

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

Математичні моделі війни на основі рівняння Ланчестера



студента 4 курсу кафедри ДО
Володимира КОВТУНА



Науковий керівник:
доцент, доктор фізико-математичних наук
Андрій ШАТИРКО

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № від 2023 р.

Завідувач кафедри ДО



проф. Олександр ІКСАНОВ

Київ – 2023

АНОТАЦІЯ

Випускна кваліфікаційна робота бакалавра: 55 сторінок, 19 рисунків, 2 таблиці, 3 додатки, 19 інформаційних джерел.

Актуальність роботи: Повномаштабне вторгнення росії в Україну стимулювало досліджувати тему моделювання війн. На основі логічних і природних систем диференціальних рівнянь Ланчестера достатньо просто прогнозувати хід війни між двома противниками.

Об'єкт дослідження: Моделі Ланчестера з прицільним, ненаціленим вогнем. Війна між артилеріями. Битва за острів Іво-Джіма (1945 р.). Моделі зомбі (SZR) та (SIZR).

Мета роботи: Дослідити моделі Ланчестера зі змішаними силами з однієї або декількох сторін. Порівняти реальну зміну чисельності американських військ під час битви на острів Іво-Джіма з побудованою моделью. Розглянути при яких умовах українська артилерія виграє російську. Показати як буде змінюватися популяція при зомбі апокаліпсисі.

Предмет дослідження: Програмна реалізація моделей Ланчестера, (SZR) та (SIZR).

Ключові слова: МОДЕЛІ ЛАНЧЕСТЕРА, ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ, ЗОМБІ, ЗБЕРЕЖУВАЛЬНА ВЕЛИЧИНА, ПОПУЛЯЦІЯ.

Зміст

Вступ	4
Розділ 1. Три класичні варіанти моделей Ланчестера та постановка задач	6
1.1 Історичні відомості та припущення, які використовуються при моделюванні	6
1.2 Постановка задачі та її моделювання	6
1.3 Моделі з націленою стрільбою зі змішаними силами лише на одній стороні	9
1.4 Моделі з націленою стрільбою зі змішаними силами на обох сторонах	11
1.5 Розподіл цілей в змішаних моделях прицільного вогню	13
1.6 Оптимальне поєднання сил з врахуванням вартості	15
1.7 Обидві сторони змішані	16
1.8 Підсумок дослідження	17
Розділ 2. Битва за острів Іво-Джіма під час Другої світової війни	18
2.1 Публічні данні втрат обох сторін	18
2.2 Постановка задачі	19
2.3 Обрахунок коефіцієнтів	20
Розділ 3. Моделі Ланчестера для російсько-української війни артилерій	22
3.1 Постановка задачі для війни точної артилерій	23
3.1.1 Артилерія ламається швидше, ніж її знищує противник	23
3.1.2 Противник знищує артилерію швидше, ніж вона ламається	25
3.2 Сценарії війни	25
3.3 Поради щодо ведення бойових дій	27
3.4 Постановка задачі для війни динамічної артилерій	28
Розділ 4. Рівняння Ланчестера та зомбі-апокаліпсис	32
4.1 Хто такі зомбі, коли вони виникли та як їх знищити	32
4.2 Зомбі модель (SZR) на основі рівнянь Ланчестера	34
4.3 Зомбі модель (SIZR) на основі рівнянь Ланчестера	36
4.4 Аналіз та результати моделей за допомогою Maple	38
Висновок	45
Список використаних джерел	47
Додаток А. Графіки до розділу 4	48
Додаток В. Програмна реалізація через Maple та Wolfram	50
Додаток С. Отримання зберігаючих величин з розділу 1	55

Вступ

Математичне моделювання - це метод використання систем, рівнянь та інших інструментів для пояснення реальних сценаріїв. Математична модель вважається якісною, якщо висновки залишаються правдивими, навіть якщо модель може бути недостатньо точною. Моделі постійно оновлюються, щоб збільшити їх точність відображення реальності та зробити кращі передбачення. Існують різні типи моделювання, такі як детерміновані та стохастичні моделі. Детерміновані моделі не містять випадкових факторів і завжди виводять однаковий результат з заданої точки виходу, тоді як моделі, які містять випадковість та передбачають розподіл різних можливих результатів, відомі як стохастичні моделі. Математичні моделі також поділяються залежно від часової складності моделі. Неперервний процес описує системи, що постійно змінюються, тоді як дискретний процес описує системи, у яких більшість дій відбувається протягом короткого часу [15]. Динамічні системи відомі своїм легким формулюванням, але важкою розв'язуваністю. Це через те, що динамічні системи мало використовують лінійні диференціальні рівняння та тому мають нелінійні залежності для зображення впливу різних змінних на різні класи. Моделі, в яких зміна поведінки відбувається за дискретним процесом та є детермінованими, називаються дискретними динамічними системами [15], які є формою математичних моделей, що аналізуються у цьому дослідженні. Дискретні динамічні системи найкращі для дослідження, оскільки зміна різних популяційних класів відбувається протягом короткого періоду часу, що спрощує їх аналіз.

Класичні моделі війни Ланчестера використовувалися для різноманітних цілей з часу їх виникнення, століття тому [11]. Звичайно, їх порівнювали з даними з різних битв (див. наприклад, [14]), модифікували їх структуру, узагальнювали та включали в політико-орієнтовані симуляції наприклад, [9]. Але, можливо, ключовим джерелом їх вічної привабливості є суть багатьох добрих математичних моделей: вони використовують математику, щоб розкрити механізм, за яким спрощені умови вказують на неочікувані, можливо, навіть дивовижні висновки. У випадку моделей Ланчестера це спосіб, у який чисельність військ та ефективність їх одиниць поєднуються, щоб визначити результат зіткнення. Чітке розуміння таких властивостей може бути великою цінністю для приймачів рішень, у зовсім інших випадках, нас очікують більш непрозорі та складні симуляції.

Під час Першої світової війни Ф. В. Ланчестер наголошував на важливості концентрації військ в сучасних бойових діях. Він побудував математичні моделі, з яких можна було отримати очікувані результати бойових дій.

У цій роботі ми вносимо внесок до такого розуміння в гетерогенних (тобто змішаних) моделях війни Ланчестера, спочатку з випадковим, а потім з напівдинамічним розподілом цілей. Наш метод є простим і прозорим: конструювати та оптимізувати, для найбільш загальних гетерогенних випадків, аналоги простої постійної величини, різницю в показниках знищення

одиниць, помножені на квадрат їх чисельності, яка забезпечує головне розуміння у спрямованій моделі вогню Ланчестера.

З розділу першому, розглядаємо три класичні варіанти моделей Ланчестера: направленою вогню, ненаправленою вогню та асиметричної моделі, коментуючи значення терміну «бойова одиниця» та умови, що впливають в результаті асиметричної війни. Ми також розкажемо про найбільш загальну модель з поліноміальними степеневими коефіцієнтами зниження чисельності. Також ми розглядаємо моделі з змішаними силами, але з випадковим розподілом цілей, будуючи консервативні величини для моделей, які змішані з обох сторін (за умови, що коефіцієнти зниження чисельності типів одиниць роздільні). Далі розглядаємо напівдинамічну схему розподілу цілей, в якій розподіл спочатку вибирається вільно, але пізніше змінюється пропорційно числу синіх одиниць. Це дає консервативну величину для моделі направленою вогню, що дозволяє нам довести, що оптимальна стратегія червоного полягає в тому, щоб знищити кожен тип синіх одиниць по черзі, упорядкованих за добутком їх коефіцієнтів зниження чисельності і червоних одиниць.

В другому розділі підберемо одну з моделей війни Ланчестера до битви за острів Іво-Джіма під час Другої світової війни.

У третьому розділі спроектуємо наші дослідження на поточну ситуацію в Україні, будемо розглядати війну артилерій. Розглянемо модель війни точних артилерій на основі класичних диференціальних рівнянь Ланчестера. На основі цієї моделі ми розглянемо можливі сценарії розвитку такої війни та критичні параметри, які визначають результат війни. Також розглянемо динамічний підхід для війни, коли вагому роль у війську відіграє саме фактор артилерії.

В самому кінці роботи розглянемо тип математичних моделей які зображають умовні наслідки можливої зомбі війни (апокаліпсису). Будемо порівнювати ці два типи моделей. Переконаємось, що хоча обидва типи моделей були дискретними динамічними системами, моделі суттєво відрізнялися щодо свого походження, процесу розв'язування та структури відповідних диференціальних рівнянь.

Розділ 1. Три класичні варіанти моделей Ланчестера та постановка задач

1.1 Історичні відомості та припущення, які використовуються при моделюванні

Математичне моделювання було вперше використано для пояснення звичайних війн Ф. В. Ланчестером у 1915 році. Фредерік Вільям Ланчестер був відомим інженером, народженим у Льюїшамі, Англія, у 1868 році. Він був людиною з багатьма здібностями і вніс внесок в різні галузі, зокрема в автомобільну промисловість. У своїй книзі «Літаки в війні» (1916) [19] він ввів дві системи диференціальних рівнянь, щоб пояснити аспекти повітряної війни, які потім були адаптовані до моделей для різних бойових ситуацій. Моделі Ланчестера передбачали переможця, тривалість війни та тих, хто вижив на час (t) для певної битви. Диференціальні рівняння, що використовуються в моделях направленої вогню та ненаправленої вогню, описують результати бойових дій двох армій як функції часу і залежать від відносної сили нападаючого та того, хто в обороні. Відносна сила армії залежить від того, яка модель використовується, направленої вогню чи ненаправленої вогню. Щоб моделі Ланчестера точно описували результати битви, вони потребували виконання певних припущень. Припущення, що були необхідні для кожної моделі, обмежували тип битви, яку моделі Ланчестера можуть точно описати. Нижче наведено загальні припущення, які використовуються в моделях Ланчестера.

Припущення

- Немає можливості відступати.
- Немає значних відмінностей між нападаючою і оборонною арміями (тобто дві однорідні сили беруть участь в бойовій дії).
- Дві армії знаходяться на відстані від збройного противника.
- Темп, з яким зменшується чисельність армій (темп зношування), відомий та залишається постійним протягом тривалості битви.

1.2 Постановка задачі та її моделювання

Для дослідження моделей Ланчестера я припустив, що відбулася битва між двома арміями, позначеними як $R(t)$ червоними та $B(t)$ синіми, і що всі припущення загальних моделей Ланчестера були виконані. Нижче позначені змінні, які використовувалися як у моделі з прицільним вогнем, так і у моделі без прицільного вогню (партизанське військо). Коефіцієнти ефективності бойових дій були числовими, що відображали бойову здатність відповідної армії, яка включала середній рівень вмінь солдатів, наявні ресурси та інші різноманітні фактори.

Змінні:

r = бойова ефективність чоловіків R

b = бойова ефективність чоловіків B

R_t = кількість одиниць чоловіків R в час t

B_t = кількість одиниць чоловіків B в час t

Класична модель зорієнтованого вогню Ланчестера описує бій між $R(t)$ червоними та $B(t)$ синіми підрозділами, кожен з яких убиває r (відповідно b) ворожих підрозділів за одиницю часу. Тоді,

$$\frac{dR}{dt} = -bB_t, \quad \frac{dB}{dt} = -rR_t. \quad (1.1)$$

Далі буде позначта R_t як R , а B_t як B , для простоти написання.

Для спрощення, це повинна бути битва на винищення: вона закінчується, коли або $R = 0$, або $B = 0$. Насправді, неявні умови битви є досить жахливими: немає тактики чи управління, інформації чи комунікації, приховування чи засідок, абсолютна агресія та ідеальна концентрація (дистанційного націлювання) вогню. Було переконливо доведено, що наближення до таких умов у сухопутній війні збігається з загальною реальністю лише в період з 1914 по 1917 роки, і що визначальною характеристикою сучасної системи війни є саме пом'якшення таких умов [3].

$$\int rRdR = \int bBdB,$$

$$rR^2 + bB^2 = constant.$$

При таких умовах величина $rR^2 - bB^2$ є збереженою. Зокрема, вона не може змінювати знак, тому переможна сторона може бути тільки та, яка має більше значення того, що загалом називають "бойовою силою", добутком її швидкості вбивства та квадрата її чисельності. Це - знаменитий "квадратичний закон" Ланчестера, який ми розглядали в розділах вище. Таким чином, якщо на початку битви червоні мають подвійну кількість синіх, $R_0 = 2B_0$, але сині є втричі ефективніші, $b = 3r$, то перемогти можуть тільки червоні.

Дещо більш простішою є будь-яка модель, в якій співвідношення R/B є постійним, тоді зберігається кількість $rR - bB$, що називається "лінійним законом". Особливо Ланчестер звернув увагу на "древню" модель війни, в якій приблизно рівна кількість військ була залучена з кожного боку одночасно, або, альтернативно, на модель ненаціленого вогню в сучасній війні.

$$\frac{dR}{dt} = -bBR, \quad \frac{dB}{dt} = -rRB, \quad (1.2)$$

Це є природнім, коли темп знищення є пропорційним густині, і тому (на фіксованій площі) кількості оборонних одиниць. У нашому попередньому сценарії з $R_0 = 2B_0$ і $b = 3r$, тепер перемагає синя сторона.

Асиметрична модель [5] порівнює спрямований і неспрямований вогонь. Припустимо, що сині можуть націлюватися, а червоні - ні. Це спочатку було запропоновано як модель партизанської війни синіх, але також може стосуватися атаки червоних на відкритому просторі проти прихованих синіх захисників. Тоді:

$$\frac{dR}{dt} = -bB, \quad \frac{dB}{dt} = -r \frac{RB}{B_0}, \quad (1.3)$$

ми змінили масштаб убиваючої здатності червоних, відносно початкової кількості синіх одиниць B_0 , так що b/r є безрозмірним, а початкові кількості відповідають квадратному закону (1.1). Тоді консервативна величина є такою $\frac{1}{2}rR^2 - bBB_0$, і ми бачимо, що червоні повинні досягти удвічі більшої початкової швидкострільності або у $\sqrt{2}$ разів більше чисельності, щоб досягти такої ж бойової потужності, як і для (1.1).

Природнім узагальненням моделі для цілей (log-log) регресії на бойові дані, є взятий наступний варіант:

$$\frac{dR}{dt} = -bB^{b_1}R^{b_2}, \quad \frac{dB}{dt} = -rR^{r_1}B^{r_2}, \quad (1.4)$$

Це також має збережену величину, $\beta r R^\rho - \rho b B^\beta$, де $\rho = 1 + r_1 - b_2$, $\beta = 1 + b_1 - r_2$. Показники ρ ; β описують асиметрію, не тільки в тому, як комбінуються показники вбивства та чисельність, щоб створювати бойову силу, але й у узагальнення наслідків (1.3) (для якого $\rho = 2$; $\beta = 1$): можна перевірити, що червоний тепер повинен досягнути бойової сили ρ/β разів більшої, ніж у симетричній битві, щоб мати таку ж відносну бойову силу.

Нарешті, у цьому розділі, враховуючи те, що центральним пунктом моделей Ланчестера є пояснення того, як поєднуються чисельність та ефективність військових підрозділів, нам потрібно зрозуміти, що саме мається на увазі під "підрозділом". Наприклад, в чистій піхотній битві, чи це окремий солдат, або можливо, секція (близько 10 людей), взвод (30), рота, і.т.д. Звичайно, це не має значення, і ми можемо побачити, що це не має значення. Розгляньте (1.1) (або, (1.2, 1.3, 1.4)), і прийміть за основний підрозділ синіх N військовослужбовців. Тоді їх чисельність масштабується на $1/N$, а їх убивчість на N . Але убивчість червоних підрозділів проти синіх зараз масштабується на $1/N$, і вся різниця в бойових потужностях масштабується на $1/N$. Її знак і хід та результати битви залишаються незмінними.

Ця дискусія змушує нас думати про різні типи підрозділів. Ми тільки що побачили, що моделі Ланчестера не розрізняють між, скажімо, взводом, трьома відділами або тридцятьма людьми.

Розширюючи це, чи можна вважати броньований транспортний засіб еквівалентним N людям ? Очевидно, що це наївно: група людей на ногах працює інакше, навіть у простих моделях Ланчестера, ніж відділ в БМП. Ми розглянемо такі питання у математичному контексті в наступних розділах.

1.3 Моделі з націленою стрільбою зі змішаними силами лише на одній стороні

Спочатку розглянемо гетерогенність тільки з боку синіх. Припустимо, що військо синіх складається з n різних типів військ (іноді це називають $(n, 1)$ моделлю). Просте узагальнення моделі з цілеспрямованим вогнем (1.1) полягає в прийнятті такої моделі:

$$\frac{dR}{dt} = - \sum_{i=1}^n b_i B_i, \quad \frac{dB_i}{dt} = -r^i \mu^i R. \quad (1.5)$$

Тут ми присвоїли коефіцієнт вбивства b_i кожній одиниці синього типу i та r^i кожній одиниці червоного, коли вона атакує одиницю синього типу i . (У наших нотатках для коефіцієнтів вбивства ми використовуємо нижній індекс для міток нападників та верхні індекси для захисників. Останній не повинен сприйматися як показник ступеня.) Нові параметри μ^i описують призначення цілей [10], але якщо вони є константами, то їх можна поглинути в r^i . Більшість попередніх робіт сконцентровані на таких константних призначеннях; оптимальні рішення можна знайти, використовуючи прості, але дещо заплутані матричні методи.

В контексті того що ми починали наш аналіз, припускаючи у цьому підрозділі, що розподіл цілей є повністю випадковим, таким чином, що $\mu^i = B_i/B$, де $B = \sum_{i=1}^n B_i$. Звичайно, це врешті-решт є не добре: це змушує деякі червоні підрозділи марно витрачати свій вогонь на сині типи, проти яких вони повністю неефективні (r^i малі або дорівнюють нулю). Однак це корисний проміжний крок на шляху до наших подальших результатів і дозволяє нам вирішити важливе питання.

З такими випадковими розподілами досить просто показати, що величина

$$rR^2 - \sum_{i,j=1}^n r \frac{b_i + b_j}{r^i + r^j} B_i B_j \quad (1.6)$$

(з $r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r^i$) є консервативною при такому випадковому розподілі цілей. (Деталі подані в додатку С. для найбільш загального випадку (1.14) нижче.) Можливою першою річчю, на яку варто звернути увагу, є те, що не існує такого вибору r^i , який би відтворював початкове твердження Ланчестера, що бойова потужність синіх становить $(\sum_{i=1}^n \sqrt{b_i} B_i)^2$.

На цьому етапі ми можемо розв'язати незначну суперечність. У 1980-х роках було запропоновано використовувати однорідну модель прицільної вогневої підтримки (1.1) для

змішаних сил, в якій числа вагалися вогневою потужністю, а потім агрегувалися (додаток до [17 с. 208-209]). Наприклад, припустимо, що у синіх є 1000 солдатів (зі швидкістю знищення b_1) та 20 танків, а синій танк у 30 разів ефективніший за синього солдата. Тоді у моделі використовуватиметься бойова сила $(1000 + 20 \times 30)^2 b_1$ або $b_1 (B_1 + \frac{b_1}{b_2} B_2)^2$. Пізніші автори [7, 133] критикували це як наївне та писали, що правильна формула $(B_1 + B_2)(b_1 B_1 + b_2 B_2)$, або бойова сила синіх за (1.5, 1.6) з $r^1 = r^2$.

