

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
Кафедра комп'ютерної інженерії

«Зарядова та струмова нейтралізація електронного пучка,
інжектowanego в плазму»

Кваліфікаційна робота бакалавра
студента спеціальності
123 «Комп'ютерна інженерія»
Всеволода КОЖЕМЯКІНА
_____ (підпис)

Науковий керівник,
доктор фіз.-мат. наук, професор
Ігор АНІСІМОВ
_____ (підпис)

Рецензент
канд. фіз.-мат. наук, доцент
Олександр КЕЛЬНИК
_____ (підпис)

До захисту допускаю:

Завідувач кафедри
к.ф.-м.н., доцент
Юрій БОЙКО

КИЇВ 2022

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1 ФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ	4
1.1 Електронний пучок	4
1.2 Струм та прискорювальна напруга електронного пучка	4
РОЗДІЛ 2 ТРАНСПОРТУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ У ПЛАЗМІ	8
2.1 Зарядова та струмова нейтралізація пучка	8
2.2 Зарядова та струмова нейтралізація пучка: розгляд моделі Міллера	8
2.3 Якісний розгляд представленої моделі	9
РОЗДІЛ 3 ОТРИМАННЯ РІВНЯННЯ, ЩО ОПИСУЄ ЗБУДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ У ПЛАЗМІ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ	11
3.1 Опис моделі та вихідні рівняння	11
3.2 Лінеаризація початкових рівнянь	12
3.3. Отримання хвильового рівняння для електричного поля	12
3.4. Рівняння для s- і p-поляризованих хвиль	13
3.5. Отримання рівняння для поперечної компоненти електричного поля	15
3.6. Інтерпретація отриманого хвильового рівняння	18
3.7. Спрощення хвильового рівняння	18
3.8. Перехід до безрозмірних величин і граничні умови	20
ВИСНОВКИ	21
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	22

ВСТУП

Дослідження в галузі фізики плазми та електронних пучків сьогодні має застосування в різноманітних галузях фізики та техніки: вирішення проблеми керованого термоядерного синтезу, розвиток колективних методів прискорення частинок, створення нових типів підсилювачів та генераторів хвиль мікрохвильового діапазону, в плазмохімії та в інших технологічних процесах.

Плазма є середовищем, де можуть бути створені надсильні електричні поля для прискорення заряджених частинок.

Плазмова електроніка - розділ фізики плазми, що вивчає колективну взаємодію пучків (потоків) заряджених частинок із плазмою та газом. Головний аспект плазмової електроніки пов'язаний з вивченням стимульованих пучками коливань та хвиль у плазмі, процесів їх трансформації, різних нестійкостей та дисипативних структур, у тому числі турбулентності, що виникають на нелінійній стадії розвитку цих нестійкостей.

РОЗДІЛ 1 ФОРМУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ

1.1 Електронний пучок

Електронний пучок - це потік електронів, що рухаються в одному напрямку близькими траєкторіями. Довжина пучка значно перевищує його поперечні розміри.

Залежно від форми поперечного перерізу найчастіше трапляються три типи електронних пучків: стрічкоподібні, циліндричні та трубчасті. Надалі ми обмежимося розглядом пучків стрічкоподібної форми.

Насправді слід враховувати, що форма пучка може змінюватися у процесі його транспортування.

1.2 Струм та прискорювальна напруга електронного пучка

Основними характеристиками електронного пучка є його струм I та прискорювальна напруга U (або енергія прискорених електронів eU , яка зазвичай вимірюється в електрон-вольтах (eВ)). Енергія прискорених електронів визначає їхню швидкість.

Для нерелятивістських пучків

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}, \quad (1.2.1)$$

$$\text{або } v[\text{см/с}] \approx 6 \cdot 10^7 \sqrt{U[\text{В}]}, \text{ або } \beta \equiv v/c \approx 2 \cdot 10^{-3} \sqrt{U[\text{В}]}.$$

Електронні пучки прийнято вважати нерелятивістськими при $U \leq 10 \text{ кВ}$, коли $\beta \leq 0.2$.

