

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА
ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ВАРТОСТІ АКЦІЙ В
УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ**


Виконавець:
бакалавр четвертого курсу

Давітян Артем Артурович



Науковий керівник:
доцент кафедри
МСС

Волощук Сергій Дмитрович



Роботу заслухано на засіданні кафедри моделювання складних систем
тарекомендовано до захисту, протокол №18 від 10 червня 2022 р.

Завідувач кафедри МСС  д.т.н., доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

ЗМІСТ

Вступ.....	4
Розділ 1. Математичне моделювання ціни акції.....	6
1.1 Акції, їх суть та функції.....	6
1.2 Стохастична диференціальна модель вартості акції.....	7
1.3 Диференціальне рівняння щільності акції.....	8
Розділ 2. Чисельне розв'язання параболічного рівняння щільності акцій.....	12
2.1 Змішана задача для рівняння щільності акції.....	12
2.2 Комп'ютерне моделювання динаміки щільності акцій.....	13
Розділ 3. Диференціальна модель щільності акцій з відомими спостереженнями.....	16
3.1 Моделювання щільності акцій з дискретними спостереженнями.....	16
3.2 Моделювання щільності акцій з неперервними спостереженнями.....	20
Розділ 4. Комп'ютерне моделювання щільності акцій з дискретними спостереженнями.....	24
4.1 Постановка задачі.....	24
4.2 Чисельний експеримент.....	25
Висновки.....	34
Перелік джерел посилання.....	35

Анотація

В даній роботі досліджена диференціальна модель щільності акцій з невизначеними початковими та крайовими умовами. Поставлена і розв'язана задача відновлення щільності акцій за відомими спостереженнями. Розв'язок цієї задачі отриманий за допомогою розробленого у середовищі Python програмного забезпечення. За отриманими результатами зроблено висновок про залежність точності моделювання від кількості відомих спостережень та кількості точок дискретизації областей визначення функції щільності та невідомих фіктивних збурень, моделюючих вплив початково-крайових умов.

ВСТУП

Інвестиції та фондовий ринок відіграють важливу роль як у економічному розвитку країни, галузей господарства та окремих підприємств, так і у житті пересічного громадянина кожної розвиненої країни. Згідно з опитуванням 2016 року, проведеним американським інститутом дослідження громадської думки Gallup, близько половини громадян Сполучених Штатів Америки мають грошові заощадження у фондовому ринку [8].

Фондовий ринок – економічний та фінансовий майданчик, де здійснюється купівля-продаж та емісія цінних паперів. У даній кваліфікаційній роботі розглядається один з найбільш поширених цінних паперів – акція.

Інвестиція в акції, як і будь-який інший вид інвестицій має фактор ризику. Тому розраховуючи на певний прибуток, потрібно враховувати ще й ризики втрат. Все залежить від того, як інвестор підходить до формування інвестиційного портфелю. Наприклад зменшити втрати можна за допомогою диверсифікації, тобто поєднати в одному портфелі активи з різними степенями ризику, що призведе до зменшення загального ступеня ризику портфеля в цілому. Прибутковість інвестиції прямо пропорційна її ризику. Так найризикованішими та найприбутковішими інвестиціями є короткострокові (спекуляції), де ціль – отримати прибуток на різниці ціни акції в два окремих моменти часу. В таких інвестиціях присутній досить великий елемент випадковості, проте існує можливість проаналізувати існуючі дані та отримати певну інформацію, що допоможе інвестору більш детально проаналізувати та передбачити поведінку акції на ринку. Тому завжди одним із найважливіших елементів для успішної торгівлі на фондовому ринку була можливість вірно передбачити як вартість акції зміниться з часом. В умовах високої волатильності фондового ринку, досить часто необхідно використовувати серйозні математичні методи для прогнозування такої динаміки. Таким чином вже протягом багатьох десятиліть є актуальними дослідження, що приділяють увагу питанню моделювання поведінки ціни акції. Зараз відома велика кількість різноманітних моделей та методів аналізу такої динаміки. В ході роботи

розглянуто стохастичну модель та досліджено диференціальну модель з неповністю визначеними початковими та крайовими умовами.

Об'єкт дослідження – моделі вартості однотипних акцій на фондовому ринку.

Предмет дослідження – диференціальна модель щільності акцій в умовах невизначеності початкових та крайових умов.

Методи дослідження – моделювання щільності акцій шляхом зведення диференціальної моделі до системи алгебраїчних або функціональних рівнянь.

Мета та задачі дослідження – аналіз ефективності використання існуючої моделі динаміки ціни акції на практиці.

Відповідно до цієї мети були поставлені та вирішені наступні задачі:

- Аналіз стохастичної диференціальної моделі вартості акції;
- Постановка змішаної задачі для параболічного диференціального рівняння щільності акцій;
- Дослідження моделі щільності акцій з невизначеними початковими та крайовими умовами при відомих спостереженнях;
- Розробка комп'ютерної моделі щільності акцій, проведення чисельного експерименту та аналіз отриманих результатів.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНИ АКЦІЇ

1.1 Акції, їх суть та функції

Акція – цінний папір, що свідчить про власність певної долі підприємства, надає право на участь у керівництві цього підприємства (акціонерного товариства) та права на отримання прибутку (дивідендів) [2].

Українське законодавство розрізняє два види акцій:

1. Привілейовані акції.
2. Прості акції.

Привілейовані акції передбачають дохід, який нараховується на акцію у вигляді заздалегідь визначеного відсотка. Більша частина таких акцій є накопичувальними, тобто вони накопичуються при затримці виплат дивідендів, тому вони повинні бути виплачені до того, як свої дивіденди отримають звичайні акціонери. Вони також надають пріоритет у розподілі майна на випадок ліквідації акціонерного товариства. Проте, власники привілейованих акцій не мають права голосу на загальних зборах, а отже не беруть участь в управлінні акціонерним товариством.

Прості акції, у свою чергу, надають акціонеру право участі в управлінні. Вони також дають право на дивіденди, але отримати їх акціонер зможе тільки після виплати по привілейованим акціям. Продаж саме простих акцій допомагає новим підприємствам почати свою справу, а існуючим – розширюватися. Власники таких акцій беруть до уваги ризик втратити весь свій інвестований капітал, проте їх доходи не обмежуються. Вони можуть отримати як збільшені дивіденди, так і збільшену ціну самої акції у випадку, коли емітент акцій успішно веде свою справу.

Теоретично потрібно бути власником 50% акцій плюс одна акція, щоб мати право керувати акціонерним товариством. Такий пакет акцій називається контрольним. На практиці достатньо володіти близько 10-25% акцій, а іноді

навіть менше. Це спричинено тим, що акціонерним капіталом може володіти велика кількість утримувачів акцій, які загалом не беруть участь у зборах.

1.2 Стохастична диференціальна модель вартості акції

Першим методом для опису еволюції вартості акцій була лінійна модель Л. Башел'є [1] (1900 р.):

$$x_t = x_0 + \mu t + \sigma X_t, \quad (1.1)$$

де $X = (X_t)_{t \geq 0}$ – вінерівський процес, x_t – вартість акції у момент часу t , x_0 – вартість акції у початковий момент часу, μ – норма повернення акції, σ – волатильність акції [6].

На той час це був помітний крок у використанні концепцій теорії ймовірностей при аналізі фінансового ринку. Проте ця модель має недоліки. Одним з основних недоліків є можливість величини x_t приймати негативні значення.

Наступним важливим кроком була пропозиція П. Самуельсона описувати ціну акції геометричним броунівським рухом:

$$x_t = x_0 e^{\mu t} e^{\sigma X_t - \frac{\sigma^2}{2} t}. \quad (1.2)$$

Тобто не сама вартість x_t , а логарифми вартостей підкорюються лінійній моделі (1.1):

$$\ln \frac{x_t}{x_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma X_t. \quad (1.3)$$

Процес (1.2), згідно формули Іто, має стохастичний диференціал:

$$dx_t = \mu x_t dt + \sigma x_t dX_t, \quad \mu > 0, \sigma > 0. \quad (1.4)$$

Якщо ж переписати рівняння (1.4) у вигляді:

$$\frac{dx_t}{x_t} = \mu dt + \sigma dX_t, \quad (1.5)$$

то можна побачити, що дискретне наближення може бути записаним у вигляді:

$$\frac{\Delta x_t}{x_{t-\Delta t}} \approx \mu \Delta t + \sigma \Delta X_t, \quad (\Delta x_t = x_t - x_{t-\Delta t}), \quad (1.6)$$

за умови дискретного часу.

1.3 Диференціальне рівняння щільності акції

Запишемо більш загальне рівняння (1.4), що описує динаміку ціни акції:

$$dx = F(x, t) dt + \sigma x dX, \quad (1.7)$$

У простішому випадку за цим рівнянням можна проаналізувати поведінку однієї акції. У випадку, коли аналізується динаміка певної кількості акцій, використовують більш складне рівняння [6].

Позначимо простір цін $\Pi = \{0 \leq x < \infty\}$. Нехай на осі Ox існує N_0 акцій, ціна яких описується рівнянням (1.4). Оскільки акції одного типу можуть продаватись у різноманітних умовах, їх ціни у один конкретний момент часу t можуть різнитись. З цього випливає, що акції певним чином розподілені вздовж осі Ox .

