МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Клевчук Іван Іванович

УДК 517.9

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ’ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

01.01.02 – диференціальні рівняння

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Київ – 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка та кафедрі математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Науковий консультант:
доктор фізико-математичних наук, професор, академік НАН України
Перестюк Микола Олексійович,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
завідувач кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор,
член-кореспондент НАН України
Слюсарчук Василь Юхимович,
Національний університет водного господарства
та природокористування (м. Рівне),
професор кафедри вищої математики;

доктор фізико-математичних наук, професор
Пелюх Григорій Петрович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу диференціальних рівнянь
та теорії коливань;

доктор фізико-математичних наук, професор
Теплінський Юрій Володимирович,
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
завідувач кафедри математики.

Захист відбудеться 10 квітня 2017 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4 Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано “ 9 ” березня 2017 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради лячук М.П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. В сучасних задачах природознавства часто доводиться досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків різних класів диференціальних рівнянь. Найбільш складними в теорії стійкості є критичні випадки. Для їх дослідження О.М. Ляпунов запропонував принцип зведення, що дозволяє понизити розмірність системи диференціальних рівнянь і спростити дослідження. Пізніше дослідженням критичних випадків у теорії стійкості займалися І.Г. Малкін, Г.В. Каменков, В.І. Зубов та багато інших.

Ефективним методом дослідження систем диференціальних рівнянь є метод інтегральних многовидів. Цей метод для систем в стандартній формі був запропонований М.М. Боголюбовим. Надалі метод інтегральних многовидів для звичайних диференціальних рівнянь розвивали представники Київської школи з нелінійної механіки: Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, О.Б.Ликова, В.І. Фодчук, Д.І. Мартинюк та інші, а також С. Смейл, А. Халанай, Дж. Хейл та інші. Використання інтегральних многовидів дозволило розширити застосування принципу зведення.

Іншою важливою задачею є дослідження структурної стійкості системи. Теорема Гробмана-Хартмана встановлює структурну стійкість сідла. При малому збуренні структурно стійкої системи одержимо систему, топологічно еквівалентну початковій.

Використовуючи принцип зведення, можна показати, що в критичному випадку система диференціальних рівнянь топологічно еквівалентна більш простій системі рівнянь, побудованій за допомогою інтегральних многовидів.

Задача дослідження стійкості у критичних випадках тісно зв'язана із задачею дослідження біфуркації стану рівноваги при зміні параметрів системи. В багатьох прикладних задачах зустрічається біфуркація народження циклу. Стійкий цикл може виникати із асимптотично стійкого стану рівноваги, якщо при зміні параметрів системи пара коренів характеристичного рівняння проходить через уявну вісь у праву півплощину. Для систем диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною в нерезонансному випадку відбувається біфуркація народження тора.

При дослідженні багатьох задач механіки, біології, математичної економіки, теорії керування, радіофізики необхідно враховувати ефект післядії. Процеси з післядією описуються диференціально-функціональними рівняннями. Починаючи з 50-их років диференціально-функціональними рівняннями займалися багато відомих математиків: А.Д. Мишкіс, Є.М. Райт, М.М. Красовський, Р. Беллман, Л.Е. Ельсгольц, А. Халанай, Дж. Хейл та інші. Важливий внесок у розвиток різних розділів теорії диференціально- функціональних рівнянь зробили Ю.О. Митропольський, А.М. Самойленко, О.М. Шарковський, М.В. Азбелєв, Я.Й. Бігун, О.А. Бойчук, Ю.С. Колєсов, В.Б. Колмановський, Я. Курцвейль, Д.І. Мартинюк, Г.П. Пелюх, В.П. Рубаник, В.Ю. Слюсарчук, Ю.В. Теплінський, В.І. Ткаченко, С.І.

Трофімчук, В.І. Фодчук, Д.Я. Хусаїнов, Є.Ф. Царков, І.М. Черевко, С.Н. Шиманов та інші.

Для диференціальних рівнянь з аргументом, що відхиляється, багато праць присвячено розвитку теорії стійкості та асимптотичних методів нелінійної механіки. При цьому часто використовується запропонована М.М. Красовським інтерпретація розв'язку диференціально-функціонального рівняння як інтегральної лінії в просторі $R \times C$. Використовуючи цю інтерпретацію, С.Н. Шиманов та Дж. Хейл запропонували метод розщеплення квазілінійного диференціально-функціонального рівняння на систему двох рівнянь.

Багато прикладних задач приводять до сингулярно збурених диференціальних рівнянь. Фундаментальні результати для таких рівнянь були одержані А.М. Тихоновим. Подальший розвиток вони одержали в працях А.О. Дородніцина, М.Й. Вішіка і Л.А. Люстерника, Є.Ф. Міщенка і М.Х. Розова, А.Б. Васильєвої і В.Ф. Бутузова. Відзначимо також дослідження важливих класів сингулярно збурених задач Ю.С. Колєсовим, В.В. Стригіним і В.А. Соболєвим, В.О. Плотніковим, О.А. Бойчуком, В.Г. Самойленком, В.П. Яковцем та іншими.

На такі задачі були поширені асимптотичні методи, методи примежових функцій та малого параметра. Проте для сингулярно збурених задач доцільно використовувати не тільки асимптотичні, але й геометричні методи аналізу, які дозволяють якісно дослідити поведінку як окремих розв'язків, так і цілих їх множин.

Одним із найефективніших методів дослідження регулярно і сингулярно збурених задач високої розмірності є метод інтегральних многовидів. Для дослідження сингулярно збурених задач метод інтегральних многовидів застосовувався в працях К.В. Задираки, В.І. Фодчука і Я.С. Баріса, В.В. Стригіна і В.А. Соболєва, Д. Хенрі, Н. Фенічела, К. Кноблоха, К. Сакамото та інших. Стійкі інтегральні многовиди сингулярно збурених диференціальних рівнянь із запізненням вивчались у працях А. Халаная, Ю.О. Митропольського і В.І. Фодчука.

Для дослідження стійкості лінійних систем на многовиді застосовується метод усереднення, а для нелінійних систем – метод нормальних форм.

Метод інтегральних многовидів застосовується у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням. Цей метод дозволяє звести дослідження біфуркації стану рівноваги складних систем до дослідження біфуркації стану рівноваги системи звичайних диференціальних рівнянь, що значно спрощує задачу. Для систем нелінійних диференціальних рівнянь можуть існувати інваріантні множини складної структури. Першим складну динаміку для задачі трьох тіл небесної механіки досліджував А. Пуанкаре. Складна динаміка дифеоморфізмів простору R^n випливає з існування гомоклінічних (гетероклінічних) точок. Такі дифеоморфізми досліджував Дж. Біркгоф, а пізніше С. Смейл та інші математики. При певних умовах із існування гомоклінічної точки випливає існування підкови Смейла та інваріантної множини, яка має структуру множини Кантора. У випадку системи диференціальних рівнянь з періодичною правою частиною встановлено простий критерій існування гомоклінічних точок – критерій Мельникова.

Найпростіший клас динамічних систем – одновимірні динамічні системи. Теорія раціональних відображень комплексної площини в себе була розроблена французькими математиками Г. Жуліа і П. Фату майже сто років назад. Протягом останніх десятиліть теорія динамічних систем інтенсивно розвивалася і збагатилася результатами багатьох відомих математиків.

Параболічні функціонально-диференціальні рівняння з перетворенням просторових змінних було запропоновано С.О. Ахмановим, М.А. Воронцовим і В.Ю. Івановим як математичну модель для вивчення динаміки структур в оптичних резонаторах з двовимірним зворотним зв'язком. Задача про біфуркації періодичних за часом розв'язків вивчалася в роботах С.О. Кащенка, О.В. Разгуліна та інших.

Для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть виникати складні просторові структури. У системах нелінійних гіперболічних рівнянь досліджено існування зліченного числа циклів, а у системах параболічних рівнянь з малою дифузією – існування як завгодно великої кількості циклів (феномен буферності). Динаміка таких процесів досліджувалася у роботах А.Ю. Колєсова, Ю.С. Колєсова, Є.Ф. Міщенка, М.Х. Розова, В.А. Садовнічого, А.М. Самойленка, Є.П. Бєлана та інших. Такі математичні моделі описують складні фізичні явища.

Отже, для регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь були досліджені тільки окремі задачі, пов'язані із застосуванням методу інтегральних многовидів. Цим задачам та іншим питанням, що пов'язані із методом інтегральних многовидів та дослідженням асимптотичної поведінки розв'язків різних класів регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь, різницевих рівнянь та диференціальних рівнянь з частинними похідними присвячена ця дисертаційна робота.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження дисертаційної роботи розпочаті в рамках держбюджетних наукових тем кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка №11БФ038-01 "Розроблення нових математичних методів моделювання, аналізу та побудова керувань для нелінійних еволюційних систем зі складною динамікою" (номер державної реєстрації 011U006677), №06БФ038-01 "Якісні та аналітичні методи дослідження і моделювання нелінійних систем та фізико-механічних систем із складною динамікою" (номер державної реєстрації 0106U005863) і були продовжені в рамках науково-дослідних робіт "Якісне дослідження та математичне моделювання процесів, що описуються диференціальними та диференціально-функціональними рівняннями" (номер державної реєстрації 0106U008365), "Методи аналізу диференціально-функціональних і еволюційних рівнянь та математичне моделювання процесів з післядією та випадковостями" (номер державної реєстрації 0111U000181), які виконувалися в Чернівецькому національному університеті імені Юрія Федьковича.