Для загального випадку n , припущення, що всі r^i є рівними [13 ст. 99 і 133], призводить до того, що бойова сила синіх дорівнює:

$$B \sum_{i=1}^n b_i B_i = b_{ave} B^2, \quad (1.7)$$

де

$$b_{ave} = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^n b_i B_i \quad (1.8)$$

є середньозважений показник знищення синіх.

Розв'язання полягає у визначенні того, як на першому наближенні r_i повинні залежати від b_i . Наприклад, припустимо, що два в інших відношеннях однакових солдата носять різну зброю, один більш потужний, ніж інший. Вони однакові захисно, так що $r^1 = r^2$, хоча нападаючи $b_1 \neq b_2$. У такому сценарії критики Кауфманна повністю праві. Однак ще одним природнім першим наближенням може бути $r^i = rk/b_i$, так що якщо (скажімо) синій танк є в тридцять разів ефективнішим проти червоних військ, ніж синій солдат, червоний солдат є лише 1/30 таким ефективним проти танків, як проти військ. Бойова сила синіх тоді є:

$$\sum_{i,j=1}^n r \frac{b_i + b_j}{r^i + r^j} B_i B_j = \sum_{i,j=1}^n r \frac{b_i + b_j}{k(b_i^{-1} + b_j^{-1})} B_i B_j = \frac{1}{k} \sum_{i,j=1}^n b_i b_j B_i B_j = \frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^n b_i B_i \right)^2, \quad (1.9)$$

пропорційна простому агрегуванню чисел, зважених бойовою потужністю, спочатку використаного Кауфманом. Звичайно, це також означає, що якщо танк б'є точно так само, як взвод з 30 солдат, то для цілей моделювання їх можна вважати ідентичними та агрегувати в бойовій потужності як однакові. Очевидно, інтерес полягає в відхиленні від таких наближень.

Форма збереженої кількості (1.6) досить природна: бойова сила синіх максимізується за рахунок типів підрозділів у пропорції до їх кількісних характеристик та обернено пропорційна до їх кількості втрат. Ще одним природним розрахунком, який слід виконати на цьому етапі, є надання кожному підрозділу синіх вартості c_i та загального бюджету F , і після цього визначити комбінацію підрозділів, яка максимізує бойову силу синіх.

Одержати екстремум для \mathbb{R}^n легко: за допомогою множника Лагранжа для обмеження $F = \sum_i c_i B_i$, отримаємо результат:

$$B_i = F \frac{\sum_{i,j=1}^n M_{ij}^{-1} c_j}{\sum_{j,k=1}^n c_j M_{jk}^{-1} c_k} \quad (1.10)$$

де

$$M_{ij} = \frac{b_i + b_j}{r^i + r^j}. \quad (1.11)$$

Проте пошук максимуму на $(\mathbb{R}^+)^n$ дещо складніший, оскільки внутрішній екстремум (1.10) зазвичай є мінімумом, і максимум знаходиться на межі. Немає хорошого опису цієї ситуації для загальних значень параметрів, хоча ми розглянемо випадок $n = 2$ в наступному підрозділі. Проте варто зауважити, що якщо, крім $r^i \propto b_i^{-1}$ і, ми встановимо $c_i \propto b$ - тобто, в нашому попередньому прикладі, танк не тільки б'ється та захищається, як взвод, але коштує також так само - то всі вибори еквівалентні, оскільки вони зводяться до максимізації $(\sum_{i=1}^n b_i B_i)^2$ за умови фіксованого значення $\sum b_i B_i$. Як ми вже зазначали, ненульові вибори полягають саме в відхиленнях від цього твердження.

1.4 Моделі з націленою стрільбою зі змішаними силами на обох сторонах

Ми тепер узагальнимо на випадок різноманітності на обох сторонах, з m типами червоних військ (модель (n, m)), позначених грецькими індексами. Узагальнення (1.5) з випадковим розподілом на обох сторонах виглядає наступним чином:

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = - \left(\sum_{i=1}^n b_i^\alpha B_i \right) \frac{R_\alpha}{R}, \quad \frac{dB_i}{dt} = - \left(\sum_{\alpha=1}^m r_\alpha^i R_\alpha \right) \frac{B_i}{B}, \quad (1.12)$$

Тут ми записуємо $B = \sum_i B_i$, $R = \sum_\alpha R_\alpha$. Кожному нападаючому військовому підрозділу (нижній індекс) призначена швидкість ураження кожного захищаючого (верхній індекс). Ми одразу бачимо (зробивши найбільш загальний можливе припущення), що для загальних значень b_i^α і r_i^α не існує квадратичної консервативної величини. Припустимо, проте, що коефіцієнти убивства є такі, що ми будемо називати їх сепарабельними ("роздільними"),

$$b_i^\alpha = b_i b^\alpha, \quad r_\alpha^i = r_\alpha r^i, \quad (1.13)$$

Це означає, що припущення полягає в тому, що співвідношення ефективності різних типів (наступальний чи оборонний) є незалежним від типу бойової одиниці, з якою ведеться бій - наприклад, якщо солдат є в тридцять разів ефективнішим проти військ, ніж проти танків, то вертоліт також буде ефективним у такому ж співвідношенні. Знову ж таки, це здається розумним першим наближенням, розумною точкою відходу для вивчення цікавих варіацій. Тепер існує квадратична збережена величина,

$$\sum_{i,j} \frac{b_i + b_j}{r^i + r^j} B_i B_j - \sum_{\alpha,\beta} \frac{r_\alpha + r_\beta}{b^\alpha + b^\beta} R_\alpha R_\beta, \quad (1.14)$$

отримання цієї величини наведено в додатку С. Спеціалізація на (1.5, 1.6) є прямолінійною.

Ці результати, що використовують роздільні швидкості ураження, узагальнюються на моделі без прицільного вогню та асиметричні моделі. Гетерогенна модель безприцільного вогню з випадковим розподілом є

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = -R_\alpha \left(\sum_{i=1}^n b_i^\alpha B_i \right), \quad \frac{dB_i}{dt} = -B_i \left(\sum_{\alpha=1}^m r_\alpha^i R_\alpha \right), \quad (1.15)$$

і ці рівняння зберігають

$$\sum_{\alpha} \frac{r_\alpha}{b^\alpha} R_\alpha - \sum_i \frac{b_i}{r^i} B_i, \quad (1.16)$$

лінійність у кількості типів бойових одиниць, і це досить природно відповідає коментарям в кінці підпункту 1.3.

Для нашої гетерогенної асиметричної моделі з прицільним вогнем синіх, але неможливістю червоних вести прицільний вогонь, ми беремо

$$\frac{dR_\alpha}{dt} = - \left(\sum_{i=1}^n b_i^\alpha B_i \right) \frac{R_\alpha}{R}, \quad \frac{dB_i}{dt} = - \left(\sum_{\alpha=1}^m r_\alpha^i R_\alpha \right) \frac{B_i}{B_0}, \quad (1.17)$$

і отримана результуюча величина є:

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \frac{r_\alpha + r_\beta}{b^\alpha + b^\beta} R_\alpha R_\beta - B_0 \sum_i \frac{b_i}{r^i} B_i, \quad (1.18)$$

1.5 Розподіл цілей в змішаних моделях прицільного вогню

Моделі, описані в останньому підпункті, з вогнем, спрямованим на ворожі підрозділи, обраними випадковим чином, очевидно, далекі від реалій. Як ми бачили, це змушує, наприклад, піхоту відкривати вогонь по цілях - піхоті, танкам, гелікоптерам - пропорційно частоті їхніх зустрічей з ними і незалежно від їхньої здатності вбивати (або ймовірності бути вбитими). Оскільки ключовим припущенням направленої вогневої моделі Ланчестера є можливість спрямовувати та концентрувати вогонь, очевидно, що потрібна більш тонка система розподілу цілей. Відповідно до інших припущень моделей Ланчестера, підрозділи повинні виділяти цілі, використовуючи лише власні спостереження. Однак, з військами, які повністю перемішані (просторово), ми можемо припустити, що кожна одиниця перебуває в зоні досяжності всіх протилежних типів. Повертаючись до проблеми (1.5) гетерогенності лише з одного боку, дозволити довільні автономні $\mu^i(R, B_1, \dots, B_n)$ є очевидно занадто загальним і складним завданням. Як ми вже зазначали раніше, попередні роботи [8] зазвичай припускали, що розподіли μ^i є фіксованими (тобто сталими) і використовували матричні методи.

Тепер ми припускаємо, що сині (тільки вони) є різнорідними, як у підпункті 1.3, та використовуємо у рівняннях спрямованого вогню (1.5) напівдинамічну систему розподілу цілей, в якій

$$\mu^i = \frac{\rho^i B_i}{\sum_{j=1}^n \rho^j B_j}. \quad (1.19)$$

Тобто, розподіл цілей може спочатку бути обраний довільно, але потім змінюватись відповідно до кількості одиниць того типу. Це дещо більш природньо, ніж приймати сталий μ^i , що змусило б нас використовувати одну й ту ж пропорцію нашої вогневої потужності на один тип, незалежно від того, чи велика або мала їхня кількість. Який розподіл цілей ми очікуємо, що буде оптимальним? Природнім здогадом може бути те, що $\rho^i = b_i r^i$, тобто ми (червоні) повинні вибирати цілі пропорційно не тільки їх перевазі, але і нашій здатності їх вбивати та їхній (індивідуальній) здатності вбити нас. Насправді, $b_i r^i$ грає роль, але є ще сильнішим: ми доведемо, що оптимальний розподіл точно відповідає тому, який описали Кауп та інші вище [10]. Зауважемо, що завдяки залежності від $b_i r^i$ існує гарна симетрія між нападником і захисником, наприклад, в мові часів парусного флоту фрегат не бере участь у бою з лінійним кораблем і навпаки.

Головним результатом є те, що ця модель має квадратичну консервативну величину,

$$R^2 - \sum_{i,j} \frac{b_i \rho^i + b_j \rho^j}{r^i \rho^i + r^j \rho^j} B_i B_j. \quad (1.20)$$

Ключовим результатом є те, що ця модель має квадратичну зберігаючу величину, узагальнення ($1/r$ разів) збереженої величини (1.6) з випадковими розподілами $\rho^i = 1$. (Більш загальний випадок, змішаний з обох сторін, але з роздільними коефіцієнтами вбивства, розглядається в додатку С.) Проте для $(n, 1)$ гетерогенних неспрямованих вогневих (1.15) та асиметричних (1.17) моделей з динамічним (1.19), а не випадковим розподілом цілей, не можливо сконструювати збережені величини і тому не можемо продовжувати розгляд.

Кількість червоних підрозділів, необхідна для перемоги в битві, очевидно, мінімізується за допомогою вибору ρ^i з метою мінімізації другого доданку, бойової потужності синіх, враховуючи їх кількість підрозділів B_1, \dots, B_n . Щоб досягти цього, спочатку впорядковуємо $i = 1, \dots, n$ таким чином, щоб

$$b_1 r^1 < b_2 r^2 < b_3 r^3 < \dots < b_n r^n. \quad (1.21)$$

Потім обчислюють ρ^i , порівнюючи до нуля часткові похідні сили бою Синіх відносно ρ^i . (Звичайно, також потрібно перевірити, що результат є мінімумом. Знаходимо, що якщо деякі з $b_i r^i$ рівні, то виділення цілей не повинне розрізняти ці i). Насправді, рішення можна побачити досить просто і інтуїтивно: хоча ρ^i анулюється в діагоналі, для $i = j$ (і в будь-яких випадках, де $b_i r^i = b_j r^j$), перехресні доданки $i < j$

$$\frac{b_i \rho^i + b_j \rho^i}{r^i \rho^i + r^j \rho^j}. \quad (1.22)$$

Ці перехресні доданки мінімізуються в межах, коли $\rho^i / \rho^j \rightarrow 0$. Оптимальним вибором є ліміт $\rho^1 \ll \rho^2 \ll \rho^3 \ll \dots \ll \rho^n$ або описане розв'язання: спочатку червоні анігілюють блакитних типу n , потім типу $n - 1$ і так далі вниз.

На перший погляд може здатись, що цей ліміт не є гладким, але насправді він є гладким. Наприклад, розгляньте випадок $n = 2$, в якому

$$\frac{dB_1}{dt} = -r^1 R \frac{\rho^1 B_1}{\rho^1 B_1 + \rho^2 B_2}, \quad \frac{dB_2}{dt} = -r^2 R \frac{\rho^2 B_2}{\rho^1 B_1 + \rho^2 B_2}. \quad (1.23)$$

Війна буде проходити в етапах, де $B_2 = -r^2 R$ і $B_1 = 0$ до тих пір, поки B_2 не стане рівним нулю. Але це досягається в (1.23), коли $\rho^2 \gg \rho^1$, оскільки червоні концентрують вогонь на B_2 до тих пір, поки $\rho^2 B_2$ практично не стане рівним $\rho^1 B_1$, тобто до тих пір, поки співвідношення B_2/B_1 буде дуже маленьким, після чого $r^2 B_1 + r^1 B_2$ зменшується пропорційно до R , а $B_i^{1/\rho^i r^i}$ залишається в постійній пропорції, тому B_2 стає дуже малим відносно B_1 .

Роль, яку відіграють $b_i r^i$, ще раз підтверджує наші очікування з попередньої дискусії. Припустимо, що ми використовуємо підхід Кауфмана, за яким $r^i \propto 1/b_i$. Тоді $b_i r^i$ будуть рівними, і ми не розрізняємо між типами одиниць - ми будемо відкривати вогонь по окремих

військовослужбовцях, або на схожі військові частини, що вважаються однорідними, або на будь-які частини, еквівалентні цим.

1.6 Оптимальне поєднання сил з врахуванням вартості

Зауважимо, що оптимальний розподіл цілей для червоних не залежить від початкової кількості різних типів синіх підрозділів. Таким чином, ми можемо вирішити, який мікс типів підрозділів є оптимальним для синіх без необхідності використовувати ідеї теорії ігор. Другий доданок у формулі (1.20) тепер, з оптимальним розподілом цілей для червоних, дає:

$$\sum_{i=1}^n \frac{b_i}{r^i} B_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{r^n} B_i B_n. \quad (1.24)$$

і завдання синіх полягає в максимізації цього виразу за умови, що $\sum_{i=1}^n c_i B_i = F$. Як зазначено в підпункті 1.3, пошук екстремуму на \mathbb{R}^n є простим, і необхідно лише замінити (1.11) на:

$$M_{ii} = \frac{b_i}{r^i}, \quad M_{in} = M_{ni} = \frac{b_i}{r^n}, \quad \text{інші} = 0. \quad (1.25)$$

Однак, пошук місця максимуму на $(\mathbb{R}^+)^n$ (тобто для всіх B_i додатніх) є більш складною проблемою.

Розглянемо власні значення матриці M . Якщо вони всі додатні, то квадратична форма є еліпсоїдальною і тому опуклою, внутрішнім екстремумом є мінімум, а максимум лежить на межі. Але власні значення M переплітаються з b_i/r^i для $i = 1, 2, \dots, n-1$ (теорема Хорна та Джонсона), так що M може мати найбільше одне від'ємне власне значення. Знак цього власного значення контролюється $\det M$; воно додатне (від'ємне), якщо $\det M > 0$ (< 0), тому воно додатне, якщо $0 < b_n r^n - \sum_{i=1}^{n-1} b_i r^i$ (до якого пропорційний $\det M$; доведення за допомогою індукції). Зазвичай M має рівно одне від'ємне власне значення, і внутрішній максимум можливий, хоча малоімовірний.

Для $n = 2$, однак, ми можемо повністю проаналізувати ситуацію. Єдиний локальний екстремум з обмеженнями (1.24) на $(B_1, B_2) \in \mathbb{R}^2$ є таким:

$$B_1 = F \frac{\frac{b_2 c_1}{r^2 c_2^2} - \frac{b_1}{r^2 c_2}}{\frac{c_1^2 b_2}{c_2^2 r^2} + \frac{b_1}{r^2} - 2 \frac{c_1 b_1}{c_2 r^2}}, \quad B_2 = F \frac{\frac{b_1 c_2}{r^1 c_1^2} - \frac{b_1}{r^2 c_1}}{\frac{c_2^2 b_1}{c_1^2 r^1} + \frac{b_2}{r^2} - 2 \frac{c_2 b_1}{c_1 r^2}}, \quad (1.26)$$

Але насправді це мінімум. Умова $\det M > 0$ тепер є $b_2 r^2 - b_1 r^1 > 0$ і автоматично виконується внаслідок (1.21). Альтернативним способом зрозуміти ситуацію є спочатку зазначити, що знаменники в (1.25) строго позитивні, а потім, що (B_1, B_2) покидає позитивний квадрант, змушуючи $B_1 = 0$ (і отже $B_2 = F/c_2$), для $\frac{c_2}{c_1} \geq \frac{b_2}{b_1}$. Аналогічно $B_2 = 0$ (і отже $B_1 = F/c_1$) для

$\frac{c_2}{c_1} \leq \frac{r^1}{r^2}$. Цей екстремум, який змушує синього купувати одиниці, вартість яких не відповідає їх ефективності, очевидно є мінімумом! Максимум тоді лежить на границі і полягає в тому, щоб вибрати всі одиниці типу- i , що відповідають найбільшому значенню $\left(\frac{F}{c_i}\right)^2 \left(\frac{b_i}{r^i}\right)$, і отже тип-2, якщо:

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 < \frac{b_2 r^1}{b_1 r^2}, \quad (1.27)$$

і тип-1, якщо ні. Це стає більш інтуїтивним, коли ми зазначаємо, що (оскільки $\frac{r^1}{r^2} < \frac{b_2}{b_1}$) $\frac{c_2}{c_1} < \frac{r^1}{r^2}$ або

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 < \left(\frac{r^1}{r^2}\right)^2 < \frac{b_2 r^1}{b_1 r^2} \quad (1.28)$$

примушує нас купувати одиниці другого типу (за їх очевидною оборонною перевагою в цьому висновку), тоді як $\frac{c_1}{c_2} < \frac{b_1}{b_2}$ або

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 > \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 > \frac{b_2 r^1}{b_1 r^2} \quad (1.29)$$

змушує нас купувати тип 1 (за його перевагою в нападі). Такі висновки, звичайно ж, досить спрощені, але така простота властива моделям Ланчестера: вони повністю ігнорують будь-яку взаємодію або можливу синергію між типами одиниць.