Для релятивістських пучків закон збереження енергії має вигляд

$$\gamma mc^2 - mc^2 = eU, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2.2)$$

(γ – релятивістський фактор, по суті – нормована повна енергія частинки),

$$\text{звідки } \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{eU}{mc^2} + 1 \right)^{-2}}. \quad (1.2.2 \text{ a})$$

Пучки вважають ультрарелятивістськими за умови $eU > mc^2$, або $U > 511 \text{ кВ}$. При цьому, відповідно до формули (1.2.2 a), $\beta > 0.87$.

Прискорювачі електронів використовують для створення ультрарелятивістських пучків. Зазвичай це резонансні пристрої, у яких змінна напруга або хвиля з поздовжнім електричним полем прискорює ті електрони, які увійшли в сприятливу фазу прискорювального поля. Тому на виході таких прискорювачів утворюється періодична послідовність коротких електронних згустків.

Потужність електронного пучка може бути записана у звичайній формі: $P = IU$.

Також треба зазначити, що існують механізми, що обмежують можливий струм електронного пучка згори.

1.3 Електронні гармати

На практиці джерелом електронного пучка є пристрій, відомий як електронна гармата.

Електронна гармата - це пристрій, який створює пучок електронів бажаної конфігурації із заданою енергією. Електронні гармати зазвичай працюють у режимі високого вакууму.

Найпростіша схема електронної гармати представлена на рис. 1. Вона складається з катода, який діє як джерело електронів, керувального електрода (його також називають модулятором) і анода, на який подається прискорювальна напруга U_a . Через отвір в аноді електрони, що рухаються під невеликими кутами до осі системи, виходять із електронної гармати ззовні. Процеси у просторі між катодом та анодом в основному аналогічні тим, що відбуваються у звичайному

електровакуумному діоді.

Електронні гармати більш складної конструкції використовують кілька анодів, а також спеціальний прискорювальний електрод у вигляді порожнистого циліндра, який розташовується між модулятором і анодом (анодами). Прискорювальний електрод екранує катод від анодного поля, так що зміна анодної напруги не впливає на величину катодного струму та виконує деякі інші функції.

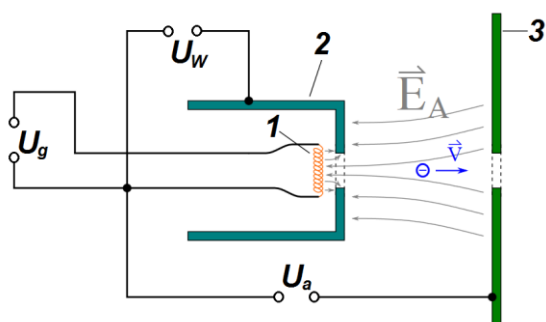


Рис. 1 - Схема електронної гармати:

1 – катод, 2 – керувальний електрод (модулятор, або венельт), 3 – анод

На рис. 1 показано, як працює модулятор – так званий циліндр Венельта, або просто венельт. Він має форму склянки, усередині якої розміщено катод. Його дно, яке зазвичай виготовляють із тугоплавкого металу – наприклад, платини або танталової фольги – має наскрізний отвір (так звану апертуру). Зміна додатної (щодо катода) напруги на венельті U_w (рис. 1) дозволяє контролювати інтенсивність потоку електронів, що залишають катод. При подачі від’ємної напруги на венельт на деякій відстані від нього пучок фокусується (рис. 2), а при великих від’ємних напругах електронна гармата блокується (струм зникає).

Як видно, електронна гармата принципово схожа на електровакуумний діод, який може бути її найпростішою моделлю.