Мета і завдання дослідження. Метою досліджень даної роботи є розвиток методу інтегральних многовидів та асимптотичних методів для параболічних і гіперболічних рівнянь з перетвореним аргументом та диференціально-різницевих рівнянь, дослідження на основі зазначених методів змістовних біфуркаційних задач.

Для досягнення поставленої мети визначено такі завдання:

- довести існування інтегральних многовидів і встановити принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку;
- дослідити динамічну еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь і побудувати заміну, яка зводить систему до простішого вигляду; дослідити розщеплення системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь на дві незалежні підсистеми;
- застосувати інтегральні многовиди у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням;
- дослідити біфуркацію стану рівноваги диференціальних рівнянь з частинними похідними;
- дослідити біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією;
- дослідити асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Об'єктом дослідження є регулярно та сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння.

Предмет дослідження – інтегральні многовиди як апарат якісного, біфуркаційного аналізу.

Методи дослідження. У даній роботі застосовуються методи функціонального аналізу, теорії динамічних систем, якісної теорії диференціальних рівнянь, теорії стійкості, теорії біфуркацій, асимптотичні методи нелінійної механіки, метод усереднення та інші.

Наукова новизна одержаних результатів. Всі результати дисертації є новими. Основні результати дисертації полягають в наступному:

– для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, імпульсних диференціально-функціональних рівнянь та різницевих рівнянь доведено існування інтегральних многовидів та досліджено їх властивості; для вказаних рівнянь доведено принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку, згідно з яким стійкість нульового розв'язку рівняння рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння на многовиді;

– запропоновано метод побудови функції, що задає центральний многовид, який полягає у знаходженні асимптотичного розкладу в степеневий ряд за координатами; обґрунтовано алгоритм дослідження стійкості нульового розв'язку у критичному випадку, який включає в себе наближену побудову рівняння на многовиді; для дослідження стійкості розв'язку лінійного рівняння на многовиді запропоновано метод усереднення, а для нелінійного рівняння на многовиді – метод нормальних форм;

– доведена динамічна еквівалентність системи диференціально-функціональних рівнянь та деякої більш простої системи рівнянь; побудована заміна, яка розщеплює систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу на два незалежних рівняння; така ж заміна побудована для лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу та лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням; розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійної керованої сингулярно збуреної системи із запізненням;

– для сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь одержано зображення інтегрального многовиду, досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків; показано, що при певних припущеннях на праву частину сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами відображення Пуанкаре має трансверсальну гомоклінічну точку;

– метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням; досліджено поліноміальні і раціональні відображення, еквівалентні кусково-лінійним і такі, що мають інваріантну міру;

– доведено існування інтегральних многовидів для нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію стану рівноваги; доведено існування інтегральних многовидів сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію інваріантного тора із стану рівноваги;

– доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою; вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега - де Фріза з перетвореним аргументом;

– досліджено біфуркацію циклів автономних параболічних систем з малою дифузією, одержано умови існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння; доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією, досліджено стійкість біжучих хвиль для таких систем;

– крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь першого порядку зведено до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь; використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних; для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула; доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів; показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи мають в основному теоретичний характер. Вони є вагомим внеском у методику дослідження регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь і можуть бути використані при вивченні багатьох прикладних задач механіки, теорії керування, біології, екології, економіки та інших областей, математичними моделями яких є розглянуті в роботі диференціально-функціональні рівняння. Одержані результати можуть також використовуватись при подальшому дослідженні якісних властивостей та наближеній побудові розв'язків диференціально-функціональних рівнянь.

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, включені в дисертацію, отримані автором особисто. Відзначимо внесок автора у спільних публікаціях: У праці [22] автору належать теорема 1 та леми 1, 2, 3, а побудова області стійкості була здійснена автором раніше іншим методом. У спільній роботі з науковим консультантом [23] Перестюку М.О. належить постановка задачі, визначення загальної схеми досліджень та обговорення одержаних результатів. У праці [30] автору належить останній розділ.

Апробація результатів досліджень. Результати дисертаційної роботи доповідались на: республіканській конференції "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" (Одеса, 1987 р.), регіональній конференції "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" (Махачкала, 1988 р.), Всесоюзній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики" (Тернопіль, 1989 р.), Міжнародній конференції "Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики –- Вторые Боголюбовские чтения" (Київ, 1992 р.), Міжнародній математичній школі "Теория функций. Дифференциальные уравнения в математическом моделировании" (Воронеж, 1993 р.), Міжнародній математичній конференції, присвяченій пам'яті Ганса Гана (Чернівці, 1994, 2004, 2014 рр.), Всеукраїнській конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" (Дрогобич, 1994), Республіканській конференції "Моделирование и исследование устойчивости систем" (Київ, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996 рр.), Всеукраїнській конференції "Диференціально- функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 1996 р.), Міжнародній конференції "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань. Треті Боголюбовські читання" (Київ, 1997 р.), Міжнародній математичній школі "Singularly Perturbed Systems and Applications" (Берлін, 1997 р.), Міжнародній конференції "Nonlinear Partial Differential Equations" (Kiev, 1997 р., Lviv, 1999 р., Kiev, 2001 р.), Міжнародній конференції "Dynamical system modelling and stability investigation" (Київ, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2011, 2013, 2015 рр.), Міжнародній науковій конференції "Сучасні проблеми математики" (Чернівці, 1998), IV, V, VII і IX Кримській міжнародній математичній школі "Метод функций Ляпунова и его приложения" (Сімферополь, 1998, 2000, 2004, 2008 рр.), Міжнародній конференції

"Диференціальні та інтегральні рівняння" (Одеса, 2000 р.), VIII Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2000 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання" (Чернівці, 2001 р.), Міжнародній конференції "Шості Боголюбовські читання" (Чернівці, 2003 р.), Міжнародній конференції "Modern problems and new trends in probability theory" (Чернівці, 2005 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 2006 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Мелітополь, 2008 р.), Міжнародній конференції "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури" (Чернівці, 2010 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Київ, 2011 р.), Всеукраїнській конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування в прикладній математиці" (Чернівці, 2012 р.), Міжнародній конференції, присвяченій 120-річчю Стефана Банаха (Львів, 2012 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2012 р.), Міжнародній конференції "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування" (Севастополь, 2013 р.), Міжнародній конференції "Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация" (Мінськ, 2013 р.), Міжнародній конференції "Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки" (Київ, 2014 р.), Науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження К.М. Фішмана та М.К. Фаге (Чернівці, 2015 р.), Міжнародній науковій конференції "Диференціальні рівняння та їх застосування" (Ужгород, 2016 р.), Міжнародній конференції "Differential Equations ICL 110" (Lviv, 2016 р.), Міжнародній науковій конференції "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування" (Чернівці, 2016 р.), науковому семінарі відділу диференціальних рівнянь та теорії коливань Інституту математики НАН України, наукових семінарах факультету математики та інформатики і кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, наукових семінарах кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Публікації. Результати дисертаційного дослідження опубліковані у 66 наукових працях, які не увійшли до кандидатської дисертації автора, з них 29 статей [1]-[29] опубліковано у виданнях, що внесені до переліку наукових фахових видань України та іноземних періодичних видань, 7 статей опубліковано в журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus, [32]-[66] – тези доповідей на конференціях.

Об'єм та структура дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, восьми розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 240 найменувань. Повний обсяг роботи становить 308 сторінок, а основний зміст викладено на 283 сторінках.

Автор висловлює щиру подяку науковому консультанту академіку НАН

Украни, доктору фізико-математичних наук, професору Перестюку Миколі Олексійовичу за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі проаналізовано сучасний стан досліджень з теорії регулярно і сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь та методу інтегральних многовидів. Обгрунтовано актуальність розглянутих у дисертаційній роботі задач, вказано наукову новизну та практичне значення роботи. Зазначено особистий внесок здобувача, вказано, де відбувалась апробація результатів роботи та публікації автора.

У першому розділі дисертації зроблено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи. Тут наведено перелік публікацій, присвячених дослідженню асимптотичної поведінки розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та деяких класів диференціально-функціональних рівнянь. Результати цих праць використовувалися та узагальнювалися автором.

У другому розділі роботи наведено основні результати дисертації.

Третій розділ присвячений питанням існування інтегральних многовидів і встановленню принципу зведення для дослідження стійкості розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку.

Підрозділ 3.1 присвячений побудові області стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями. Тут розглядається характеристичне рівняння

$$\lambda = a_1 e^{-\lambda} + a_2 e^{-2\lambda} + ... + a_n e^{-n\lambda}. \tag{1}$$

Означення. *Областю стійкості рівняння (1) називається множина точок* $(a_1,...,a_n) \in R^n$*, для яких всі корені рівняння (1) задовольняють умову* $Re\ \ \lambda < 0$.

Теорема 3.1. *Область стійкості рівняння (1) обмежена.*

Спочатку одержано обмеження області стійкості, а потім для побудови використано метод D-розбиттів.

У підрозділі 3.3 досліджується стійкість тривіального розв'язку нелінійної системи різницевих рівнянь у критичному випадку.

