \leq (k_\alpha + \epsilon) \log n + c, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, n_c - 1.$$

З (2.10) маємо

$$\begin{aligned}
& (k_\alpha + \epsilon) \log n + c < \frac{1}{1 - \mathbb{P}\{Y_{n_c} = n_c\}} \times \\
\times & \left(\sum_{i=1}^{n_c - 1} ((k_\alpha + \epsilon) \log i + c) \mathbb{P}\{Y_{n_c} = i\} + 1 - 2\mathbb{P}\{Y_{n_c} = 1\} \right) = \\
= & \; c + (k_\alpha + \epsilon) \left(\mathbb{E} \log Y_{n_c} + \frac{\mathbb{P}\{Y_{n_c} = n_c\}}{1 - \mathbb{P}\{Y_{n_c} = n_c\}} (\mathbb{E} \log Y_{n_c} - \log n_c)) \right) + \\
+ & \; \frac{1}{1 - \mathbb{P}\{Y_{n_c} = n_c\}} (1 - 2\mathbb{P}\{Y_{n_c} = 1\})
\end{aligned}$$

(оскільки $n_c \to \infty$ при $c \to \infty$, то з урахуванням (2.4), рівності $\mathbb{P}\{Y_n = 1\} = u_{n-1}$ то того факту, що за теоремою відновлення $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, рівність можна продовжити так)

$$= c + (k_\alpha + \epsilon)\log n_c - (k_\alpha + \epsilon)k_\alpha^{-1} + 1 + o(1).$$

При $c \to \infty$ отримуємо $\epsilon \leq 0$ – суперечність. Таким чином, ми довели (2.13). Аналогічно можна вивести зворотню нерівність для нижньої границі. Отже,

$$a_n \sim k_\alpha \log n$$

Асимптотичне співвідношення (2.12) для b_n встановлюється подібним чином за допомогою (2.11), що дає $\mathbb{E}V_n^2 \sim (\mathbb{E}V_n)^2$.

Далі, за нерівністю Чебишева для кожного $\delta > 0$

$$\mathbb{P}\{|V_n/\mathbb{E}V_n - 1| > \delta\} \leq \frac{\mathbb{D}V_n}{(\delta\mathbb{E}V_n)^2} \to 0, \quad n \to \infty,$$

що доводить (2.3). У випадку коли (2.1) виконується для $\alpha = 1$ доведення співвідношення $\mathbb{E}V_n^2 \sim (\mathbb{E}V_n)^2 \sim (\log m(n))^2$ проходить з використанням другої частини леми 2.2. Доведення теореми 2.1 завершено. □

У статті [11] за допомогою методу ймовірнісних метрик було встановлено такий результат.

Твердження 2.3. *Нехай*

$$\mathbb{P}\{\xi > n\} = cn^{-\alpha} + O(n^{-(\alpha+\epsilon)}) \tag{2.14}$$

для деяких $c > 0$, $\epsilon > 0$ і $\alpha \in (0,1)$. Також, нехай для $\alpha \in (0, 1/2]$ виконується (2.2). Тоді при $n \to \infty$

$$\frac{V_n - \mu_\alpha^{-1}\log n}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3}\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \tag{2.15}$$

де $\mu_\alpha := \psi(1) - \psi(1-\alpha)$ *і* $\sigma_\alpha^2 := \psi'(1-\alpha) - \psi'(1)$, *та* $\mathcal{N}(0,1)$ *позначає випадкову величину зі стандартним нормальним розподілом.*

З використанням суто ймовірнісних міркувань ми доведемо теорему 2.4. Наш результат є менш сильним, ніж твердження 2.3, оскільки ми використовуємо випадкове центрування. Проте його перевага полягає у тому, що ми не потребуємо виконання досить жорсткої умови (2.14).