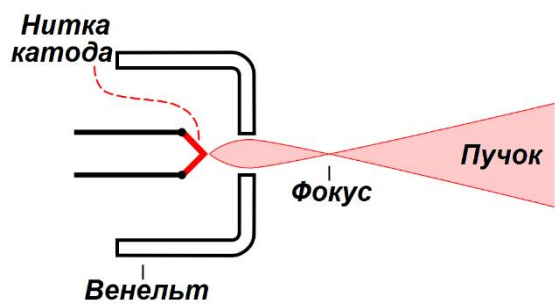


Рис. 2 - Схема формування електронного пучка за допомогою венельта

РОЗДІЛ 2 ТРАНСПОРТУВАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ПУЧКІВ У ПЛАЗМІ

Плазмова електроніка вивчає взаємодію пучків заряджених частинок з плазмою. Ця взаємодія дає ефект зарядової та струмової нейтралізації пучка. Саме зарядова та струмова нейтралізація може різко збільшити струм пучка в плазмі у порівнянні з транспортуванням у вакуумі. Однак для релятивістських електронних пучків у плазмі за відсутності (або після закінчення) струмової нейтралізації різко зростає роль власного магнітного поля, що також може обмежувати струм пучка.

2.1 Зарядова та струмова нейтралізація пучка

Електронний пучок несе в собі електричне поле (переважно радіальне для довгого циліндричного пучка) і магнітне поле (переважно азимутальне). У плазмі ці поля є причиною нестационарних процесів (частково схожих на перехідні процеси в електричних колах), що супроводжують інжекцію пучка і залежні від його параметрів, а також від провідності плазми, геометрії дрейфового простору та інших факторів.

До таких процесів відносяться, зокрема, зарядова та струмова нейтралізація пучка.

2.2 Зарядова та струмова нейтралізація пучка: розгляд моделі Міллера

Заряд, що вводиться в плазму електронним пучком, створює радіальне електричне поле, що призводить до виштовхування електронів плазми з об'єму пучка (рис. 3). Ці електрони поглинаються або осідають на стінках, що обмежують об'єм плазми (лабораторна плазма). Для компенсації заряду пучка необхідно, щоб густина плазми була не меншою за густину пучка. Характерний час нейтралізації заряду пучка складає величину порядку $1/4\pi\sigma$, де σ – активна провідність плазми. Зазвичай це значення набагато менше за 1 нс.

З іншого боку, магнітне поле, створюване пучком (точніше, згустком обмеженої довжини), помітно змінюється на його краях. В результаті під час руху цих фронтів індукується вихрове електричне поле (рис. 4). Він генерує так званий зворотний струм (back current, or inverse current) у плазмі (переважно в тій частині, через яку пучок проходить безпосередньо), спрямований на передньому фронті (front edge) проти струму, а на задньому фронті (back edge) – у тому самому напрямку.

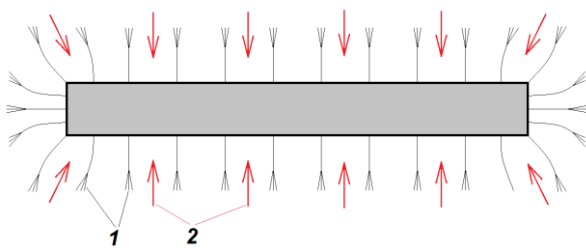


Рис. 3 - Електричне поле зарядженого згустку (1) та спричинені ним компенсаційні струми (2)

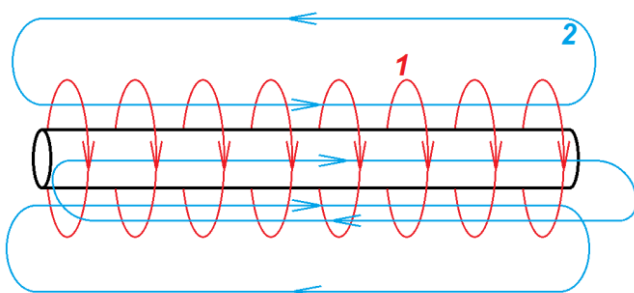


Рис. 4 - Магнітне (1) та вихрове електричне (2) поля, збуджувані в плазмі струмом електронного згустку

Зворотний струм, створюваний переднім фронтом електронного згустку, протікає у тій же області, що струм пучка, і може бути близький до нього за величиною. У результаті магнітне поле зворотного струму може повністю компенсувати магнітне поле пучка. Тому ефект виникнення зворотного струму іноді називають нейтралізацією магнітного пучка.