Розглянемо систему різницевих рівнянь

$$y_{n+1} = A_n y_n + f_n(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = B_n z_n + g_n(y_n, z_n), \tag{2}$$

де $n \in Z$, $y_n \in R^{\nu}$, $z_n \in R^{m-\nu}$, A_n – послідовність матриць розмірності $\nu \times \nu$, B_n – послідовність матриць розмірності $(m-\nu)\times(m-\nu)$, функції f_n та g_n задовольняють умови

$$f_n(0,0) = g_n(0,0) = 0, \quad \| f_n(y,z) - f_n(\bar{y},\bar{z}) \| \le L(\| y - \bar{y} \| + \| z - \bar{z} \|),$$

$$\| g_n(y,z) - g_n(\bar{y},\bar{z}) \| \le L(\| y-\bar{y} \| + \| z-\bar{z} \|) \tag{3}$$

при всіх $n \in Z$, $\{y,\bar{y}\} \subset \mathrm{R}^{\nu}$, $\{z,\bar{z}\} \subset \mathrm{R}^{m-\nu}$.

Поряд із системою (2) розглянемо лінійні системи

$$y_{n+1} = A_n y_n, \quad z_{n+1} = B_n z_n. \tag{4}$$

Нехай матриці B_n невироджені при всіх $n \in Z$. Позначимо через $G_+(n,s)$ та $G_-(n,s)$ фундаментальні матриці розв'язків систем (4), такі, що $G_+(s,s) = E$, $G_-(s,s) = E$, де E – одиничні матриці відповідних розмірностей. Нехай виконуються нерівності

$$\| G_+(n,s) \| \le K\rho^{n-s}, \quad n \ge s, \quad \| G_-(n,s) \| \le K\gamma^{n-s}, \quad n \le s, \tag{5}$$

де $0 < \rho < \gamma \le 1$, $K \ge 1$.

Позначимо через $x_n = (y_n\, z_n)^T$ розв'язок системи (2) і визначимо норму $\| x_n \| = \| y_n \| + \| z_n \|$, $x_n \in \mathrm{R}^m$. Також будемо позначати через $x_n(n_0, x_{n_0})$ розв'язок системи (2) з початковими даними $n = n_0$, $x_n = x_{n_0}$.

Теорема 3.7. *Нехай виконуються умови (3), (5). Тоді при*

$$L < \frac{\gamma - \rho}{8K^2} \tag{6}$$

існує послідовність поверхонь

$$S^+ = \{(y,z) | z = h_n(y), n \in \mathrm{Z}, y \in \mathrm{R}^{\nu}, z \in \mathrm{R}^{m-\nu}\}, \tag{7}$$

які задовольняють умови $h_n(0) = 0$, $\| h_n(y) - h_n(\bar{y}) \| \le \frac{1}{2} \| y - \bar{y} \|$ *і для розв'язку системи (2) з початковими даними* y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, *які задовольняють рівняння (7), виконується нерівність* $\| x_n \| \le 2K \| y_{n_0} \| \mu^{n-n_0}$, *де* $n \ge n_0$, $\mu = (\rho + \gamma)/2$.

Теорема 3.8. *Нехай виконуються умови (3), (5), (6). Тоді існує послідовність поверхонь* $S^- = \{(y,z) | y = H_n(z), n \in \mathrm{Z}, z \in \mathrm{R}^{m-\nu}, y \in \mathrm{R}^{\nu}\}$, *які задовольняють умови* $H_n(0) = 0$, $\| H_n(z) - H_n(\bar{z}) \| \le \frac{1}{2} \| z - \bar{z} \|$ *і для розв'язку системи (2) з початковими даними* y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, *які задовольняють рівняння* $y = H_n(z)$, *виконується нерівність* $\| x_n \| \le 2K \| z_{n_0} \| \mu^{n-n_0}$, *де* $n \le n_0$, $\mu = \frac{\rho + \gamma}{2}$.

Зауважимо, що поведінка розв'язків системи (2) на інтегральних поверхнях S^- описується рівнянням

$$w_{n+1} = B_n w_n + g_n(H_n(w_n), w_n). \tag{8}$$

Теорема 3.9. *Нехай* $x_n(p, x_p)$ *– довільний розв'язок системи (2) з початковими даними* $n = p$, $x_n = x_p$. *При умовах теорем 3.7 та 3.8 існує розв'язок* $\varphi_n(p, \alpha)$, $\alpha \in \mathrm{R}^{m-\nu}$, *системи (2), що належить* S^- *і такий, що вірна оцінка*

$$\|x_n-\varphi_n(p,\alpha)\|\le 2K\|y_p-H_p(\alpha)\|\mu^{n-p},\quad n\ge p,\quad 0<\mu<1.$$

Теорема 3.10. *Нехай виконуються умови теорем 3.7 та 3.8. Якщо нульовий розв'язок системи (8) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (2) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Підрозділ 3.4 присвячений питанням існування інтегральних многовидів та дослідженню їх властивостей для рівнянь нейтрального типу.

Нехай R^n – n-вимірний простір з нормою $|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$, $C= =C[-\Delta,0]$ – простір неперервних на $[-\Delta,0]$ функцій із значеннями в R^n і нормою $|\varphi|=\sup\limits_{-\Delta\le\theta\le 0}|\varphi(\theta)|$.

Розглянемо диференціально-функціональне рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}\left[D(x_t)-G(t,x_t)\right]=L(x_t)+F(t,x_t), \tag{9}$$

де x_t – елемент простору C, заданий функцією $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, $-\Delta\le\theta\le 0$; $D:C\to R^n$; $L:C\to R^n$; D і L – лінійні неперервні оператори; $G:R\times C\to R^n$; $F:R\times C\to R^n$; оператори G і F неперервні відносно t. Оператор $G(t,\varphi)$ неперервно диференційовний відносно t і φ. Згідно з теоремою Рісса оператори $D(\varphi)$ і $L(\varphi)$ можна зобразити за допомогою інтеграла Стілтьєса:

$$D(\varphi)=\varphi(0)-\int_{-\Delta}^{0}\left[d\mu(\theta)\right]\varphi(\theta),\;\; L(\varphi)=\int_{-\Delta}^{0}\left[d\eta(\theta)\right]\varphi(\theta),$$

де $\mu(\theta)$, $\eta(\theta)$ – матриці-функції обмеженої варіації.

Припустимо, що функція $\mu(\theta)$ не містить сингулярної компоненти і повна варіація $V_{-s}^{0}[\mu]\to 0$ при $s\to 0$. Нехай існує стала $\nu>0$ така, що

$$G(t,0)=0,\; F(t,0)=0,\; |G(t,\varphi)-G(t,\varphi')|\le\nu|\varphi-\varphi'|,$$

$$|F(t,\varphi)-F(t,\varphi')|\le p(t)|\varphi-\varphi'|,\; \sup_{t\in R}\int_{t}^{t+\tau_0}p(\tau)d\tau\le\nu\tau_0, \tag{10}$$

де $\tau_0>0$, $t\in R$, $\varphi\in C$, $\varphi'\in C$.

Поряд з (9) розглянемо лінійне рівняння

$$\frac{d}{dt}D(\bar{x}_t)=L(\bar{x}_t). \tag{11}$$

Характеристичне рівняння для рівняння (11) набере вигляду

$$det\;\Lambda(\lambda)=0,\;\; \Lambda(\lambda)=\lambda\left[E-\int_{-\Delta}^{0}e^{\lambda\theta}d\mu(\theta)\right]-\int_{-\Delta}^{0}e^{\lambda\theta}d\eta(\theta). \tag{12}$$

Позначимо

$$b = \sup\left\{ Re\lambda : det\left(E - \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\mu(\theta) \right) = 0 \right\}.$$

Нехай $b < 0$. Тоді в півплощині $Re\lambda \geq -\alpha = b/2$ міститься скінченна кількість коренів рівняння (12). Припустимо, що рівняння (12) має l коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda < -\alpha - \beta_1$, де $0 < \beta_1 < \alpha$. Позначимо через P власний підпростір в C, породжений розв'язками рівняння (11), що відповідають кореням на уявній осі. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в P.

Розглядаючи спряжене до (11) рівняння, можна аналогічним чином визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \Delta$. Тоді кожний елемент $x_t \in C$ можна зобразити у вигляді $x_t = \Phi u(t) + w_t$, $u(t) = (\Psi, x_t)$, $w_t = x_t - \Phi u(t)$, $u(t) \in R^l$, $w_t \in Q$, де (Ψ, x_t) – білінійний функціонал [4].

Рівняння (9) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{d}{dt}\left[u(t) - \Psi(0)G(t, x_t)\right] = Bu(t) + \Psi(0)F(t, x_t),$$

$$w_t = T(t-\sigma)[w_\sigma - X_0^Q G(\sigma, x_\sigma)] + X_0^Q G(t, x_t) +$$

$$+ \int_\sigma^t T(t-s) X_0^Q F(s, x_s) ds - \int_\sigma^t d_s \left[T(t-s) X_0^Q G(s, x_s)\right],$$

де X_0^Q – проекція на підпростір Q функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leq \theta < 0$, $X_0(0) = E$; B – $l \times l$ – матриця, власні значення якої збігаються із згаданими вище уявними коренями.