Теорема 2.4. *Якщо*

$$\mathbb{P}\{\xi > n\} \sim n^{-1}L(n), \quad n \to \infty \tag{2.16}$$

для деякої функції L, *яка повільно змінюється на* ∞, *та* $\sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \infty$, *то при* $n \to \infty$

$$\frac{V_n - \mathbb{E}(V_n|R(n))}{\sqrt{\log m(n)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Припустимо що

$$\mathbb{P}\{\xi > n\} \sim n^{-\alpha}L(n), \quad n \to \infty \tag{2.17}$$

для деякого $\alpha \in (0,1)$ *і деякої функції* L, *яка повільно змінюється на* ∞. *Якщо* $\alpha \in (0, 1/2]$, *припустимо, що виконується умова* (2.2). *Тоді*

$$\frac{V_n - \mathbb{E}(V_n|R(n))}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3} \log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty, \tag{2.18}$$

де μ_α *і* σ_α^2 *визначаються таким же чином, як і у твердженні 2.3.*

Зауваження 2.5. Вигляд знаменника в (2.18) суттєво залежить від виконання співвідношення

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{\xi_1 + ... + \xi_k = n\} \sim \frac{\sin \pi a}{\pi} \frac{1}{n^{1-\alpha}L(n)}, \quad n \to \infty. \tag{2.19}$$

З теореми 1.1 в [5] відомо, що якщо $\alpha \in (1/2, 1)$, то співвідношення (2.19) і (2.17) еквівалентні. Однак, якщо $\alpha \in (0, 1/2]$, то з (2.19) слідує (2.17), але зворотня імплікація виконується не завжди. Для того, щоб з (2.17) випливало (2.19), необхідне виконання додаткових умов, наприклад,

- послідовність (u_n) монотонна;
- або послідовність (p_n) монотонна, починаючи з деякого n (наслідок 3-А в [15]);
- або виконується (**??**) (теорема B в [2]).

Для деяких конкретних розподілів ξ центральні граничні теореми для V_n можуть бути отримані з існуючих у літературі результатів для Λ-коалесцентів. Зазначимо, що реалізація такої можливості не є миттєвою і потребує певних зусиль.

Теорема 2.6. *Припустимо, що*

$$p_k = \frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)\Gamma(k+2)}, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.20}$$

для $a \in (1,2)$. Якщо $a \in (0,1)$, то V_n слабко збігається до змішаного пуассонівського розподілу. Якщо $a = 1$, то при $n \to \infty$

$$\frac{V_n - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1). \tag{2.21}$$

Якщо $a \in (1,2)$, то при $n \to \infty$

$$\frac{V_n - \mu_{2-\alpha}^{-1}\log n}{\sqrt{\sigma_{2-\alpha}^2 \mu_{2-\alpha}^{-3}\log n}} \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \tag{2.22}$$

де μ_α і σ_α^2 визначаються таким же чином, як у твердженні (2.3).

2.1 Доведення теореми 2.4

Для фіксованих $n \in \mathbb{N}$ і $k \in \mathbb{N}$ позначимо через $J_k(n)$ відстань між n і $R(n)$ після k-го стрибку $R(n)$. Зокрема, $J_0(n) = n$, $n - J_1(n)$ – це величина першого стрибку $R(n)$ і.т.д. Тоді $J(n) := (J_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$ – спадний марківський ланцюг з ймовірностями переходу

$$\mathbb{P}\{J_{k+1}(n) = j | J_k(n) = i\} = \frac{p_{i-j}}{p_1 + ... + p_{i-1}}, \quad 1 \leq j < i. \tag{2.23}$$

Ланцюг поглинається у стані 1, і кількість стрибків $M_n = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : J_k(n) = 1\}$ – це час поглинання $J(n)$.

