XX Міжнародний симпозіум «Методи дискретних особливостей в задачах математичної фізики/Discrete Singularities Methods in Mathematical Physics», МДОЗМФ/DSMMPh-2021

УДК 517.9
MSC 45E05

Mathematical model of wave diffraction by the system of stripes with different values of surface impedance

V.D. Dushkin, V.N. Melnik
Department of Fundamental Sciences National Academy of the National Guard of Ukraine, Kharkiv, Ukraine
E-mail: {Dushkinvd, melja1961}@gmail.com

A mathematical model of diffraction of E-polarized and H-polarized waves on a finite system of not perfectly conducting tapes is obtained. The value of the surface impedance on the two sides of the stripes is different. The initial boundary value problem for the Helmholtz equation with boundary conditions of the third kind was reduced to a system of boundary integral equations. This system of boundary integral equations consists of singular integral equations of the first kind and integral equations of the second kind with a logarithmic singularity. The method of parametric representation of integral operator was used to perform transformations. The values of the physical characteristics of the process are expressed through the solutions of the obtained systems of integral equations. Numerical solution of these equations is performed using a computational scheme based on the discrete singularities method.

Key words: parametric representation of integral operator, system of boundary singular integral equations, discrete singularities method.

Математична модель дифракції хвиль на системі стрічок з різними значеннями поверхневого імпедансу

В.Д. Душкін, В.М. Мельник
Кафедра фундаментальних дисциплін,
Національна академія Національної гвардії України, Харків, Україна
E-mail: {Dushkinvd, melja1961}@gmail.com

Отримано математичну модель дифракції Е-поляризовних та Н-поляризовних хвиль на скінченій системі не ідеально провідних стрічок. Величини поверхневого імпедансу на двох сторонах кожної стрічки різні. Початкова крайова задача для рівняння Гельмгольца з крайовими умовами третього роду була зведена до системи граничних інтегральних рівнянь, що складається з сингулярних інтегральних рівнянь першого роду та інтегральних рівнянь другого роду з логарифмічною особливістю. Для виконання перетворень було використано метод параметричного подання інтегральних операторів. Значення фізичних характеристик процесу виражаються через розв'язки отриманих систем. Числове розв'язання цих рівнянь виконується із застосуванням обчислювальної схеми, що ґрунтується на методі дискретних особливостей.

Ключові слова: параметричне подання інтегральних операторів, система граничних сингулярних інтегральних рівнянь, метод дискретних особливостей.

1. Вступ

Запропонований у роботах Ю.В. Ганделя метод параметричного подання інтегральних перетворень, неодноразово використовувався для побудов математичних моделей різних процесів електродинаміки [1-3]. Цей метод дозволяє зводити розв'язання крайових задач дифракції до знаходження розв'язків систем сингулярних або гіперсингулярних рівнянь [4-8]. Наближені розв'язки цих рівнянь знаходяться за допомогою однієї з модифікацій методу дискретних особливостей [9-11]. Його ефективність була доведена при моделюванні дифракції та розсіяння хвиль на не ідеально провідних структурах. У цьому випадку прийшлося розглядати задачі Робена, що призвело до необхідності розв'язання систем інтегральних рівнянь, які відрізнялись від подібних систем задач дифракції на ідеально провідних структурах [12-14]. Найбільша кількість числових результантів була отримана для задач дифракції періодичних та неперіодичних систем стрічок, з однаковою величиною поверхневого імпедансу на обох сторонах стрічок. Завдяки універсальності методу параметричного подання інтегральних перетворень у періодичному випадку були отримані три різні моделі для опису цього випадку: дві на базі сингулярних інтегральних рівнянь різного типу та одна гіперсинулярна модель [15-17]. Математичне обґрунтовування чисельного розв'язання таких рівнянь було дано у роботах [18-20]. Отриманні за допомогою різних підходів результати добре узгоджені між собою.