Виконуються нерівності

$$|T(t)\varphi| \leq K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t] |\varphi|, \ \varphi \in Q,$$

$$|T(t) X_0^Q| + \int_0^1 |d_s T(t-s) X_0^Q| \leq K_1 \exp[-(\alpha + \beta_1)t],$$

де $t \geq 0, K_1 > 0$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B виконується також оцінка

$$|\exp(Bt)| \leq K \exp[(-\alpha + \beta)t],$$

де $t \leq 0, K > 0, 0 < \beta < \alpha.$

Теорема 3.11. *Нехай виконуються умови (10). Тоді знайдеться таке* $\nu_0 > 0$, *що при* $\nu < \nu_0$ *існує функція* $h(t,u) \in Q$, *що визначена на* $R \times R^l$, *задовольняє умови* $h(t,0) = 0, |h(t,u) - h(t,u')| \le 0{,}5|u - u'|,$ *і така, що множина*

$$S^- = \{(t,\varphi): t \in R, \quad \varphi = \Phi u + \zeta, \quad u \in R^l, \quad \zeta = h(t,u), \quad \zeta \in Q\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (9).

Для кожного розв'язку $x_t = \Phi u(t) + h(t,u(t))$ рівняння (9), що належить S^-, виконується оцінка $|x_t| \le 2K|\Phi\|u(\sigma)|\exp[-\alpha(t-\sigma)], t \le \sigma.$

Теорема 3.12. *Нехай виконуються умови (10). Тоді знайдеться таке* $\nu_1 > 0$, *що при* $\nu < \nu_1$ *існує функція* $r(t,\zeta) \in R^l$, *що визначена на* $R \times Q$, *задовольняє умови* $r(t,0) = 0, \ |r(t,\zeta) - r(t,\zeta')| \le 0{,}5|\zeta - \zeta'|$ *і така, що множина*

$$S^+ = \{(t,\varphi): t \in R, \quad \varphi = \Phi u + \zeta, \quad \zeta \in Q, \quad u = r(t,\zeta), \quad u \in R^l\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (9). Для кожного розв'язку $x_t = \Phi r(t,w_t) + w_t$ рівняння (9), що належить S^+, виконується оцінка $|x_t| \le 2K_1 \exp[-\alpha(t-\sigma)]|w_\sigma|, \ t \ge \sigma.$

Поведінка розв'язків рівняння (9) на інтегральному многовиді S^- описується рівнянням

$$\frac{d}{dt}\left[y - \Psi(0)G(t, \Phi y + h(t,y))\right] = By + \Psi(0)F(t, \Phi y + h(t,y)). \qquad (13)$$

Теорема 3.13. *Нехай виконуються умови (10), де* $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. *Якщо* $x_t = \Phi u(t) + w_t$ $(t \ge \sigma)$ *– довільний розв'язок рівняння (9) з початковою функцією* x_σ *при* $t = \sigma$, *то існує розв'язок* $\xi_t = \Phi y(t) + h(t, y(t))$, *що належить* S^- *і такий, що виконується оцінка*

$$|x_t - \xi_t| \le 2K_1|w_\sigma - h(\sigma, y(\sigma))|\exp[-\alpha(t-\sigma)], \quad t \ge \sigma.$$

Теорема 3.14. *Нехай виконуються умови (10), де* $\nu < \min(\nu_0, \nu_1)$. *Якщо нульовий розв'язок рівняння (13) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (9) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

У підрозділі 3.5 запропоновано метод побудови інтегрального многовиду у вигляді розкладу в степеневий ряд. Тут розглянуто питання про можливість обмежитися першими наближеннями для дослідження стійкості у критичному випадку.

У останньому підрозділі третього розділу друге наближення в методі усереднення застосовано до дослідження стійкості системи слабкозв'язаних осциляторів із запізненням. Одержано достатню умову стійкості (нестійкості) лінійної системи диференціально-різницевих рівнянь.

Розглянемо систему слабкозв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t-h) = 0, \qquad (14)$$

де ε – малий додатний параметр, $y=(y_1,\ldots,y_q)^T$, L – діагональна матриця з додатними різними діагональними елементами, $L=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ldots,\lambda_q\}$, $\lambda_s>0$, $\lambda_k\neq\lambda_s$ при $k\neq s$, $h>0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t)=\sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_m t}+\bar{b}_{jsm}e^{-ia_m t}),\quad b_{jsm}\in C,\quad a_m\geq 0.$$

Позначимо $c_j=b_{jj1}+\bar{b}_{jj1}$.

Теорема 3.19. *Нехай $a_1=0$, $a_m>0$ при $m\geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j-\lambda_s+a_m\neq 0$ при $|j-s|+|m-1|>0$, $\lambda_j+\lambda_s-a_m\neq 0$ для всіх j,s,m. Тоді нульовий розв'язок системи (14) асимптотично стійкий, якщо $c_j\sin(\lambda_j h)<0$ при $j\in\{1,\ldots,q\}$, і нестійкий, якщо існує k, для якого $c_k\sin(\lambda_k h)>0$.*

Нехай тепер $a_m>0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s=\mathrm{Re}\{\delta_s\}$,

$$\delta_s=\sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}\Bigg(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}\exp(i(2\lambda_s+a_m)h)}{i(\lambda_k-\lambda_s-a_m)(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}+$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}\exp(i(2\lambda_s-a_m)h)}{i(\lambda_k-\lambda_s+a_m)(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}\Bigg).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm}=b_{skm}$, отже,

$$d_s=\sum_{k=1}^{q}\sum_{m=1}^{n}|b_{skm}|^2\Bigg(\frac{\sin((2\lambda_s+a_m)h)}{(\lambda_k-\lambda_s-a_m)(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}+$$

$$+\frac{\sin((2\lambda_s-a_m)h)}{(\lambda_k-\lambda_s+a_m)(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}\Bigg).$$

Теорема 3.20. *Нехай $a_m>0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j-\lambda_s+a_m-a_k\neq 0$ при $|j-s|+|m-k|>0$, $\lambda_j+\lambda_s-a_m\neq 0$, $\lambda_j-\lambda_s+a_m\neq 0$, $\lambda_j+\lambda_s+a_m-a_k\neq 0$, $\lambda_j+\lambda_s-a_m-a_k\neq 0$, $\lambda_j-\lambda_s+a_m+a_k\neq 0$ для всіх j,s,m,k. Тоді нульовий розв'язок системи (14) асимптотично стійкий, якщо $d_s>0$ при $s\in\{1,\ldots,q\}$ і нестійкий, якщо існує k, для якого $d_k<0$.*

Розглянемо систему

$$x'=\varepsilon F(t)x(t-h),\tag{15}$$

де ε – малий додатний параметр, $x\in\mathbb{R}^p$,

$$F(t)=\sum_{m=1}^{n}\left(A_m e^{ib_m t}+\bar{A}_m e^{-ib_m t}\right),$$

b_m – дійсні додатні різні числа, A_m – матриці з комплексними елементами.

Позначимо

$$B = -\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{b_m} \sin(b_m h)(A_m \overline{A}_m + \overline{A}_m A_m).$$

Теорема 3.21. *Якщо всі власні значення матриці B мають від'ємні дійсні частини, то система (15) асимптотично стійка, а якщо існує власне значення матриці B з додатною дійсною частиною, то система (15) нестійка.*

У підрозділі 3.2 доведено існування інтегральних множин та встановлено принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь.

У четвертому розділі за допомогою інтегральних многовидів досліджено динамічну еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь і побудовано заміну, яка зводить систему до простішого вигляду.

У підрозділі 4.1 доведено існування інтегральних многовидів, якщо права частина системи диференціально-функціональних рівнянь задовольняє інтегральну умову Ліпшиця. Показано, що вихідну систему за допомогою гомеоморфної заміни можна звести до простішого вигляду.

Розглянемо рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(x_t) + F(t, x_t), \tag{16}$$

де $f(x_t)$ – лінійний неперервний оператор, заданий в C; $F(t, x_t)$ – нелінійний оператор від x_t із значеннями в R^n.

Поряд з (16) розглянемо лінійне автономне диференціально-функціональне рівняння

$$\frac{du}{dt} = f(u_t). \tag{17}$$

Припустимо, що характеристичне рівняння для рівняння (17) має l коренів на уявній осі і в правій півплощині (з урахуванням їх кратності), а решта коренів лежать у лівій комплексній півплощині.

Позначимо $|y|_1 = |\Phi y|$, $y \in R^l$.

Теорема 4.1. *Нехай функція F неперервна за t і задовольняє умови*

$$F(t,0) = 0, \quad |F(t,\varphi) - F(t,\varphi')| \le p(t)|\varphi - \varphi'|,$$

$$\sup_{t \in P} \int_{t}^{t+\tau_0} p(\tau)d\tau \le \nu\tau_0,$$

де $\nu > 0$, $\tau_0 > 0$, $t \in R$, $\varphi \in C$, $\varphi' \in C$. Тоді при

$$\nu < \frac{1 - exp(-\beta\tau_0)}{4K^2\tau_0}$$

існує функція $g(t,y)\in\Theta$, що визначена на $\mathrm{R}\times\mathrm{R}^l$, задовольняє умови $g(t,0)=0, \quad |g(t,y)-g(t,y')|\le 0{,}5|y-y'|_1$ і така, що множина

$$S^-=\{(t,\varphi)|t\in\mathrm{R},\varphi=\Phi y+\zeta, y\in\mathrm{R}^l,\zeta=g(t,y),\zeta\in\mathrm{Q}\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (16).

Для кожного розв'язку $x_t=\Phi y(t)+g(t,y(t))$ рівняння (16), що лежить на S^-, виконується оцінка $|x_t|\le 2K|y(\sigma)|_1\exp(-\alpha(t-\sigma))$, $t\le\sigma$.