Коли ланцюг перебуває у стані $j \geq 2$, внесок до V_n робиться випадковою величиною θ_j, яка являє собою кількість разів, що ланцюг залишається у стані j. Звідси маємо предсталення

$$V_n = \sum_{k=0}^{M_n-1} \theta_{J_k(n)} = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{J_k(n)\geq 2\}}, \tag{2.24}$$

що є принципово важливим для подальшого викладення. Зрозуміло, що $(\theta_j)_{2\leq j\leq n}$ – незалежні випадкові величини, які також незалежні від $J(n)$. При цьому θ_j має геометричний розподіл з параметром $r_j := p_1 + ... + p_{j-1}$, тобто

$$\mathbb{P}\{\theta_j = m\} = r_j(1-r_j)^m, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Покладемо

$$s(j) := \mathbb{E}\theta_j = \frac{1-r_j}{r_j}, \quad t(j) := \mathbb{D}\theta_j = \frac{1-r_j}{r_j^2}, \quad j \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

та

$$U_n := \mathbb{E}(V_n | R(n)) = \mathbb{E}(V_n | J(n)) = \sum_{k\geq 0} s(J_k(n))\mathbb{1}_{\{J_k(n)\geq 2\}}$$

і

$$W_n := \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}\left((R_{J_k(n)} - s(J_k(n)))^2 | J(n)\right) \mathbb{1}_{\{J_k(n)\geq 2\}} = \sum_{k\geq 0} t(J_k(n))\mathbb{1}_{\{J_k(n)\geq 2\}}.$$

Головне спостереження полягає у тому, що при заданому $J(n)$ величина V_n є сумою незалежних випадкових величин. Отже, ми зможемо скористатися стандартною теорією.

Лема 2.7. *Якщо* $W_n \xrightarrow{P} \infty$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\frac{V_n - U_n}{\sqrt{W_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty. \tag{2.25}$$

Доведення. Покладемо

$$Y_{k,n} := \frac{\theta_{J_k(n)} - s(J_k(n))}{\sqrt{W_n}} \mathbb{1}_{\{J_k(n) \geq 2\}}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Тоді

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(Y_{k,n}^2 | J(n)) = 1 \quad \text{м.н.}$$

Ми збираємося довести, що

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(Y_{k,n}^2 \mathbb{1}_{\{|Y_{k,n}| > \epsilon\}} | J(n)) = 0 \quad \text{за ймовірністю} \tag{2.26}$$

для всіх $\epsilon > 0$. Для $s, i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\theta_i^2 \mathbb{1}_{\{\theta_i \geq s\}} &= t(i)(1-r_i)^{s-1}(2(1-r_i)^2 + (1-r_i)r_i(1+2s) + r_i^2) \\ &\leq t(i)(1-r_i)^{s-1}(4+2s) \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}\theta_i)^2 \mathbb{P}\{\theta_i \geq s\} - 2\mathbb{E}\theta_i \mathbb{E}\theta_i \mathbb{1}_{\{\theta_i \geq s\}} &= -t(i)(1-r_i)^s(1 - r_i + r_i s) \\ &\geq -t(i)(1-r_i)^s(1+2s). \end{aligned}$$

Далі маємо $1 - r_{J_k(n)} \leq 1 - r_2 < 1$ і $s(J_k(n)) \leq s(2)$ м.н. на $\{J_k(n) \geq 2\}$. Отже,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(\theta_{J_k(n)}^2 \mathbb{1}_{\{\theta_{J_k(n)} > s(J_k(n)) + \epsilon W_n\}} | J(n)) \mathbb{1}_{\{J_k(n) \geq 2\}} \\ \leq \; & \sum_{k \geq 0} t(J_k(n))(1 - r_{J_k(n)})^{[s(J_k(n)) + \epsilon W_n]}(6 + 2[s(J_k(n)) + \epsilon W_n]) \mathbb{1}_{\{J_k(n) \geq 2\}} \\ = \; & W_n O((1-r_2)^{\epsilon W_n} W_n) = o(W_n) \quad \text{за ймовірністю} \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\geq 0}(-s^2(J_k(n))\mathbb{P}\{\theta_{J_k(n)} > s(J_k(n)) + \epsilon W_n | J(n)\} \\
+ \;& 2s(J_k(n))\mathbb{E}(\theta_{J_k(n)}\mathbb{1}_{\{\theta_{J_k(n)}>s(J_k(n))+\epsilon W_n\}}|J(n)))\mathbb{1}_{J_k(n)\geq 2} \\
\leq \;& \sum_{k\geq 0} t(J_k(n))(1-r_{J_k(n)})^{[s(J_k(n))+\epsilon W_n]}(3+2[s(J_k(n))+\epsilon W_n])\mathbb{1}_{J_k(n)\geq 2} \\
= \;& W_n O((1-r_2)^{\epsilon W_n} W_n = o(W_n) \quad \text{за ймовірністю.}
\end{aligned}$$