2.3 Якісний розгляд представленої моделі

Модель Міллера, наведена в монографії [5], розглядає плазмовий хвилевод з металевими стінками. Електронний пучок повністю заповнює переріз цього

хвилеводу. Саме тому струми зарядової та струмової компенсації протікають лише через передній та задній фронти електронного згустку, що дуже сильно обмежує реальні можливості використання такої моделі в експериментальних умовах.

В нашій роботі ми розглядаємо обмежений пучок у необмеженій плазмі, який, на відміну від моделі Міллера, значно краще відповідає умовам як космічних, так і лабораторних експериментів з інжекцією електронного згустку у плазму.

Для спрощення розрахунків замість циліндричного пучка будемо використовувати стрічкоподібний електронний згусток з прямокутним перерізом, висота якого є обмеженою, а ширина – нескінченно великою. Це все дозволяє користуватися декартовими координатами і в той же час подивитися, як розподілятиметься поперечний струм по довжині пучка.

РОЗДІЛ 3 ОТРИМАННЯ РІВНЯННЯ, ЩО ОПИСУЄ ЗБУДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ У ПЛАЗМІ ЕЛЕКТРОННИМ ПУЧКОМ

3.1 Опис моделі та вихідні рівняння

Електронний пучок має вигляд плоского шару завтовшки $2a$, довжиною L , в напрямку Y – необмежений і однорідний, так що $\partial/\partial y = 0$. Пучок електронів з концентрацією n_b рухається в напрямку Z зі швидкістю \vec{v}_b . Рух пучка вважаємо заданим. Тоді густина струму пучка (індекс b – від англ. beam, пучок) може бути записана у вигляді:

$$\vec{j}_b = -\vec{e}_z en_b v_b J(\vec{r}, t) \quad (1)$$

$$J(\vec{r}, t) = f_1(x) f_2(z, t); \quad (2)$$

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq a; \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad (3)$$

$$f_2(z, t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq z - v_b t \leq L; \\ 0, & (z - v_b t < 0) \cup (z - v_b t > L). \end{cases} \quad (4)$$

Пучок рухається в необмеженій однорідній плазмі, незбурена густина електронів та іонів n_p , температура електронів – T_e , іони вважаємо нерухомими. У плазмі $\mu = 1$, $\vec{H} = \vec{B}$ (користуємося системою одиниць Гаусса)

Рівняння Максвелла для електромагнітних полів мають вигляд:

$$\nabla \times \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} en_p \vec{v}_e + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_b + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6)$$

(враховано, що густина струму в плазмі $\vec{j}_e = -en_e \vec{v}_e$, де n_e та \vec{v}_e – миттєві концентрація та швидкість електронів плазми).

Електрони плазми задовольняють рівнянню руху (силою Лоренца нехтуємо через мализну магнітного поля):

$$m \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E} - \frac{1}{n_e} \nabla p - m\vec{v}_e \nu. \quad (7)$$

де $p = n_e k_B T_e$ – тиск електронів плазми (k_B – стала Больцмана, T_e – електронна температура), ν – частота зіткнень електронів з іонами, m і e – маса і заряд електрона.

Систему (5)-(7) слід доповнити рівнянням неперервності

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_p \nabla \cdot \vec{v}_e = 0. \quad (8)$$

Система (5)-(8) містить 10 рівнянь (рівняння (5)-(7) – векторні) з 10 невідомими (на 3 компоненти векторів \vec{E} , \vec{B} , \vec{v}_e , а також величину n_e).

3.2 Лінеаризація початкових рівнянь

Будемо вважати, що

$$n_e = n_p + \tilde{n}(r, t), |\tilde{n}| \ll n_p. \quad (9)$$

Плазма в цілому нерухома, тому $v_e \sim \tilde{n}$ (того ж порядку малости). Тоді рівняння (7)-(8) можна лінеаризувати:

$$m \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e \vec{E} - \frac{k_B T}{n_p} \nabla n_e - m v_e v; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial t} + n_p \nabla \cdot \vec{v}_e = 0; \quad (11)$$

(в рівняннях залишили тільки доданки першого порядку малости).