Теорема 4.2. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді існує функція* $r(t,\zeta)\in\mathrm{R}^l$, *що визначена на* $\mathrm{R}\times\mathrm{Q}$, *задовольняє умови* $r(t,0)=0, \quad |r(t,\zeta)-r(t,\zeta')|_1\le 0{,}5|\zeta-\zeta'|$ *і така, що множина*

$$S^+=\{(t,\varphi)\,|t\in\mathrm{R},\varphi=\Phi y+\zeta,\zeta\in\mathrm{Q}, y=r(t,\zeta), y\in\mathrm{R}^l\}$$

є інтегральним многовидом рівняння (16). Для кожного розв'язку $x_t=\Phi r(t,W_t)+W_t$ рівняння (16), що лежить на S^+, виконується оцінка

$$|x_t|\le 2K|W_\sigma|\exp[-\alpha(t-\sigma)],\quad t\ge\sigma.$$

Теорема 4.3. *Нехай виконуються умови теореми 4.1. Тоді існує гомеоморфна заміна змінних, яка зводить систему (16) до вигляду*

$$\frac{du}{dt}=Bu+\Psi(0)F(t,\Phi u+g(t,u)),$$

$$v_t=T(t-\sigma)v_\sigma+\int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F_1(s,u(s),v_s)ds,$$

де $F_1(t,u,v)$ – деяка неперервна за сукупністю аргументів функція, що визначається через функцію F і задовольняє умови

$$F_1(t,u,0)=0,\quad |F_1(t,u,v)-F_1(t,u,v')|\le 2Kp(t)|v-v'|.$$

У підрозділі 4.2 побудовано інтегральні многовиди і здійснено розщеплення регулярно збуреної системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

Розглянемо лінійні диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу

$$\frac{d}{dt}[D(x_t)-\varepsilon G(t,x_t)]=L(x_t)+\varepsilon F(t,x_t), \tag{18}$$

$$\frac{d}{dt}[D(u_t)]=L(u_t), \tag{19}$$

де $D:\ \mathrm{C}\to\mathrm{R}^n$; $G:\ \mathrm{R}\times\mathrm{C}\to\mathrm{R}^n$; $L:\ \mathrm{C}\to\mathrm{R}^n$; $F:\ \mathrm{R}\times\mathrm{C}\to\mathrm{R}^n$; оператори D, L, G, F лінійні відносно x_t; оператор F неперервний відносно t, а оператор G неперервно диференційовний відносно t.

Нехай відносно рівняння (19) виконуються умови, накладені на рівняння

(11) у підрозділі 3.4. Далі використаємо позначення підрозділу 3.4.

Рівняння (18) еквівалентне системі рівнянь

$$\frac{d}{dt}[y-\varepsilon\Psi(0)G(t,x_t)]=By+\varepsilon\Psi(0)F(t,x_t),$$

$$z_t=T(t-\sigma)z_\sigma+\varepsilon\int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q[F(s,x_s)+\frac{d}{ds}G(s,x_s)]ds, \tag{20}$$

де $T(t)\varphi=u_t(\varphi)$, X_0^Q – проекція на підпростір Q функції $X_0(\theta)=0$, $-\Delta\le\theta<0$; $X_0(0)=E$; B – стала матриця, власні значення якої лежать на уявній осі.

Нехай $|G(t,\varphi)|\le\nu|\varphi|$, $|F(t,\varphi)|\le\nu|\varphi|$, $\nu>0$. Із результатів підрозділу 3.4 випливає, що при досить малому ε існують інтегральні многовиди системи (20), які можна подати у вигляді $z_t=g(t,\varepsilon)y$, $y=r(t,z_t,\varepsilon)$, причому виконуються оцінки $|g(t,\varepsilon)|\le 0{,}5$, $|r(t,\varphi,\varepsilon)|\le 0{,}5|\varphi|$.

Функцію $g_n(t,\varepsilon)$ можна подати у вигляді

$$g_n(t,\varepsilon)=\varepsilon h_1(t)+\varepsilon^2h_2(t)+\ldots+\varepsilon^nh_n(t),$$

де функції $h_1(t)$, $h_2(t)$, $\ldots$, $h_n(t)$ виражаються через функції F та G.

Виконується оцінка

$$|g(t,\varepsilon)-g_n(t,\varepsilon)|\le L\varepsilon^{n+1},$$

де $n\in\{0,1,2,\ldots\}$; L – деяка додатна стала, що не залежить від ε.

Нехай функції $F(t,\varphi)$, $G(t,\varphi)$ є квазіперіодичними відносно t і розкладаються в ряди

$$F(t,\varphi)=\sum_k F_k(\varphi)e^{i(k,w)t}, G(t,\varphi)=\sum_k G_k(\varphi)e^{i(k,w)t},$$

де $w=(w_1,\ldots,w_j)$, $k=(k_1,\ldots,k_j)$, $F_k(\varphi)$, $G_k(\varphi)$ – лінійні неперервні функціонали. Тоді визначення функції $g_n(t,\varepsilon)$ зводиться до обчислення інтеграла

$$\xi=\int_{-\infty}^0 T(-s)X_0^Qe^{\delta s}ds,$$

де $\delta=i(k,w)+\lambda$, λ – власне значення матриці B.

Теорема 4.4. *Функція* $\xi(\theta)$, $-\Delta\le\theta\le 0$, *належить* $Q\cap D(A)$ *і виконується рівність*

$$\delta\xi-A\xi=X_0^Q, \tag{21}$$

де A – твірний оператор півгрупи $\{T(t),t\ge 0\}$ з областю визначення $D(A)$.

Можна показати, що розв'язування рівняння (21) зводиться до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{d}{dt}[v-\varepsilon\Psi(0)G_1(t,\varepsilon)v]=Bv+\varepsilon\Psi(0)F_1(t,\varepsilon)v,$$

$$w_t = T(t-\sigma)w_\sigma + \varepsilon\int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q[F_2(s,w_s,\varepsilon) + \frac{d}{ds}G_2(s,w_s,\varepsilon)]ds, \qquad (22)$$

де $v \in \mathrm{R}^m$, $w_t \in Q$,

$$G_1(t,\varepsilon)v = G(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v), \quad F_1(t,\varepsilon)v = F(t,\Phi v + g(t,\varepsilon)v),$$

$$G_2(t,w_t,\varepsilon) = G(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t), \quad F_2(t,w_t,\varepsilon) = F(t,\Phi r(t,w_t,\varepsilon) + w_t).$$

Теорема 4.5. *За допомогою заміни*

$$y = v + r(t,w_t,\varepsilon), \quad z_t = w_t + g(t,\varepsilon)v \qquad (23)$$

система (22) зводиться до вигляду (20).

Згідно з лінійністю $r(t,\varphi,\varepsilon)$ відносно φ систему (23) можна однозначно розв'язати відносно v і w_t. Отже, визначаючи із (23) v та w_t, знаходимо заміну, яка розщеплює систему (20) на два незалежних рівняння (22).

Розглянемо тепер критичний випадок: характеристичне рівняння, що відповідає рівнянню (19), має m коренів на уявній осі (із врахуванням їх кратності), а решта коренів мають від'ємні дійсні частини.

Із теореми 4.5 випливає, що якщо нульовий розв'язок рівняння

$$\frac{d}{dt}[v - \varepsilon\Psi(0)G_1(t,\varepsilon)v] = Bv + \varepsilon\Psi(0)F_1(t,\varepsilon)v \qquad (24)$$

стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок рівняння (18) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.

Для дослідження стійкості рівняння (24) можна розв'язати відносно v і застосувати метод Боголюбова-Штокало або метод прискореної збіжності. Якщо власні значення матриці B мають прості елементарні дільники, то в рівнянні (24) можна зробити заміну $v = \exp(Bt)u$ і одержати систему в стандартній формі. Для дослідження стійкості розв'язків такої системи в багатьох випадках доцільно застосовувати метод усереднення.

У підрозділі 4.3 доведено існування інтегральних многовидів і здійснено розщеплення лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу.

Розглянемо систему

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + F(t,x_t),$$

$$\varepsilon\frac{d}{dt}[C(t)x(t) + D(t,y_t)] = B_1(t)x(t) + G_1(t,y_t), \qquad (25)$$

де ε – малий додатний параметр, x – m-вимірний вектор, y – n-вимірний вектор; $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$; $F(t,\varphi)$, $G_1(t,\varphi)$, $D(t,\varphi)$ – лінійні неперервні відносно φ оператори; матриці $A(t)$, $B_1(t)$ і оператори $F(t,\varphi)$, $G_1(t,\varphi)$, $D(t,\varphi)$ неперервні відносно t.

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1) норми матриць A, B_1, C, D, C', $B_1-\varepsilon C'-\varepsilon CA$ і операторів F, G_1, D, $\partial D/\partial t$ рівномірно обмежені при $t \in \mathrm{P}$ деякою додатною сталою M;

2) всі корені характеристичного рівняння, що відповідає лінійному рівнянню
$$\varepsilon\frac{d}{dt}[D(t,y_t)] = G_1(t,y_t),$$
лежать у півплощині $\mathrm{Re}\lambda(t) \le -2\alpha < 0$.

Теорема 4.6. *Нехай виконуються умови 1 та 2. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_0 > 0$ що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (25), який можна зобразити у вигляді $y_t = P(t,\varepsilon)x$, де $P(t,\varepsilon)$: $\mathrm{R}^m \to \mathrm{C}$ – рівномірно обмежений при $t \in \mathrm{R}$ оператор.*

Теорема 4.7. *Нехай виконуються умови 1 та 2. Тоді можна вказати таке $\varepsilon_1 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ існує інтегральний многовид системи (25), який можна зобразити у вигляді $x = Q(t, y_t, \varepsilon)$, де $Q(t,\varphi,\varepsilon)$ – лінійний відносно φ оператор. Виконується нерівність $|Q(t,\varphi,\varepsilon)| \le \varepsilon N|\varphi|$, де $N > 0$.*

Побудована заміна, яка розщеплює систему (25) на два незалежних рівняння.

