УДК 519.6:37.091.27-057.875]:378.4(477.411)КНУ DOI: https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/2.4

Олександр БОРИСЕЙКО, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олег ПЕРЕГУДА, Канд. фіз.-мат. наук, Доц.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ: РІЗНОМАНІТТЯ ТИПІВ І ШЛЯХІВ РОЗВ’ЯЗАННЯ

Анотація. *У статті здійснено методичний аналіз та представлено алгоритми розв’язання нестандартних математичних задач, що пропонувалися в межах заочних етапів Всеукраїнської олімпіади Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Досліджено різноманіття типів завдань, зокрема: симетричні системи рівнянь вищих степенів, задачі на цілочисельні послідовності, нерівності з параметрами, а також складні випадки планіметрії та стереометрії. Матеріали роботи адресовано для старшокласників, учителів математики та методистів, які забезпечують підготовку учнів до інтелектуальних змагань та вступу до закладів вищої освіти математичного профілю.*

Ключові слова: *математична олімпіада; рівняння; система рівнянь; нерівність; трикутник; чотирикутник.*

1. Вступ

Математичні олімпіади – це не лише змагання за призові місця, а передусім унікальний простір для інтелектуального зростання. На відміну від типових шкільних вправ, де алгоритм розв’язання часто є очевидним, олімпіадні задачі вимагають від учня здатності до синтезу знань, виходу за межі стандартних схем та творчого пошуку ідеї.

Особливе місце в системі інтелектуальних випробувань посідає Олімпіада механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Заочний тур цієї олімпіади є стратегічно важливим етапом. Він дає абітурієнту можливість у спокійній атмосфері заглибитися у складну проблему, опрацювати додаткову літературу та випробувати свої сили перед очними етапами.

Завдання, що пропонуються на олімпіадах Київського національного університету імені Тараса Шевченка, традиційно відзначаються високим рівнем математичної естетики. Вони охоплюють фундаментальні розділи: від витончених алгебраїчних перетворень та теорії чисел до складних геометричних конфігурацій.

Мета цієї роботи – не просто продемонструвати правильні відповіді, а розкрити логіку пошуку розв’язання. Ми проаналізуємо типи задач, які найчастіше зустрічалися в заочних турах минулих років з відповідними розв’язаннями або вказівками.

Запропонований матеріал стане надійним путівником для старшокласників, які прагнуть якісної підготовки та успішного старту у своїй математичній кар'єрі.

2. Приклади завдань заочних турів олімпіади

Задача 1. *Розв'язати систему рівнянь*

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^5 + y^5 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання: Система є симетричною відносно двох невідомих, тому можемо виразити усі елементи заданої системи через симетричні многочлени від двох невідомих $(x + y)$ та xy. Тоді друге рівняння системи набуде вигляду

$$(x + y)(x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4) = 6.$$

З урахуванням, що $x + y = 2$, отримаємо рівняння

$$x^4 - yx^3 + y^2x^2 - y^3x + y^4 = 3.$$

Згрупуємо доданки і утворимо множники, що виражаються безпосередньо через $(x + y)$ та xy:

$$(x^2 + y^2)^2 - y^2x^2 - yx(x^2 + y^2) = 3;$$

$$((x + y)^2 - 2xy)^2 - (xy)^2 - yx((x + y)^2 - 2xy) = 3;$$

$$(x + y)^4 - 5(x + y)^2xy + 5(xy)^2 = 3.$$

Врахувавши, що $x + y = 2$, отимуємо рівняння

$$2^4 - 5 \cdot 4xy + 5(xy)^2 = 3.$$

Отримали квадратне рівняння відносно добутку xy. Розв'язавши отримане рівняння, і враховуючи перше рівняння початкової системи, отримуємо сукупність двох систем рівнянь:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = \dfrac{10 - \sqrt{35}}{5}, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2, \\ xy = \dfrac{10 + \sqrt{35}}{5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Розв'язуючи відповідні системи рівнянь, отримаємо, що друге рівняння дійсних розв'язків не має, а з першого рівняння маємо

$$x_1 = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, \quad y_1 = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}} \ ;$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, \quad y_2 = 1 + \sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}.$$

Відповідь: $\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, 1-\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\right), \left(1-\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}, 1+\sqrt{\frac{\sqrt{35}-5}{5}}\ \right)$.

Задача 2. *Знайти чотири цілих числа, що утворюють арифметичну прогресію, якщо найбільше з них дорівнює сумі квадратів трьох інших.*

Розв'язання: Позначимо шукані члени арифметичної прогресії як a, b, c, f і різницю прогресії через d.

Розглянемо випадок зростаючої прогресії. Тоді $f = a^2 + b^2 + c^2$ і $d = b - a$.