Однак випадок з різними значеннями поверхневого імпедансу є більш цікавим для спеціалістів з радіофізики. У статті [21] була розв'язана задача розсіяння та адсорбції хвиль на періодичній системі імпедансних стрічок шляхом зведення початкової задачі до нескінченновимірного матричного інтегрального рівняння. Автори цієї статті пропонують спосіб розв'язання задачі на скінченній неперіодичній системі стрічок, з різними значеннями поверхневого імпедансу на двох сторонах стрічок. Цей спосіб ґрунтується на на методі параметричного подання сингулярних та гіперсингулярних інтегральних перетворень.

2. Постановка задачі.

Відомо, що початкова тривимірна задача зводиться до пошуку розв'язків двох двовимірних задач дифракції E та H поляризованих хвиль. У випадку E поляризації лише одна компонента поля E_x є ненульовою, через неї виражаються ненульові компоненти магнітного поля H_y та H_z, у випадку H поляризації дві ненульові компоненти електричного поля E_y та E_z виражаються через єдину ненульову компоненту магнітного поля H_x.

Розглядається двовимірна задача дифракції плоскої монохроматичної хвилі на системі з M стрічок нульової товщини, що лежать на прямій $z=0$ площини YOZ. Довжина стрічок та відстань між ними довільна, поверхневий імпеданс верхньої та нижньої поверхні стрічки різний. Хвильови́й ве́ктор утворює кут φ з від'ємним напрямом осі z. Відношення похідної поля за часом до поля дорівнює $-i\omega$.

Нехай α_q та β_q це ігрекові координати лівого та правого кінця q - ої стрічки та

$$\Lambda=\bigcup_{q=1}^{M}\left(\alpha_q,\beta_q\right),\ \Sigma=\left\{(y,z)\ \mid\ y\in\Lambda\ ,\ z=0\right\}\ . \qquad (1)$$

Розглянемо випадок Е-поляризації. Позначимо $u(y,z)$- повне поле, що виникло у результаті розсіяння падаючої хвилі

$$u_0(y,z) = \exp(ik(y\cdot\sin\varphi - z\cdot\cos\varphi)) \tag{2}$$

на системі стрічок.

Повне поле задовольняє рівнянню Гельмгольца на всій площині, за винятком стрічок:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (y,z) \notin \Sigma, \tag{3}$$

умові обмеженості енергії поля у будь-якій області площини, розсіяне поле задовольняє умові випромінювання Зомерфельда. Також повне поле задовольняє граничним умовам на поверхні стрічок:

$$\frac{\partial u}{\partial z}(y,+0) - h_0 \cdot u(y,+0) = 0, \quad y \in L; \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(y,-0) + h_1 \cdot u(y,-0) = 0, \quad y \in L. \tag{5}$$

Як показано у роботі [22], імпедансні граничні умови (4)-(5) є наслідком узагальнених граничних умов. Відповідна початкова крайова задача для випадку Н-поляризації формулюється аналогічно й відрізняється лише числовими значеннями поверхневих імпедансів h_0 та h_1. Таким чином алгоритм подальшого розв'язання задач є однаковим.

3. Система інтегральних рівнянь задачі. Постановка задачі.

Повне поле будемо шукати у вигляді:

$$u(y,z) = \begin{cases} u_0(y,z) + u^+(y,z), & z > 0; \\ u_0(y,z) + u^-(y,z), & z < 0; \end{cases} \tag{6}$$

де

$$u^\pm(y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} C^\pm(\lambda)\cdot \exp(i\lambda y - \gamma(\lambda)\cdot|z|)d\lambda, \tag{7}$$

$$\gamma(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k^2}, \quad \lambda \in R, \quad \mathrm{Re}(\gamma(\lambda)) \geq 0, \quad \mathrm{Im}(\gamma(\lambda)) \leq 0. \tag{8}$$

Наслідком неперервності поля та його похідних зовні стрічок є рівняння:

$$u(y,+0) = u(y,-0), \quad y \in C\overline{L}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(y,+0) = \frac{\partial u}{\partial z}(y,-0), \quad y \in C\overline{L}. \tag{10}$$

Уведемо у розгляд функції,

$$F_1(y) = \frac{\partial u^+}{\partial y}(y,0) - \frac{\partial u^-}{\partial y}(y,0), \quad F_2(y) = -\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0) + \frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0),\ y \in R. \tag{11}$$

що визначають стрибок похідних при переході через стрічки.