У підрозділі 4.4 доведено існування інтегральних многовидів і показано, що систему імпульсних сингулярно збурених рівнянь можна розщепити на дві незалежні підсистеми.

В останньому підрозділі четвертого розділу одержано зображення інтегральних многовидів системи лінійних керованих сингулярно збурених рівнянь із запізненням
$$\frac{dx}{dt} = Lx(t) + My(t) + Ny(t-\varepsilon\Delta) + Au(t),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = By(t) + Cy(t-\varepsilon\Delta) + Dx(t), \tag{26}$$
де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $x \in \mathrm{R}^n$, $y \in \mathrm{R}^m$, $u \in \mathrm{R}^r$, всі корені характеристичного рівняння $\det(B + C\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$ лежать у півплощині $\mathrm{Re}\lambda < 0$. Керування $u(t)$ повинно бути вибране так, щоб забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (26) і мінімізувати функціонал
$$J(u) = \int_0^\infty (x'(t)Qx(t) + u'(t)Fu(t))dt,$$
де Q та F – додатно визначені симетричні матриці, $x(t)$ – розв'язок системи (26) на многовиді $y_t = p(\varepsilon)x(t)$. Тут y_t – елемент простору $\mathrm{C} = \mathrm{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$, заданий функцією $y_t(\theta) = y(t+\theta)$, $-\varepsilon\Delta \le \theta \le 0$.

Доведено існування інтегральних многовидів. Розв'язок задачі квазіоптимальної стабілізації шукається у вигляді асимптотичного розкладу за степенями малого параметра.

У п'ятому розділі метод інтегральних многовидів застосовується у теорії біфуркацій нелінійних систем із запізненням.

У цьому розділі розглядається система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (27)$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathrm{R}^m$, $y \in \mathrm{R}^n$.

Припустимо, що виконуються умови

1) Для всіх $t \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}^m$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені.

2) Функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}^m$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ в точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y + B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ виконується нерівність $|G_1(t, x, y, z)| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Теорема 5.4. *Нехай для системи (27) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (27) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(t, x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t, x, \varepsilon) = \varepsilon[B_1(t, x) + B_2(t, x)]^{-1}[(E + \Delta B_2(t, x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))) - P(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))] +$$

$$+ \theta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} f(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x))\right], \quad -\varepsilon\Delta \le \theta \le 0.$$

У підрозділі 5.1 одержано зображення інтегрального многовиду та досліджено біфуркацію стану рівноваги системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x(t) + M(t)y(t) + N(t)y(t-\varepsilon\Delta) + F(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)y(t) + C(t)y(t-\varepsilon\Delta) + D(t)x(t) + G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (28)$$

де ε – малий додатний параметр; $x \in \mathrm{R}^m$, $y \in \mathrm{R}^n$; $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$ і $D(t)$ – двічі неперервно диференційовні періодичні матриці періоду 2π, а функції F і G мають період 2π відносно t і чотири рази неперервно диференційовні за всіма аргументами. Крім того, в деякому околі початку координат вірна нерівність

$$|F(t,x,y,z)| + |G(t,x,y,z)| \le K(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$$

Припустимо, що виконується умова

1) всі корені характеристичного рівняння

$$\det(B(t) + C(t)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать в півплощині $\mathrm{Re}\lambda \le -2\lambda_0 < 0$.

Нехай виконується умова 1, а матриці $L(t)$, $M(t)$, $N(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$, їх перші та другі похідні рівномірно обмежені на всій осі. При цих умовах одержано наближене зображення інтегрального многовиду лінеаризованої системи для системи (28). Рівняння на многовиді для лінеаризованої системи з точністю до членів порядку ε має вигляд

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x + [M(t) + N(t)]h(t)x + \varepsilon P(t)x, \qquad (29)$$

де $h(t) = -[B(t) + C(t)]^{-1}D(t)$, матриця $P(t)$ виражається через матриці, що входять в лінеаризовану систему.

Нехай виконується умова

2) оператор монодромії для рівняння (29) має пару коренів

$$\exp[\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)], \quad \alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) > 0, \quad \beta(0) > 0,$$

а решта його коренів мають модулі, менші одиниці.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються умови 1, 2, нульовий розв'язок системи (28) при* $\varepsilon = 0$ *асимптотично стійкий і відсутній сильний резонанс, тобто для всіх цілих* m_1, m_2, $0 < m_2 < 5$, *виконується нерівність* $m_2\beta(0) + m_1 \ne 0$. *Тоді існує* $\varepsilon_1 > 0$ *таке, що при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ *існує інваріантний тор системи (28).*

Одержано умови субфуркації періодичних розв'язків.

У підрозділі 5.2 розглядається система вигляду (27), у якій f та G не залежать від t, а функці $h(t,x,y,z)$ та $P(t,x,y,z)$ періодичні відносно t з періодом 2π.

Припускається, що $f(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$ і виконуються умови теореми 5.4.

Одержано наближене зображення інтегрального многовиду сингулярно збуреної системи. Це дає можливість використати результати Мельникова для рівняння на многовиді і дослідити умови існування гомоклінічних точок. Звідси випливає існування такої канторової множина, що на цій множині деяка ітерація відображення Пуанкаре для сингулярно збуреної системи є інваріантною і топологічно спряженою зсуву Бернуллі над скінченною множиною символів.

У підрозділі 5.3 одержано наближене зображення інтегрального многовиду автономної сингулярно збуреної системи

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dz}{dt} = f(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon h(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)) + \varepsilon P(x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

де ε – малий додатний параметр, Δ – фіксоване додатне число, $x \in \mathrm{R}$, $z \in \mathrm{R}$, $y \in \mathrm{R}^n$.

Це зображення використано до дослідження періодичних розв'язків.

У підрозділі 5.4 досліджено різницеві рівняння з раціональними правими частинами. Для деяких класів таких рівнянь знайдено цикли, побудована інваріантна міра. Показано, що інваріантній множині деякого відображення відповідає множина цілих p-адичних чисел.

У шостому розділі досліджено біфуркацію стану рівноваги диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У підрозділі 6.1 розглядається нелінійна параболічна система з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A(t,\varepsilon)u + B(t,\varepsilon)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta,\varepsilon) \tag{30}$$

і з періодичною умовою

$$u(t, x+2\pi) = u(t,x).$$

Тут ε – p-вимірний параметр з малими додатними компонентами, $u_\Delta = u(t, x-\Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t,\varepsilon)$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ і функція $f : \mathrm{R}^{2n+p+2} \to \mathrm{R}^n$ п'ять разів неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π-періодичні відносно t, x, $f(t,x,u,v,\varepsilon) = O(|u|^2 + |v|^2)$ при $|u| + |v| \to 0$.

Розв'язок системи (30) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(-ikx), \quad y_{-k}(t) = \bar{y}_k(t). \tag{31}$$

Підставляючи (31) в (30) і прирівнюючи коефіцієнти при $\exp(-ikx)$, одержимо зліченну систему диференціальних рівнянь відносно коефіцієнтів ряду Фур'є. Позначимо через $y = y(t) = (y_0, y_1, y_{-1}, \ldots)^T$ вектор коефіцієнтів ряду Фур'є (31) і введемо норму $|y| = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k|^2)^{1/2}$.

При деяких умовах відносно правої частини системи (30) доведено існування інтегральних многовидів, встановлено їх властивості та досліджена біфуркація тора із стану рівноваги.

У підрозділі 6.2 аналогічні питання досліджені для сингулярно збуреної системи нелінійних параболічних рівнянь з перетвореним аргументом

$$L(\varepsilon)\partial_t u = D(t)\partial_x^2 u + A(t)u + B(t)u_\Delta + f(t,x,u,u_\Delta)$$

і з періодичною умовою $u(t,x+2\pi) = u(t,x)$. Тут $L(\varepsilon) = \mathrm{d}iag[E_m, \varepsilon E_p], m+p=n$, ε – малий додатний параметр, $u_\Delta = u(t,x-\Delta)$, Δ – зсув аргументу, матриці $D(t), A(t), B(t)$ і функція $f: \mathrm{R}^{2n+2} \to \mathrm{R}^n$ п'ять раз неперервно диференційовні за всіма аргументами і 2π - періодичні відносно t, x, $f(t,x,u,v) = O(|u|^2 + |v|^2)$ при $|u|+|v| \to 0$.

У підрозділі 6.3.1 доведено існування зліченного числа циклів гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою.

Позначимо через u_x – елемент простору C, заданий функцією $u_x(t,\theta) = u(t,x+\theta)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Розглянемо гіперболічну систему з перетвореним аргументом

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + B(\varepsilon)u + F(u_x,\varepsilon) \tag{32}$$

та періодичною умовою

$$u(t,x+2\pi) = u(t,x),$$

де ε – малий додатний параметр, $a \in \mathrm{R}$ $a \ne 0$, $u \in \mathrm{R}^n$, $n \ge 2$; $F: \mathrm{C} \times [0,\varepsilon_0] \to \mathrm{R}^n$.