Перепишемо рівняння (10) у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \right) \vec{v}_e = -\frac{e}{m} \vec{E} - \frac{v_{Te}^2}{n_p} \nabla n_e. \quad (12)$$

3.3 Отримання хвильового рівняння для електричного поля

Візьмемо ротор від обох частин рівняння (6) і виключимо $\nabla \times \vec{B}$ за допомогою рівняння (5). Отримаємо:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{4\pi}{c} e n_p \vec{v}_e + \frac{4\pi}{c} \vec{j}_b + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

або

$$\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = \frac{4\pi e n_p}{c^2} \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \vec{j}_b}{\partial t}. \quad (13)$$

Візьмемо градієнт від обох частин рівняння (11) і похідну за часом від рівняння (13):

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla n_e + n_p \nabla (\nabla \cdot \vec{v}_e) = 0. \quad (14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} - \frac{v_{Te}^2}{n_p} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathcal{K}. \quad (15)$$

Тепер за допомогою (14) виключимо з (15) величину \mathcal{K} . Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}} = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{v_{Te}^2}{n_p} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}}),$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}} - v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}}) = -\frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}. \quad (16)$$

Перепишемо (12) у вигляді

$$\frac{\partial \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}}}{\partial t} = \frac{c^2}{4\pi e n_p} \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right]. \quad (17)$$

Продиференціюємо (16) за часом і підставимо $\partial \mathbf{v}_e^{\mathbf{r}} / \partial t$ з (17). Отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right] - v_{Te}^2 \nabla \left(\nabla \cdot \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right] \right) = \\ = -\frac{4\pi e n_p e}{c^2 m} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}, \end{aligned}$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} \right] - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right],$$

або

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \omega_p^2 \mathbf{E} \right] = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right], \quad (18)$$

де $\omega_p^2 = 4\pi e^2 n_p / m$ – ленгмюрівська частота фонової плазми.

Проінтегруємо (18) один раз за часом:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\nabla \times \nabla \times + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \omega_p^2 \mathbf{E} \right] = \frac{4\pi}{c^2} \left[v_{Te}^2 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial \mathbf{j}_b^{\mathbf{r}}}{\partial t} \right]. \quad (19)$$

3.4. Рівняння для s- і p-поляризованих хвиль

Запишемо проєкції рівняння (19) на осі координат, врахувавши, що

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \\ -\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \end{pmatrix}.$$

Отримаємо:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\omega_p^2 E_x + v_{Te}^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] = 4\pi \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}; \quad (20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} E_y = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\omega_p^2 E_z + v_{Te}^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \right] = \\ & = \frac{4\pi}{c^2} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] j_b. \end{aligned} \quad (22)$$

Система (20)-(22) розпадається на дві незалежні підсистеми: рівняння (21) для компоненти E_y , що описує так звані s-поляризовані хвилі, і рівняння (20) та (22) для компонент E_x та E_z , які описують так звані р-поляризовані хвилі. Як видно з (20)-(22), електронний пучок може збуджувати тільки р-поляризовані хвилі. Тому надалі ми розглядатимемо лише рівняння (20) та (22).

Рівняння (20) перепишемо у формі

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E_x \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) E_x \right] = 4\pi \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},$$

або

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] E_x = 4\pi \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (23)$$

Рівняння (22) після перетворень набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \right) - v_{Te}^2 \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) E_z = \\ & = \frac{4\pi}{c^2} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] j_b, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right] E_z = \\ & = \frac{4\pi}{c^2} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] j_b \end{aligned} \quad (24)$$

3.5. Отримання рівняння для поперечної компоненти електричного поля

В силу того, що модель є симетричною щодо площини $x = 0$, в цій площині повинна виконуватися умова $E_x = 0$, яку зручно використати як граничну умову при розв'язанні відповідного диференціального рівняння. Тому виключимо із системи (23)-(24) компоненту E_z . Для цього на рівняння (23) подіємо оператором