З визначення функцій випливає:

$$F_1(y)=0, \quad F_2(y)=0, \quad y\in CL, \tag{12}$$

$$\int_{\alpha_q}^{\beta_q} F_1(t)\,dt=0, \quad (q=1,\dots,M); \tag{13}$$

$$u^+(y,0)-u^-(y,0)=\int_{\alpha_1}^{y} F_1(t)dt, \quad y\in R. \tag{14}$$

Також з Фур'є подань

$$F_1(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\right)\cdot(i\lambda)\cdot\exp(i\lambda y)\,d\lambda, \tag{15}$$

$$F_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(C^+(\lambda)+C^-(\lambda)\right)\cdot\gamma(\lambda)\,\exp(i\lambda y)\,d\lambda \tag{16}$$

отримуємо:

$$C^+(\lambda)=\frac{1}{4\pi i}\int_L F_1(t)\cdot\frac{\exp(-i\lambda t)-1}{\lambda}dt+\frac{1}{4\pi\gamma(\lambda)}\int_L F_2(t)\cdot\exp(-i\lambda t)\,dt, \tag{17}$$

$$C^-(\lambda)=\frac{1}{4\pi\gamma(\lambda)}\int_L F_2(t)\cdot\exp(-i\lambda t)\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L F_1(t)\cdot\frac{\exp(-i\lambda t)-1}{\lambda}dt. \tag{18}$$

З граничних умов та умов «зшивки» маємо:

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0)+\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0)-h_0\int_{\alpha_1}^{y} F_1(t)dt-h^-\cdot u^-(y,0)=G_1(y), \;\; y\in L; \tag{19}$$

$$F_2(y)+h_0\int_{\alpha_1}^{y} F_1(t)dt+h^+\cdot u^-(y,0)=G_1(y), \;\; y\in L, \tag{20}$$

де $h^-=h_0-h_1, \quad h^+=h_0+h_1.$ та

$$G_1(y)=-2\frac{\partial u_0}{\partial z}(y,0)+h^-\cdot u_0(y,0) \quad G_2(y)=-h^+\cdot u_0(y,+0). \tag{21}$$

Ґрунтуючись на властивостях параметричного подання перетворення Гільберта маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(C^+(\lambda)-C^-(\lambda)\right)\cdot|\lambda|\cdot e^{i\lambda y}d\lambda=-\frac{1}{\pi}\int_L\frac{F_1(t)dt}{t-y}. \tag{22}$$

З (17)-(18) та (22), виходить

$$\frac{\partial u^+}{\partial z}(y,0)+\frac{\partial u^-}{\partial z}(y,0)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_L\frac{F_1(t)dt}{t-y}-\frac{1}{\pi}\int_L F_1(t)\int_0^{\infty}\left(\frac{\gamma(\lambda)}{\lambda}-1\right)\sin(\lambda(y-t))\,d\lambda\,dt. \tag{23}$$

З інтегральних подань функцій Бесселя та Неймана (див. [11] стор. 103) і формули

$$\int_0^\infty \frac{\sin(\lambda(y-t))}{\lambda}\cdot d\lambda = \frac{\pi}{2}\cdot sign\,(y-t) \tag{24}$$

отримуємо

$$u^-(y,0) = \frac{i}{4}\int_L H_0^1(k|y-t|)F_2(t)\,dt - \frac{1}{4}\int_L sign(y-t)F_1(t)\,dt. \tag{25}$$

Введемо позначення

$$Q_1(\tau) = -\int_0^\infty\left(\frac{\gamma(\lambda)}{\lambda}-1\right)\sin(\lambda\tau)d\lambda, \tag{26}$$

$$Q_2(\tau) = -\frac{h^-}{2}\left(\frac{\pi i}{2}H_0^1(k|y-t|)+\ln|y-t|\right). \tag{27}$$