Це доводить одну частину (2.26), а саме

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(Y_{k,n}^2\mathbb{1}_{\{Y_{k,n}>\epsilon\}}|J(n)) = 0 \quad \text{за ймовірністю.}$$

Доведення іншої частини не потребує обчислень. Дійсно, з послідовності (n_l), яка розбігається на нескінченність, ми можемо вибрати таку підпослідовність n_{l_j}, для якої $\lim_{j\to\infty} W_{n_{l_j}} = \infty$ м.н. Враховуючи, що послідоність $s(J_k(n_{l_j}))$ є обмеженою м.н. на події $\{J_k(n_{l_j}) \geq 2\}$, ми приходимо до висновку:

$$\mathbb{1}_{\{\theta_{J_k(n_{l_j})} < s(J_k(n_{l_j})) - \epsilon W_{n_{l_j}}\}} = 0$$

для достатньо великих j м.н. на $\{J_k(n_{l_j}) \geq 2\}$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(Y_{k,n_{l_j}}^2\mathbb{1}_{\{Y_{k,n_{l_j}}<-\epsilon\}}|J(n_{l_j})) = 0 \quad \text{за ймовірністю.}$$

Оскільки такі ж міркування можна провести для кожної послідовності (n_l), можна зробити висновок, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}(Y_{k,n}^2\mathbb{1}_{\{Y_{k,n}<-\epsilon\}}|J(n)) = 0 \quad \text{за ймовірністю}$$

Доведення (2.26) завершено.

З послідовності (n_l), яка розбігається на нескінченність, ми можемо вибрати таку підпослідовність (n_{l_j}), для якої при $j \to \infty$ співвідношення (2.26) виконується м.н. Отже, за теоремою Ліндеберга-Феллера (ст.116 в [3]) маємо

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{V_{n_{l_j}} - U_{n_{l_j}}}{\sqrt{W_{n_{l_j}}}} > x \Big| J(V_{n_{l_j}}) \right\} = \mathbb{P}\{\mathcal{N}(0,1) > x\}$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$ м.н., і, отже, після переходу до математичних сподівань

$$\lim_{j\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \frac{V_{n_{l_j}} - U_{n_{l_j}}}{\sqrt{W_{n_{l_j}}}} > x \right\} = \mathbb{P}\{\mathcal{N}(0,1) > x\}$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$. Повторюючи такі ж міркування для всіх послідовностей (n_l), отримуємо виконання (2.25). $\square$

Лема 2.8. *Припустимо, що виконується умова (2.16) або (2.19). Тоді*

$$\frac{W_n}{\mathbb{E}W_n} \xrightarrow{P} 1, \quad n \to \infty, \tag{2.27}$$

і $\mathbb{E}W_n \sim \log m(n)$ *, якщо виконується (2.16), або* $\mathbb{E}W_n \sim \mu_\alpha^{-1} \log n$ *, якщо виконується (2.19).*

Для доведення леми 2.8 скористаємось теоремою 5.1 статті [10].