Введемо до розгляду функцію $u(x, t)$ щільності розподілу акцій, де x – ціна акції, а t – час. Також розглянемо інтервал $[x, x + \Delta x]$, який є малим ціновим інтервалом довжиною Δx . Нехай $\Delta Q(x, t)$ – кількість акцій на відрізьку $[x, x + \Delta x]$ в момент часу t . Тоді функція щільності визначається так

$$u(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(x, t)}{\Delta x}, \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.8)$$

Тоді

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx$$

– кількість придбаних акцій за цінами з проміжку $[x_1, x_2]$ на моменту часу t . З цього випливає:

$$\int_0^{\infty} u(x, t) dx = N_0. \quad (1.9)$$

Отримаємо диференціальне рівняння для функції (1.8). Розглянемо довільний інтервал цін $[x_1, x_2] \subset \Pi$. Позначимо доповнення:

$$\Omega_0 = (-\infty < x < x_1) \cup (x_2 < x < \infty).$$

Будемо вважати, що акції постійно продаються та купуються, а їх ціна змінюється, тому точки, що відповідають акціям переміщуються по осі Ox . Запишемо рівняння балансу акцій за проміжок часу $[t_1, t_2]$:

$$\Delta Q_{t_1 t_2} = P_1 + P_2, \quad (1.10)$$

де $\Delta Q_{t_1 t_2}$ – різниця кількості акцій за проміжок часу від t_1 до t_2 , що мають ціну у проміжку $[x_1, x_2]$; P_1 – кількість акцій, що попадуть у проміжок за рахунок детермінованої частини рівняння (1.7); P_2 – за рахунок випадкових процесів.

Обчислимо $\Delta Q_{t_1 t_2}$:

$$\Delta Q_{t_1 t_2} = Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx. \quad (1.11)$$

Обчислимо P_1 : розглянемо довільну акцію в околиці ціни x_1 . Так як ціна акції змінюється з часом, то точка $x(t)$ рухається вздовж осі Ox зі швидкістю $F(x_1, t)$. За проміжок часу Δt акція пройде шлях $\Delta S = F(x_1, t)\Delta t$. З цього випливає, що всі акції, що знаходяться на проміжку ΔS попадуть на проміжок $[x_1, x_2]$ через точку x_1 за час Δt .

Так як щільність акцій в околі точки x_1 дорівнює $u(x_1, t)$, то кількість акцій, що за час Δt попаде на проміжок $[x_1, x_2]$ через точку x_1 обчислюється рівнянням:

$$M(x_1) = u(x_1, t)F(x_1, t)\Delta t. \quad (1.12)$$

Аналогічно для точки x_2 :

$$M(x_2) = -u(x_2, t)F(x_2, t)\Delta t. \quad (1.13)$$

Знак « \leftarrow » з'явився у формулі (1.13) у зв'язку з тим, що додатні значення $F(x_2, t)$ означають відтік акцій з проміжку $[x_1, x_2]$.

Розіб'ємо проміжок часу Δt на інтервали Δt^i від t_1 до t_2 та просумуємо (1.12) та (1.13) по них. Отримаємо інтегральну суму:

$$\sum_i \Delta M_i = - \sum_i [u(x_2, t^i)F(x_2, t^i) - u(x_1, t^i)F(x_1, t^i)]\Delta t^i,$$

спрямувавши Δt^i до нуля, отримаємо:

$$- \int_{t_1}^{t_2} [u(x_2, t)F(x_2, t) - u(x_1, t)F(x_1, t)] dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (uF) dx dt = P_1. \quad (1.14)$$

Обчислимо P_2 : розглянемо два моменти часу t та $t + \Delta t$, а також дві осі Ox , що відображають простір цін у відповідні моменти часу. Нехай J_1 – кількість акцій, що попадуть на проміжок $[x_1, x_2]$ до моменту часу $t + \Delta t$ з множини Ω_0 . Розіб'ємо Ω_0 на елементарні відрізки довжини Δy_i . На кожному такому відрізку в момент t знаходиться $u(y_i, t)\Delta y_i$ акцій. Ці акції розподіляться на всій півосі Ox ($0 < x < \infty$). Щоб визначити цей розподіл, запишемо рівняння для скінченного інтервалу часу Δt :

$$x(t + \Delta t) - x(t) = F(x, t)\Delta t + \sigma x(t)(X(t + \Delta t) - X(t)), \quad (1.15)$$

де $X(t) = z'$ – реалізоване значення стохастичного процесу у момент часу t ; $X(t + \Delta t) = z$ – значення процесу в момент часу $t + \Delta t$. При цьому випадкова величина $X(t + \Delta t)$ описується щільністю ймовірностей [6]:

$$\rho(z', t; z, t + \Delta t). \quad (1.16)$$

Розглянемо акцію з ціною y_i в момент часу t , тобто $x(t) = y_i$. Прирівняємо $x(t) = \sigma x(t)X(t)$, з цього випливає

$$X(t) = z' = \frac{1}{\sigma}, \quad x(t + \Delta t) = \sigma x(t)X(t + \Delta t).$$

Нехай тоді, випадкова величина $\sigma x(t)X(t + \Delta t)$ приймає значення з інтервалу $[x_1, x_2]$, тобто:

$$x_1 < \sigma x(t)X(t + \Delta t) < x_2, \quad x_1 < \sigma y_i z < x_2. \quad (1.17)$$

При виконанні умови (1.17) та умови додатності ціни y_i , z змінюється в межах $\frac{x_1}{\sigma y_i} < z < \frac{x_2}{\sigma y_i}$. З цього випливає, що якщо величина $\sigma x(t)X(t)$ прийняла значення y_i у момент часу t , то величина $\sigma x(t)X(t + \Delta t)$ у момент часу $t + \Delta t$ прийме значення з інтервалу $[x_1, x_2]$ з ймовірністю

$$\text{sgn } y_i \int_{\frac{x_1}{\sigma y_i}}^{\frac{x_2}{\sigma y_i}} \rho(z', t; z, t + \Delta t) dz.$$

Обчислимо J_1 . Зробимо заміну $z = \frac{\eta}{\sigma y}$. Помножимо отриману ймовірність на кількість акцій $u(y_i, t) \Delta y_i$. Після цього, просумувавши отримані числа по всім інтервалам Δy_i в межах множини Ω_0 та спрямувавши Δy_i до нуля, отримуємо:

$$J_1 = \int_{\Omega_0} \left[\int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{1}{\sigma}, t; \frac{\eta}{\sigma y}, t + \Delta t \right) d\eta u(y, t) \right] \frac{dy}{\sigma|y|}.$$

Аналогічно знайдемо J_2 – кількість акцій, що покинуть проміжок $[x_1, x_2]$ та попадуть в множину Ω_0 до моменту часу $t + \Delta t$:

$$J_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{\Omega_0} \rho \left(\frac{1}{\sigma}, t; \frac{\eta}{\sigma y}, t + \Delta t \right) d\eta u(y, t) \right] \frac{dy}{\sigma|y|}.$$

Обчисливши приріст акцій ΔJ та зробивши обернену заміну $\frac{\eta}{\sigma y} = z$ отримуємо:

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \rho \left(\frac{1}{\sigma}, t; \frac{x}{\sigma y}, t + \Delta t \right) \frac{u(y, t)}{\sigma|y|} dy - u(x, t) \right] dx.$$

Використавши властивості умовної щільності ймовірностей одновимірних стохастичних процесів обчислимо внутрішній інтеграл [6]. Просумувавши ці інтеграли по всім елементарним інтервалам Δt^i отримуємо інтегральну суму, що перетворюється на інтеграл при $\Delta t^i \rightarrow 0$:

$$P_2 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[(b\sigma^2 - c\sigma)u + (2b\sigma^2 - c\sigma)x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} b\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] dx dt. \quad (1.18)$$

Підставимо (1.11), (1.14) та (1.18) у рівняння балансу (1.10). Опускаючи інтеграли, отримуємо рівняння для щільності акцій. Нехай $F = \mu x$, отримуємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u, x > 0, \quad (1.19)$$

де

$$\alpha = \frac{1}{2} b\sigma^2, \beta = 2b\sigma^2 - c\sigma - \mu, \gamma = b\sigma^2 - c\sigma - \mu.$$

Оскільки вважаємо процес X – вінерівським, то $b = 1, c = 0$ [6].

Відповідно отримуємо: $\alpha = \frac{1}{2} \sigma^2, \beta = 2\sigma^2 - \mu, \gamma = \sigma^2 - \mu$.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЩІЛЬНОСТІ АКЦІЙ

2.1 Змішана задача для рівняння щільності акції

Розглянемо пакет з n акцій, які у початковий момент часу $t = 0$ коштують x_0 умовних одиниць. Тоді початкова щільність у дискретному варіанті може буди представлена у вигляді:

$$n \cdot \delta(x - x_0),$$

$$\text{де } \delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

Визначимо щільність акцій в наступні моменти часу $t > 0$. Для цього поставимо наступну змішану задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial u}{\partial x} + \gamma u, \quad x > 0;$$

$$u|_{t=0} = n \cdot \delta(x - x_0) \quad 0 \leq x < \infty; \quad (2.1)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\text{де } \alpha = \frac{1}{2}\sigma^2, \beta = 2\sigma^2 - \mu, \gamma = \sigma^2 - \mu.$$

Розв'яжемо задачу чисельним методом. Для цього обмежимо простір цін недосяжною максимальною ціною $\chi = 10$. Інтерпретуємо її як ціну, яку акція не зможе досягнути та перевищити при будь-якому $t \geq 0$. Отримаємо новий простір цін $\Pi^* = \{0 < x < \chi\}$ та додаткову крайову умову:

$$u|_{x=\chi} = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.3)$$

2.2 Комп'ютерне моделювання динаміки щільності акцій

Використаємо метод прямих. Для цього апроксимуємо значення частинних похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial u}{\partial x}$ за допомогою центральних скінчених різниць, вважаючи що крок $h = 1$:

$$u_{xx}^i(x, t) \approx u(i + 1, t) - 2u(i, t) + u(i - 1, t); \quad (2.4)$$

$$u_x^i \approx \frac{u(i+1, t) - u(i-1, t)}{2}. \quad (2.5)$$

Підставимо (2.4) та (2.5) у рівняння (1.19) для кожного натурального $i \in \Pi^*$. Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь розв'яжемо за допомогою вбудованих функцій мови програмування Python, врахувавши початкову та крайові умови.