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right]$$

на рівняння (24)– оператором

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z}$$

і віднімемо отримані рівняння. Маємо спочатку систему рівнянь

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right] \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial z} + \\ & + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] E_x = \\ & = 4\pi \frac{v_{Te}^2}{c^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right] \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}, \end{aligned} \quad (25)$$

та

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2 \right) \right] E_z = \\ & = \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial}{\partial t} \right] j_b, \end{aligned} \quad (26)$$

а після віднімання – рівняння

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} + \\
& + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \right] E_x = \\
& = 4\pi \frac{v_{Te}^2}{c^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) \right] \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} - \\
& - \frac{4\pi}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] j_b.
\end{aligned} \tag{27}$$

Спершу перетворимо правучастину рівняння (27):

$$\begin{aligned}
& \frac{4\pi}{c^2} \left[v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) \right] \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} - \\
& - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \frac{\partial}{\partial t} \right] \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} = \\
& = \left\{ v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) - v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \times \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} = \\
& = \left\{ v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right)^2 + v_{Te}^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} \times \\
& \times \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z} = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}.
\end{aligned} \tag{28}$$

З урахуванням (28) рівняння (27) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 E_x}{\partial z \partial x} + \\
& + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \omega_p^2\right) \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \right] E_x = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \\
& + \left\{ \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \right\} \times \\
& \times \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] E_x = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \\
& + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] E_x + \\
& + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) - \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \\
& + \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\omega_p^2 + v_{Te}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] E_x = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu\right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \right] E_x = \\
& = \frac{4\pi}{c^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}.
\end{aligned}$$

Остаточнo отримуємо хвильове рівняння для поперечного електричного поля р-поляризованих хвиль, збуджуваних пучком, у формі

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \right] E_x = \\ & = 4\pi \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \omega_p^2 \frac{v_{Te}^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (29)$$

3.6. Інтерпретація отриманого хвильового рівняння

Якщо прибрати електронний пучок (тобто покласти $j_b = 0$), рівняння (29)

розпадається на два:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] E_x = 0 \quad (30)$$

і

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) - v_{Te}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \omega_p^2 \right] E_x = 0. \quad (31)$$

Рівняння (30) описує поширення поперечних електромагнітних хвиль у плазмі із зіткненнями. Цим хвилям відповідає закон дисперсії

$$\omega^2 = c^2 (k_x^2 + k_z^2) + \frac{\omega_p^2 \omega}{\omega - i\nu}. \quad (32)$$

У використаному нами гідродинамічному наближенні температура плазми не впливає на ці хвилі.

Рівняння (31) описує поширення в плазмі поздовжніх (ленгмюрівських, або електронних плазмових) хвиль із законом дисперсії

$$\omega(\omega - i\nu) = v_{Te}^2 (k_x^2 + k_z^2) + \omega_p^2. \quad (33)$$

У холодній плазмі ($v_{Te}^2 = 0$) замість ленгмюрівських хвиль отримуємо ленгмюрівські коливання.

Отже, в загальному випадку рівняння (31) описує збудження заданим електронним пучком у плазмі електромагнітних та ленгмюрівських хвиль (або коливань).

3.7. Спрощення хвильового рівняння

Перейдемо до моделі холодної плазми ($v_{Te}^2 = 0$). Тоді рівняння (29) суттєво спрощується:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) + \omega_p^2 \right] E_x = 4\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (34)$$

Додатково спростити рівняння можна у випадку, коли

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) E_x \right| \gg \omega_p^2 |E_x|. \quad (35)$$

Отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] E_x = 4\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right)^2 \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z},$$

або, після інтегрування,

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu \right) \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (36)$$

Додатково припустимо, що

$$v_b \left| \frac{\partial E_x}{\partial \zeta} \right| \ll \nu |E_x|. \quad (37)$$