Лема 2.9. *Припустимо, що послідовності* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *і* $(a_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ *задовільняють умовам*

$$a_n = b_n + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a_k, \quad n \geq m, \quad n \in \mathbb{N}$$

і

$$a_n^{'} = b_n^{'} + \sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} a_k^{'}, \quad n \geq m, \quad n \in \mathbb{N}$$

для деякого $m \in \mathbb{N}$*, де*

$$\sum_{k=1}^{n-1} p_{nk} = 1, \quad p_{nk} \geq 0.$$

Якщо $b_n \geq 0$ *для достатньо великих* n*, і* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$*, то з* $b_n^{'} \sim b_n$ *при* $n \to \infty$ *випливає* $a_n^{'} \sim a_n$ *при* $n \to \infty$*.*

Доведення леми 2.8. В теоремі 2.1 було доведено, що при $n \to \infty$ $V_n/\mathbb{E}V_n \xrightarrow{P} 1$, $\mathbb{E}V_n^2 \sim (\mathbb{E}V_n)^2$ і $\mathbb{E}V_n \sim \log m(n)$, якщо виконується (2.16), або $\mathbb{E}V_n \sim \mu_\alpha^{-1} \log n$, якщо виконується (2.19).

Покладемо

$$a_n := \mathbb{E}V_n \quad \text{i} \quad a_n^{'} := \mathbb{E}W_n.$$

Ці послідовності задовільняють таким рекурентним співвідношенням

$$a_n = s(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \mathbb{P}\{J_1(n) = k\}, \quad n \geq 2$$

та

$$a_n^{'} = t(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{'} \mathbb{P}\{J_1(n) = k\}, \quad n \geq 2.$$

Оскільки $s(n) \sim t(n)$, $n \to \infty$, то за лемою 2.9 $\mathbb{E}W_n \sim \mathbb{E}V_n$, $n \to \infty$.

Покладемо тепер

$$a_n := \mathbb{E}V_n^2 \quad \text{i} \quad a_n^{'} := \mathbb{E}W_n^2.$$

Ці послідовності задовільняють таким рекурентним співвідношенням

$$a_n = 2s(n)\mathbb{E}V_n + t(n) - s^2(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \mathbb{P}\{J_1(n) = k\}, \quad n \geq 2$$

та

$$a_n^{'} = 2t(n)\mathbb{E}W_n + t(n) - t^2(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^{'} \mathbb{P}\{J_1(n) = k\}, \quad n \geq 2.$$

Оскільки

$$2s(n)\mathbb{E}V(n) \sim 2s(n)\mathbb{E}V_n + t(n) - s^2(n) \sim 2t(n)\mathbb{E}W_n - t_n^2 \sim 2t(n)\mathbb{E}W_n,$$

при $n \to \infty$, то за лемою (2.9) отримуємо $\mathbb{E}W_n^2 \sim \mathbb{E}V_n^2$ при $n \to \infty$.

Таким чином, співвідношення $\mathbb{E}W_n^2 \sim \mathbb{E}V_n^2$ при $n \to \infty$ доведено. Тепер (2.27) випливає з нерівності Чебишева. □

Леми 2.7 і 2.8 разом дають доведення теореми (2.4).

2.2 Доведення теореми 2.6

Нехай $\Pi_n = (\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ - Λ-коалесцент з

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = ax^{a-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x,$$

де a таке ж, як у (2.20). Це неперервний справа марківський процес з лівосторонніми границями зі значеннями у множині розбиттів $\{1, 2, \ldots, n\}$, який починається в $t = 0$ з n синглтонів і розвивається згідно з такою динамікою. Для кожного $t > 0$, коли кількість кластерів дорівнює m, то кожен набір з k кластерів зливається в один кластер з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k} = \int_{[0,1]} x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x), \quad 2 \leq k \leq m.$$