Застосовуючи стандартне представлення членів арифметичної прогресії, отримуємо:

$$a + 3d = a^2 + (a+d)^2 + (a+2d)^2.$$

Звідси отримаємо квадратне рівняння відносно змінної a:

$$3a^2 + a(6d-1) + 5d^2 - 3d = 0.$$

Записавши дискримінант квадратного рівняння, отримаємо умову на різницю прогресії d:

$$D = (6d-1)^2 - 12(5d^2 - 3d) = -24d^2 + 24d + 1 \geq 0, \qquad d \in \mathbb{Z}.$$

Розв'язком отриманої нерівності буде відрізок

$$d \in \left[\frac{6-\sqrt{42}}{12}, \qquad \frac{6+\sqrt{42}}{12}\right], \qquad d \in \mathbb{Z}.$$

Отже, отримаємо два цілих значення $d_1 = 0,\ \ d_2 = 1$.

Якщо $d = 0$, то $a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ f = 0,$ враховуючи цілочисельність членів арифметичної прогресії.

Якщо $d = 1$, то утвориться послідовність $b - 1,\ b,\ b + 1,\ b + 2$. Тоді маємо, що $b + 2 = (b - 1)^2 + b^2 + (b + 1)^2$. Розв’язавши рівняння, отримаємо $b = 0,\ a = -1,\ c = 1,$ $f = 2$.

Для випадку спадної прогресії очевидно розв’язок не існує (перевірити самостійно).

Відповідь: $d = 0,\ a = 0,\ b = 0,\ c = 0,\ f = 0;$

$$d = 1, \qquad a = -1, \qquad b = 0, \qquad c = 1, \qquad f = 2.$$

Задача 3. *Знайти всі дійсні значення параметра a, для яких нерівність*

$$ax^2 - x + 1 - a < 0$$

має своїм наслідком нерівність $0 \le x \le 1$.

Розв’язання: Розглянемо можливі випадки відносно параметра a.

Якщо $a = 0$, то $-x + 1 < 0$ і $x > 1$. Умова не виконується.

Якщо $a > 0$, то розглянемо можливі варіанти.

Нехай $D \le 0$, то нерівність $ax^2 - x + 1 - a < 0$ не має розв’язків.

Якщо $D > 0$, то нерівність $ax^2 - x + 1 - a < 0$ має своїм розв’язком інтервал $x \in (x_1, x_2)$. Вона матиме своїм наслідком нерівність $0 \le x \le 1$, якщо виконані умови

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \le 1. \end{cases}$$

Тому розглянемо можливі випадки при умовах

$$\begin{cases} x_1 \ge 0, \\ x_2 \le 1, \\ D > 0. \end{cases}$$

Розглянемо $D = 1 - 4a(1 - a) = (2a - 1)^2 \ge 0$, тоді

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm |2a - 1|}{2a}.$$

Якщо $0 < a < \frac{1}{2}$, то

$$x_1 = \frac{1 - 1 + 2a}{2a} = 1, \quad \text{а} \quad x_2 = \frac{1 + 1 - 2a}{2a} = \frac{1 - a}{a}.$$

При заданому $0 < a < \frac{1}{2}$ розв’язки нерівності не утворюють проміжок $[0,1]$.

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

Якщо $a > \frac{1}{2}$, то $x_1 = \frac{1-a}{a}$, $x_2 = 1$. Отримані розв'язки нерівності утворюють проміжок $[0,1]$ при $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Для випадку $a < 0$ умова наслідку не виконується, оскільки для жодного значення параметра a не покривається проміжок для $x \in [0,1]$ ($x = 0$ не є розв'язком заданої нерівності).

Відповідь: $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Задача 4. *Чи обов'язково будуть рівними два трикутники, якщо висоти одного із них дорівнюють висотам іншого?*

Розв'язання: Нехай S, a, b, c – площа і сторони першого трикутника, S_1, a_1, b_1, c_1 – відповідно, другого. З умови маємо:

$$\frac{2S}{a} = h_a = h_{a_1} = \frac{2S_1}{a_1}.$$

Звідки $\frac{a_1}{a} = \frac{S_1}{S}$. Аналогічно $\frac{b_1}{b} = \frac{S_1}{S}$ та $\frac{c_1}{c} = \frac{S_1}{S}$. Тому $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$, отримуємо, що трикутники подібні, а отже, їх площі відносяться, як $\frac{S_1}{S} = k^2$.

Далі маємо $k^2 = k$, тобто $k = 1$. Отже, трикутники рівні.

Відповідь: Так, такі трикутники рівні.