1.7 Обидві сторони змішані

Якщо обидві сторони змішані, той же аналіз можна провести, якщо кількість вбивств роздільна, що в свою чергу потребує, щоб кожен тип (скажімо, червоних) однаково розподіляв цілі серед типів ворожих (синіх) одиниць (див. додаток С). Наш підхід вирішально залежить від існування збереженої величини, тому ми не можемо мати справи з (більш реалістичною) ситуацією розподілів, які більш тонко залежать від поєднання власних і противницьких типів одиниць, для яких не існує такої збереженої величини (див. підпункт 1.3). Однак, припустимо, що розподіли цілей є напівдинамічними, як підпункті 1.3, з ρ_α^i (для червоних α , розподіляючих вогонь серед синіх i) та σ_i^α (для синіх i , що відкривають вогонь на червоних α). Тоді природне узагальнення наших результатів полягає в припущенні, що оптимальна стратегія для червоних типу α - це ранжувати противника за $r_\alpha^1 b_1^\alpha < r_\alpha^2 b_2^\alpha < r_\alpha^3 b_3^\alpha < \dots < r_\alpha^n b_n^\alpha$ і відкривати вогонь на кожен тип по черзі, починаючи з n і знижуючи номер, доки він не буде знищений (і аналогічно для синіх). Звичайно, це повністю ігнорує два важливі фактори, що відсутні в усіх моделях Ланчестера: командування, інформацію, зв'язок та контроль, які дозволять використовувати тактики, що виходять за рамки простої алокації на основі місцевих спостережень; та просторову варіацію, що потребує розгляду,

чи оптимально різні типи військових сил працюють разом або окремо один від одного, якщо це відбувається якимось чином спонтанно або з метою вибору.

1.8 Підсумок дослідження

Після підбиття підсумків аспектів класичних однорідних моделей Ланчестера, ми проаналізували моделі з неоднорідними (змішаними) силами. Найбільш поширеним методом у літературі, зручним для простих матричних методів, є розгляд фіксованих цільових розподілів, у яких співвідношення вогню червоних відносно різних типів синіх не змінюються

Ми розглянули дві різні форми розподілу цілей. У першій, червоні не роблять розрізнення між можливими цілями і випадковим чином відкривають вогонь по синіх одиницях, які спостерігають. Це нереалістично, але дозволило нам скласти консервативні кількості як для моделей $(n, 1)$, так і для тих, які ми назвали відокремлювальними коефіцієнтами смертності для моделей (n, m) , та вирішити деякі питання про природу одиниць та об'єднання сил. Це також виступило як корисний проміжний крок до нашого основного результату щодо напівдинамічного цільового розподілу червоних для цілеспрямованого вогню, який змінюється пропорційно до числа синіх типів, але інакше є довільним.

Оптимальне призначення червоних виявилось в тому, щоб зосередити вогонь на кожному типі синіх в послідовності, доки цей тип не буде знищений, так само, як у більш простій моделі, яку використовували [10]. Порядок типів цілей синього був, з цікавою симетрією, за добутком їх здатності влучати в червоних і червоних, щоб ударити їх; але, можливо, здивувало, що це не залежало від початкової кількості типів синього. Таким чином, це дало змогу дати деякі коментарі щодо оптимального початкового складу типів одиниць синього відповідно до призначення цілей червоного без будь-якої зворотної взаємодії на це призначення.

Для аналітиків ця робота буде корисною для сприяння роздумам про змішані сили та стійкості результату, що в умовах Ланчестерівської моделі, вогонь повинен бути сконцентрований на важливих типах одиниць - важливих у пропорції до добутку їх здатності завдавати нам шкоди та нашої здатності завдавати їм шкоди. Було б природнім вважати, що деякі з наших спрощень є лише наближеннями, які можна подальшим чином удосконалити. Більш фундаментальним може бути розгляд (можливо, на основі агентних) моделей змішаних сил з просторовою варіацією, з простими, агресивними правилами руху та бойовими взаємодіями Ланчестерівського типу та досліджувати як природні, так і направлені оптимальні поведінки. Іншим важливим питанням є те, чи повторюють стохастичні моделі наші результати, або, можливо, з моментів, коли нам доводиться перенаправляти вогонь з одного типу одиниць на інший, виникають незвичайні, але важливі випадки.

Розділ 2. Битва за острів Іво-Джіма під час Другої світової війни

Одна з найжорстокіших битв Другої світової війни відбулася на острові Іво-Джіма, за 660 миль на південь від Токіо. Сили “добра” прагнули контролювати Іво-Джіму як базу біля берегів Японії, тоді як японці потребували острова як бази для бойових літаків, які атакували літаки під час місій над Токіо та іншими великими японськими містами. Американське вторгнення на острів розпочалося 19 лютого 1945 року. Обидві сторони зазнали значних втрат див. таблицю 1. Японцям були наказано боротися до останнього, і саме це вони й зробили. Острів було оголошено "безпечним" американськими військами на 28-й день битви, і всі активні бойові дії припинилися на 36-й день. (Останні два японські опорувальники здалися у 1951 році!)

Таблиця 1: Жертви на Іво-Дзімі.

Total United States casualties at Iwo Jima				
	Killed, missing or died of wounds	Wounded	Combat Fatigue	Total
Marines	5,931	17,272	2,648	25,851
Navy units:				
Ships and air units	633	1,158		1,791
Medical corpsmen	195	529		724
Seabees	51	218		269
Doctors and dentists	2	12		14
Army units in battle	9	28		37
Grand totals	6,821	19,217	2,648	28,686
Japanese casualties at Iwo Jima				
Defense forces (Estimated)		Prisoners		Killed
21,000		Marine 216		20,000
		Army 867		
		Total 1,083		

2.1 Публічні данні втрат обох сторін

Ми маємо наступні дані з битви за острів Іво-Джіма, взяті з [Error! Reference source not found. ст. 296]:

1. Темпи поповнення. Протягом конфлікту японські війська ні разу не поповнювалися чи не відводилися. Американці, натомість, висадили 54 000 військових в перший день битви, жодного в другий, 6 000 в третій, жодного в четвертий та п'ятий, 13 000 в шостий день та жодного після цього. До початку битви на Іво-Джіму не було жодних американських військ.

2. Втрати від бойових дій. Капітан Кліффорд Морхаус з корпусу морської піхоти Сполучених Штатів щодня фіксував кількість американських втрат від бойових дій [16]. Нажаль, немає таких записів щодо японських військ. Майже точно, списки втрат, що були збережені Генералом Курібаяші (командир японських військ на Іво-Джімі), були знищені під час самої битви, а ті, що зберігалися в Токію, були знищені під час вогняних бомбардувань протягом наступних п'яти місяців війни. Однак, ми можемо припустити з таблиці 1, що близько 21 500 японських військ було на Іво-Джімі на початку битви. (Фактично, Ньюкомб дійшов висновку, що на Іво-Джімі було 21 000 японських військ, але це трохи менше, оскільки, здається, він не включив деяких живих та мертвих, що були знайдені в печерах в останні дні.)

3. Втрати від операцій. Втрати від операцій на обох сторонах були незначними.

2.2 Постановка задачі

Нехай $x(t)$ та $y(t)$ відповідно позначають активні сили американців та японців на острові Іво-Джіма через t днів після початку битви. Дані, наведені вище, підказують наступну модель Ланчестера для битви на Іво-Джімі:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ay + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= -bx, \end{aligned} \quad (2.1)$$

де a та b - це коефіцієнти бойової ефективності японських та американських військ відповідно, а

$$f(x) = \begin{cases} 54.000, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 6.000, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & 3 \leq t < 4 \\ 13.000, & 4 \leq t < 5 \\ 0, & t \geq 6 \end{cases}$$

Використовуючи метод елімінації, легко можна побачити, що розв'язок (2.1), який задовольняє $x(0) = 0, y(0) = y_0 = 21.500$, задається формулою:

$$x(t) = -\sqrt{\frac{a}{b}} y_0 \cosh \sqrt{ab} t + \int_0^t \cosh \sqrt{ab} (t-s) f(s) ds \quad (2.2.a)$$

та

$$y(t) = y_0 \cosh \sqrt{ab} t - \sqrt{\frac{b}{a}} \int_0^t \sinh \sqrt{ab} (t-s) f(s) ds \quad (2.2.b)$$

де $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ та $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Перед нами тепер стоїть проблема: чи існують константи a та b такі, щоб (2.2.a) давав хорошу приблизну оцінку зібраної Морхаусом [16] інформації? Це дуже важливе питання. Позитивна

відповідь свідчила б про те, що моделі Ланчестера дійсно описують бої в реальному житті, тоді як негативна відповідь справила б підозрілий вигляд на значну частину роботи Ланчестера. Як ми раніше зазначали, дуже складно визначити коефіцієнти бойової ефективності a та b двох протистоячих сил. Однак, часто можливо визначити прийнятні значення a та b , якщо дані про бій відомі, і це є випадком для битви при Іво-Дзімі.

2.3 Обрахунок коефіцієнтів

Обчислення a та b . Інтегруючи друге рівняння (2.1) від 0 до s , маємо:

$$y(s) - y(0) = -b \int_0^s x(t) dt$$

отже

$$b = \frac{y_0 - y(s)}{\int_0^s x(t) dt}. \quad (2.3)$$

Зокрема, підстановка $s = 36$ дає:

$$b = \frac{y_0 - y(36)}{\int_0^{36} x(t) dt} = \frac{21.500}{\int_0^{36} x(t) dt}. \quad (2.4)$$

Тепер інтеграл в правій частині (2.3) можна наблизити сумою Рімана.

$$\int_0^{36} x(t) dt \cong \sum_{i=1}^{36} x(i)$$

і для $x(i)$ ми вводимо кількість ефективних американських військ на i -й день бою. Використовуючи доступні дані від Морхауса [16], ми обчислюємо значення b як :

$$b = \frac{21.500}{2.037.000} = 0.0106 \quad (2.5)$$

Примітка . Ми б хотіли встановити $s = 28$ в (2.3), оскільки цього дня острів був оголошений безпечним, а бої були лише розріджені після цього дня. Однак ми не знаємо значення $y(28)$. Тому ми змушені взяти тут $s = 36$.

Наступним кроком є інтегрування першого рівняння системи (2.1) від $t = 0$ до $t = 28$, що дає:

$$x(28) = -a \int_0^{28} y(t) dt + \int_0^{28} f(t) dt = -a \int_0^{28} y(t) dt + 73.000.$$

На 28-й день битви ефективна чисельність американських військ становила 52.735.

Отже

$$a = \frac{73.000 - 52.735}{\int_0^{28} y(t)dt} = \frac{20.265}{\int_0^{28} y(t)dt} \quad (2.6)$$

Далі, нарешті, наближуємо інтеграл у правій частині (2.6) за допомогою суми Рімана.

$$\int_0^{28} y(t)dt \cong \sum_{i=1}^{28} y(j)$$

і наближено визначаємо значення $y(j)$ за формулою.

$$y(j) = y_0 - b \int_0^j x(t)dt \cong 21.500 - b \sum_{i=1}^j x(i).$$

Знову замінюємо $x(i)$ на кількість ефективних американських військ на i -й день битви. Результат цих розрахунків становить :

$$a = \frac{20.265}{372.500} = 0.0544. \quad (2.7)$$

Рисунок 2.1 нижче порівнює фактичну чисельність ефективних американських військ зі значеннями, передбаченими рівнянням (2.2.a) (з $a = 0,0544$ і $b = 0,0106$). Відповідність досить добра. Таким чином, здається, що модель Ланчестера дійсно описує реальні бойові дії.

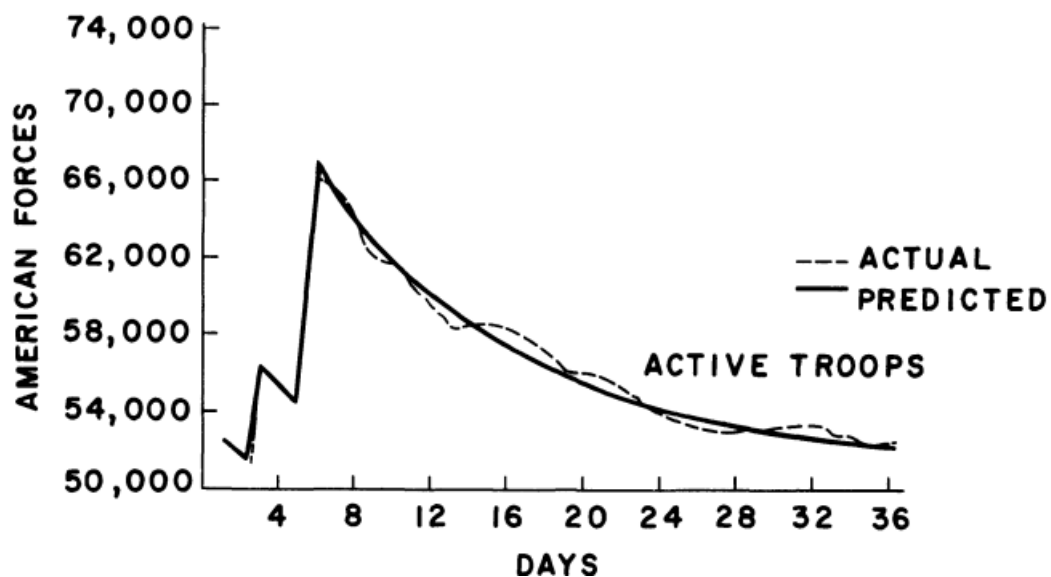


Рисунок 2. 1-Порівняння фактичної чисельності військовослужбовців із передбаченою чисельністю військовослужбовців.

Зауваження . Цифри, які використовуються для американських підсилень, включають в себе весь особовий склад, який висаджувався на берег, як бойових, так і підтримуючих військових. Таким чином, обчислені нами значення a та b повинні тлумачитися як середня ефективність на одну людину на березі.

Розділ 3. Моделі Ланчестера для російсько-української війни артилерій

Загальна історія про війну артилерій

Війна - це складне багатовимірне динамічне явище. Математичний підхід дозволяє глибше зрозуміти різні аспекти війни. Існує чимало математичних моделей різних аспектів війни, зокрема переходи від миру до війни, масштаб війни, інтенсивність, кількість загиблих, моделювання боїв [3, 8] тощо.

Сучасна війна передбачає проведення складних багатокомпонентних операцій, включаючи як кон-венційні засоби, такі як артилерія, танки, авіація, так і більш сучасні засоби, такі як безпілотні літальні апарати, супутникова розвідка, кібервійна тощо. Не зважаючи на давню історію, артилерія досі відіграє дуже важливу і часто навіть домінуючу роль на полі бою, особливо з часів Першої та Другої Світових воєн [2, 19]. Російсько-Українська війна є прикладом війни з домінуючою артилерійською компонентою [1, 4], в якій близько 80% втрат пов'язують з вогнем артилерії [6].

Росія має величезну кількість артилерійських установок різних калібрів і реактивних систем залпового вогню та величезну кількість снарядів до них. Україна теж має потужну артилерію, хоч і суттєво поступається російській як в кількості артилерійських установок так і в кількості снарядів. Не менш важливим фактором є не лише початкові кількості артилерії та ефективність знищення противника, а й здатність поповнювати втрачену артилерію в результаті боїв та внаслідок виходу з ладу. Також дуже важливим фактором є тактика застосування артилерії. А саме: артилерія може застосовуватися точно по артилерії противника, або працювати не точно, по району ймовірного розміщення артилерії противника. У цьому розділі ми розглянемо модель артилерійської війни, коли артилерія застосовується точно.

У цьому розділі ми розглянемо модель війни точних артилерій на основі класичних диференціальних рівнянь Ланчестера [11, 12]. На основі цієї моделі ми розглянемо можливі сценарії розвитку такої війни та критичні параметри, які визначають результат війни.

3.1 Постановка задачі для війни точної артилерії

Позначимо кількість української артилерії як $x(t)$, а кількість російської артилерії як $y(t)$. Україна отримує артилерію в якості допомоги від країн-партнерів. Припустимо середня швидкість поставок артилерії в Україну є константою, позначимо її як a . Росія отримує свою артилерію через розконсервацію радянських запасів і через виробництво її на заводах. Припустимо так само, що є певна середня константна швидкість надходження артилерії в російську армію, позначимо її b . У цій частині ми припустимо що артилерії обох армій є точними. За цього припущення швидкість знищення артилерії противника пропорційна кількості артилерії ворога. Російська артилерія знищує українську пропорційно кількості російської артилерії з ефективністю c : $cy(t)$. Тобто, чим більше російської артилерії, то більше української артилерії вона знищує за одиницю часу. Коефіцієнт ефективності роботи російської артилерії c виражає скільки одиниць української артилерії знищує одиниця російської артилерії за одиницю часу. Так само українська артилерія знищує російську пропорційно своїй кількості з певним коефіцієнтом ефективності d : $dx(t)$. Також українська і російська артилерія виходять з ладу в результаті зношення або поломки, пропорційно їх кількості з коефіцієнтами f та h відповідно. Швидкість виходу з ладу української і російської артилерії відповідно $f x(t)$ і $hy(t)$. На основі цих припущень ми можемо систему диференціальних рівнянь.

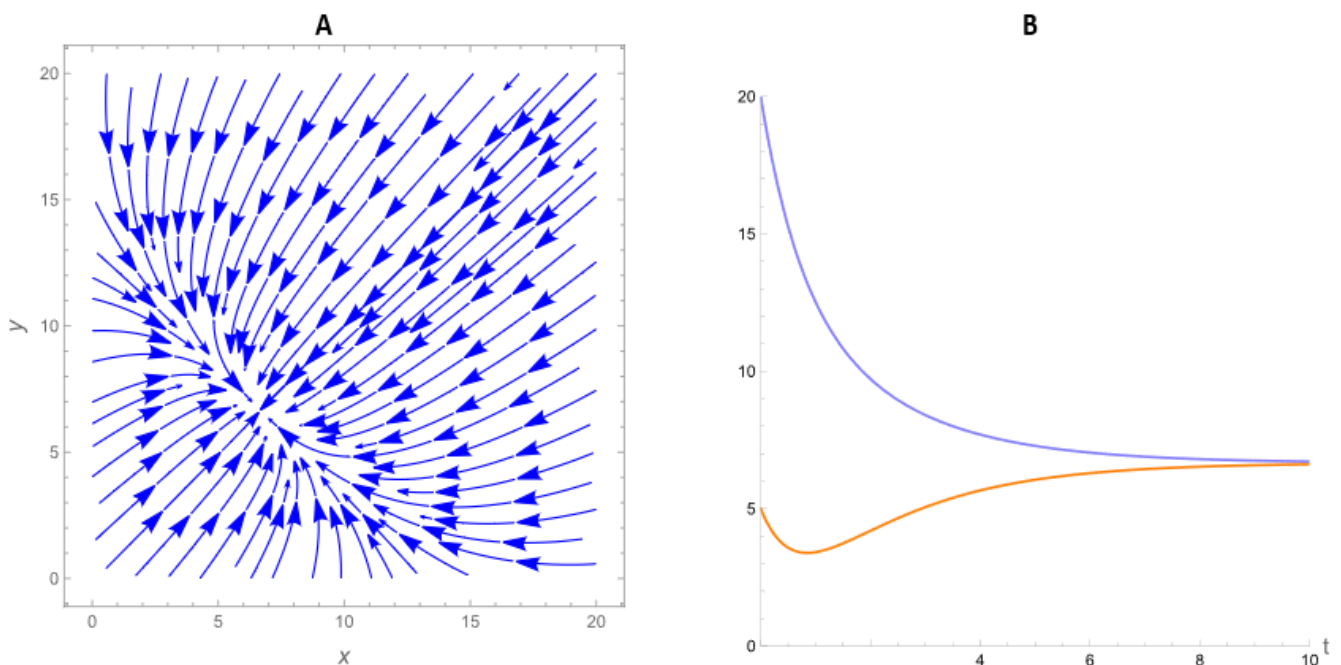


Рисунок 3. 1-Сценарій $1 < cd < fh$

3.1.1 Артилерія ламається швидше, ніж її знищує противник

Артилерія ламається швидше, ніж її знищує противник. З рис. 3.1, де А - векторне поле у фазовому просторі. Стаціонарна точка у цьому випадку є стабільним вузлом. Параметри: $a = b =$

$10, c = d = 0.5, f = h = 1$. Рис. 3.1, де В - приклад динаміки кількості української і російської артилерії у часі. Параметри: $a = b = 10, c = d = 0.5, f = h = 1, x(0) = 5, y(0) = 20$.