Процес Π_n можна визначити для всіх n як звуження коалесцента Π_∞, який починається з нескінченною кількістю кластерів та набуває значень у множині розбиттів $\mathbb{N}$. Нехай $\#\Pi_n(t)$ - кількість кластерів в момент часу t. Можна перевірити, що $(\#\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ – це марківський процес загибелі з множиною станів $\{1, .., n\}$ та інтенсивностями переходу

$$g_{n,m} = \binom{n}{m-1}\lambda_{n,n-m+1} = \frac{n!}{(n-m+1)!}\frac{a\Gamma(a+n-m-1)}{\Gamma(a+n-1)}$$

для $1 \leq m \leq n-1$. Зокрема, повна інтенсивність зі стану n є такою

$$g_n = \sum_{m=1}^{n-1} g_{n,m} = \frac{a}{2-a}\left(\frac{\Gamma(a)\Gamma(n+1)}{\Gamma(a+n-1)} - 1\right).$$

Позначимо через

$$I(n) := (I_k(n))_{k\in\mathbb{N}_0}$$

послідовність стрибків $(\#\Pi_n(t))_{t\geq 0}$ з $I_0(n) = n$. Звичайно, це є спадним ланцюгом Маркова з ймовірностями переходу

$$\mathbb{P}\{I_{k+1}(n) = j | I_k(n) = i\} = \frac{g_{i,j}}{g_i} = \frac{i!}{(i-j+1)!}\frac{(2-a)\Gamma(i+a-1)}{\Gamma(a)\Gamma(i+1) - \Gamma(i+a-1)} \tag{2.28}$$

для $1 \le j < i$. Нехай τ_n позначає час поглинання Π_n, тобто

$$\tau_n := \inf\{t \ge 0 : \#\Pi_n(t) = 1\}.$$

Тоді маємо

$$\tau_n = \sum_{k\ge 0} T_{I_k(n)} \mathbb{1}_{\{I_k(n)\ge 2\}}, \tag{2.29}$$

де T_k – це час до першого зіткнення за умови, що є k кластерів. Зокрема, $(T_j)_{2\le j\le n}$ є незалежними випадковими величинами, які не залежать від $I(n)$, і T_j має експоненційний розподіл з параметром g_j, тобто

$$\mathbb{P}\{T_j > x\} = e^{-g_j x}, \quad x \ge 0.$$

Припускаючи (2.20) та використовуючи (2.23) і (2.28), отримуємо

$$\mathbb{P}\{J_{k+1}(n) = j | J_k(n) = i\} = \mathbb{P}\{I_{k+1}(n) = j | I_k(n) = i\}$$

для $1 \le j < i$. Таким чином, $J(n)$ має такий же розподіл, як і $I(n)$. Нехай $(N_t)_{t\ge 0}$ є процесом Пуассона з інтенсивністю $a/(2-a)$, який не залежить від Π_n. Ми стверджуємо, що

$$N_{T_j} \overset{d}{=} \theta_j. \tag{2.30}$$

Дійсно, поклавши $\lambda := a/(2-a)$, маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{N_{T_j} = m\} &= \mathbb{E} e^{-\lambda T_j} \frac{\lambda^m T_j^m}{m!} = \frac{\lambda^m}{m!} g_j \int_0^\infty y^m e^{-(\lambda + g_j)y} dy \\ &= \frac{\lambda^m}{m!} \frac{g_j}{(\lambda + g_j)^{m+1}} \int_0^\infty y^m e^{-y} dy = \frac{g_j}{\lambda + g_j} \left(\frac{\lambda}{\lambda + g_j} \right)^m \\ &= r_j (1 - r_j)^m \end{aligned}$$

для $m \in \mathbb{N}_0$. Остання рівність випливає з

$$\frac{\lambda}{\lambda + g_j} = \frac{a}{a + (2-a) g_j} = \frac{\Gamma(a + j - 1)}{\Gamma(a)\Gamma(j+1)} = \mathbb{P}\{\xi \ge j\} = 1 - r_j.$$

Використовуючи (2.30) і той факт, що $(N_t)_{t\geq 0}$ має незалежні стаціонарні прирости, маємо

$$V_n \overset{d}{=} N_{\tau_n} \tag{2.31}$$

з використанням (2.24) і (2.29).