Тоді рівняння (36) набуває вигляду

$$\left[\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{\omega_p^2}{c^2 \nu} \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial z}. \quad (38)$$

Рівняння описує збудження електромагнітних полів заданим струмом електронного пучка, струм якого задається формулами (1)-(3). Цей струм залежить від координати x і комбінації $\zeta = z - v_b t$. Оскільки пучок рухається в однорідній плазмі, можна чекати, що збуджені ним поля також залежатимуть від x, ζ . Тоді в рівнянні (30) можна зменшити кількість змінних, зробивши заміни:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \zeta} = -v_b \frac{\partial}{\partial \zeta}. \quad (39)$$

Отримаємо:

$$\left[\left(-\frac{v_b^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\omega_p^2 v_b}{c^2 \nu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial E_x}{\partial \zeta} = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial \zeta}$$

або, після інтегрування,

$$\left[\left(-\frac{v_b^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) + \frac{\omega_p^2 v_b}{c^2 \nu} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_x = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x \partial \zeta},$$

або

$$\left[\left(1 - \frac{v_b^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\omega_p^2 v_b}{c^2 v} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_x = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x}$$

або

$$\left[\left(\frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \kappa \right) \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] E_x = \frac{4\pi}{v_b} \frac{\partial^2 j_b}{\partial x}, \quad (40)$$

де

$$\kappa = \frac{\omega_p^2 \gamma v_b}{c^2 v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_b^2/c^2}}. \quad (41)$$

3.8. Перехід до безрозмірних величин і граничні умови

Введемо безрозмірні змінні $\xi = \kappa \gamma \zeta$, $\chi = \kappa x$:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] E_x = \frac{4\pi}{\kappa v_b} \frac{\partial^2 j_b}{\partial \chi}, \quad (42)$$

Позначимо

$$j_b(\chi, \xi) = en_b v_b J(\chi, \xi), \quad \frac{\kappa E_x}{4\pi en_b} = \varepsilon,$$

де $J(\chi, \xi)$ та ε - відповідно безрозмірний розподіл струму пучка та безрозмірна поперечна компонента електричного поля. Отримаємо:

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2}{\partial \chi^2} \right] \varepsilon = \frac{\partial^2 J}{\partial \chi}. \quad (43)$$

Це рівняння нам і потрібно буде далі розв'язувати.

Оскільки модель симетрична щодо площини $x=0$, достатньо знати розв'язок у півплощині $\chi \geq 0$.

Граничні умови до рівняння (43) мають вигляд:

$$\varepsilon(\chi=0) = 0; \quad \varepsilon(\chi \rightarrow +\infty) = 0; \quad \varepsilon(\xi \rightarrow \pm\infty) = 0. \quad (44)$$

ВИСНОВКИ

1. В рамках моделі лінійної однорідної гідродинаміки теплої плазми і наближення заданого струму електронного пучка отримано рівняння, яке описує збудження електромагнітних полів у плазмі пучком електронів (рівняння (29)). Якщо частота електрон-іонних зіткнень низька, воно описує збудження кільватерних хвиль. В протилежному випадку воно описує процеси зарядової і струмової нейтралізації електронного пучка, інжектowanego в плазму. Рівняння, що описує ці процеси з єдиної точки зору, отримано вперше.

2. Вперше отримано строгі критерії, які визначають застосовність моделі, яка використовувалася в літературі для опису процесів зарядової і струмової нейтралізації електронного пучка (умови (35) і (37)).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Анісімов І.О, Романюк Л.І. Просвітлення, квазіпрозорість та інформаційна прозорість хвильових бар'єрів у неоднорідній плазмі. // Український фізичний журнал. Огляди. 2010. Т.6. №2. С. 101-139.
2. Анісімов І.О. Плазмова електроніка. Конспект лекцій. К., 2021.
3. Анісімов І.О. Фізика плазми. Конспект лекцій. К., 2018.
4. Кондратенко А.Н., Куклин В.М. Основы плазменной электроники. М., Энергоатомиздат, 1988.
5. Миллер Р. Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., Мир, 1984.