Система диференціальних рівнянь, описуватиме зміну кількості української та російської артилерії в часі (3.1). Для спрощення виразів будемо позначати $x(t)$ як x і відповідно $y(t)$ як y .

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a - cy - fx \\ \frac{dy}{dt} &= b - dx - hy.\end{aligned}\quad (3.1)$$

Знайдемо стаціонарний стан даної системи рівнянь при нульовій швидкості зміни чисельності артилерій ($\frac{dx^*}{dt} = \frac{dy^*}{dt} = 0$):

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{bc - ah}{cd - fh} \\ y^* &= \frac{ab - bf}{cd - fh}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Отже, стаціонарний стан для системи рівнянь (3.1) існує і він єдиний (3.2) Тепер дослідимо цей стаціонарний стан на стабільність. Для цього знайдемо матрицю Якобі для системи (3.1):

$$J = \begin{pmatrix} -f & -c \\ -d & -h \end{pmatrix},\quad (3.3)$$

Знак власних чисел матриці Якобі визначає характер стаціонарних точок і їх стабільність. Власні числа матриці Якобі (3.3):

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2}(-\sqrt{4cd + (f - h)^2} - f - h) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2}(\sqrt{4cd + (f - h)^2} - f - h)\end{aligned}\quad (3.4)$$

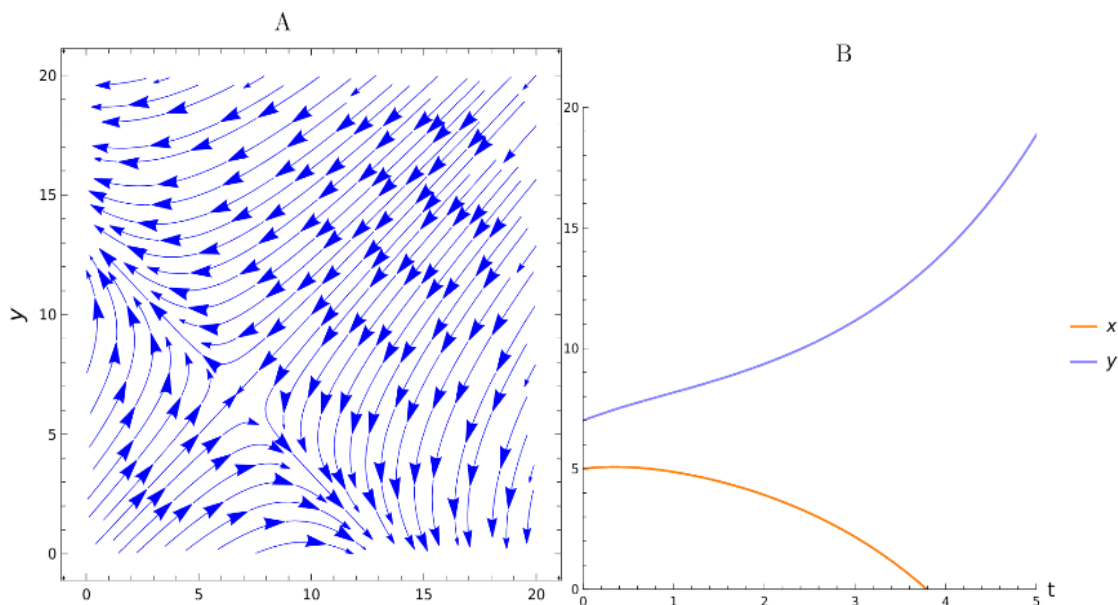


Рисунок 3. 2-Сценарій $2 cd > f h$

3.1.2 Противник знищує артилерію швидше, ніж вона ламається

Противник знищує артилерію швидше, ніж вона ламається. Рис. 3.2, де А – векторне поле у фазовому просторі. Стационарна точка у цьому випадку - сідлова точка і є нестабільною. Параметри: $a = b = 10$, $c = d = 1$, $f = h = 0.5$. Рис. 3.2, де В - приклад динаміки кількості української і російської артилерії у часі. Параметри: $a = b = 10$, $c = d = 1$, $f = h = 0.5$, $x(0) = 5$, $y(0) = 7$.

Перше власне число λ_1 у системі рівнянь (3.4) завжди від'ємне, оскільки всі параметри є додатніми і підкориневий вираз завжди додатній ($4cd + (f - h)^2$) також додатній. Власне число λ_2 буде від'ємним за умови $cd < fh$ (умова отримається з розв'язку нерівності $\sqrt{4cd + (f - h)^2} - f - h < 0$), і навпаки, додатніми за умови $cd > fh$. Розглянемо що означають ці два сценарії на практиці.

3.2 Сценарії війни

Артилерія ламається швидше, ніж її знищує противник

Сценарій 1: $cd < fh$. Артилерія ламається швидше, ніж її знищує противник

У цьому сценарії добуток ефективності знищення артилерії ворогом (fh) менший, ніж добуток коефіцієнтів виходу власної артилерії з ладу в результаті зношення/поломки. Тобто, це сценарій коли власна артилерія ламається швидше, ніж її знищує ворог. За цієї умови обидва власні числа - негативні, $\lambda_1 < 0$ і $\lambda_2 < 0$. Тоді стационарна точка (3.2)- локально стабільний вузол і є аттрактором. На практиці це означає, що артилерія обох сторін може співіснувати у стационарному стані. Після певного періоду буде досягнуто рівноваги між втратою артилерії і її надходженням для обох сторін. Цю динаміку можна проілюструвати на фазовій діаграмі векторного поля для x та y (Рис 3.2 А) Векторне поле показує як від початкового стану система буде рухатися до стационарної точки вздовж ліній векторного поля. Варто зазначити, що точка рівноваги може бути 0 для однієї зі сторін, якщо її швидкість знищення і поломки більша за швидкість надходження. (Рис 3.2 В) демонструє розв'язок системи диференціальних рівнянь (3.1) для сценарію 1. У цьому випадку навіть при великій початковій перевазі в кількості російської артилерії ($y(0) = 20$) над українською ($x(0) = 5$) система досягає стану рівноваги.

Противник знищує артилерію швидше, ніж вона ламається

Сценарій 2: $cd > fh$. Противник знищує артилерію швидше, ніж вона ламається

У цьому сценарії добуток ефективності знищення артилерії ворогом (fh) більший, ніж добуток коефіцієнтів виходу власної артилерії з ладу в результаті зношення/поломки (cd). Тобто, це сценарій коли ворог знищує артилерію швидше, ніж вона ламається в результаті експлуатації. У цьому випадку $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$. В такому випадку стаціонарна точка - це сідлова точка і вона нестабільна. Вздовж одного з власних векторів вона притягує, а вздовж іншого - відштовхує. Це добре видно на вектоному полі

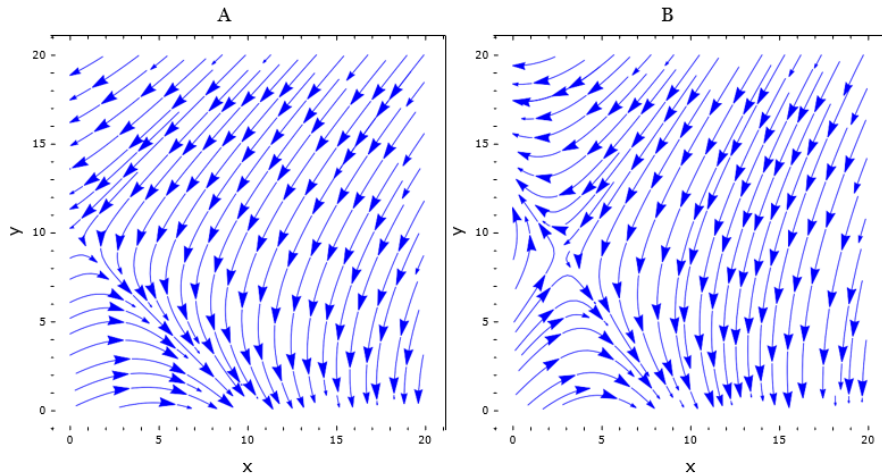


Рисунок 3. 3-Векторні поля в залежності від співвідношення швидкості надходження артилерії у війська (панель А) та співвідношення ефективності артилерії (панель В)

А - швидкість надходження артилерії в українську армію ($a = 10$) у 2 рази перевищує цей показник для російської армії ($b = 5$). Параметри: $a = 10, b = 5, c = d = 1, f = h = 0.5$. В - ефективність української артилерії ($d = 2$) у 2 рази вища за російську ($c = 1$). Параметри: $a = 10, b = 10, c = 1, d = 2, f = h = 0.5$.

У фазовому просторі для даного випадку на рис. 3.2 А. Що важливо у даному випадку - це те, що за таких умов артилерія обох сторін не може співіснувати. Одна зі сторін обов'язково перемагає і повністю знищує артилерію противника. Рис. 3.2 В демонструє розв'язок системи диференціальних рівнянь (3.1) для сценарію 2. Навіть при незначній початковій перевазі російської артилерії над українською ($x(0) = 5, y(0) = 7$), російська артилерія перемагає і знищує українську.

Проблема для України в цьому випадку полягає в тому, що за таких умов при всіх рівних параметрах перемагає Росія, оскільки зараз має в рази більше артилерії. Таким чином, на фазовій діаграмі на рис. 3.3 вихідна точка буде у лівому верхньому квадраті, що призведе до того що через певний час українська артилерія буде вибита російською артилерією ($x \rightarrow 0$).

За таких невігідних умов в Україні є два шляхи перемоги в артилерійській війні з Росією (3.3). Перший шлях - це в рази збільшити швидкість надходження артилерії для української армії (a), по рівняно з російською (b), тобто $a = nb$, де n - у скільки разів швидкість надходження артилерії для української армії вища за російську (рис. 3.3 А). Другий шлях - це збільшення

ефективності української артилерії (d), порівняно з російською (c) (рис. 3.3 В). В обох випадках це дозволить зменшити область фазового простору в якій російська артилерія перемагає.

3.3 Поради щодо ведення бойових дій

На основі моделі війни точних артилерій (рівняння 3.1) маємо два сценарії розвитку, в залежності від параметрів. Перший сценарій: війна заходить в стаціонарний стан за умови того, що техніка виходить з ладу швидше, ніж її знищує противник. Обидві сторони поповнюють артилерію і війна, з точки зору артилерії, може тривати нескінченно. Другий сценарій: стаціонарний стан - нестабільний, Україна або Росія перемагає в залежності від вихідних умов і параметрів моделі. Для того щоб Україні перемогти потрібна значно вища швидкість надходження артилерії і/або значно вища її ефективність. І перший і другий сценарії є неочевидними на перший погляд. Адже, в першому сценарії співіснування артилерій досягається за умови того що вона виходить за ладу швидше, ніж її руйнує противник. Другий сценарій неочевидний, бо інтуїція підказує що повинен завжди існувати стабільний стаціонарний стан і що війну можна звести до певної рівноважної точки. Постає закономірне питання: який з двох сценаріїв є більш реалістичним? Артилерійські установки виходять з ладу через зношення стволів, зношення коліс чи гусениць. Якщо параметри ефективності знищення артилерії противника як з українського так і з російського боку можна інтерполювати з публічних даних про кількість знищеної техніки, то параметри зношення/поломки артилерії є неопублічними і їх важко оцінити. Інтуїтивно через високу інтенсивність бойових дій все ж дії противника, напевне, є основною причиною втрат артилерії з обох боків. Тому другий сценарій виглядає більш реалістичним. В цьому випадку слід очікувати, що за умови бажання сторін вести бойові дії, одна зі сторін переможе у війні.

Як і всі математичні моделі, дана модель є спрощенням реальності. Сучасна війна - це значно складніший процес, ніж війна артилерії. Адже, артилерія не воює сама по собі, а в комплексі з іншими родами військ. Часто рішення окремих командирів і бойовий дух та дії особового складу можуть призводити до стратегічних змін на полі бою. Однак, багато речей, які на перший погляд відсутні в даній моделі, цілком в неї вписуються. Наприклад, застосування радарів, розумних боєприпасів, космічної розвідки, безпілотних літальних апаратів посилює ефективність роботи власної артилерії зі знищення артилерії противника (відповідно підвищуються параметри c та d).

Війна є досить неочевидним і нелінійним процесом, де інтуїція часто не спрацьовує. Такі підходи математичного моделювання війни дозволяють ширше розуміти цей процес і напрацьовувати рішення, які дозволяють переломити хід бойових дій на свою користь. Скажімо, дана модель може слугувати одним із аргументів для посилення надання Україні артилерії та РСЗВ у якості матеріально-технічної допомоги для зсуву динаміки війни на користь України.

3.4 Постановка задачі для війни динамічної артилерій

У цьому дослідженні ми досліджуємо артилерійський компонент війни. Зокрема, ми розглядаємо війну двох армій з домінуючим артилерійським компонентом. У такій війні результат артилерійської боротьби має великий вплив на результат війни. Які можливі наслідки артилерійської боротьби?

Зокрема, ми хотіли б відповісти на наступні питання: яка динаміка артилерійської боротьби? Чи завжди одна сторона перемагає, чи можливий стан рівноваги? Які критичні параметри визначають результат артилерійської боротьби?

Підхід на основі динамічної системи на основі системи диференціальних рівнянь є ідеальною рамкою для відповіді на ці питання. Класичні моделі війни на основі диференціальних рівнянь - це моделі типу Ланчестера [11, 12]. У цьому дослідженні ми створили систему диференціальних рівнянь, щоб описати артилерійську боротьбу двох противників.

Модель

Припустимо, що у війні з артилерією беруть участь два суперники, X та Y . Ми припускаємо, що кожен з опонентів має свій власний, але однорідний тип артилерії. Тобто, у суперника X є свій власний тип артилерії, а у суперника Y - свій власний тип артилерії. Давайте позначимо кількість артилерії суперника X як $x(t)$, а кількість артилерії суперника Y - як $y(t)$. Для спрощення нотації ми позначимо $x(t) = x$ та $y(t) = y$. Припустимо, що обидва опоненти X та Y мають певну постійну середню швидкість поставки нової артилерії, позначену відповідно як a та b . Постачання артилерії може бути в результаті власного виробництва, купівлі або постачання від союзних країн. Артилерійські частини протистоячих сил беруть участь у вогні з кожної батареї, в якому кожна сторона намагається знищити артилерію суперника. Швидкість знищення вогнем з кожної батареї за одиницю часу повинна бути пропорційною ефективності артилерії та кількості артилерії противників. Тобто, чим більше артилерії має кожна сторона на полі бою, тим більше артилерії буде знищено. Позначимо ефективність вогню з кожної батареї опонента X як c , а відповідну ефективність для Y - як d . Тоді швидкість знищення артилерії X дорівнює dx , а швидкість знищення артилерії Y дорівнює cy .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a - cxy - fx \\ \frac{dy}{dt} &= b - dxy - hy. \end{aligned} \tag{3.5}$$

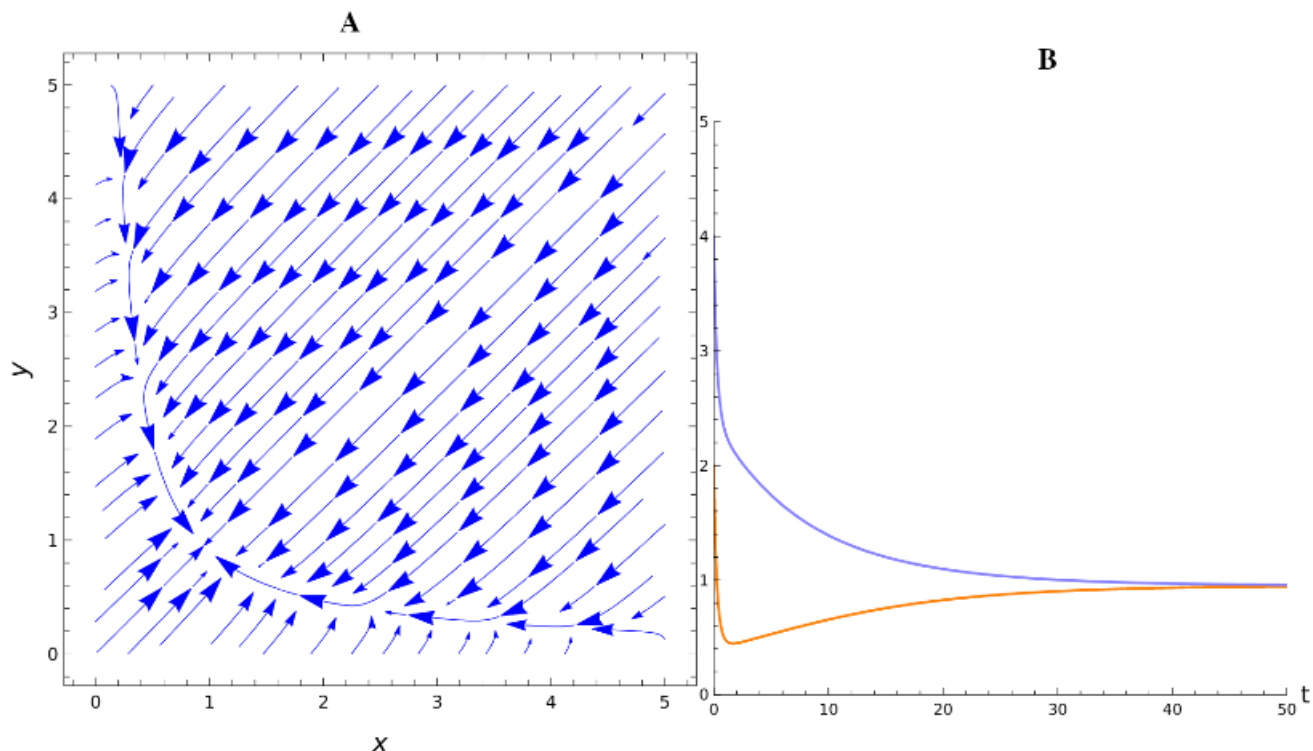


Рисунок 3. 4-Приклад симуляції артилерійської війни з використанням системи рівнянь (3.5)

Система збігається до локально стійкої точки рівноваги. Параметри: $a = b = 1, c = d = 1, f = h = 0.1$. Перший рисунок 3.4 А - векторне поле. Другий рисунок 3.4 В - динаміка системи з початковою умовою $x(0) = 2, y(0) = 4$.