Розглянемо результати виконання програми при різних параметрах μ , σ на проміжку $t \in [0, 6]$, $[t] = \text{місяці}$, $n = 5$, $x_0 = 4$:

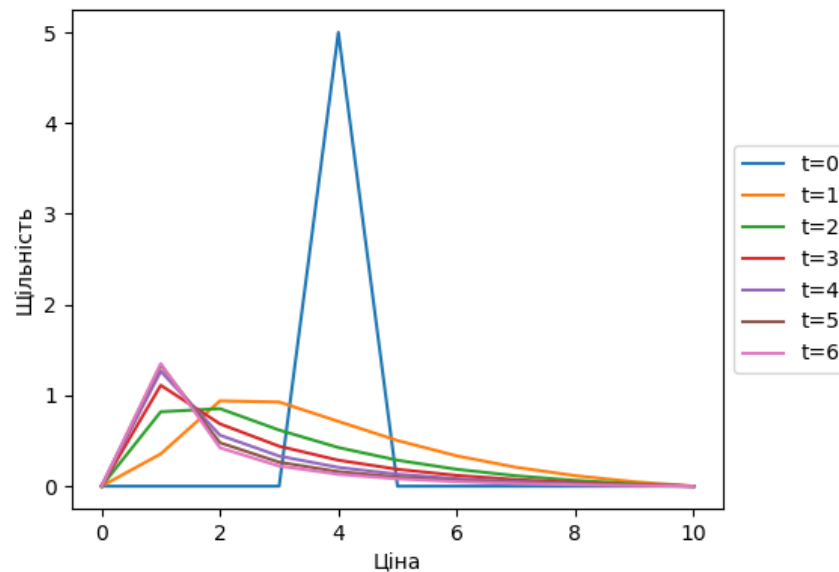


Рисунок 2.1 – Графік щільності з параметрами ($\sigma = 0.7$, $\mu = 0.3$)

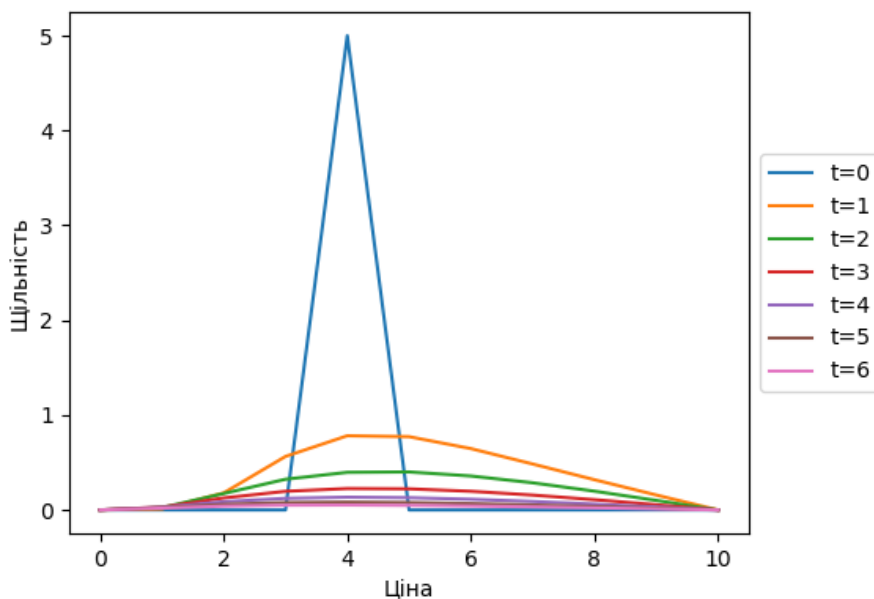


Рисунок 2.2 – Графік щільності з параметрами ($\sigma = 0.5$, $\mu = 0.5$)

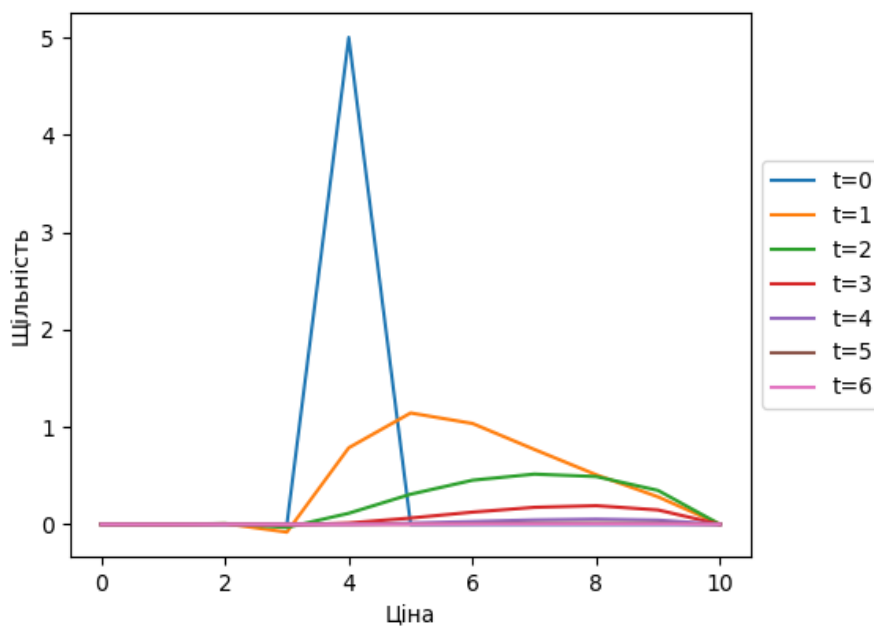


Рисунок 2.3 – Графік щільності з параметрами ($\sigma = 0.3$, $\mu = 0.5$)

За отриманими графіками, можемо бачити, що при низькому показнику μ (норма повернення акції) та високій волатильності, графік щільності однотипних акцій концентрується навколо мінімального можливого показника ціни. Зі збільшенням параметра μ та зменшенням волатильності спостерігаємо, як графік щільності стає більш плоским та зміщується до максимальної ціни. Зменшивши показник волатильності ще сильніше бачимо концентрацію щільності справа від

початкової ціни акцій. Також, на (рисунок 2.3), можемо спостерігати один із недоліків даного методу, а саме від'ємні значення щільності. Це виникає з того, що при такому підході ніщо не забороняє розв'язкам диференціального рівняння приймати подібні значення.

РОЗДІЛ 3

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ ЩІЛЬНОСТІ АКЦІЙ З ВІДОМИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

3.1 Моделювання щільності акцій з дискретними спостереженнями

Диференціальну модель щільності акцій, отриману в розділі 2 у вигляді початково-крайової задачі, розглянемо у наступній постановці [4]. Будемо вважати, що функція щільності акцій $u(x, t)$ задана на обмеженій грошово-часовій області $D = [X_1, X_2] \times [T_1, T_2]$, а початкові та крайові умови невідомі. Проте відомими є K спостережень $\varphi_k(x, t)$ за функцією щільності, які визначені і неперервні в областях $D_k \in D$ відповідно. При цьому будемо вважати, що $D_i \cap D_j = \emptyset, i, j = \overline{1, K}$, тобто області D_k попарно не перетинаються.

Отже маємо задачу відновлення функції щільності акцій на основі неперервних спостережень за нею

$$L(\partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, x \in [X_1, X_2], t \in [T_1, T_2], \quad (3.1)$$

$$u(x, t) = \varphi_k(x, t), (x, t) \in D_k = [X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] \times [T_1^{(k)}, T_2^{(k)}], k = \overline{1, K}, \quad (3.2)$$

де $[X_1^{(k)}, X_2^{(k)}] \subset [X_1, X_2], [T_1^{(k)}, T_2^{(k)}] \subset [T_1, T_2], k = \overline{1, K}$.