Випадок $a \in (0,1)$: згідно з прикладом 15 в [14] нескінченний коалесцент Π_∞ (який називається бета $(a,1)$-коалесцентом) вистрибує з нескінченності (comes down from infinity), що, зокрема, означає

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau \quad \text{м.н.}$$

для деякої м.н. скінченної випадкової величини τ. Згідно з (2.31)

$$V_n \overset{d}{\to} N_\tau, \quad n \to \infty.$$

Випадок $a \in [1,2)$: з прикладу 15 в [14] відомо, що бета $(a,1)$-коалесцент залишається нескінченним, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty \quad \text{м.н.}$$

Отже, за центральною граничною теоремою для процесів Пуассона

$$\frac{N_{\tau_n} - \frac{a}{2-a}\tau_n}{\sqrt{\frac{a}{2-a}\tau_n}} \overset{d}{\to} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty. \tag{2.32}$$

Підвипадок $a = 1$: згідно з твердженням 3.4 в [7]

$$\tau_n - \log\log n \overset{d}{\to} Y, \quad n \to \infty,$$

де

$$\mathbb{P}\{Y \leq x\} = \exp\{-\exp(-x)\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Зокрема,

$$\frac{\tau_n}{\log\log n} \overset{P}{\to} 1, \quad n \to \infty \tag{2.33}$$

і
$$\frac{\tau_n - \log\log n}{\sqrt{\log\log n}} \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty. \tag{2.34}$$
Використовуючи (2.32) (з $a = 1$) і (2.33), отримуємо
$$\frac{N_{\tau_n} - \tau_n}{\sqrt{\log\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty.$$
Таким чином, з урахуванням (2.31) і (2.34) виконується (2.21).

Підвипадок $a \in (1,2)$: згідно з прикладом 4.1 в [6]
$$\frac{\tau_n - m^{-1}\log n}{\sqrt{m^{-3}s^2\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \quad n \to \infty \tag{2.35}$$
звідки випливає
$$\frac{\tau_n}{\log n} \xrightarrow{P} m^{-1}, \quad n \to \infty, \tag{2.36}$$
де
$$m := \frac{a}{2-a}\left(\frac{1}{a-1} - \Psi(a) + \Psi(1)\right) = \frac{a}{2-a}(\Psi(1) - \Psi(a-1))$$
і
$$\begin{aligned} s^2 &:= \frac{a}{(a-1)(2-a)}\Big(2(\Psi(a) - \Psi(1)) - (a-1)((\Psi(a) - \Psi(1))^2 \\ &+ \Psi'(1) - \Psi'(a))\Big) = \frac{a}{2-a}(\Psi'(a-1) - \Psi'(1) - (\Psi(1) - \Psi(a-1))^2 \end{aligned}$$
Нагадаємо, що Ψ позначає логарифмічну похідну гамма-функції. Для отримання правих частин обох рівностей була використана рівність
$$\Psi(a) = (a-1)^{-1} + \Psi(a-1), \quad a > 1.$$
З (2.32) і (2.36) маємо
$$\frac{N_{\tau_n} - \frac{a}{2-a}\tau_n}{\sqrt{\frac{as^2}{(2-a)m^3}\log n}} \xrightarrow{d} X_1 \stackrel{d}{=} \mathcal{N}(0, m^2/s^2), \quad n \to \infty$$

тоді як, згідно з (2.35)

$$\frac{\frac{a}{2-a}(\tau_n - m^{-1}\log n)}{\sqrt{\frac{as^2}{(2-a)m^3}\log n}} \xrightarrow{d} X_2 \overset{d}{=} \mathcal{N}(0, a/(2-a)), \quad n \to \infty$$