Чисельні обрахунки за допомогою Wolfram

Можемо знайти точки рівноваги для рівнянь (3.5), коли швидкість зміни в системі дорівнює нулю ($\frac{dx^*}{dt} = \frac{dy^*}{dt} = 0$). У цій системі є дві точки рівноваги (рівняння 3.6 і 3.7).

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{ad - bc - fh + \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2df} \\ y_1^* &= \frac{bc - ad - fh + \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2ch} \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} x_2^* &= \frac{ad - bc - fh - \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2df} \\ y_2^* &= \frac{bc - ad - fh - \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2ch} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Допустивши, що всі параметри моделі позитивні і $\sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2} > ad - bc - fh$, перша точка рівноваги (рівняння 3.6) завжди є додатньою, а друга точка рівноваги завжди є від'ємною. Ми зацікавлені у вивченні властивостей позитивної точки рівноваги.

Дослідимо локальну стійкість позитивної точки рівноваги (рівняння 3.6). Якобіанська матриця для системи рівнянь (3.5), обчислена в точці (x_1^*, y_1^*) , є:

$$J = \begin{pmatrix} -cy_1^* - f & -cx_1^* \\ -dy_1^* & -dx_1^* - h \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Значення власних чисел для матриці Якобі у рівнянні (3.8) такі:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-f - h - dx_1^* - cy_1^* \pm \sqrt{(f + h + dx_1^* + cy_1^*)^2 - 4(fh + dfx_1^* + chy_1^*)} \right) \quad (3.9)$$

За умови, що $x_1^* > 0$, $y_1^* > 0$, $-f - h - dx_1^* - cy_1^* < 0$ та

$$\sqrt{(f + h + dx_1^* + cy_1^*)^2 - 4(fh + dfx_1^* + chy_1^*)} > -f - h - dx_1^* - cy_1^*,$$

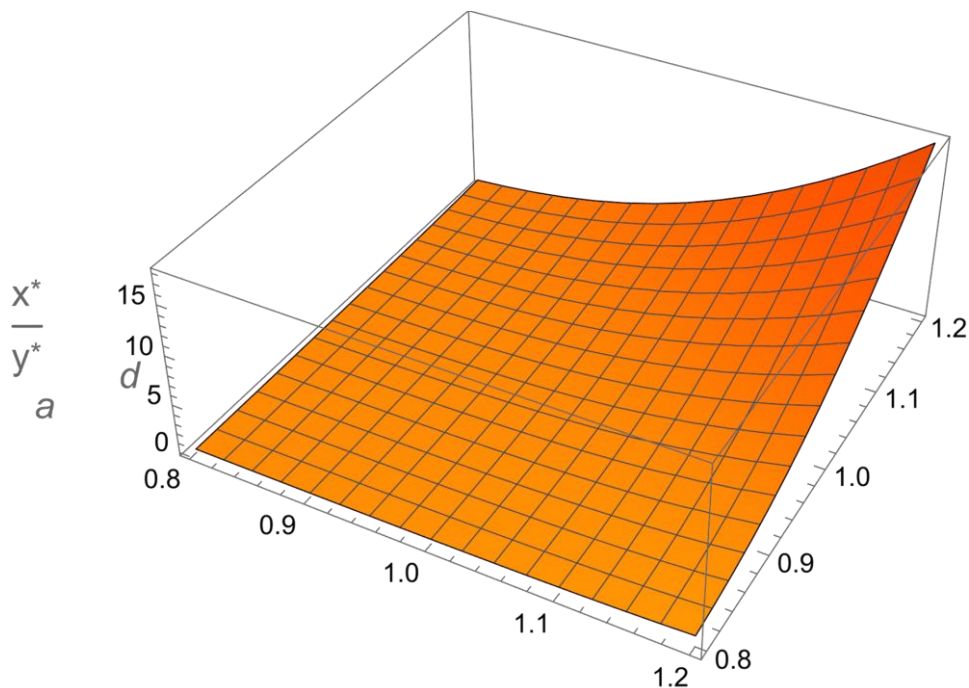


Рисунок 3. 5-Залежність співвідношення x_1^*/y_1^* в рівновазі від параметрів a та d . Параметри: $b=1, c=1, f=h=0.1$.

Обидва власних значення в рівнянні (3.9) завжди мають від'ємну дійсну частину. Отже, точки рівноваги x_1^* та y_1^* завжди місцево стійкі.

Приклад симуляції показано на рис. 3.4. Панель А демонструє векторне поле, яке представляє швидкість зміни x та y в системі (3.5) у кожній точці. Панель В демонструє одне рішення системи диференціальних рівнянь (3.5) до точки рівноваги для початкової умови $x(0) = 2, y(0) = 4$. Супротивник буде домінувати в артилерійській війні, якщо в рівновазі він має більше артилерії. Ми можемо знайти умови для того, щоб один з супротивників мав більше артилерії в рівновазі, розв'язавши нерівність $x_1^* > y_1^*$:

$$\frac{ad - bc - fh + \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2df} > \frac{bc - ad - fh + \sqrt{4adfh + (ad - bc - fh)^2}}{2ch}. \quad (3.10)$$

Еквівалентні умови, які задовольняють нерівність $x_1^* > y_1^*$ (рівняння 3.10), такі:

$ad > bc$ і $f \leq \frac{ab-bc}{\sqrt{bd}}$. Ці умови означають, що опонент X матиме більше артилерії в рівновазі, якщо він має вищу швидкість постачання артилерії (a) та її ефективність (d) порівняно з опонентом Y (b і c відповідно), а також швидкість зламу артилерії X (f) достатньо мала.

$ad > bc$ і $f > \frac{ab-bc}{\sqrt{bd}}$ і $h > \frac{f(ad+bc)-(bc-ad)\sqrt{4ac+f^2}}{2ac}$ це умова, схожа на першу, але з винятком того, що якщо швидкість поломки артилерії X (f) не є достатньо малою, то швидкість поломки артилерії Y (h) повинна бути достатньо великою.

$ad \leq bc$ і $h > \frac{f(ad+bc)-(bc-ad)\sqrt{4ac+f^2}}{2ac}$ ця умова означає, що якщо добуток швидкості поставки артилерійського озброєння (b) та ефективності (c) противника Y більший або дорівнює відповідному добутку X (ab), тоді швидкість поломки артилерії Y (h) повинна бути достатньо великою.

Це альтернативний погляд на рівновагу у гарматній війні, який полягає у побудові залежності відношення x_1^* до y_1^* від швидкості постачання артилерії (a) та ефективності артилерії (d). На рис. 3.5 показана чутливість співвідношення x_1^* до y_1^* до параметрів a та d . Зокрема, при заданих параметрах $b = 1, c = 1, f = h = 0.1$, при 10% вищій швидкості постачання артилерії ($a = 1.1$) та 10% вищій ефективності ($d = 1.1$) для X , рівноважне співвідношення становить $\frac{x_1^*}{y_1^*} = 5.85$. При заданих параметрах $b = 1, c = 1, f = h = 0.1$, при 20% вищій швидкості постачання артилерії ($a = 1.2$) та 20% вищій ефективності ($d = 1.2$) для X , рівноважне співвідношення становить $\frac{x_1^*}{y_1^*} = 18.1$.

Розділ 4. Рівняння Ланчестера та зомбі-апокаліпсис

Ця частина роботи використовує математичні моделі для аналізу та відтворення конкретних бойових ситуацій та наслідків зомбі-апокаліпсису. Оригінальними моделями, які передбачали війну, були моделі Ланчестера, тоді як моделі зомбі-апокаліпсису є фіктивними розширеннями математичних моделей, що використовуються для дослідження інфекційних захворювань. У цій частині порівнюємо різні математичні моделі, дослідивши множину припущень кожної моделі та вплив зміни змінних на популяційні класи. Метою цього дослідження є зрозуміти основи дискретних динамічних систем та визначити подібності між уявними та реалістичними моделями. Моделі Ланчестера, які були досліджені, - це модель зони прицілювання та модель прицільного вогню, тоді як модель Susceptible Zombie Removed (SZR) та модель Susceptible Infected Zombie Removed (SIZR) зображали взаємовідносини між різними популяційними класами під час зомбі-апокаліпсису. З диференціальних рівнянь, які використовуються, визначаємо вплив різних змінних на перемогу в битві та на ймовірність виживання в зомбі-апокаліпсисі.

У цьому дослідженні розглянемо типи математичних моделей, які зображають умовні можливої зомбі апокаліпсису. Розглядаємо їх по аналогії з моделями війни Ланчестера. Хоча обидва типи моделей є дискретними динамічними системами, моделі суттєво відрізняються своїм походженням, процесом розв'язування та структурою відповідних диференціальних рівнянь.

Ланчестерські моделі - це системи диференціальних рівнянь, які використовуються для опису аспектів звичайних війн, тобто війн, де не використовують хімічну, біологічну або ядерну зброю. Ці моделі славляться своєю простотою і часто використовуються в курсах математичного моделювання. Ланчестерські моделі були створені на основі відомих законів Ланчестера, які були легкими для розуміння та полегшили перехід до більш складних тем математичного моделювання. Його найвідоміше рівняння було квадратичним законом, який прогнозував результати битв в рамках моделі прицільного вогню. Інше менш відоме рівняння Ланчестера, яке розглядалось, - лінійний закон, який використовувався в моделі області прицілювання. Ці моделі мали велику кількість досліджень і публікацій, які аналізували Ланчестерські рівняння та пояснювали фон, застосування та недоліки моделей зрозумілим способом. Їх простота дозволяла розраховувати вручну, що надає можливість зрозуміти взаємозв'язок між змінними, використовуючи письмові методи замість програмування на комп'ютері.

4.1 Хто такі зомбі, коли вони виникли та як їх знищити

Натхнення для художніх істот було похідним від культурних вірувань та міфів у релігії вуду. Первісні оповідання описували могутнього вуду-чаклуна, відомого як Бокор, який воскрешав

людей, щоб вони служили йому як особисті раби. Стати зомбі розглядалося як форма покарання за те, що вони зрадили Бокора під час свого життя. Слово «зомбі» походить від гаїтянського креольського слова, що означає дух мертвого. У первісному фольклорі зомбі зображалися як бездумні, відроджені трупи та були тихі порівняно з сучасними адаптаціями. Первісні зомбі підкорялися та зазвичай не нападали на людей, якщо цього не волів Бокор. Вони також реагували на стогін або зітхання та були незграбними та неповільними у своїх рухах.

Процес перетворення на зомбі відбувався за допомогою заклять та магічного порошку. Після вживання магічного порошку серцева діяльність та дихання жертви пригнічувалися, що призводило до зниження її температури тіла до такого рівня, що вона здавалася мертвою. Після того, як жертву оголошували мертвою, її ховали та потім викопували Бокором. Жертви могли розуміти тільки базові команди та мали суперсилу, так як їм бракувало відповіді на подразники, що робило їх нездатними відчувати біль та втому.

У фольклорі, що стосується зомбі, згадувалася можливість вилікування від прокляття Бокора. У деяких міфах душа зомбі була утримувана в спеціальному веслі та поверталася до тіла, якщо весло було розбите. Інший міф стверджував, що якщо зомбі нагодують сіллю, то вони повернуть свідомість, але будуть перебувати в пониженому розумовому стані та будуть вразливі до повторного ув'язнення. Деякі також вірили, що жертва зможе повернути свою свободу, якщо Бокор помре. В усіх цих випадках жертва ніколи не поверталася до свого попереднього стану, якщо її не вилікували за допомогою божественного втручання.

Міфи про прокляття Бокора надали зомбі їхню неживу якість. Неживі зомбі підтримували подання про вилучений клас, який був зображений диференційними рівняннями для моделей зомбі-апокаліпсису, що використовувалися в дослідженні. Вилучений клас включав осіб, які були вилучені з загальної популяції, але на відміну від інших вилучених груп у загальних математичних моделях, зомбі були воскресені та тому могли переходити з вилученої групи до популяції зомбі.

Перша згадка про зомбі була в романі Роберта Саузі "Історія Бразилії" 1819 року, проте вони стали популярним феноменом завдяки кінематографу. Перші екранізації зомбі сильно нагадували жертв, що описуються в гаїтянських переказах, проте також надавали їм унікальні слабкості, такі як страх перед вогнем та яскравим світлом. Фільм 1959 року "Підліткові зомбі", знятий Джорджем Ромеро, був першим, де зомбі були представлені як форма захворювання, а не вуду-прокляття. У фільмі описувалось походження зомбі, що виникали в результаті впливу нервового газу, що надихнуло загально поширену ідею про зомбі як небезпечну інфекційну хворобу.

Джордж А. Ромеро отримав заслугу у створенні сучасного зомбі. Опис зомбі-апокаліпсису Ромеро був дуже популярним і відомий своїм надмірним насиллям. Фільми вперше показали передачу хвороби через укуси, що дозволило сучасним зомбі швидко перевищити кількість людей. Швидкість передачі хвороби була змінною, що використовувалося для опису взаємодії між

популяціями у зомбі-математичних моделях. Ромеро також ініціював класичний спосіб знищення зомбі шляхом знищення їх мозку. Культура популяризувала спосіб вбивства зомбі Ромеро, включаючи відрубання голови, лупання, спалювання та вибухи. Смертність зомбі зображувалася в зомбі-моделях та описувала перехід зомбі до видаленого класу. Зомбі, зображені в фільмах, були повільними, мертвими і агресивними до людей. Зомбі зображувалися як тільки зажадані людським м'ясом, що було припущенням для моделей *Susceptible Zombie Removed* та *Susceptible Infected Zombie Removed*, тому існування зомбі не впливало на інші популяції живих організмів. Зомбі, що досліджувалися в цьому дослідженні, базувалися на зомбі, популяризованих у фільмах Джорджа А. Ромеро. Його фільми внесли важливі концепти, що стосуються зомбі, такі як ідея видаленого класу, метод передачі вірусу та способи вбивства зомбі, які є змінними, включеними в зомбі-математичні моделі для опису переходів між класами населення.

4.2 Зомбі модель (SZR) на основі рівнянь Ланчестера

Було опубліковано безліч математичних моделей, що зображують різні сценарії зомбі-апокаліпсису. Ці математичні моделі були натхнені попередніми моделями для інших інфекційних хвороб, таких як чума. Моделі, що використовувалися в цьому дослідженні, були створені у роботах Філіпа Манца, Іоана Худеа, Джо Імада та Роберта Сміта (2009). У своїй роботі автори включили різні моделі для оцінки взаємин між зомбі та вразливими людьми, але ми особливо досліджували модель *Susceptible Zombie Removed* та *Susceptible Infected Zombie Removed*.

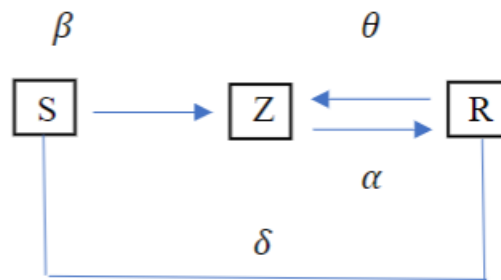
На противагу моделей Ланчестера, які відображали реалістичну бойову ситуацію, зомбі-моделі були інспіровані науково-фантастичним явищем. Вважалося, що зомбі, які використовувалися в цих моделях, рухалися повільно, були мертвими канібалами, які бажали лише людської плоті, тому вони не впливали на популяції інших живих організмів.

Susceptible Zombie Removed – (SZR)

Основна модель у дослідженні, проведеному Мунцем та іншими [17], відома як «Схильний Зомбі Видалений» (SZR) поділяла загальну популяцію на три класи. Схильні клас ідентифікував здорових людей, які були вразливі до захворювання. На початку моделі більшість популяції була схильними людьми. Далі була категорія зомбі, яка визначала людей, що були відроджені з мертвих після зараження хворобою зомбі. Нарешті, були видалені з популяції ті, хто став жертвою атак або помер від природних причин (тобто не пов'язаних зі змістом зомбі). На відміну від інших математичних моделей, люди могли покинути видалену групу, відродившись як зомбі. Зомбі визначалися як неживі і тому, щоб схильна людина стала зомбі, вона повинна була заразитися хворобою, померти, а потім воскреснути як зомбі. Різні змінні та відносини між трьома класами людей були зображені та перераховані в рівнянні (4.1).

Ілюстрація моделі та припущення до моделі

II



$$\begin{aligned}
 dS &= \Pi - \beta SZ - \delta S \\
 dZ &= \beta SZ + \theta R - \alpha SZ \\
 dR &= \delta S + \alpha SZ - \theta R
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Змінні:

S_t - Здорові люди на момент (t) .

Z_t - Зомбі на момент (t) .

R_t - Вилучені на момент (t) .

δ - Швидкість смертності уразливих людей від природних причин (тобто не пов'язаних з зомбі).

β - Швидкість передачі інфекції.

α - Швидкість смертності зомбі (викликана знищенням мозку або видаленням голови).

θ - Швидкість воскресіння (уразливі до зомбі).

Π - Швидкість народження.

βSZ - Передача інфекції між уразливими та зомбі.

δS - Уразливі, які померли від природних причин.

θR - Воскрешені мерці, які стали зомбі.

αSZ - Зомбі, які були знищені уразливими.

Припущення

- Люди були єдиними формами життя, що розглядалися в моделі.
- Населення було сталим.
- Зомбі не нападали на інших зомбі.
- Особа, яка стала вразливою до хвороби, негайно померла.

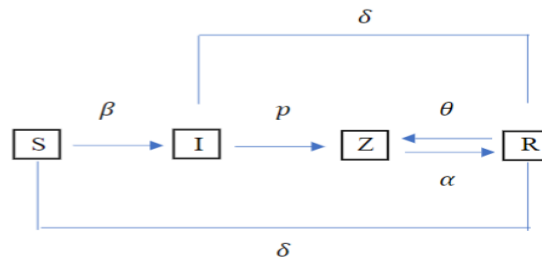
Зв'язки між змінними трьох класів зображені на діаграмі та рівняннях вище (4.1). Модель SZR передбачала, що вірус зомбі негайно вбиває заражених людей. Тому модель не дозволяла можливості інфікованого носія.

4.3 Зомбі модель (SIZR) на основі рівнянь Ланчестера

Модель "Схильний Заражений Зомбі Вилучений" (SIZR) (*Susceptible Infected Zombie Removed*)

Наступна модель, SIZR, додала ще один клас населення та можливість наявності інфікованого носія, позначеного як Інфікований. Період інфекції починався після того, як людина інфікувалась захворюванням на зомбі, і закінчувався, коли інфікована особа померла. Протягом періоду інфекції інфікований може померти від природних причин або інфікувати інших вразливих людей. Модель містила загальні змінні та припущення, перелічені у рівнянні (4.1), а також кілька додаткових припущень, перерахованих нижче.