Підставляючи (23)-(25) у рівняння (19), (20) отримуємо

$$\frac{1}{\pi}\int_L\frac{F_1(t)dt}{t-y}+\frac{1}{\pi}\int_L Q_1(y-t)F_1(t)\,dt - h_0\int_{\alpha_1}^{y}F_1(t)dt +$$
$$+\frac{h^-}{2\pi}\int_L\ln|y-t|\,F_2(t)\,dt+\frac{h^-}{4}\int_L sign(y-t)F_1(t)\,dt -$$
$$-\frac{h^-}{\pi}\int_L Q_2(y-t)F_2(t)\,dt = G_1(y), \quad y\in L \tag{28}$$

$$F_2(y)+h_0\int_{\alpha_1}^{y}F_1(t)dt - \frac{h^+}{2\pi}\int_L\ln|y-t|\,F_2(t)\,dt +$$
$$+\frac{h^+}{\pi}\int_L Q_2(y-t)F_2(t)\,dt - \frac{h^+}{4}\int_L sign(y-t)F_1(t)\,dt = G_2(y), \quad y\in L. \tag{29}$$

Аналіз структури рівнянь (28)-(29) доводить, що вони суттєво відрізняються від структури рівнянь, що відповідають задачі з однаковими значеннями поверхневого імпедансу. По-перше, рівняння залежать від функцій $F_1(y)$ та $F_2(y)$ одночасно. Тому їх не можна розв'язувати окремо одне від одного, як було у випадку однакових значень поверхневого імпедансу. По-друге, не сингулярна частина ядра інтегрального рівнянь містить функцію з розривом першого роду. Система рівнянь (28)-(29) за своїми властивостями схожа на систему інтегральних рівнянь задачі, що розглядалась у роботі [14]. Опис процедури її чисельного розв'язання та обгрунтування збіжності послідовності наближених розв'язків до точних дано у роботі [20]

ЛІТЕРАТУРА

1. Gandel Yu.V. Parametric Representations of Integral and Pseudodifferential Operators in diffraction Problems. X International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory. Dnipropetrovsk, Ukraine, 2004. P.57–62.

2. Gandel Yu.V. Boundary-Value Problems for the Helmholtz Equation and their Discrete Mathematical Models. *Journal of Mathematical Sciences*, 171(1), 2010. pp. 74-88.
3. Gandel Y.V., Dushkin V.D. The method of parametric representations of integral and pseudo-differential operators in diffraction problems on electrodynamic structures. Proceedings of the International Conference Days on Diffraction DD 2012, 2012, pp.76–81. [28 May-1 June 2012, St. Petersburg].
4. Gandel Y.V., Dushkin V.D., Zaginaylov G.I. New numerical-analytical approach in the theory of excitation of superdimensional electrodynamical structures. Telecommunications and Radio Engineering, 2000, vol. 54, no. 7, pp. 36–48.
5. Gandel Y.V., Zaginaylov G. I., Steshenko S.A. Rigorous electrodyanamic analysis of resonator systems of coaxial gyrotrons. Technical Physics, 49(7), pp. 887–894, July 2004.
6. Bulygin V.S., Nosich A.I., Gandel Y.V. Nystrom-type method in three-dimensional electromagnetic diffraction by a finite PEC rotationally symmetric surface. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 60 (10), 2012, pp. 4710–4718
7. Gandel Y.V., Dushkin V.D., Mathematical models based on SIE 2D diffraction problems on reflective multilayer periodic structures. Part I. The case of E-polarization. Scientific statements. 2011. Series: Mathematics. Physics. Vol. No 5 (100) issue of 2. pp. 5–16.
8. Dukhopelnykov S.V., Sauleau R., Nosich A. I. Integral Equation Analysis of Terahertz Backscattering from Circular Dielectric Rod with Partial Graphene Cover. IEEE Journal of Quantum Electronics, vol. 56, no. 6, pp. 1-8
9. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. Method of Discrete Vortices. CRC Press, 1992, 464 p.
10. Lifanov I.K. Singular integral equations and discrete vortices. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018. 484p.
11. Гандель Ю.В., Душкин В.Д. Математические модели двухмерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. Харьков: Ак. ВВ МВД Украины. 2012. 544с.
12. Душкин В.Д. Решение двумерной задачи дифракции с краевыми условиями третьего рода на боковой поверхности волноводных каналов. *Доп. НАН України*. 1999. № 9. С. 11–15.
13. Dushkin V.D. Application of the Singular Integral Transform Method to the Solution of the Two-Dimensional Problem of Diffraction of Electromagnetic Waves from a Superconducting Layer with Rectangular Waveguide Channels. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2001. V. 56. N. 2. P. 78–86.
14. Gandel Y.V., Dushkin V.D. Mathematical Model of Scattering of Polarized Waves on Impedance Strips Located on a Screened Dielectric Layer. Journal of Mathematical Sciences, 2016, Springer, US, pp. 156–166.
15. Kostenko O.V. Mathematical model of wave scattering by impedance grating. Cybernetics and systems analysis. vol. 51, no. 3. 2015. pp. 344–360.
16. Dushkin V.D., Zhuchenko S.V., Kostenko O.V. Numerical analysis of wave scattering by periodic systems of impedance tapes. Proc. Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2019), Lviv, 2019, pp. 112-116.