Оскільки розв'язання даної задачі аналітичними або числовими методами є проблематичним, то відновимо функцію $u(x, t)$ у дискретизованому вигляді згідно методики, запропонованої в [7]. Для цього розв'яжемо задачу шляхом зведення її до системи алгебраїчних співвідношень. Дискретизуємо грошово-часову область D точками $(x_n, t_n), n = \overline{1, N}$ та знайдемо відповідні вектори значень відомих спостережень:

$$\varphi_k = \text{col}(\varphi_k(x_n, t_n): (x_n, t_n) \in D_k, n = \overline{1, N}), k = \overline{1, K}. \quad (3.3)$$

Отже ми отримали задачу

$$L(\partial_x, \partial_t)u(x, t) = 0, x \in [X_1, X_2], t \in [T_1, T_2], \quad (3.4)$$

$$u(x_n, t_n) = \varphi_k(x_n, t_n) \in D_k, n = \overline{1, N}, k = \overline{1, K}. \quad (3.5)$$

Функцію щільності $u(x, t)$ відновимо наближено так, щоб умови спостереження виконувались середньоквадратично, тобто щоб мав місце критерій

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^K \sum_{\substack{n=1 \\ (x_n, t_n) \in D_k}}^N (u(x_n, t_n) - \varphi_k)^2 \rightarrow \min. \quad (3.6)$$

В даній постановці задачі початково-крайові умови невідомі, але їх вплив на функцію щільності присутній. Тому, як і в [7] функцію щільності будемо відновлювати у вигляді суми:

$$u(x, t) = u_\infty(x, t) + u_0(x, t) + u_\Gamma(x, t), \quad x \in [X_1, X_2], t \in [T_1, T_2], \quad (3.7)$$

де

$$\begin{aligned} u_\infty(x, t) &= \int_D G(x - x', t - t') \psi(x', t') dx' dt' = 0, \\ u_0(x, t) &= \int_{S^0} G(x - x', t - t') \psi_0(x', t') dx' dt', \\ u_\Gamma(x, t) &= \int_{S^\Gamma} G(x - x', t - t') \psi_\Gamma(x', t') dx' dt'. \end{aligned}$$

Тут $\psi(x', t')$ – права частина рівняння (3.4). Це функція розподілених у D зовнішньо-динамічних збурень і у нашому випадку $\psi(x', t') = 0$; $\psi_0(x', t')$, $\psi_\Gamma(x', t')$ – невідомі функції фіктивних збурень, дія яких в областях $S^0 = [X_1, X_2] \times [-\infty, T_1]$ та $S^\Gamma = (\mathbb{R} \setminus [X_1, X_2]) \times [T_1, T_2]$ відповідно моделюватиме вплив невідомих початкових та крайових умов. Збурення $\psi_0(x', t')$ є фіктивними, оскільки вони діють у області S^0 , тобто на ціновому відрізку $[X_1, X_2]$ до настання часу T_1 . Аналогічно збурення $\psi_\Gamma(x', t')$ теж є фіктивними, оскільки діють у області S^Γ , тобто у часових рамках $[T_1, T_2]$ але за межами цінового відрізка $[X_1, X_2]$.

Для побудови функцій $u_0(x, t)$ та $u_\Gamma(x, t)$ використаємо передатну функцію $G(x - x', t - t')$, яка є фундаментальним розв'язком диференціального оператора $L(\partial_x, \partial_t)$, тобто розв'язком наступного рівняння:

$$L(\partial_x, \partial_t)G(x - x', t - t') = \delta(x - x', t - t'),$$

де

$$\delta(x - x', t - t') = \begin{cases} \infty, & x = x', t = t', \\ 0, & x \neq x', t \neq t', \end{cases}$$

– δ -функція Дірака.

Зважаючи на [3], функцію $G(x - x', t - t')$ можна отримати у вигляді:

$$G(x - x', t - t') = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\rho(x-x')} e^{iq(t-t')}}{L(i\rho, iq, x)} d\rho dq, \quad (3.8)$$

де $L(i\rho, iq, x) = p - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 q^2 - (2\sigma^2 - \mu)xq - (\sigma^2 - \mu)$.

Оскільки спостереження (3.5) задані векторами своїх значень (3.3), то моделюючи вплив початкових та крайових умов функції $u_0(x, t)$, $u_\Gamma(x, t)$ будемо відновлювати у вигляді [7]:

$$u_0(x, t) = \sum_{m=1}^{M_0} G(x - x_m^0, t - t_m^0) \psi_{0m}, \quad (3.9)$$

$$u_\Gamma(x, t) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(x - x_m^\Gamma, t - t_m^\Gamma) \psi_{\Gamma m}, \quad (3.10)$$

де ψ_{0m} та $\psi_{\Gamma m}$ – значення фіктивних збурень $\psi_0(x', t')$, $\psi_\Gamma(x', t')$, які моделюють вплив на функцію щільності невідомих початкових та крайових умов відповідно.

Вони визначаються так:

$$\psi_0 = \text{col}(\psi_0(x_m^0, t_m^0), (x_m^0, t_m^0) \in S^0, m = \overline{1, M_0}),$$

$$\psi_\Gamma = \text{col}(\psi_\Gamma(x_m^\Gamma, t_m^\Gamma), (x_m^\Gamma, t_m^\Gamma) \in S^\Gamma, m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\psi_{0m} = \psi_0(x_m^0, t_m^0), \quad \psi_{\Gamma m} = \psi_\Gamma(x_m^\Gamma, t_m^\Gamma),$$

де (x_m^0, t_m^0) , $m = \overline{1, M_0}$ – точки дискретизації області S^0 , а (x_m^Γ, t_m^Γ) , $m = \overline{1, M_\Gamma}$ – точки дискретизації області S^Γ .

Отже проблема побудови функції щільності $u(x, t)$ зведеться до знаходження моделюючих векторів ψ_0 та ψ_Γ , що згідно з критерієм Φ_1 дозволяє в середньоквадратичному сенсі забезпечити виконання спостережень (3.5).

Враховуючи (3.7), (3.9), (3.10), підставимо функцію щільності у спостереження (3.5). Отримаємо систему алгебраїчних рівнянь для знаходження компонент ψ_{0m} ($m = \overline{1, M_0}$), $\psi_{\Gamma m}$ ($m = \overline{1, M_\Gamma}$) невідомих векторів ψ_0 та ψ_Γ :

$$\begin{aligned}
& \text{col} \left(\sum_{m=1}^{M_0} G(x_n - x_m^0, t_n - t_m^0) \psi_{0m} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(x_n - x_m^\Gamma, t_n - t_m^\Gamma) \psi_{\Gamma m}, (x_n, t_n) \in D_1, n = \overline{1, N} \right) = \varphi_1 \\
& \text{col} \left(\sum_{m=1}^{M_0} G(x_n - x_m^0, t_n - t_m^0) \psi_{0m} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(x_n - x_m^\Gamma, t_n - t_m^\Gamma) \psi_{\Gamma m}, (x_n, t_n) \in D_2, n = \overline{1, N} \right) = \varphi_2 \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& \text{col} \left(\sum_{m=1}^{M_0} G(x_n - x_m^0, t_n - t_m^0) \psi_{0m} + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(x_n - x_m^\Gamma, t_n - t_m^\Gamma) \psi_{\Gamma m}, (x_n, t_n) \in D_K, n = \overline{1, N} \right) = \varphi_K. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Систему (3.11) розв'яжемо наближено, враховуючи критерій Φ_1 . Зведемо її до вигляду:

$$B\bar{\psi} = \phi, \quad (3.12)$$

де

$$\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \text{col}(\psi_0, \psi_\Gamma), \\
\phi &= \text{col}(\varphi_k, k = \overline{1, K}) \\
B &= (B_1 B_2), \quad (3.13)
\end{aligned}$$

при

$$\begin{aligned}
B_1 &= \text{col}(\text{col}(\text{str}(G(x_n - x_m^0, t_n - t_m^0)), m = \overline{1, M_0}), (x_n, t_n) \in D_k, n = \overline{1, N}), k \\
&= \overline{1, K}), \\
B_2 &= \text{col}(\text{col}(\text{str}(G(x_n - x_m^\Gamma, t_n - t_m^\Gamma)), m = \overline{1, M_\Gamma}), (x_n, t_n) \in D_k, n = \overline{1, N}), k \\
&= \overline{1, K}).
\end{aligned}$$

Таким чином задача (3.4)-(3.6) звелась до задачі (3.12), яку потрібно розв'язати згідно критерію

$$\overline{\Phi}_1 = \|B\bar{\psi} - \phi\|^2 \rightarrow \min_{\bar{\psi}} \quad (3.14)$$

Розв'язання задачі (3.12), (3.14) зводиться до розглядуваної у [7] проблеми псевдообернення лінійних алгебраїчних рівнянь. Множина розв'язків або псевдорозв'язків цієї задачі має вигляд:

$$\Omega_{\bar{\psi}} = \{\bar{\psi}: \bar{\psi} = B^+ \phi + v - B^+ B v, \forall v \in R^{M_0 + M_\Gamma}\}, \quad (3.15)$$

Отримана множина розв'язків (3.15) задовольняє рівнянню (3.12) наближено згідно критерію (3.14). Похибка обчислюється наступним чином:

$$\varepsilon_0^2 = \min_{\bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}} \|B\bar{\psi} - \phi\|^2 = \phi^T \phi - \phi^T B B^+ \phi.$$

Множина розв'язків (3.15) буде однозначною при умові $\det B^T B > 0$.

Перші M_0 елементів вектора $\bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}$ відповідають фіктивному збуренню ψ_0 , наступні M_Γ елементів – ψ_Γ . Підставляючи значення знайдених збурень у (3.9), (3.10) отримаємо відповідні представлення для u_0 та u_Γ .

Враховуючи (3.7) знайдемо шукану функцію щільності u у дискретизованому вигляді. У зв'язку з можливою неоднозначністю розв'язку множини Ω_ψ , маємо множину можливих функцій:

$$\Omega_u = \{u : u = \text{col}(\text{str}(G(x_n - x_m^0, t_n - t_m^0), m = \overline{1, M_0}) \\ \text{str}(G(x_n - x_m^\Gamma, t_n - t_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}))\bar{\psi}, n = \overline{1, N}, \quad \forall \bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}\}.$$

Для $\forall u \in \Omega_u$ рівняння (3.4) задовольняється точно, а спостереження (3.5) при цьому виконуються наближено згідно критерію (3.6). Умова однозначності Ω_u та точність її елементів аналогічні умові однозначності та точності елементів множини (3.15).