II



$$\begin{aligned}
 dS &= \Pi - \beta SZ - \delta S \\
 dI &= \beta SZ - \rho I - \delta I \\
 dZ &= \rho I + \theta R - \alpha SZ \\
 dR &= \delta S + \delta I + \alpha SZ - \theta R
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Змінні:

I - Інфіковані люди.

ρ - швидкість інфекції.

ρI - перехід від Інфікованих до Зомбі.

δI - природня смерть Інфікованих.

Припущення:

- Після того, як здорова людина заразилася вірусом зомбі, вона стає членом класу Інфікованих.

Зв'язки між змінними чотирьох класів зображені на діаграмі та рівняннях вище (4.2). Модель SIZR створила новий клас населення і дозволила можливість існування інфікованого носія.

Мета дослідження, дослідницькі питання та гіпотези

Метою цього розділу було зрозуміти та дослідити різницю між різними типами математичних моделей. Кожен тип моделі мав свої власні змінні, припущення та методи розв'язування. Дослідження продемонструвало, що математичні моделі можуть бути використані

для представлення як фіктивних ситуацій, так і реальних. Воно також продемонструвало розвиток математичного моделювання від простих рівнянь, які використовувалися в моделях Ланчестера, до складних взаємозв'язків між різними популяціями в зомбі-апокаліпсисі. Моделі Ланчестера були створені, коли авіаційна війна стала популярною і базувалися на простих диференціальних рівняннях, які можна було розв'язати вручну. Моделі зомбі були більш новішими і використовували складні диференціальні рівняння, для розв'язання яких потрібно було програмування на комп'ютері. Порівняли базову та складну модель кожного типу моделі, а потім співставили загальні теми моделей Ланчестера та зомбі. Модель без прицільного обстрілу та модель SZR є базовими моделями, відповідно, тоді як модель зі спрямованим вогнем та модель SIZR є складнішими. Більш складні моделі включають додаткові змінні, що дозволяли більші можливості моделювання.

Дослідницькі питання та гіпотези

Припускаємо, що є бойова ситуація, при якій одна сторона може переконати солдат перейти на бік противника. Замість того, щоб дві сторони були взаємовиключні, як це ілюструється в моделях Ланчестера, солдати будуть переходити між класами, що представлені в моделях зомбі. Замість того, щоб бути категоризованими як живі чи мертві, солдати можуть стати ворогом, з яким вони спочатку боролися, що відповідає моделюванню зомбі-апокаліпсису. Це може стати реальністю залежно від розвитку технологій маніпулювання і контролю над мозком, або навіть можливості зомбі-апокаліпсису.

Допускаємо, що існуватимуть багато подібностей між моделями Ланчестера та зомбі через використання диференціальних рівнянь для пояснення взаємозв'язків між класами в дискретних динамічних системах. Після завершення дослідження маємо краще розуміння різноманітності систем математичного моделювання та диференціальних рівнянь, які використовуються в цих моделях.

Методи

Для зомбі-моделей окремо досліджували SZR та SIZR моделі, а потім порівнювали між собою, щоб проаналізувати вплив різних змінних на популяції різних класів. Нарешті, порівнювали загальні аспекти моделей Ланчестера та зомбі-моделей, до яких входили предметна область, специфічність припущень, метод розв'язування та тип диференціальних рівнянь, що використовувалися.

Для вирішення складних рівнянь потрібно було використовувати математичний програмний засіб Maple, який дозволяє легко аналізувати, візуалізувати та знаходити розв'язки конкретних диференціальних рівнянь. Модель зображала сценарій кінця світу, в якому чутливі люди та зомбі не могли існувати поряд. Отже, або зомбі не існували, або якщо вірус зомбі був реальним, то в кінцевому рахунку всі чутливі люди померли б або перетворилися б на зомбі. Для аналізу змінних провели аналіз чутливості, щоб визначити вплив кожної змінної в моделях SZR та SIZR. Maple генерував графіки, які використовувались для визначення візуальних висновків та зображали зв'язок між різними класами з річними інтервалами часу.

4.4 Аналіз та результати моделей за допомогою Maple

Для інтерпретації зомбі-моделей, SZR та SIZR, скористалися математичним програмним забезпеченням Maple, оскільки моделі Ланчестера були настільки простими, що можна було розв'язати рівняння вручну. Використовуючи змінні, описаних у вихідному дослідженні, що були отримані з використанням програмного забезпечення Maple для розв'язування рівнянь за допомогою методу Ейлера. Змінні для моделі SZR були $\Pi = 0$, $\alpha = 0.005$, $\beta = 0.0095$, $\delta = 0$ та $\theta = 0.0001$. На рис. 4.А показані результати моделі SZR за допомогою стандартних змінних. Суцільна червона лінія представляє вразливу людську популяцію, тоді як пунктирна синя лінія представляє клас зомбі.

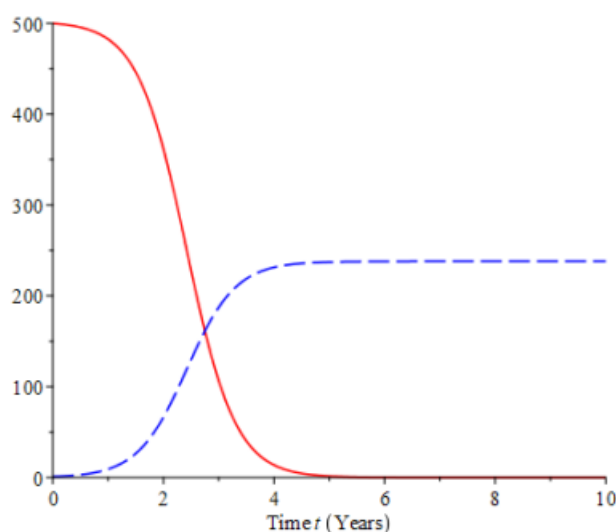


Рисунок 4. А-SZR модель

Для розуміння впливу кожної змінної на результат, визначили аналіз чутливості. Аналіз чутливості - це вивчення наслідків зміни різних змінних на результат математичної моделі [15]. Тому кожній змінній були присвоєні різні значення, тоді як інші змінні залишалися постійними, щоб проаналізувати конкретний вплив змінної на тенденції різних популяційних класів. Діапазон різних десяткових значень кожної змінної не дозволив використовувати однакові числові значення для кожної змінної, що рідко буває в реальному житті. Maple створював графіки для кожного значення, які потім аналізувалися для визначення змін у класах. Для моделі SZR проаналізували час, коли загальна вразлива людська популяція була анігільована, та найбільшу кількість зомбі.

Змінна народжуваності Π , конкретно відносилася до схильної до зараження людської популяції. Збільшення народжуваності не мало впливу на результати зомбі-апокаліпсису. Як показано на рисунку 4.Н в додатку, незалежно від числового значення, призначеного для Π , схильна до зараження людська популяція була знищена до 5 років, а чисельність зомбі стабілізувалася на рівні близько 150 зомбі. Отже, збільшення фонові народжуваності людини не вплинуло на результати зомбі-апокаліпсису в моделі SZR.

Коефіцієнт передачі, β , значно впливав на тенденції класів, як це показано на графіках чутливості на рис. 4.В.

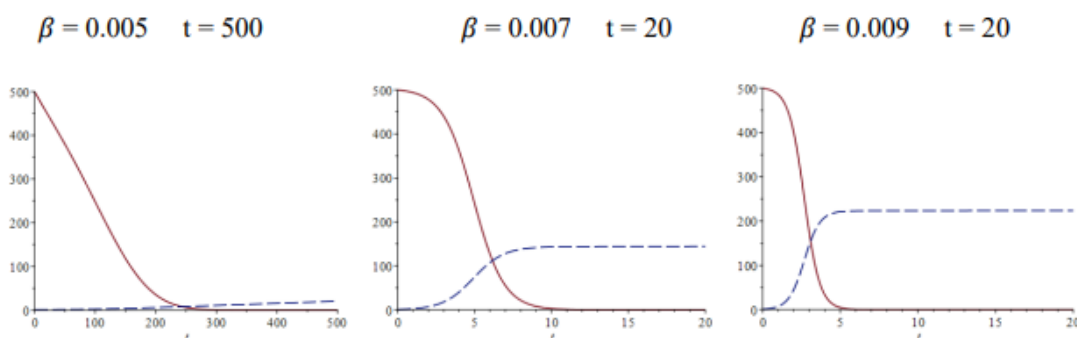


Рисунок 4. В - Аналіз чутливості β з використанням моделі SZR.

Якщо β збільшується, час, коли клас схильних людей був екстермінований, зменшується. Час екстермінації дуже зменшився з приблизно 250 років для $\beta = 0,005$ до приблизно 5 років для

$\beta = 0,009$. Збільшення β також призвело до збільшення максимальної кількості зомбі. Бій між зомбі і людьми закінчується або знищенням зомбі, або інфікуванням людини. Тому збільшення швидкості передачі, за умови, що швидкість вбивства зомбі залишається постійною, призведе до збільшення загальної кількості зомбі та скорочення часу до екстермінації людей.

Якщо рівень смертності не зомбів, δ , збільшується, то максимальна кількість зомбі зменшується, як зображено в додатку на рис. 4.І. Збільшення рівня смертності означало збільшення кількості мертвих людей, які не заражалися хворобою зомбі, тому вони не воскресли як зомбі, що пояснює зменшення максимальної кількості зомбі від близько 200 для $\delta = 0,1$ до близько 20 для

$\delta = 1$. Зміна рівня смертності також призвела до незначних неузгодженостей з часом, коли вразливі люди були знищені, але час приблизно становив 5 років. Тому збільшення рівня передачі призводило до зменшення загальної кількості зомбі, тоді як час до знищення людства залишався відносно постійним.

На відміну від інших змінних у моделі SZR, швидкість смертності зомбі, α , змогла затримати знищення людей і зменшити кількість зомбі, як це зображено на рисунку 4.С.

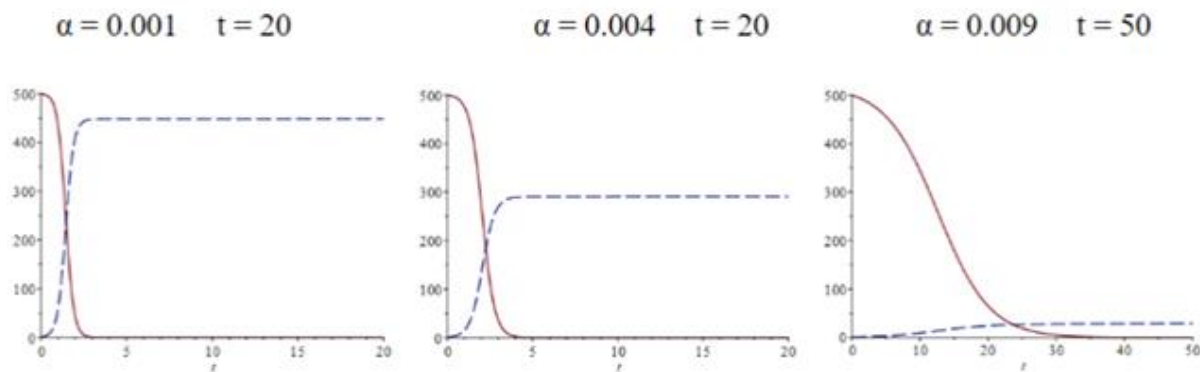


Рисунок 4. С - Аналіз чутливості α з використанням моделі SZR.

Змінна α описує ймовірність того, що смертельно хвора людина зможе вбити зомбі. Збільшення α призводило до більшої кількості вбитих зомбі, що зменшує їхню кількість та вимагає більше часу для знищення класу смертездатних людей. Незважаючи на можливість продовження зомбі-апокаліпсису, збільшення α не дозволить класу смертездатних людей знищити популяцію зомбі.

Збільшення рівня воскресіння, θ , призвело до скорочення часу, необхідного для знищення класу схильних до зараження, та збільшення кількості зомбі, як це показано на рисунку 4.І в додатку. Рівень воскресіння відображав швидкість, з якою зомбі поверталися з мертвих, тому якщо θ збільшувалося, кількість воскресених зомбі збільшувалася, що, у свою чергу, збільшувало загальну кількість зомбі. Зміна рівня воскресіння призвела до скорочення часу вимирання людей, але не так драматично, як зміна коефіцієнта передачі. Для $\theta = 0,1$ час вимирання становив трохи більше 4 років, тоді як для $\theta = 1$ час вимирання становив близько 3,5 років. Зміна β мала відмінність в часі 245 років, тоді як зміна θ призвела до різниці в пів року.

Модель SIZR додала ще один клас населення і дозволила можливість існування інфекційних носіїв з можливістю передачі хвороби на вразливих людей. Інфіковані носії можуть помирати, перш ніж завершиться передача хвороби або воскреснути як зомбі. Аналогічно до моделі SZR, я використовував змінні з оригінального дослідження: $\Pi = 0, \alpha = 0.005, \beta = 0.095, \delta = 0.0001, \theta = 0.001, i p = 0.05$ [17]. На рисунку 4.D показані результати моделі SIZR зі стандартними змінними, де вразлива популяція зображена червоною суцільною лінією, популяція зомбі позначена пунктирною синьою лінією, а інфіковані позначені зеленою пунктирно-преривчастою лінією.

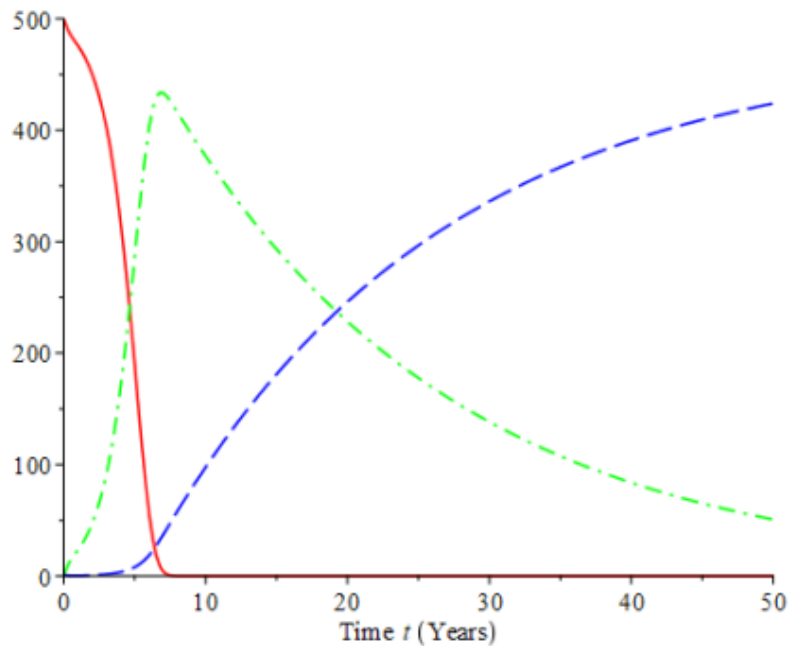
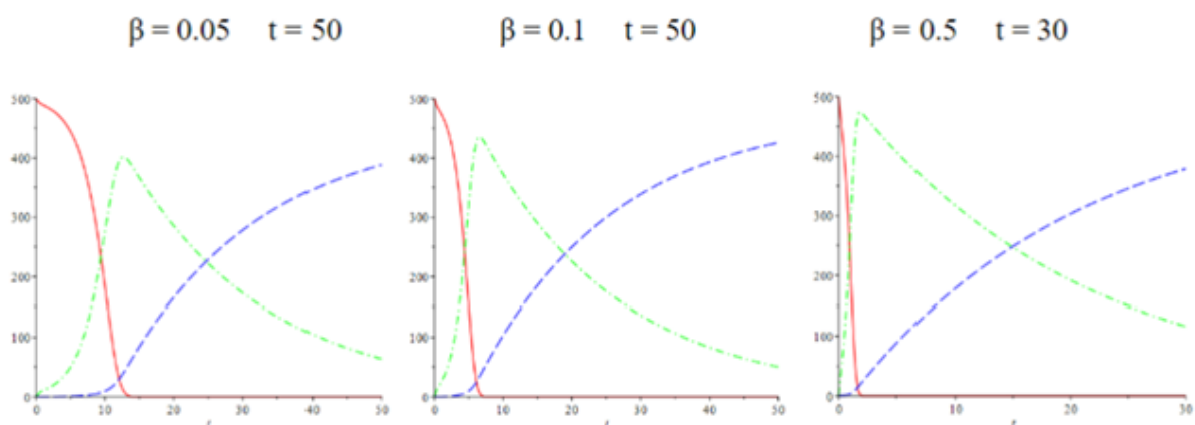


Рисунок 4. D - SIZR Модель

SIZR-модель видала подібні результати до SZR-моделі з додаванням ще однієї змінної та класу населення. Для аналізу чутливості оцінюємо час до знищення людства, максимальну кількість інфікованих та час, коли клас зомбі перевищив клас інфікованих.

Зміна народжуваності, Π , не впливала на тенденції розвитку популяцій, як показано на рисунку 4.К в додатку. Зміни в народжуваності були стійкими між двома математичними моделями зомбі, оскільки в обох моделях SZR та SIZR Π не впливала на тенденції розвитку населення.

Чутливість аналізу швидкості передачі захворювання зомбі, β , зображена на рисунку 4.Е.

Рисунок 4. Е - Аналіз чутливості β з використанням моделі SIZR.

Збільшення значення β призводило до скорочення часу до винищення людської популяції з 14 років при $\beta = 0,05$ до 2 років при $\beta = 0,5$. Також воно збільшувало максимальну кількість інфікованих та скорочувало час, коли клас зомбі перевищував за кількістю клас інфікованих. β представляло швидкість передачі інфекції, тому збільшення β означало збільшення кількості інфікованих осіб, що призвело до збільшення максимальної кількості інфікованих. Оскільки

швидкість інфікування залишалась сталою, а кількість інфікованих осіб продовжувала зростати, це спричинило з'явлення більше зомбі, що призвело до скорочення часу, необхідного для того, щоб клас зомбі став більшістю.

Збільшення швидкості смертності, які не пов'язані з зомбі, δ , загалом призвело до зменшення чисельності у всіх класах населення. Збільшення швидкості смертності вразливих людей зменшило час вимирання людства, оскільки більше вразливих людей вмирало двома способами - від зомбі та не пов'язаних з ними причин. Також воно зменшило кількість заражених, оскільки було менше вразливих людей для зараження. Оскільки смертність не була пов'язана з зомбі, і було менше людей, які заражувалися, то також зменшувалась чисельність зомбів. Також було зменшення часу, коли клас зомбів перевищив клас інфікованих, це було через те, що було менше людей, які заражувалися. Оскільки швидкість воскресіння та інфікування залишалась постійною, клас інфікованих зменшувався ще більше, тоді як клас зомбів збільшувався. Зміна δ була проілюстрована в додатку за допомогою рисунку 4.М.