17. Dushkin V.D., Zhuchenko S.V., Kostenko O.V. Computational Simulation of E-Waves Diffraction on Periodic Multielement System of Impedance Strips. 2020 IEEE Ukrainian Microwave Week (UkrMW). Kharkiv, Ukraine. 2020. pp. 625-629
18. Kostenko O.V. A numerical method for solving a system of hypersingular integral equations of the second kind. *Cybernetics and systems analysis*, 2016, vol. 52, no. 3, pp. 394–407.
19. Gandel Y.V., Dushkin V.D. The Approximate Method for Solving the Boundary Integral Equations of the Problem of Wave Scattering by Superconducting Lattice. *American Journal of Applied Mathematics and Statistics*. 2014. Vol. 2. No. 6. pp. 369–375.
20. Dushkin V.D. Approximate Solving of the Third Boundary Value Problems for Helmholtz Equations in the Plane with Parallel Cuts. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*. 2017. Vol. 13. No. 3. P. 254–267.
21. Zinenko T.L., Nosich A.I., Wave Scattering and Absorption by Flat Gratings of Impedance Strips. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*. Vol. 54, no. 7, JULY 2006. pp. 2088–2095.
22. Bleszynski E., Bleszynski M., Jaroszewicz T. Surface-integral equations for electromagnetic scattering from impenetrable and penetrable sheets. *IEEE Antennas Propag. Mag*., vol. 36, no. 6, pp. 14–25, 1993.

Надійшла 20.05.2021.

Математическая модель дифракции волн на системе лент с различными значениями поверхностного импеданса

В.Д. Душкин, В.Н. Мельник
Национальная академия Национальной гвардии Украины, Харьков, Украина
E-mail: Dushkinvd@gmaill.com, melja1961@gmail.com

Получена математическая модель дифракции Е-поляризованных и Н-поляризованных волн на конечных системе не идеально проводящих лент. Величины поверхностного импеданса на двух сторонах каждой ленты разные. Начальная краевая задача для уравнения Гельмгольца с краевыми условиями третьего рода была сведена к системе граничных интегральных уравнений, состоящий из сингулярных интегральных первого рода и интегральных уравнений второго рода с логарифмической особенностью. Для выполнения преобразований был использован метод параметрического представления интегральных операторов. Значение физических характеристик процесса выражаются через решения полученных систем интегральных уравнений. Численное решение этих уравнений выполняется с применением вычислительной схемы, основанной на методе дискретных особенностей.

Ключевые слова: параметрическое представление интегральных операторов, система граничных сингулярных интегральных уравнений, метод дискретных особенностей.