3.2. Моделювання щільності акцій з неперервними спостереженнями

Розглянемо задачу (3.1)-(3.2) з наступною додатковою вимогою: функцію щільності $u(x, t)$ відновити в аналітичному вигляді. Для цього, слідуючи методиці, запропонованій у [7], зведемо задачу до системи функціональних співвідношень. Для цього функцію щільності відновимо так, щоб умови (3.2) виконувались середньоквадратично, тобто щоб мав місце критерій

$$B_1(x, t) = \text{col}(\text{str}(G(x - x_m^0, t - t_m^0), m = \overline{1, M_0}), k = \overline{1, K}),$$

$$B_2(x, t) = \text{col}(\text{str}(G(x - x_m^\Gamma, t - t_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}), k = \overline{1, K}).$$

Тим самим зведемо початкову задачу (3.1)-(3.2) до задачі (3.18), яку потрібно розв'язати згідно критерію

$$\overline{\Phi}_1 = \sum_{k=1}^K \int_{D_k} \|B(x, t)\bar{\psi} - \phi(x, t)\|^2 dx dt \rightarrow \min_{\bar{\psi}} \quad (3.20)$$

Процес розв'язування задачі (3.18), (3.20) зводиться до розглядуваної у [7] проблеми псевдообернення лінійних функціональних співвідношень. Множина розв'язків або псевдорозв'язків цієї задачі має вигляд:

$$\Omega_{\bar{\psi}} = \{\bar{\psi}: \bar{\psi} = P^+ B_\varphi + v - P^+ P v, \forall v \in R^{M_0 + M_\Gamma}\}, \quad (3.21)$$

де P^+ – матриця, псевдообернена до матриці

$$P = \sum_{k=1}^K \int_{D_k} B^T(x, t) B(x, t) dx dt,$$

$$B_\varphi = \sum_{k=1}^K \int_{D_k} B^T(x, t) \phi(x, t) dx dt. \quad (3.22)$$

Елементи множини (3.21) будуть задовільняти рівняння (3.18) наближено, згідно критерію (3.20). Середньоквадратична нев'язка системи (3.18) визначатиметься наступною формулою:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= \min_{\bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}} \sum_{k=1}^K \int_{D_k} \|B(x, t)\bar{\psi} - \phi(x, t)\|^2 dx dt = \\ &= \sum_{k=1}^K \int_{D_k} \phi^T(x, t) \phi(x, t) dx dt - B_\varphi^T P^+ B_\varphi. \end{aligned}$$

Множина розв'язків або псевдорозв'язків $\Omega_{\bar{\psi}}$ буде однозначною при умові невинродженості матриці P , тобто

$$\det P > 0.$$

Перші M_0 компонент вектора $\bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}$ будуть належати фіктивному збуренню ψ_0 , а решта M_Γ компонент – вектору ψ_Γ . Підставляючи вектори ψ_0 , ψ_Γ у (3.9), (3.10) отримаємо невідомі функції u_0 та u_Γ .

Враховуючи (3.7) знайдемо шукану функцію щільності $u(x, t)$. У зв'язку з можливою неоднозначністю розв'язку $\bar{\psi}$, маємо множину можливих функцій щільності $u(x, t)$:

$$\begin{aligned} \Omega_u &= \{u(x, t) : u(x, t) = \\ &= (\text{str}(G(x - x_m^0, t - t_m^0), m = \overline{1, M_0}) \text{str}(G(x - x_m^\Gamma, t - t_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}))\bar{\psi}, \\ &\quad \forall \bar{\psi} \in \Omega_{\bar{\psi}}, \}, \end{aligned}$$

Для $\forall u(x, t) \in \Omega_u$ рівняння (3.1) задовольняється точно, а спостереження (3.2) при цьому виконуються наближено згідно критерію (3.16).

Умова однозначності Ω_u та точність її елементів співпадає з умовою однозначності та точністю елементів множини (3.21).

РОЗДІЛ 4

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЩІЛЬНОСТІ АКЦІЙ З ДИСКРЕТНИМИ СПОСТЕРЕЖЕННЯМИ

4.1 Постановка задачі

Перевіримо на ефективність використання методики моделювання щільності акцій з дискретними спостереженнями, представленої у пункті 3.1, розв'язавши прикладну задачу з використанням вбудованих інструментів мови програмування Python.

Відновимо функцію щільності акцій $u(x, t)$, яка задана на обмеженій грошово-часовій області $D = [X_1, X_2] \times [T_1, T_2]$, що дискретизована точками $(x_n, t_n), n = \overline{1, N}$. Будемо вважати, що відомі K спостережень за функцією щільності, які визначені та неперервні в областях, що належать області D і не перетинаються між собою.

Отже маємо задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta x \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma u = 0, x \in [X_1, X_2], t \in [T_1, T_2] \quad (4.1)$$

$$u(x_n, t_n) = \varphi_1(x_n, t_n), n = \overline{1, N}, (x_n, t_n) \in [X_1^{(1)}, X_2^{(1)}] \times [T_1^{(1)}, T_2^{(1)}],$$

⋮

$$u(x_n, t_n) = \varphi_K(x_n, t_n), n = \overline{1, N}, (x_n, t_n) \in [X_1^{(K)}, X_2^{(K)}] \times [T_1^{(K)}, T_2^{(K)}]. \quad (4.2)$$

Для обчислення передатної функції (3.8) чисельними методами пакету SciPy мови програмування Python використаємо наступну заміну [5]:

$$u(x, t) = e^{\gamma t} v(x, t) \quad (4.3)$$

та заміни змінних:

$$z = \ln(x) + ct, \quad (4.4)$$

$$\tau = \alpha t, \quad (4.5)$$

$$c = \beta - \alpha. \quad (4.6)$$

$$v(x, t) = y(\ln(x) + ct, \alpha t) \quad (4.7)$$

Підставивши відповідні заміни у (4.1)-(4.2), отримаємо задачу:

$$\frac{\partial y(z, \tau)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 y(z, \tau)}{\partial z^2} = 0,$$

$$(z, \tau) \in \bar{D} = [\ln(X_1) + cT_1, \ln(X_2) + cT_2] \times [\alpha T_1, \alpha T_2], \quad (4.8)$$

$$y(z_n, \tau_n) = \overline{\varphi_1}(z_n, \tau_n),$$

$$(z_n, \tau_n) \in \left[\ln(X_1^{(1)}) + cT_1^{(1)}, \ln(X_2^{(1)}) + cT_2^{(1)} \right] \times \left[\alpha T_1^{(1)}, \alpha T_2^{(1)} \right],$$

$$\vdots$$

$$y(z_n, \tau_n) = \overline{\varphi_K}(z_n, \tau_n),$$

$$(z_n, \tau_n) \in \left[\ln(X_1^{(K)}) + cT_1^{(K)}, \ln(X_2^{(K)}) + cT_2^{(K)} \right] \times \left[\alpha T_1^{(K)}, \alpha T_2^{(K)} \right]. \quad (4.9)$$

У новій постановці передатна функція, як фундаментальний розв'язок диференціального оператора $L(\partial z, \partial \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ прийме вигляд:

$$G(z - z', \tau - \tau') = \frac{\chi(\tau - \tau')}{\sqrt{4\pi(\tau - \tau')}} e^{-(z-z')^2/(4(\tau-\tau'))}, \quad (4.10)$$

де $\chi(\tau - \tau')$ – функція Хевісайда.

Знайшовши, використовуючи методику описану в розділі 3.2, множину розв'язків Ω_y , використаємо обернену заміну та отримаємо множину розв'язків початкової задачі (4.1)-(4.2):

$$\Omega_u = \{u: u = \text{col}(e^{\gamma t_n} y(\ln(x_n) + ct_n, \alpha t_n), n = \overline{1, N}), \forall u \in \Omega_y\}. \quad (4.11)$$

4.2 Чисельний експеримент

Поставимо чисельний експеримент моделювання функції щільності у наступній постановці. Нехай є відомою деяка функція щільності акцій:

$$u(x, t) = \sin(x) + \sin(t) + 2$$

Оригінальна функція щільності

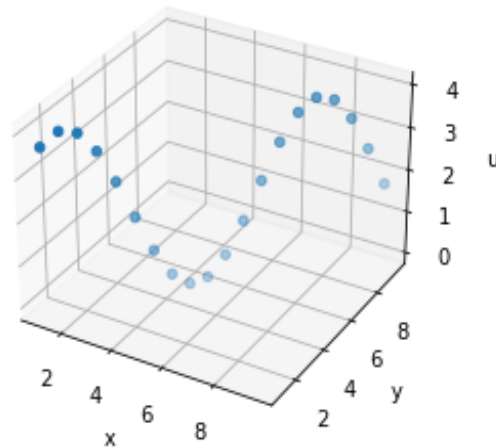


Рисунок 4.1 – Оригінальна функція щільності

Використаємо її як спостереження за шуканою функцією щільності у задачі (4.1)-(4.2). Використавши програмне забезпечення написане за допомогою мови програмування Python, розв'яжемо поставлену задачу чисельними методами та побудуємо графіки за результатами. Обчислимо середньоквадратичну нев'язку між значеннями змодельованої функції щільності та оригіналу.