Нехай виконуються умови:

1) $F(\varphi,\varepsilon) = O(\|\varphi\|^2)$ при $\|\varphi\| \to 0$, оператор F п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів;

2) матриця $B(\varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε, має пару власних значень вигляду $\alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon), \alpha(0) = 0, \alpha'(0) > 0, \beta(0) > 0$, а інші власні значення λ задовольняють умову $Re\,\lambda < -2\gamma_0 < 0$.

Теорема 6.11. *Нехай виконуються умови 1, 2 і виконується нерівність $\gamma(0) < 0$ (тут $\gamma(0)$ – перша Ляпуновська величина для рівняння на многовиді). Тоді існує зліченне число циклів системи (32) з параметрами $\sigma = \sigma_k$. Значенням параметрів σ_k, $k > 0$, відповідають стійкі граничні цикли, для яких $\sigma_k > a$.*

У підрозділі 6.3.2 вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега – де Фріза з перетвореним аргументом.

Тут досліджено існування періодичних розв'язків крайової задачі

$$\frac{\partial w}{\partial t} + a^2\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \varepsilon f(w, w(t,x-\Delta)), \tag{33}$$

$$w(t,x+2\pi) = w(t,x), \tag{34}$$

де ε –- малий додатний параметр, $a \ne 0$, $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{R}^2)$.

При деяких умовах доведено існування зліченного числа циклів задачі (33), (34) та досліджено їх експоненціальну орбітальну стійкість.

У цьому розділі досліджено біфуркацію як завгодно великої кількості циклів параболічних систем із малою дифузією на колі. Розв'язки таких систем шукаються у вигляді ряду Фур'є (31), причому використовується введена у підрозділі 6.1 норма.

У підрозділах 7.2.1 та 7.2.2 розглядається рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=i\omega_0 u+\varepsilon\left[(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(\alpha+i\beta)u\right]+(d_0+ic_0)u^2\bar{u} \qquad (35)$$

з періодичною умовою

$$u(t,x+2\pi)=u(t,x), \qquad (36)$$

де ε – малий додатний параметр.

Теорема 7.2. *Нехай* $\omega_0>0$, $\alpha>0$, $\gamma>0$, $d_0<0$ *і для деякого цілого* n *виконується нерівність* $\alpha>\gamma n^2$. *Тоді знайдеться таке* $\varepsilon_0>0$, *що при* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *задача (35), (36) має періодичні відносно* t *розв'язки*

$$u_n=u_n(t,x)=\sqrt{\varepsilon}r_n\exp\left(i(\chi_n(\varepsilon)t+nx)\right)+O(\varepsilon),$$

де $r_n=\sqrt{(\alpha-n^2\gamma)|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon)=\omega_0+\varepsilon\beta+\varepsilon c_0 r_n^2-\varepsilon\delta n^2$, $n\in\mathrm{Z}$.

Теорема 7.3. *Біжучі хвилі* $u_n(t,x)$ *задачі (35), (36) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$(d_0r_n^2-\gamma k^2)^2(\gamma^2k^2+\delta^2k^2-2\gamma d_0r_n^2-4\gamma^2n^2-2\delta c_0r_n^2)>4\gamma^2n^2(c_0r_n^2-\delta k^2)^2$$

при всіх $k\in\mathrm{Z}\setminus\{0\}$.

У підрозділах 7.1 та 7.2.3 доведено існування біжучих хвиль рівняння спінового горіння

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+\xi=2\varepsilon\left[\frac{\partial\xi}{\partial t}\left(1-\frac{4}{3}\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^3\xi}{\partial t\partial x^2}\right] \qquad (37)$$

з періодичною умовою

$$\xi(t,x+2\pi)=\xi(t,x), \qquad (38)$$

де ε – малий додатний параметр, $\rho>0$.

Теорема 7.4. *Нехай для деякого цілого* n *виконується нерівність* $n^2<\rho^2$. *Тоді знайдеться таке* $\varepsilon_0>0$, *що при* $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ *задача (37), (38) має періодичні відносно* t *розв'язки*

$$\xi_n=\sqrt{1-\frac{n^2}{\rho^2}}\cos(-t+nx)+O(\varepsilon),$$

де $n\in\mathrm{Z}$.

У підрозділі 7.2.4 досліджено стійкість періодичних режимів рівняння спінового горіння.

Теорема 7.5. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (37), (38) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$n^2 < \frac{1}{6}(\rho^2 + 1).$$

У підрозділі 7.2.5 досліджено періодичні режими рівняння Хатчінсона з дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) u(t-1,x)(1+u)$$

та періодичною умовою (36). Тут ε – малий додатний параметр, $D > 0$.

У підрозділах 7.3.1 та 7.3.2 доведено існування та досліджено стійкість періодичних розв'язків автономної параболічної системи двох диференціальних рівнянь із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією на колі.

У підрозділах 7.3.3 та 7.3.4 вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \xi = 2\varepsilon \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t \partial x^2} + F\left(\xi, \frac{\partial \xi}{\partial t}, \xi(t-\Delta,x), \frac{\partial \xi}{\partial t}(t-\Delta,x) \right) \right], \qquad (39)$$

$$\xi(t, x+2\pi) = \xi(t,x), \qquad (40)$$

де ε – малий додатний параметр, $\Delta > 0$, $\rho > 0$, F – однорідний многочлен третього степеня, тобто $F(a\xi, ap, a\eta, a\zeta) = a^3 F(\xi, p, \eta, \zeta)$, $a \in \mathrm{R}$.

Теорема 7.9. *Нехай $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $n^2 < \rho^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (39), (40) має періодичні відносно t розв'язки*

$$\xi_n = \sqrt{\left(1 - \frac{n^2}{\rho^2}\right) |d_0|^{-1}} \cos(t + nx) + O(\varepsilon),$$

де $n \in \mathrm{Z}$.

Теорема 7.10. *Біжучі хвилі $\xi_n(t,x)$ задачі (39), (40) експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$\left(\frac{k^2}{\rho^2} + 1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right)^2 \left(\frac{k^2}{\rho^2} + 2 - \frac{6n^2}{\rho^2} \right) > \frac{4c_0^2 n^2}{\rho^2 d_0^2} \left(1 - \frac{n^2}{\rho^2} \right)^2.$$

при всіх $k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$.

У підрозділі 7.4 досліджено біфуркацію циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon) u_t + f(u_t, \varepsilon) \qquad (41)$$

і періодичною умовою (36). Тут ε – малий додатний параметр, $u \in \mathrm{R}^n$, $L(\varepsilon): \mathrm{C} \to \mathrm{R}^n$ – лінійний неперервний оператор, $f: \mathrm{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathrm{R}^n$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(\|\varphi\|^2)$ при $\|\varphi\| \to 0$, оператор f п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів, u_t – елемент простору C, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t+\theta, x)$, $-\Delta \le \theta \le 0$. Припускається, що нульовий розв'язок системи (41) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий.

На систему (41) накладено умови, що забезпечують існування стійкого цикла при $D = 0$ і малих $\varepsilon > 0$. Тоді відповідна система рівнянь на многовиді буде автономною параболічною системою двох диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією. При певних умовах на матрицю D будуть існувати періодичні розв'язки системи на многовиді. Звідси випливає існування циклів системи (41). Одержано умови стійкості таких циклів. Для наближеної побудови многовиду системи (41) при $\varepsilon = 0$ використано метод із підрозділу 3.5.

У восьмому розділі досліджено асимптотичну поведінку розв'язків крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У підрозділі 8.1 крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь зводяться до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь.

Розглянемо систему

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = k_i(d, grad\, u_i), \tag{42}$$

де $d = (d_1, ..., d_p)^T$, $grad\, u_i = (\partial u_i/\partial x_1, ..., \partial u_i/\partial x_p)^T$, $x = (x_1, ..., x_p)^T$, $i \in \{1, ..., q\}$. Функці u_1, ..., u_q задовольняють граничні умови

$$u_1|_{(c,x)=0} = u_2|_{(c,x)=0} = ... = u_q|_{(c,x)=0} \tag{43}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}|_{(c,x)=1} = f(u_1|_{(c,x)=1}, ..., u_q|_{(c,x)=1}), \tag{44}$$

де $c = (c_1, ..., c_p)^T$. Припустимо, що $k_q > k_{q-1} > ... > k_1 > 0$, $(c, d) > 0$, де (c, d) – скалярний добуток векторів c, d.

Загальний розв'язок системи (42) записується у вигляді біжучих хвиль $u_i(x,t) = \varphi_i(x + k_i t d)$, $i \in \{1, ..., q\}$. Тоді умова (44) набуде вигляду

$$\frac{dz}{dt} = f(z(t), z(t-\Delta_2), ..., z(t-\Delta_q)), \tag{45}$$

де $z(t) = \varphi_1(\bar{x} + k_1 t d)|_{(c,\bar{x})=1}$, $\Delta_i = (k_i - k_1)/[k_1 k_i (c,d)]$, $i \in \{2, ..., q\}$.

Якщо крім умов (43), (44) для функції u_1 задати початкову умову

$$u_1|_{t=0} = \psi(x), \quad k_1/k_q \le (c,x) \le 1, \tag{46}$$

то одержимо початкову функцію для рівняння (45)

$$z(t) = \psi(x + k_1 t d)|_{(c,x)=1}, \quad -\Delta_q \le t \le 0. \tag{47}$$

Теорема 8.1. *Нехай* $(c,d) > 0$, $0 < k_1 < k_2 < ... < k_q$. *Тоді задача (42), (43), (44), (46) зводиться до задачі (45), (47).*

Зауваження. *Якщо умову (44) замінити умовою*

$u_1|_{(c,x)=1} = h(u_2|_{(c,x)=1},\ldots,u_q|_{(c,x)=1})$, *то замість рівняння (45) одержимо різницеве рівняння з неперервним часом* $z(t) = h(z(t-\Delta_2),\ldots,z(t-\Delta_q))$.