Задача 5. *П'ять ребер трикутної піраміди однакові і дорівнюють* 2 *см. Якого найбільшого значення може набувати об'єм такої піраміди?*

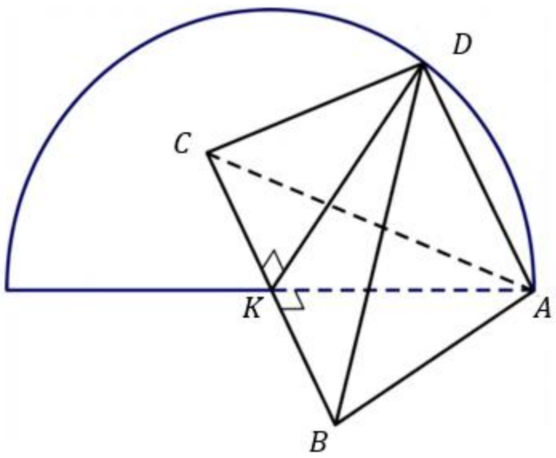

Рис. 1. Рисунок до задачі 5

Розв'язання: Нехай всі ребра, крім AD, мають фіксовану величину 2 см, точка K – середина ребра BC, $DK \perp BC$ і $AK \perp BC$, як висоти, медіани та бісектриси рівних рівносторонніх ΔABC та ΔDBC, відповідно $DK = AK = \sqrt{3}$ см. Отже, якщо провести через точку K площину α, перпендикулярну до ребра BC, і побудувати в ній коло з центром у точці K, яке проходить через точки A та D (рис. 1), то найвіддаленіше положення точки D від діаметра кола і, разом з тим, від D до площини ΔABC. І відстань від точки D до площини ΔABC у цьому випадку дорівнює радіусу кола, тобто $\sqrt{3}$. При цьому $DK \perp AK$.

Тоді

$$\mathrm{V} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \sqrt{3} = 1 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: 1 (см^3).

Задача 6. *Площа чотирикутника дорівнює* 1 *м*^{2}*, а периметр –* 4 *м. Довести, що чотирикутник обов'язково є квадратом.*

Розв'язання: Нехай $ABCD$ – заданий чотирикутник, $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. З нерівності $(x-y)^2 \geq 0$ отримаємо $x^2 + y^2 \geq 2xy$, а отже,

$$xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2.$$

Далі

$$1 = S = \frac{1}{2} ab \sin\angle B + \frac{1}{2} cd \ \sin\angle D \leq \frac{ab + cd}{2}.$$

Аналогічним чином отримаємо подібну нерівність

$$1 \leq \frac{bc + ad}{2}.$$

Додавши дві останні нерівності, отримаємо:

$$2 \leq \frac{(a+c)(b+d)}{2} \leq \frac{1}{8}\big((a+c) + (b+d)\big)^2 = \frac{16}{8} = 2.$$

Рівність можлива, по-перше, коли всі кути прямі, а також за умови, що

$$a + c = b + d,$$

отже, маємо прямокутник, у який можна вписати коло, тобто, квадрат.

■

ISSN 1029-4171 (print) ISSN 2524-2407 (online)

3. Анонс

Київський національний університет імені Тараса Шевченка щорічно проводить Всеукраїнську олімпіаду з математики. В олімпіаді можуть брати участь особи, які є учнями випускних класів закладів загальної середньої освіти або мають право на отримання документа про повну загальну середню освіту і бажають вступити до університету. Традиційно олімпіада проходить у два тури: перший – дистанційний (відбірковий) взимку, та другий – очний (фінальний) навесні. Детальну інформацію читачі можуть знайти на офіційному сайті Київського національного університету імені Тараса Шевченка https://knu.ua.

Із завданнями дистанційного (відбіркового) туру Всеукраїнської олімпіади з математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка читачі можуть також ознайомитися в цьому номері журналу у рубриці «Задачі та гіпотези, рішення».

Список використаних джерел

Федак І. В. (2004). *Готуємося до олімпіади з математики: Посібник для загальноосвітніх навчальних закладів.* – Чернівці. – 360 с.

Сарана О.А. (2011). *Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник.* Друге видання, доповнене. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан. – 400 с.

Отримано редакцією журналу: 01.12.2025
Прорецензовано: 10.12.2025
Схвалено до друку: 26.12.2025

Oleksandr BORYSEIKO, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID ID: 0009-0001-3023-5332
e-mail: boryseiko@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleh PEREHUDA, Ph.D (Phys&Math), Assoc. prof.
ORCID: 0000-0002-7465-3173
e-mail: perehudao@knu.ua
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

OLYMPIAD PROBLEMS: A VARIETY OF TYPES AND SOLUTIONS

Abstract. *This article provides a methodological analysis and presents solution algorithms for non-standard mathematical problems proposed during the distance (correspondence) rounds of the All-Ukrainian Olympiad at Taras Shevchenko National University of Kyiv. The study explores a diverse range of problem types, including symmetric systems of higher-degree equations, problems involving integer sequences, parametric inequalities, and complex cases in planimetry and solid geometry. The materials are intended for high school students, mathematics educators, and methodologists involved in preparing students for intellectual competitions and admission to higher education institutions with a mathematical profile.*

Keywords: *mathematical Olympiad; equations; systems of equations; inequalities; triangles; quadrilaterals.*