Зробимо постановку початкової задачі. Дискретизуємо грошово-часову область $D = [1, 10] \times [1, 10]$ 20 рівномірно-віддаленими точками ($x=t$). Области S^0 та S^T дискретизуємо 1000 точками. Нехай $\sigma = 0.7$, а $\mu = 0.3$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 0.245x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 0.68x \frac{\partial u}{\partial x} - 0.19u = 0, x \in [1,10], t \in [1,10]$$

$$u(x_n, t_n) = \sin(x_n) + \sin(t_n) + 2, n = \overline{1,20}, (x_n, t_n) \in [1,3] \times [1,3],$$

$$u(x_n, t_n) = \sin(x_n) + \sin(t_n) + 2, n = \overline{1,20}, (x_n, t_n) \in [7,9] \times [7,9].$$

Результати обчислень є наступними:

Змодельована функція щільності

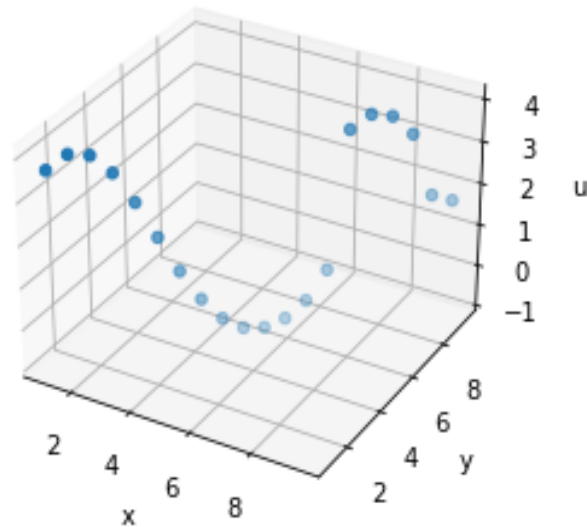


Рисунок 4.2 – Змодельована функція щільності

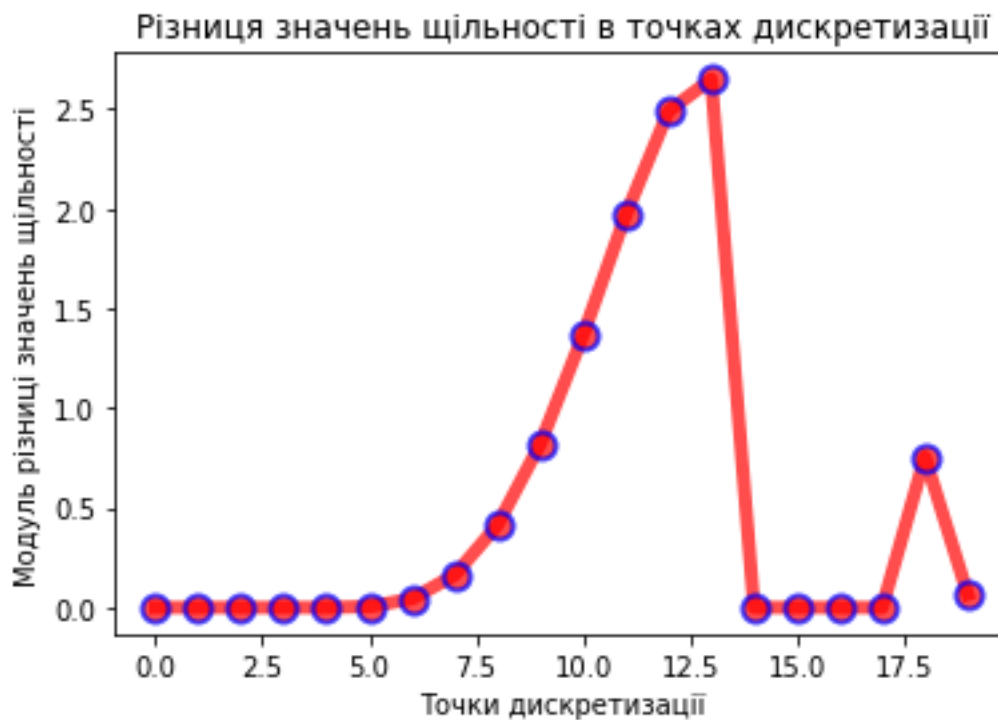


Рисунок 4.3 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 1.010073257939348

Задача 2. Умова та параметри залишаються такими ж, але зменшимо кількість точок дискретизації областей S^0 та S^T до 10.

Результати обчислень є наступними:

Змодельована функція щільності

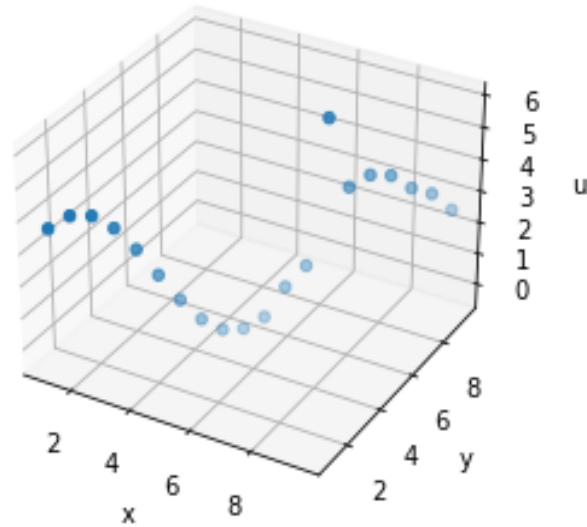


Рисунок 4.4 – Змодельована функція щільності



Рисунок 4.5 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 0.7296096768824472

Задача 3. Зменшимо кількість спостережень в початковій задачі до одного, $D_1 = [4,6] \times [4,6]$.

Результати обчислень:

Змодельована функція щільності

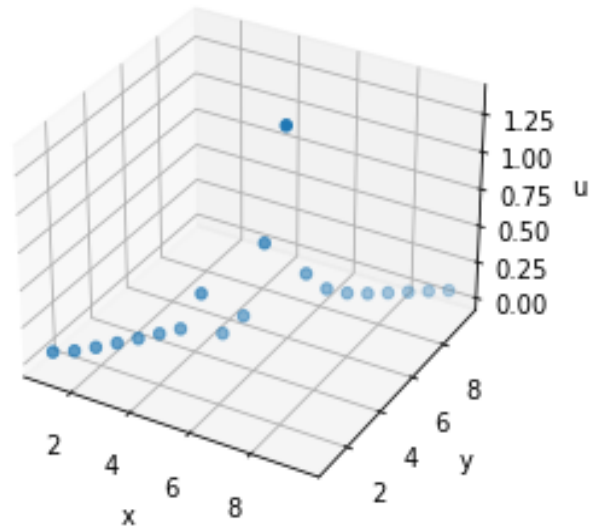


Рисунок 4.6 – Змодельована функція щільності

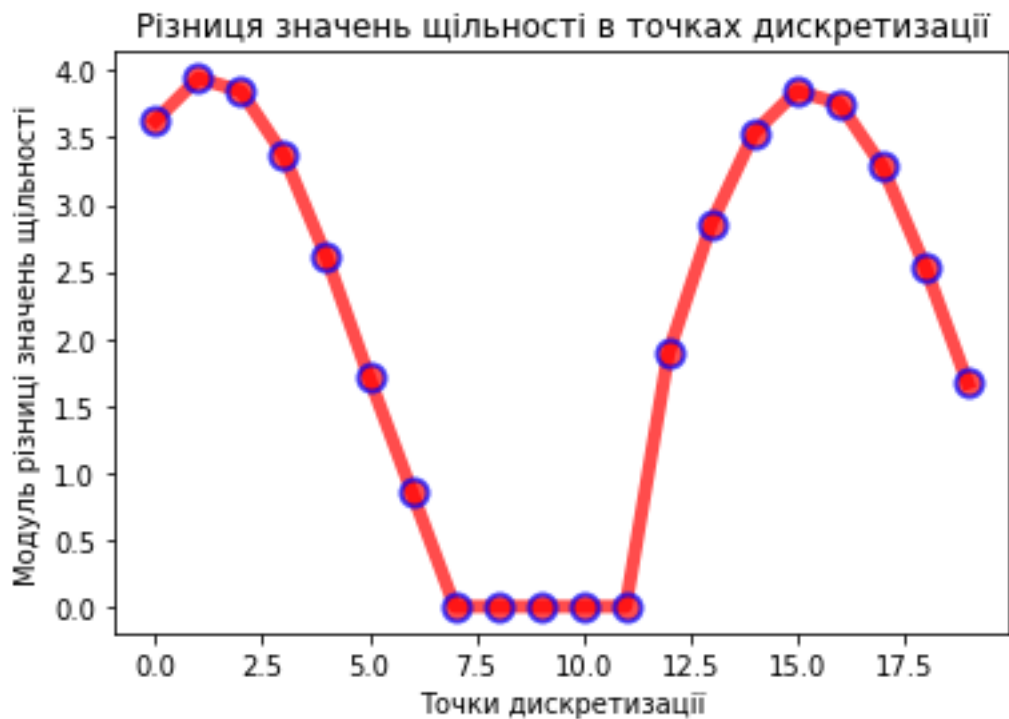


Рисунок 4.7 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 2.631306142140649

Задача 4:Збільшимо кількість спостережень в початковій задачі до 3.

$$D_3 = [4,6] \times [4,6].$$

Результати обчислень:

Змодельована функція щільності

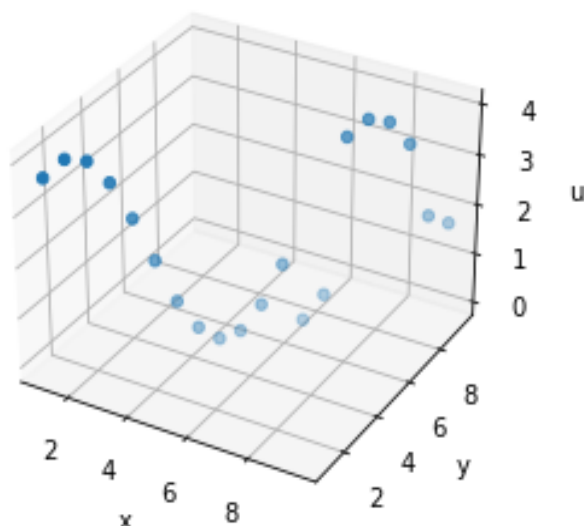


Рисунок 4.8 – Змодельована функція щільності

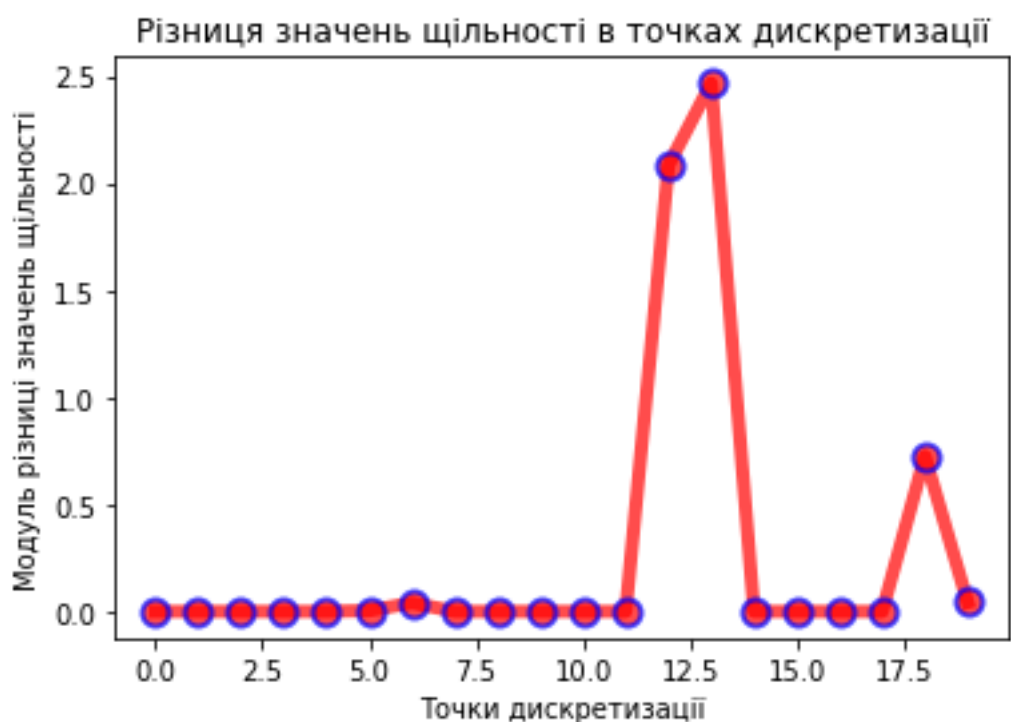


Рисунок 4.9 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 0.7398965009619732

Задача 5: В задачі 2 збільшимо кількість точок дискретизації грошово-часової області D до 50.

Результати обчислень:

Змодельована функція щільності

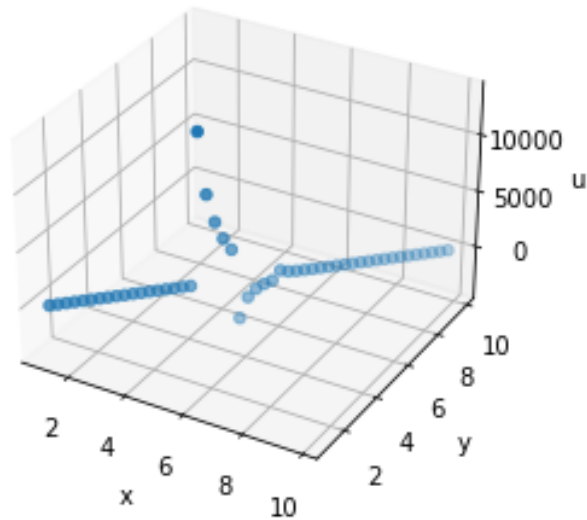


Рисунок 4.10 – Змодельована функція щільності

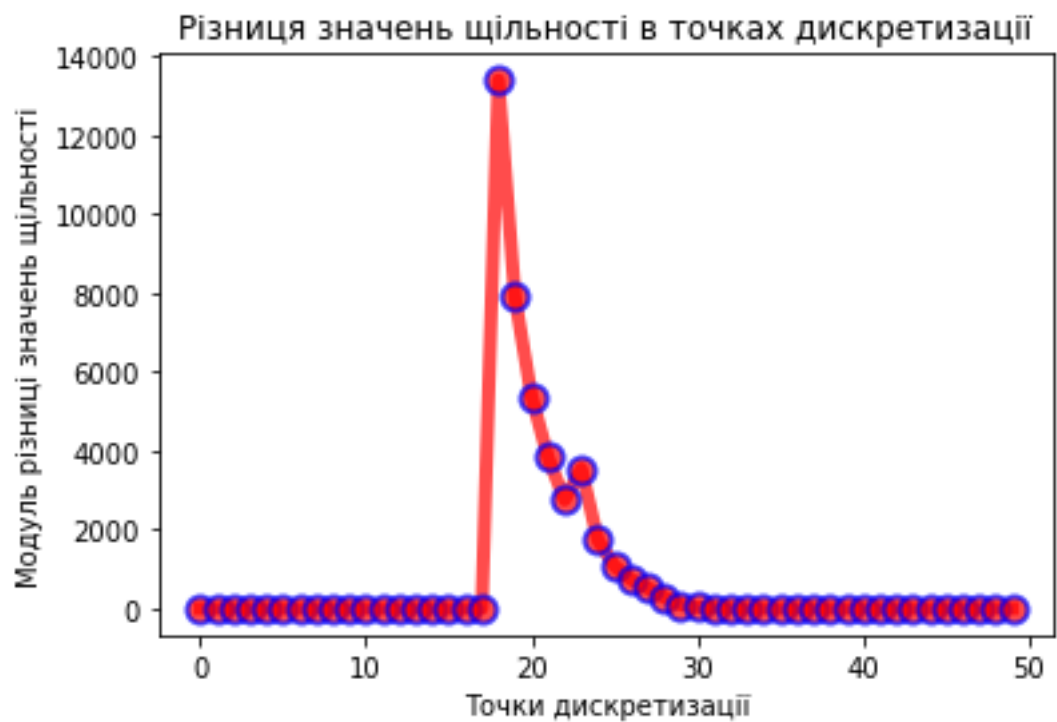


Рисунок 4.11 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 2491.589228470498

Задача 6: В початковій задачі збільшимо кількість точок дискретизації грошово-часової області D до 50.

Результати обчислень:

Змодельована функція щільності

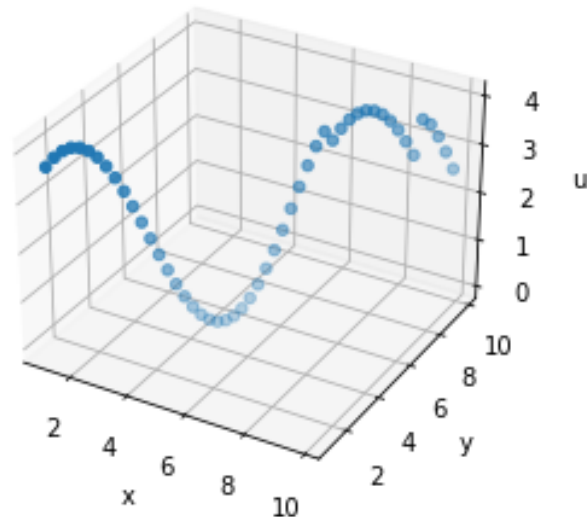


Рисунок 4.12 – Змодельована функція щільності

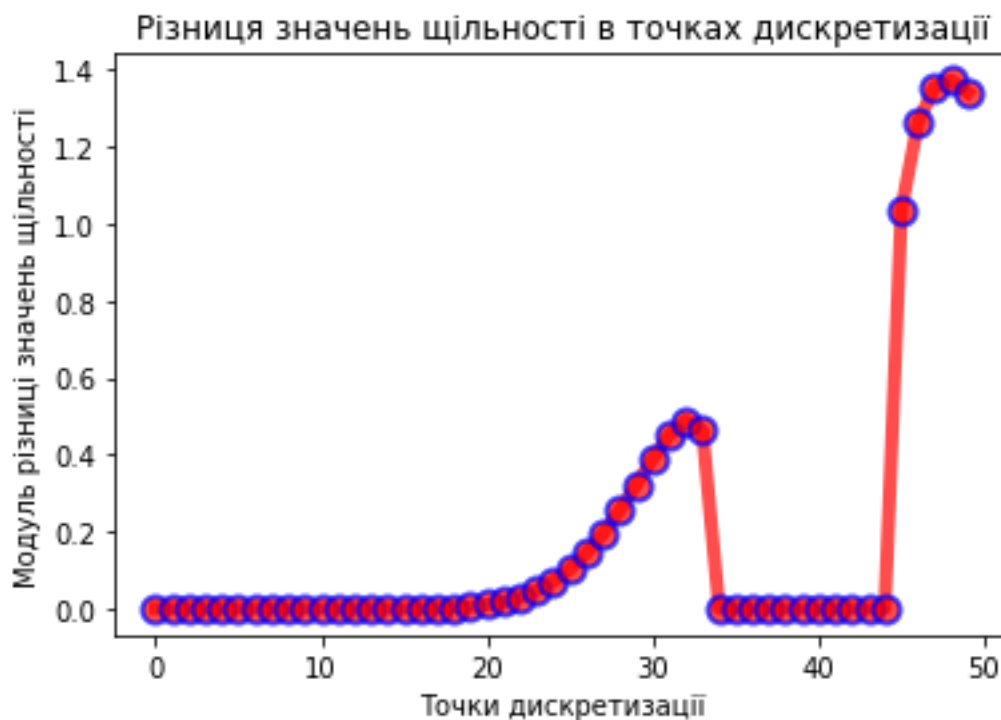


Рисунок 4.13 – Різниця значень щільності в точках дискретизації

Нев'язка дорівнює 0.4300432031702215

За отриманими результатами бачимо, що значення щільності в точках дискретизації, які попадають в області визначення відомих спостережень, співпадають. Тим самим можемо впевнитись в правильності обчислень, проведених за допомогою нашого програмного забезпечення. За проведеними