Так само, як і в результатах моделі SZR, швидкість смертності зомбі, α , була єдиною змінною, що затримувала вимирання людей. Зі збільшенням швидкості смертності зомбі, кількість зомбі та інфікованих зменшувалася, тоді як час вимирання людей та час для того, щоб зомбі перевищили клас інфікованих, збільшувалися. Ефект швидкості смертності на населення був продемонстрований на рисунку 4.Ф нижче.

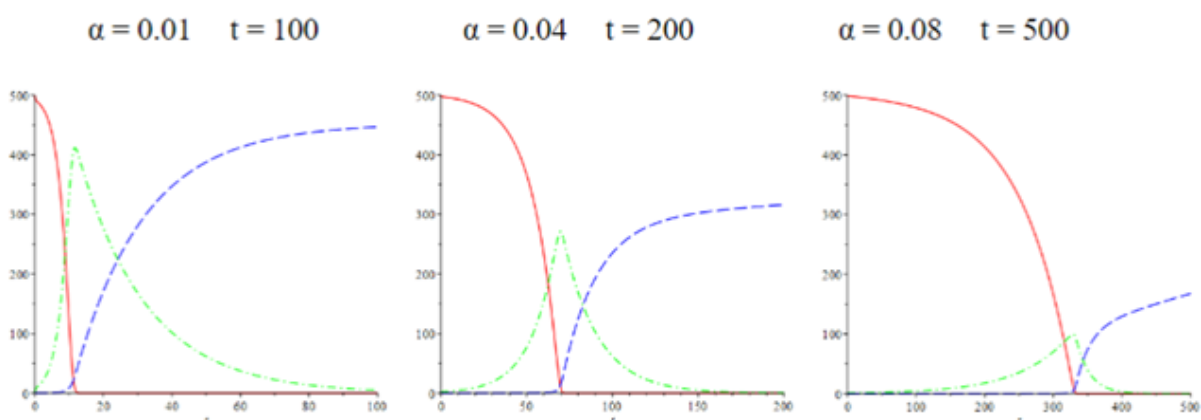


Рисунок 4. F - Аналіз чутливості α з використанням моделі SIZR.

Збільшення швидкості смертності зомбі означало збільшення кількості взаємодій між зомбі та людьми, в яких зомбі були убиті, а не люди заражені. Тому кількість зомбі та заражених зменшувалася, а час до знищення людства збільшувався.

Ефект від збільшення швидкості воскресіння, θ , призвів до інших результатів, ніж у моделі SZR. У моделі SIZR збільшення θ не впливало на тенденції популяцій, як це показано на

додатковому рисунку 4.О. Завдяки введенню нової змінної, що представляє швидкість інфікування у моделі SIZR, значення швидкості воскресіння зменшилося. У моделі SZR θ мав невеликий вплив, тому будь-яке зменшення його значення призводило до менш помітних наслідків.

Модель SIZR вводила нову змінну, швидкість зараження (ρ), а також новий клас населення. Збільшення значення ρ призвело до скорочення часу до винищення людства та часу до того, як клас зомбі перевершив клас інфікованих. Також це призвело до зменшення максимальної кількості інфікованих. Ефект швидкості зараження на тенденції населення був показаний на рисунку 4.G.

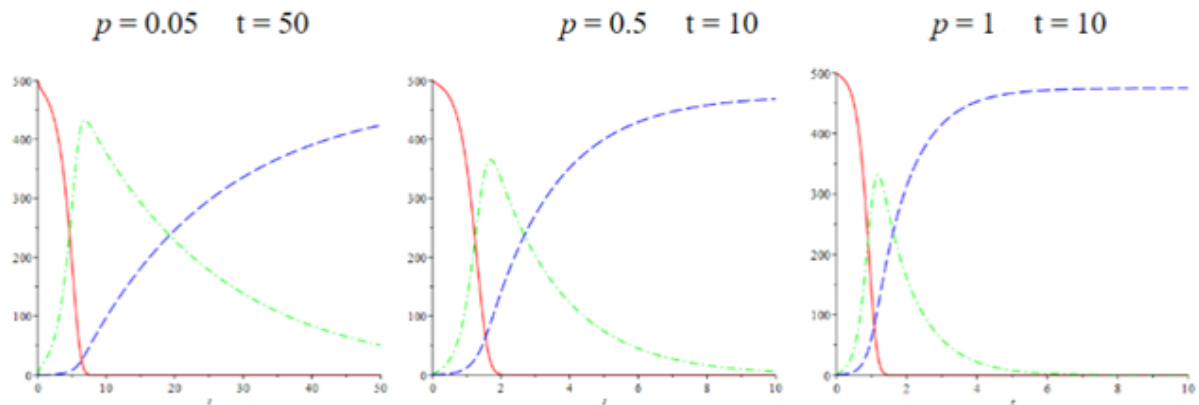


Рисунок 4. G - Аналіз чутливості ρ з використанням моделі SIZR.

Так я розумію, що збільшення швидкості інфікування призводило до скорочення періоду зараження, що в свою чергу збільшувало кількість зомбі та зменшувало максимальну кількість інфікованих. Оскільки зомбів було більше, це знижувало час для знищення людства.

Таблиця 4.1 - це таблиця порівняння, яка детально описує результати аналізу чутливості кожної змінної у моделях SZR і SIZR. Обидві моделі розглядали час, коли число схильних до інфекції людей стає рівним 0, що позначалося як "t for Susceptible = 0". Модель SZR також досліджувала загальну кількість наявних зомбі, що позначалося в таблиці як "# Zombies". У моделі SIZR я досліджував максимальну кількість інфікованих, позначену як "max Infected", та час, коли популяція зомбі стає більшістю, виключаючи видалену категорію. Час, необхідний популяції зомбі для досягнення більшості, позначався в таблиці як "t for Zombie +".

SZR	SIZR
Π – constant	Π – constant
Зменшення β – збільшує (t for Susceptible = 0), збільшує (# Zombies).	Зменшення β – збільшення часу до того моменту, (t for Susceptible = 0), збільшення максимальної кількості інфікованих (max Infected) та зменшення часу до (t for Zombie +).
δ - час для "Susceptible = 0" непослідовний, зменшення (# Zombies).	δ - зменшення часу (t for Susceptible = 0) зменшення (max Infected) зменшення (t for Zombie +)
α – збільшує (t for Susceptible) зменшується (# Zombies)	α –збільшення часу (t for Susceptible = 0) зменшення (max infected) зростання (t for Zombie +)
θ –зменшення (t for Susceptible = 0) зростання (# Zombies)	θ – constant
	ρ –зменшення (t for Susceptible = 0) зменшення (max Infected) зменшення (t for Zombie +)

В аналізі чутливості моделей SZR та SIZR було виявлено багато схожостей. У обох моделях коефіцієнт народжуваності був постійним, а єдиним змінним, який збільшував час, необхідний для винищення людства, була швидкість вбивства зомбі. Швидкість передачі, швидкість смерті зомбі, швидкість природної смерті та швидкість зараження призводили до радикальних змін у популяційних класах, тоді як інші змінні або не впливали на тенденції, або мали лише слабкий вплив. Різниця між моделями SZR та SIZR полягала у швидкості воскресіння зомбі. У моделі SZR був слабкий ефект, тоді як у моделі SIZR змінна не мала впливу. Незалежно від змінних, зомбі змогли повністю знищити популяцію людей протягом короткого часу.

Висновок

Мета цього дослідження полягала в тому, щоб проаналізувати різні типи моделей - базові, складні, реалістичні та уявні - та визначити подібності та відмінності. Моделі Ланчестера були отримані з простих диференціальних рівнянь, які розв'язувались вручну, тоді як моделі зомбі містили складні диференціальні рівняння, які потребували використання комп'ютерного програмного забезпечення. Моделі зомбі були складнішими за моделі Ланчестера, оскільки містили кілька змінних для зображення взаємозв'язків між трьома класами, тоді як моделі Ланчестера описували лише лінійний зв'язок, використовуючи ефективність бою та кількість сил як змінні для опису зв'язку між двома популяційними класами. Нарешті, моделі зомбі зображували уявну ситуацію на основі моделі хвороби, тоді як рівняння Ланчестера були реалістичними моделями, використовуваними для зображення результатів війни.

Усі моделі, які були досліджені в роботі, були неперервними динамічними системами. Обидва типи моделей, моделі Ланчестера і зомбі-моделі, вимагали певних припущень для того, щоб модель була точною. Припущення моделі Ланчестера були дуже специфічними та обмежували типи боїв, які можна було зображувати, що пояснює, чому оригінальні моделі стали застарілими та в основному використовуються в академічних цілях. З іншого боку, зомбі-моделі передбачали загальні припущення, але потребували, щоб апокаліпсис зомбі відбувся, що неможливо, оскільки це наукова фантастика.

Для моделей Ланчестера зрозуміло, що для перемоги R у моделі з націленим вогнем коефіцієнт бойової ефективності R повинен бути більшим, ніж квадрат B , помножений на коефіцієнт бойової ефективності B . Рішення пов'язано зі звичайним квадратним законом, від якого походить модель з націленим вогнем, в якому число сил мав квадратичний вплив на рівняння. Тому, для перемоги R з меншою кількістю сил, коефіцієнт r повинен бути більшим за вихідну різницю між числом сил.

Для моделі без націленого вогню кількість військ та коефіцієнт бойової ефективності мали однаковий вплив на час, переможця та втрати в битві. Тому, щоб R виграти з меншою кількістю військ, їх коефіцієнт бойової ефективності повинен бути більшим за різницю між кількістю військ, тобто $> n$.

Для моделей зомбі, було багато подібностей між результатами аналізу чутливості для моделей SZR та SIZR, що зрозуміло, оскільки різниця в диференціальних рівняннях була введення додаткової змінної та класу населення. Швидкість передачі, швидкість смерті зомбі, швидкість смерті від природних причин та швидкість інфікування сильно вплинули на тенденції популяційних класів, тоді як темп народжуваності та темп воскресіння спричинювали лише незначні зміни або не

впливали на тенденції взагалі. Збільшення швидкості смерті зомбі було єдиною змінною, яка продовжувала час до повного винищення людства, але незалежно від адаптованих змінних зомбі змогли повністю винищити людську популяцію протягом короткого часу.

Це дослідження надає можливість зрозуміти різні типи математичних моделей та методи, необхідні для їх вирішення. Воно також показало, що математичні моделі відображають різноманітні ситуації, як реалістичні, так і художні. Вибрані моделі продемонстрували розвиток математичного моделювання від простих лінійних рівнянь, що використовувалися в 1915 році у моделях Ланчестера, до складних диференціальних рівнянь, що описують взаємозв'язки між різними популяціями у моделях з апокаліпсисом зомбі в 2009 році.

На мою думку, продовжуючи дослідження, можна практикуватись в дослідженні адаптації моделей Ланчестера та порівняти їх з оригінальними рівняннями, з яких вони були похідними. Спробувати після закінчення російсько-української війни змоделювати моделі війни на основі статистик, які розсекретяться. Також вважаю корисним порівняти моделі SZR та SIZR з моделями захворювань та визначити, чи є більше схожостей. Можна додати різні змінні для врахування різниці у густоті населення, щоб визначити, чи є значна різниця між густонаселеними та ізольованими районами. Цікавим було б дослідити або створити інші моделі наукової фантастики, наприклад, модель для зображення вірусу оборотня або вампіра.

- **Досліджено** три типи моделей Ланчестера з поглибленням в змішані сили з обох сторін.
- **Запропоновано** розглянути конкретну бойову ситуацію з відомою статистикою втрат та поповнень противників, всі сценарії розвитку війни артилерій в російсько – українській війні.
- **Узагальнено** метод Ланчестера на моделі зомбі (SZR), (SIZR).
- **Використано** два популярні пакети математичного програмного забезпечення Wolfram та Maple, які надавали можливість розв'язувати диференціальні рівняння програмно, виконували побудову графіків.
- **Написано** програми, які розв'язують системи диференціальних рівнянь ітеративними методом Ейлера.
- **Побудовано** графіки, які наглядно дають можливість побачити як впливають зміни параметрів системи диференціальних рівнянь на їх розв'язок при зміні часу різних моделях.

Список використаних джерел

1. **Angevine R. Warden J. K., Keller R., Frye C.** Learning lessons from the ukraine conflict [Книга]. - 2019.
2. **Bailey J.** Field Artillery And Fire Power [Книга]. - Routledge : [автор невідомий], 1989.
3. **Biddle S., D.** Military Power: Explaining Victory and Defeat in Modern Battle. [Книга]. - Princeton : Princeton University Press NJ, 2004.
4. **Blank S.** Military assessment of the Russian war in Ukraine [Звіт]. - 2015.
5. **Deitchman J. S.** Lanchester model of guerrilla warfare. [Книга]. - 1962.
6. **Gotet F.** Aspects regarding the use of field artillery in contemporary operations [Книга]. - [місце видання невідоме] : National Defence University, 2019.
7. **Homer-Dixon T., F.** A common misapplication of the Lanchester square law. [Книга]. - 1987.
8. **Jaiswal, N., K., Kumari, M., Nagabhushana, B., S.** Optimal force mix in heterogeneous combat. [Книга]. - 1995.
9. **Kaufmann W., W.** Nonnuclear deterrence. In: Steinbruner J. D. and Sigal L. V. (eds), Alliance Security: NATO and the no-first-use question [Книга]. - Washington, DC : [автор невідомий], 1983.
10. **Каур., G., Т., Каур., D., J., Finkelstein., N., М.** The Lanchester (n; 1) problem. [Книга]. - 2005.
11. **Lanchester F. W.** Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm [Книга]. - London : Constable & co, 1916.
12. **Lanchester F. w.** Mathematics in warfare [Книга]. - [місце видання невідоме] : The World of Mathematics, 1956.
13. **Lepingwell J., W.** The laws of combat? Lanchester re-examined. [Книга]. - 1987.
14. **Meerschaert Michael, M.** Mathematical Modeling. [Книга]. - [місце видання невідоме] : Academic Press, 1993.
15. **Mooney, D. D., Swift, R. J.** A Course in Mathematical Modeling [Книга]. - Washington, D.C : Mathematical Association of America., 1999.
16. **Morehouse C. P.** [Збірка доповідей] // The Iwo Jima Operation. - [місце видання невідоме] : USMC, 1946.
17. **Munz P., Hudea, I., Imad, J., & Smith, R. J.** When Zombies Attack!: Mathematical Modelling of an Outbreak of Zombie Infection. In Infectious Disease Modelling Research Progress [Книга]. - [місце видання невідоме] : Nova Science, 2009.
18. **Roberts D. M., Conolly B. W.** An extension of the Lanchester square law to inhomogeneous forces with an application to force allocation methodology. [Книга]. - 1992.
19. **Vigman F. K.** The theoretical evaluation of artillery after World War [Книга]. - [місце видання невідоме] : Military Affairs, 1952. - сс. 115-118.