де X_1 і X_2 незалежні. Оскільки

$$\frac{2-a}{a}m = \Psi(1) - \Psi(a-1) - \mu_{2-a}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{a}{2-a}\frac{s^2}{m^3}(\frac{m^2}{s^2} + \frac{a}{2-a}) &= \frac{1}{\Psi(1) - \Psi(a-1)} \\ &+ \frac{\Psi'(a-1) - \Psi'(1) - (\Psi(1) - \Psi(a-1))^2}{(\Psi(1) - \Psi(a-1))^3} \\ &= \frac{\Psi'(a-1) - \Psi(1)}{(\Psi(1) - \Psi(a-1))^3} = \frac{\sigma_{2-a}^2}{\mu_{2-a}^3} \end{aligned}$$

отримуємо (2.22).

3 Висновки

В даній роботі було доведено слабкий закон великих чисел (теорема 2.1) та центральну граничну теорему (теорема 2.4) для числа нульових приростів V_n у випадковому блуканні з бар'єром n за умови, що розподіл кроку випадкого блукання має важкий хвіст. Мариничем О. та Вєрьовкіним Г. у роботі [11] була доведена центральна гранична теорема для числа нульових приростів за допомогою методу ймовірнісних метрик. Їх доведення суттєво базувалося на припущенні $\mathbb{P}\{\xi > n\} = cn^{-\alpha} + O(n^{-(\alpha+\epsilon)})$. Нам вдалося позбутися цієї умови та навести суто ймовірнісне доведення, яке є абсолютно відмінним від доведення, наведеного у статті [11]. Також у теоремі 2.4 показано, що центральна гранична теорема для часу поглинання у одному класі коалесцентів з множинними зіткненнями може бути переформульована як центральна гранична теорема для числа нульових приростів у випадковому блуканні з бар'єром.

Джерела

[1] Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J.L. (1989). Regular variation, Cambridge: Cambridge University Press, 512 p.

[2] Doney, R. A. (1997). One-sided local large deviation and renewal theorems in the case of infinite mean. Probab. Theory Related Fields, 107, 451-465

[3] Durrett, R. (1996). Probability: theory and examples. Second edition. Belmont : Duxbury Press.

[4] Erickson, K. B. (1970). Strong renewal theorems with infinite mean. Trans. Amer. Math. Soc. 151, 263–291.

[5] Garcia, A. and Lamperti, J. (1963). A discrete renewal theorem with infinite mean. Comment. Math. Helv. 37, 221-234.

[6] Gnedin, A., Iksanov, A. and Marynych, A. (2011). On Λ-coalescent with dust component. J.Appl. Probab. 48, 1133-1151.

[7] Goldschmidt, C. and Martin, J.B.(2005). Random recursive trees and the Bolthausen-Sznitman coalescent. Electron. J. Probab 10, 718-745.

[8] Iksanov, A. and Möhle, M. (2008). On the number of jumps of random walks with a barrier. Adv. Appl. Prob. 40, 206–228.

[9] Iksanov, A. M. and Negadailov, P. A. (2008). On the number of zero increments of random walk with barrier. Discrete mathematics and computer science, Proceeding series. AG, 247-254.

[10] Marynych, A. (2010). On the asymptotics of moments of linear random recurrences. Theory Stoch. Proc. 16(32), 106-119.

[11] Marynych, A. and Verovkin, G. (2014). Weak convergence of the number of zero increments in the random walk with barrier. Electron. Commun. Probab. 19, 1–11.

[12] Meir, A. and Moon, J. (1974). Cutting down recursive trees. Math. Biosci. 21, 173-181.

[13] Meyer, P. A. (1966). Probability and potentials, Waltham, Mass.- Toronto-London: Blaisdell Publishing Company, 266 p.

[14] Schweinsberg, J. (2000). A necessary and sufficient condition for the Λ-coalescent to come down from infinity. Electron. Commun. Probab 5, 1-11.

[15] Williamson, J.A. (1968). Random walks and Riesz kernels. Pacific J. Math. 25, 393-415.