експериментами можемо зробити висновки, що чим більше спостережень за функцією щільності нам відомо, тим точнішим буде результат. На точність результату також впливає кількість точок дискретизації як грошово-часової області D , так і областей S^0, S^T . При цьому збільшення кількості точок дискретизації не гарантує збільшення точності, вона може навіть погіршитись. Питання підбору оптимальної кількості точок дискретизації потребують окремих досліджень.

ВИСНОВКИ

В даній кваліфікаційній роботі розглянуто параболічну модель щільності акцій з невизначеними початково-крайовими умовами. За наявності передатної функції диференціального оператора, на основі якого побудоване рівняння моделі, проблема відновлення щільності акцій зведена до пошуку розв'язку або псевдорозв'язку системи алгебраїчних або функціональних рівнянь. Досліджено питання точності та однозначності отриманих розв'язків.

На мові програмування Python створене програмне забезпечення для проведення чисельних експериментів над диференціальною моделлю щільності акцій в умовах невизначеності. За результатами експериментів були зроблені висновки про залежність точності побудованої функції щільності від кількості відомих спостережень та кількості точок дискретизації області визначення функції щільності та областей визначення невідомих фіктивних збурень, моделюючих вплив початково-крайових умов. Зазначено, що проблема оптимального підбору кількості відповідних точок дискретизації потребує окремих досліджень.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Bachelier, L.. (2022). Théorie mathématique du jeu. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. Troisième Série. 18.
2. Башнянин Г.І., Лазур П.Ю., Медведєв В.С., Ч.1; Ч.2: Загальна економічна теорія; Спеціальна економічна теорія. - К.: Ніка-Центр; Ельга, 2002. – 527 с.
3. Волощук С.Д., Стоян В.А. Моделювання щільності розподілу акцій з дискретними спостереженнями // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2018. – Вип. № 2. – С. 63-66.
4. Волощук С.Д. Моделювання щільності акцій з частково відомими початковими умовами // Ефективна економіка. – 2015. – №3. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://www.economy.nauka.com.ua/?op=1&z=3909>
5. Волощук С.Д., Юркевич О.М. Математичне моделювання щільності акцій в скінченному проміжку цін // Моделювання та інформаційні системи в економіці. – № 91. – 2015. – С. 132-141.
6. Ерофеєнко В.Т. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций / В.Т. Ерофеєнко, И.С. Козловская. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.
7. Скопецький В.В. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів / В.В. Скопецький, В.А. Стоян, В.Б. Зваридчук. – К. : Вид-во «Сталь», 2008.
8. McCarthy J. Just Over Half of Americans Own Stocks, Matching Record Low [Електронний ресурс] / Justin McCarthy// Gallup. – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <https://news.gallup.com/poll/190883/half-americans-own-stocks-matching-record-low.aspx>.

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр



Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук
ID перевірки:
1011558733
Дата перевірки:
13.06.2022 11:53:11 EEST
Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library
Дата звіту:
13.06.2022 18:16:38 EEST
ID користувача:
100007163

Назва документа: Давітян_Волощук Диплом **Prepare**

Кількість сторінок: **34** Кількість слів: **5587** Кількість символів: **36828** Розмір файлу: **1.15 MB** ID файлу: **1011430080**

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

3.15%

Схожість

Найбільша схожість: **0.72%** з Інтернет-джерелом (https://otherreferats.allbest.ru/bank/00824974_0.html)

..... Сторінка 36

..... Сторінка 36



0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%

Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи **50**

Підозріле форматування **11**
сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником :


Кваліфікаційна робота Давітяна Артема Артуровича на здобуття ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика» повністю відповідає вимогам академічної доброчесності та рекомендується до захисту на екзаменаційній комісії.

Науковий керівник:


(підпис)

Сергій ВОЛОЩУК
(ПІБ)

Оператор:


(підпис)

А.В.Шатирко
(ПІБ)

ВІДГУК

наукового керівника

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

«Диференціальна модель динаміки вартості акцій в умовах невизначеності»
студента 4-го курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Давітяна Артема Артуровича


У своїй випускній кваліфікаційній роботі Давітян А.А. розглядає параболічну модель щільності акцій з невизначеними початково-крайовими умовами, але з відомими спостереженнями за функцією щільності на декількох скінченних областях, що між собою не перетинаються. Тема роботи є актуальною, оскільки на ринку цінних паперів важливо правильно і вчасно мати інформацію про акції, а у випадку її відсутності – моделювати її.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку джерел посилення. У розділі 1 зроблено огляд моделей ціни однієї акції, а для множини однотипних акцій розглянуто диференціальну модель щільності акцій параболічного типу. У розділі 2 автор чисельно досліджує початково-крайову параболічну модель за допомогою методу прямих при різних значеннях параметрів. У розділі 3 Давітян А.А. розглядає параболічне рівняння щільності акцій без початкових та крайових умов, але з відомими дискретними або неперервними спостереженнями за щільністю на кількох підобластях з області акційних цін. Оскільки для даного параболічного рівняння відома передатна функція, диференціальна модель подається у вигляді інтегральної моделі, а потім зводиться до системи алгебраїчних рівнянь для дискретних спостережень, або функціональних співвідношень для неперервних спостережень. В обох випадках системи розв'язуються шляхом їх псевдообернення. У розділі 4 Давітян А.А., використовуючи власний програмний продукт, чисельно реалізував варіант задачі з дискретними спостереженнями.

Як зауваження слід відмітити відсутність чисельної реалізації задачі з неперервними спостереженнями.

Кваліфікаційна робота Давітяна А.А. написана ним самостійно, на високому науковому рівні та правильно оформлена. Студент продемонстрував високий рівень математичних знань та хороші аналітичні здібності. Вважаю, що дана випускна кваліфікаційна робота відповідає вимогам щодо написання кваліфікаційних робіт бакалавра та заслуговує на оцінку «відмінно», а її автор, Давітян Артем Артурович – на присвоєння ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика».

Науковий керівник,
к.ф.-м.н., доцент кафедри МСС
факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету
Імені Тараса Шевченка

 Сергій ВОЛОЩУК

Рецензія

на кваліфікаційну роботу бакалавра на тему:

«Диференціальна модель динаміки вартості акцій в умовах невизначеності»
студента 4-го курсу бакалаврату факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Давітяна Артема Артуровича

У кваліфікаційній роботі Давітяна А.А. розглядається диференціальна модель щільності акцій, на обмеженому проміжку їх цін. Актуальність цієї роботи не викликає сумніву, бо у сучасних умовах ведення бізнесу на ринках цінних паперів дуже важливо вміти правильно оцінювати вартість і кількість акцій на деякому ціновому проміжку.

Робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку джерел посилань. У першому розділі зроблено огляд деяких існуючих стохастичних та диференціальних моделей щільності акцій. Автор роботи звертає особливу увагу на диференціальну модель щільності акцій у вигляді змішаної задачі, поставленої для рівняння в частинних похідних параболічного типу. У другому розділі Давітян А.А. чисельно розв'язує змішану параболічну задачу з різними значеннями параметрів та аналізує отримані результати. В третьому розділі у постановку змішаної задачі вводиться елемент невизначеності, який полягає в тому, що початкові та крайові умови невідомі, але відомими є спостереження за функцією щільності у вигляді кількох неперервних функцій, кожна з яких визначена на деякій окремій області. Використовуючи передатну функцію процесу, що описується диференціальним рівнянням, студент запропонував і реалізував два підходи до розв'язування цієї задачі. По перше задача була зведена до системи алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої було отримано на основі операції псевдообернення матриці за Муром-Пенроузом. По друге – задача була зведена до системи функціональних співвідношень і отримана множина розв'язків або псевдорозв'язків. У четвертому розділі Давітян А.А. для тестової постановки задачі провів чисельний експеримент, використовуючи мову програмування Python.

Кваліфікаційна робота Давітяна Артема Артуровича написана грамотно, на належному науковому рівні та правильно оформлена. Студент продемонстрував належний рівень математичних знань та вміння їх застосовувати на практиці. Вважаю, що кваліфікаційна робота Давітяна Артема Артуровича відповідає вимогам щодо написання кваліфікаційних робіт бакалавра, заслуговує оцінку **«відмінно»**, а її автор заслуговує на присвоєння ступеня бакалавра за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

Рецензент
кандидат технічних наук
старший дослідник,
заступник директора
ІТГП НАН України



О.Г.Лебідь