Додаток А. Графіки до розділу 4

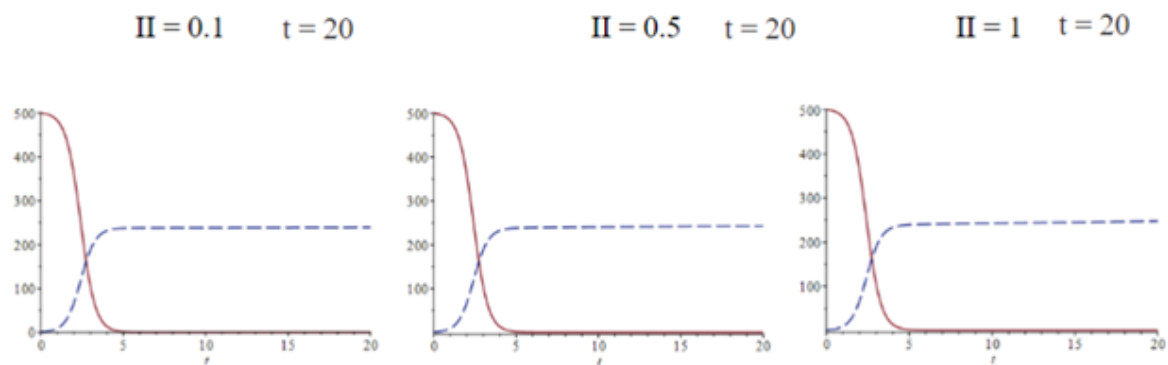


Рисунок 4. Н

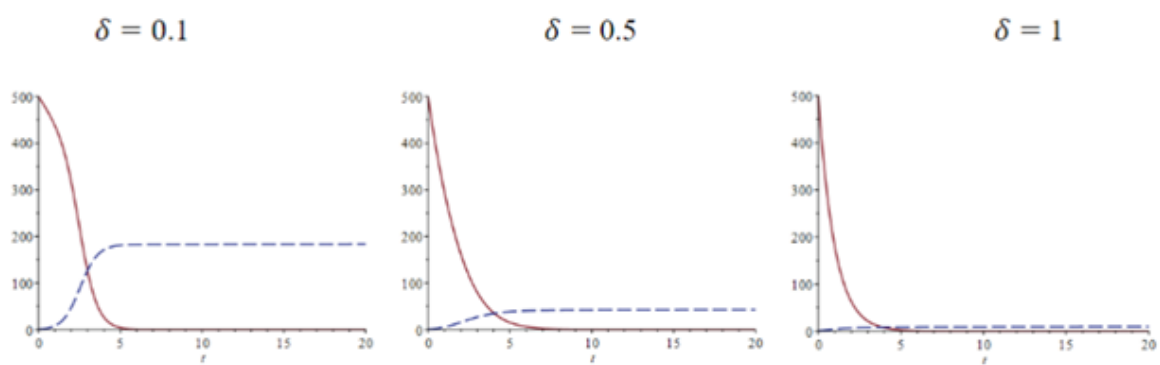


Рисунок 4. І

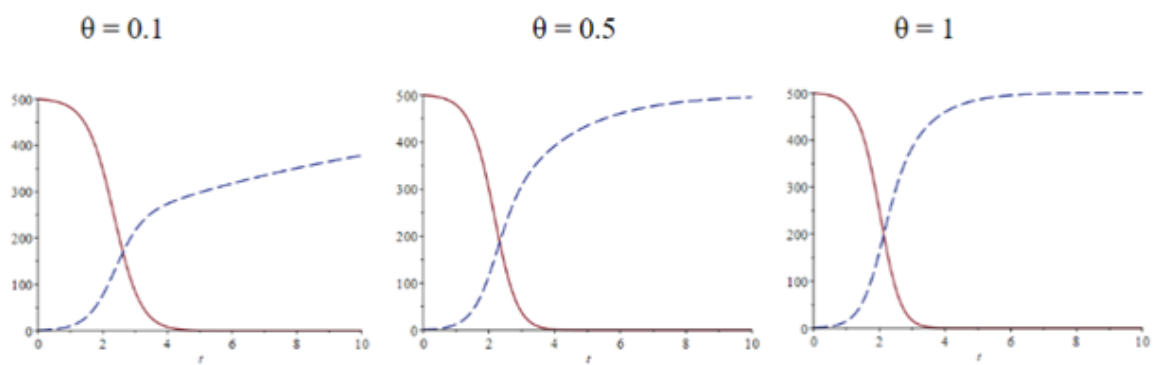


Рисунок 4. J

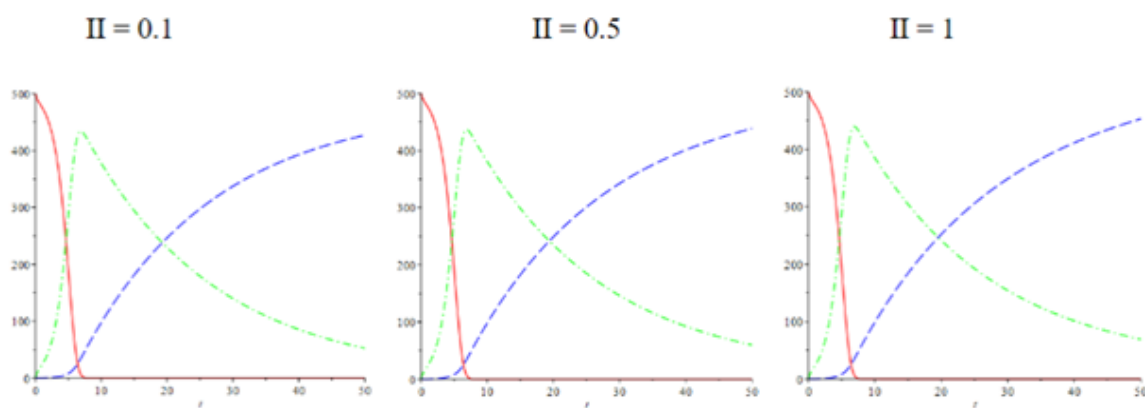


Рисунок 4. К

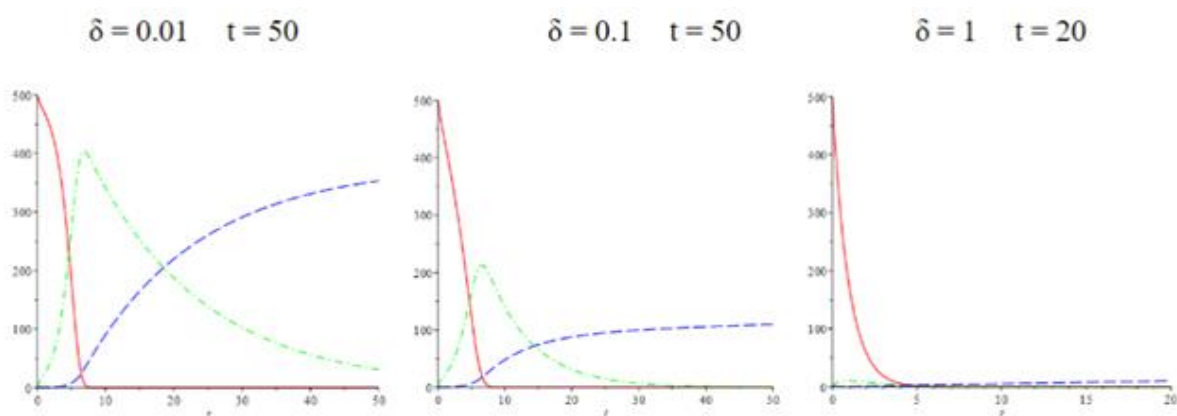


Рисунок 4. Л

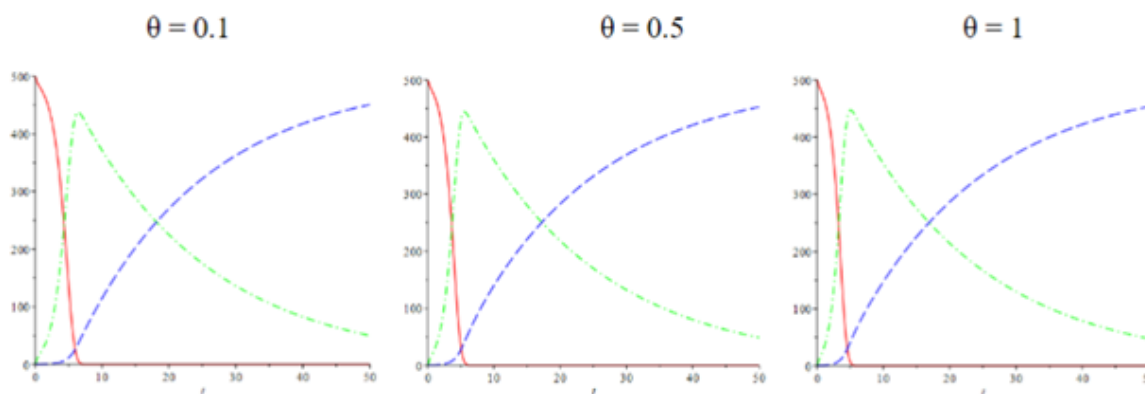


Рисунок 4. М

Додаток В. Програмна реалізація через Maple та Wolfram

Програмна реалізація в Wolfram рис. 3.1 А.

```
StreamPlot[{10-x-0.5*y, 10-0.5*x-y}, {x, 0, 20}, {y, 0, 20}, FrameLabel->
[диаграма потоков [паметка для обра
{Style[x, 14], Style[y, 14]}, AspectRatio->1, StreamColorFunction->None,
[стиль [стиль [аспектное от... [функция оцвечивания... [ни одног
StreamStyle->Blue, StreamScale-> Large]
[стиль оформ... [си... [масштаб стре... [крупный
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.2 А.

```
StreamPlot[{10-0.5*x-y, 10-x-0.5*y}, {x, 0, 20}, {y, 0, 20}, FrameLabel->
[диаграма потоков [паметка для обра
{Style[x, 14], Style[y, 14]}, AspectRatio->1, StreamColorFunction->None,
[стиль [стиль [аспектное от... [функция оцвечивания... [ни одног
StreamStyle->Blue, StreamScale-> Large]
[стиль оформ... [си... [масштаб стре... [крупный
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.3 А.

```
StreamPlot[{10-0.5*x-y, 10-2*x-0.5*y}, {x, 0, 20}, {y, 0, 20},
[диаграма потоков
FrameLabel->{Style["x", 14], Style["y", 14]}, AspectRatio-> 1,
[паметка для ... [стиль [стиль [аспектное отношение
StreamColorFunction-> None, StreamStyle-> Blue, StreamScale->
[функция оцвечивания п... [ни ... [стиль оформ... [си... [масштаб стрелки об
Large]
[крупный
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.3 В.

```
StreamPlot[{10-0.5*x-y, 10-2*x-0.5*y},{x,0,20},{y,0,20},
[диаграмма потоков
FrameLabel->{Style["x", 14], Style["y", 14]}, AspectRatio-> 1,
[пометка для ... [стиль [стиль [аспектное отношение
StreamColorFunction-> None, StreamStyle-> Blue, StreamScale->
[функция оцвечивания п... [ни ... [стиль оформ... [си... [масштаб стрелки об
Large]
[крупный]
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.1 В.

```
Plot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.%],{t,0,10},AxesLabel -> {Style["t", 14], ""},
[Г... [вычислить [обозначения ... [стиль
PlotLegends->{x,y}, PlotRange -> {{0, 10}, {0, 20}}, AspectRatio->
[легенды графика [отображаемый диапазон граф... [аспектное отноше
1]
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.2 В.

```
Plot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.%],{t,0,7},AxesLabel->{Style["t", 14],""},
[Г... [вычислить [обозначени... [стиль
PlotLegends->{x,y},PlotRange->{{0,5},{0,20}}, AspectRatio->1]
[легенды графика [отображаемый диапазон ... [аспектное отношение
```

Знаходження точок рівноваги.

```
Solve[{a-c*y*x-f*x==0,b-d*y*x-h*y==0},{x,y}]
```

related computations full Wolfram|Alpha results

Solve[{a - c*y*x - f*x == 0, b - d*y*x - h*y == 0}, {x, y}, MaxExtraConditions -> Automatic]
[решить уравнения [максимальное число допол... [автоматически

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{-bc + ad - fh + \sqrt{4adfh + (-bc + ad - fh)^2}}{2df}, y \rightarrow \frac{bc - ad + \frac{1}{2}(-bc + ad - fh + \sqrt{4adfh + (-bc + ad - fh)^2})}{ch} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ x \rightarrow \frac{bc - ad + fh + \sqrt{4adfh + (-bc + ad - fh)^2}}{2df}, y \rightarrow \frac{bc - ad + \frac{1}{2}(-bc + ad - fh - \sqrt{4adfh + (-bc + ad - fh)^2})}{ch} \right\} \right\}$$

Значення власних чисел для матриці Якобі.

```
Eigenvalues[{{-c*y1-f,-c*x1},{-d*y1,-d*x1-h}}]
step-by-step solution related computations full Wolfram|Alpha results
Eigenvalues[{{-(c*y1) - f, -(c*x1)}, {- (d*y1), - (d*x1) - h}}]
[собственные числа]

$$\left\{ \frac{1}{2} \left( -f - h - d x_1 - c y_1 - \sqrt{(f + h + d x_1 + c y_1)^2 - 4 (f h + d f x_1 + c h y_1)} \right), \frac{1}{2} \left( -f - h - d x_1 - c y_1 + \sqrt{(f + h + d x_1 + c y_1)^2 - 4 (f h + d f x_1 + c h y_1)} \right) \right\}$$

```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.4 А.

```
StreamPlot[{1-1*y*x-0.1*x,1-1*y*x-0.1*y},{x,0,5},{y,0,5},
[диаграмма потоков]
FrameLabel->{Style[x,14],Style[y,14]},AspectRatio->1,
[пометка для... [стиль [стиль [аспектное отношение]
StreamColorFunction->None,StreamStyle->Blue,StreamScale->Large]
[функция оцветчивания... [ни ... [стиль оформ... [си... [масштаб стр... [крупный]
```

Чисельне рішення системи диф. рівнянь (3.5).

```
NDSolve[{x'[t]==1-1x[t]*y[t]-0.1*x[t],y'[t]==1-1*y[t]*x[t]-0.1*y[t],x[
0]==2,y[0]==4},{x,y},{t,0,50}]
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.4 В.

```
Plot[Evaluate[{x[t],y[t]}/.%],{t,0,50},AxesLabel->{Style["t",14],""},
PlotLegends->{x,y},PlotRange->{{0,50},{0,5}},AspectRatio->1]
```

Програмна реалізація в Wolfram для рис. 3.5.

```
Plot3D[((-1*1+a*d-0.1*0.1+Sqrt[4*a*0.1*d*0.1+(-1*1+a*d-0.1*
[график функции 2-х перемене... [квадратный корень]
0.1)^2])/(2*0.1*d))/((1*1-a*d+1/2(-1*1+a*d-0.1*0.1+Sqrt[4*a*
[квадратный кс]
0.1*d*0.1+(-1*1+a*d-0.1*0.1)^2]))/(1*0.1)),{a,0.8,1.2},{d,0.8,1.2},
PlotRange->All,AxesLabel->{Style[a,14],Style[d,14],Style[
[отобража... [... [обозначени... [стиль [стиль [стиль]
FractionBox["x"("^"),"y"("^")*"]//DisplayForm,14]]]
[блок дроби [форма отображения]
```

Для моделі війни зомбі (SZR) задаємо диф. рівняння.

```
> #Euler's Method for solving differential equations
> restart;
> dS/dt = B - beta · S · Z - delta · S
```

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S Z - \delta S + B$$

```
> dZ/dt = beta · S · Z + theta · R - alpha · S · Z
```

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha S Z + \beta S Z + \theta R$$

```
> dR/dt = delta · S + alpha · S · Z - theta · R
```

$$\frac{dR}{dt} = \alpha S Z - \theta R + \delta S$$

Вказуємо початкові змінні, які будемо в дослідженнях змінювати.

```
> B := 0
```

$$B := 0$$

```
> alpha := 0.005
```

$$\alpha := 0.005$$

```
> beta := 0.0095
```

$$\beta := 0.0095$$

```
> delta := 0
```

$$\delta := 0$$

```
> theta := 0.0001
```

$$\theta := 0.0001$$

```
> dt := 0.01
```

$$dt := 0.01$$

```
> S[0] := 500
```

$$S_0 := 500$$

```
> Z[0] := 5
```

$$Z_0 := 5$$

```
> R[0] := 0
```

$$R_0 := 0$$

Частина коду, яка є незмінною для всіх досліджень моделі (SZR), дозволяє графічно, з заданою точністю та масштабом вивести аналіз зміни відповідних класів досліджень.

```
> with(plots) :
> for n from 1 to 1000 do
  S[n] := S[n-1] + dt * (B - beta · S[n-1] · Z[n-1] - delta · S[n-1]) :
  Z[n] := Z[n-1] + dt * (beta · S[n-1] · Z[n-1] + theta · R[n-1] - alpha · S[n-1] · Z[n-1]) :
  R[n] := R[n-1] + dt * (delta · S[n-1] + alpha · S[n-1] · Z[n-1] - theta · R[n-1]) :
end do:
> k1 := listplot([seq(S[n], n = 0 .. 1000)], color = red) :
k2 := listplot([seq(Z[n], n = 0 .. 1000)], color = blue) :
display(k1, k2, title = "Figure 1 - SZR Model", linestyle = [solid, longdash], labels = ["(Time(t) year) · 100", ""]);
```

Для моделі війни зомбі (SIZR) задаємо диф. рівняння.

```
> #Euler's Method for solving differential equations
>
> dS/dt = B - beta · S · Z - delta · S
>
> dZ/dt = rho · K + theta · R - alpha · S · Z
>
> dK/dt = beta · S · Z - rho · K - delta · K
>
> dR/dt = delta · S + delta · K + alpha · S · Z - theta · R
```

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S Z - \delta S + B$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\alpha S Z + \rho K + \theta R$$

$$\frac{dK}{dt} = \beta S Z - \delta K - \rho K$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha S Z + \delta K - \theta R + \delta S$$

Вказуємо початкові змінні, які будемо в дослідженнях змінювати.

```
> B := 0
> alpha := 0.005
> beta := 0.0095
> delta := 0.0001
> theta := 0.001
> rho := 0.05
> dt := 0.1
> S[0] := 500
> K[0] := 10
> Z[0] := 5
> R[0] := 0
```

$$B := 0$$

$$\alpha := 0.005$$

$$\beta := 0.0095$$

$$\delta := 0.0001$$

$$\theta := 0.001$$

$$\rho := 0.05$$

$$dt := 0.1$$

$$S_0 := 500$$

$$K_0 := 10$$

$$Z_0 := 5$$

$$R_0 := 0$$

Частина коду, яка є незмінною для всіх досліджень моделі (SIZR), дозволяє графічно, з заданою точністю та масштабом вивести аналіз зміни відповідних класів досліджень.

```
> with(plots) :
> for n from 1 to 5000 do
  S[n] := S[n-1] + dt*(B - beta · S[n-1] · Z[n-1] - delta · S[n-1]) :
  K[n] := K[n-1] + dt*(beta · S[n-1] · Z[n-1] - rho · K[n-1] - delta · K[n-1]) :
  Z[n] := Z[n-1] + dt*(rho · K[n-1] + theta · R[n-1] - alpha · S[n-1] · Z[n-1]) :
  R[n] := R[n-1] + dt*(delta · S[n-1] + alpha · S[n-1] · Z[n-1] - theta · R[n-1] + delta · K[n-1]) :
end do:
> k1 := listplot([seq(S[n], n = 0 .. 5000)], color = red) :
k2 := listplot([seq(Z[n], n = 0 .. 5000)], color = blue) :
k3 := listplot([seq(K[n], n = 0 .. 5000)], color = green) :
display({k1, k2, k3}, title = "Figure 2 - SZIR Model", linestyle = [solid, longdash, longdash], labels = ["(Time(t) year) · 100", ""]);
```

Додаток С. Отримання зберігаючих величин з розділу 1.

Припустимо, що ми шукаємо квадратичну консервативну величину у вигляді для рівнянь Ланчестера (1.12) для спрямованого вогню зі змішаними силами на обох сторонах та випадковим розподілом

$$Q = \sum_{\alpha, \beta} \sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha} R_{\beta} - \sum_{i, j} \tau_{ij} B_i B_j.$$

Диференціюючи та підставляючи рівняння (1.12), ми отримуємо, що для $\frac{dQ}{dt} = 0$ маємо, для всіх i, j, α, β :

$$\tau_{ij} (r_{\alpha}^i + r_{\alpha}^j + r_{\beta}^i + r_{\beta}^j) = \sigma_{\alpha\beta} (b_i^{\alpha} + b_i^{\beta} + b_j^{\alpha} + b_j^{\beta}).$$

Ці рівняння є не звичайними для загальних значень r_{α}^i та b_i^{α} , але вони розв'язуються в роздільному випадку (1.13), коли вони приймають вигляд:

$$\tau_{ij} \frac{r^i + r^j}{b_i + b_j} = \sigma_{\alpha\beta} \frac{b^{\alpha} + b^{\beta}}{r_{\alpha} + r_{\beta}} \quad (= \text{незалежні від } i, j, \alpha, \beta),$$

Це дає (1.14). Аналогічні виведення для (1.16, 1.18) є прямолінійними.

Проаналізувавши наш напівдинамічний цільовий розподіл. Бачимо, що немає квадратичної консервативної величини для нероздільних ставок знищення. Для роздільних ставок знищення ми просто зауважуємо, що динамічні рівняння

$$\frac{dR_{\alpha}}{dt} = - \sum_i b_i b^{\alpha} B_i \frac{\gamma^{\alpha} R_{\alpha}}{\sum_{\beta} \gamma^{\beta} R_{\beta}}, \quad \frac{dB_i}{dt} = - \sum_{\alpha} r_{\alpha} r^i R_{\alpha} \frac{\rho^i B_i}{\sum_j \rho^j B_j},$$

ведуть до збереження

$$Q' = \sum_{\alpha, \beta} \frac{r_{\alpha} \gamma^{\beta} + r_{\beta} \gamma^{\alpha}}{b^{\alpha} \gamma^{\alpha} + b^{\beta} \gamma^{\beta}} R_{\alpha} R_{\beta} - \sum_{i, j} \frac{b_i \rho^j + b_j \rho^i}{r^i \rho^i + r^j \rho^j} B_i B_j.$$

для червоних та синіх внесків до Q' похідні мають однаковий значення,

$$\frac{1}{2} \frac{\sum_{\alpha, \beta, i, j} (r_{\alpha} \gamma^{\beta} + r_{\beta} \gamma^{\alpha}) (b_i \rho^j + b_j \rho^i) R_{\alpha} R_{\beta} B_i B_j}{\sum_{\beta} \gamma^{\beta} R_{\beta} \sum_j \rho^j B_j}.$$

Це означає, що червоні повинні зосередити вогонь в порядку спадання значень $b_i r^i$, а сині - в порядку $r_{\alpha} b^{\alpha}$.