Побудовано область стійкості рівняння (45), якщо $f(z(t),z(t-\Delta_2),\ldots,z(t-\Delta_q)) = az(t-m)+bz(t-n),$ де m та n – взаємно прості натуральні числа, $m < n$.

Якщо крайова задача зводиться до різницевого рівняння першого порядку, то потрібно досліджувати відображення відрізка в себе.

У підрозділі 8.2, використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів.

У підрозділі 8.3 досліджено узагальнені поліноми Чебишова, побудовані за допомогою групи Вейля системи коренів і за схемами Динкіна типу A_n, B_n, C_n, D_n. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена розвитку методу інтегральних многовидів для дослідження регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

Автором вперше одержано такі результати:

1. Для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу, імпульсних диференціально-функціональних рівнянь та різницевих рівнянь доведено існування інтегральних многовидів та досліджено їх властивості.

2. Для вказаних рівнянь доведено принцип зведення для дослідження стійкості розв'язків у критичному випадку, згідно з яким стійкість нульового розв'язку рівняння рівносильна стійкості нульового розв'язку рівняння на многовиді.

3. Доведена динамічна еквівалентність системи диференціально-функціональних рівнянь та деякої більш простої системи рівнянь. Побудована заміна, яка розщеплює систему лінійних диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу на два незалежних рівняння; така ж заміна побудована для лінійних сингулярно збурених систем нейтрального типу та лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням. Розв'язана задача квазіоптимальної стабілізації лінійної керованої сингулярно збуреної системи із запізненням.

4. Для сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь одержано зображення інтегрального многовиду, досліджена біфуркація

інваріантного тора із стану рівноваги та субфуркація періодичних розв'язків. Показано, що при певних припущеннях на праву частину сингулярно збуреної системи диференціально-різницевих рівнянь з періодичними коефіцієнтами відображення Пуанкаре має трансверсальну гомоклінічну точку. Метод усереднення застосовано до дослідження періодичних розв'язків консервативної системи з малим запізненням. Досліджено інваріантні множини одновимірних відображень.

5. Доведено існування інтегральних многовидів для нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджено біфуркацію тора із стану рівноваги. Аналогічні результати одержано для сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом.

6. Доведено існування зліченного числа періодичних розв'язків гіперболічної системи диференціальних рівнянь першого порядку з періодичною умовою, вивчено питання існування і стійкості біжучих хвиль квазілінійного рівняння Кортевега - де Фріза з перетвореним аргументом.

7. Досліджено біфуркацію циклів автономних параболічних систем з малою дифузією, одержано умови існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням. Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією, досліджено стійкість біжучих хвиль для такої системи.

8. Крайові задачі для гіперболічних систем диференціальних рівнянь першого порядку зведено до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь. Використовуючи групу Вейля, дано означення узагальнених поліномів Чебишова багатьох змінних. Для побудови цих поліномів одержана рекурентна формула. Доведено, що поліноміальні відображення еквівалентні кусково-лінійним і мають зліченне число циклів. Показано, що узагальнені поліноми Чебишова задовольняють диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку.

ПУБЛІКАЦІЇ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Клевчук І.І.* Дослідження різницевих рівнянь з раціональними правими частинами / І.І. Клевчук // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 1992. – С. 27 – 40.

2. *Клевчук І.І.* Узагальнені поліноми Чебишова та їх застосування / І.І. Клевчук // Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. пр. – К.: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 131 – 139.

3. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням / І.І. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1022 – 1028. – *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium state of a singularly perturbed system with lag / I.I. Klevchuk // Ukr. Math. J. – 1995. – **47**, № 8. – P. 1169 – 1177.

4. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа / И.И. Клевчук // Дифференц. уравнения. – 1999. – **35**, № 4. – С. 464 – 472. – *Klevchuk I.I.* On the reduction principle for functional- differential equations of the neutral type / I.I. Klevchuk // Differ Equations. – 1999. – **35**, № 4. – P. 464 – 473.

5. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної параболічної системи з перетвореним аргументом / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 46. Математика. – Чернівці: Рута, 1999. – С. 61 – 66.

6. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in a system of nonlinear parabolic equations with transformed argument / I.I. Klevchuk // Nonlinear Boundary Value Problems. Vol. 9. – Donetsk, 1999. – P. 168 – 173.

7. *Клевчук И.И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом / И.И. Клевчук // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1342 – 1351. – *Klevchuk I.I.* Bifurcation of the state of equilibrium in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument / I.I. Klevchuk // Ukr. Math. J. – 1999. – **51**, № 10. – P. 1512 – 1524.

8. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально- функциональных уравнений нейтрального типа / И.И. Клевчук // Нелінійні коливання. – 1999. – **2**, № 4. – С. 490 – 500.

9. *Клевчук І.І.* Диференціальні рівняння для одного класу ортогональних многочленів багатьох змінних / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика. – Чернівці: Рута, 2000. – С. 44 – 49.

10. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та динамічна еквівалентність диференціально-функціональних рівнянь / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 55 – 59.

11. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in singularly perturbed parabolic system with transformed argument / I.I. Klevchuk // Нелинейные граничные задачи. Вып. 11. – Донецк, 2001. – С. 80 – 85.

12. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа періодичних розв'язків у системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І.І. Клевчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. Вип. 5. – Київ, 2001. – С. 67 – 72.

13. *Клевчук І.І.* Диференціальні рівняння для узагальнених поліномів Чебишова, побудованих за схемами Динкіна типу A_n, B_n, C_n, D_n / І.І. Клевчук // Доп. НАН України. – 2002. – № 1. – С. 32 – 36.

14. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та принцип зведення для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 52 – 56.

15. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням / І.І. Клевчук // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567. – *Klevchuk I.I.* Homoclinic points for a singularly perturbed system of differential equations with delay / I.I. Klevchuk // Ukr.Math. J. – 2002. – **54**, № 4. – P. 693 – 699.

16. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 150. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – С. 36 – 41.

17. *Клевчук І.І.* Зведення крайових задач до різницевих та диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 160. Математика. – Чернівці: Рута, 2003. – С. 80 – 83.

18. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 269. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 56 – 59.

19. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження періодичних розв'язків та стійкості диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314-315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 85 – 90.

20. *Клевчук І.І.* Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку / І.І. Клевчук // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 349. Математика. – Чернівці: Рута, 2007. – С. 37 – 41.

21. *Клевчук І.І.* Застосування методу усереднення до дослідження стійкості диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2011. – **14**, № 3. – С. 318 – 324. – *Klevchuk I.I.* Application of the averaging method to the investigation of stability of difference-differential equations / I.I. Klevchuk // Nonlinear oscillations. – 2012. – **14**, № 3. – P. 334 – 341.

22. *Клевчук І.І.* Побудова областей стійкості лінійних диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук, С.А. Пернай, І.М. Черевко // Доп. НАН України. – 2012. – № 7. – С. 28 – 34.

23. *Перестюк М.О.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і

сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / М.О. Перестюк, І.І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 1. – С. 94 – 104. – *Perestyuk M.O.* Application of asymptotic methods to regularly and singularly perturbed differential-difference equations / M.O. Perestyuk, I.I. Klevchuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2014. – **197**, № 1. – P. 96 – 107.

24. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди та розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням / І.І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2014. – **2**, № 4. – С. 70 – 73.

25. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І.І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 71 – 78. – *Klevchuk I.I.* Existence of countably many cycles in hyperbolic systems of differential equations with transformed argument / I.I. Klevchuk // Journal of Mathematical Sciences – 2016. – **215**, № 3. – P. 341 – 349.

26. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією / І.І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, № 2. – С. 48 – 52.

27. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із малою дифузією / І.І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2015. – **3**, № 3-4. – С. 96 – 101.

28. *Клевчук І.І.* Біфуркація автоколивань параболічних систем із аргументом, що запізнюється, та малою дифузією / І.І. Клевчук // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 3. – С. 390 – 398.

29. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди і принцип зведення для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу / І.І. Клевчук // Буковинський математичний журнал. – 2016. – **4**, № 1-2. – С. 70 – 76.

30. *Фодчук В.І.* Регулярно і сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння / В.І. Фодчук, Я.Й.Бігун, І.І.Клевчук, І.М. Черевко, І.В. Якімов – К.: Ін-т математики НАН України, 1996. – 210 с.

31. *Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних імпульсних сингулярно збурених систем із запізненням / І.І. Клевчук // Вісник національного ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика. № 411. – Львів, 2000. – С. 160 – 165.

32. *Фодчук В.И.* Метод интегральных многообразий и бифуркация положения равновесия для сингулярно возмущенных систем с запаздыванием / В.И. Фодчук, И.И. Клевчук, И.М. Черевко // Респ. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения и их приложения" , тез. докл. – Одесса, 1987. – С. 120-121.

33. *Клевчук И.И.* Определение области устойчивости для линейных уравнений со многими запаздываниями / И.И. Клевчук // Регион. конф. "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения" , тез. докл. – Махачкала, 1988. – С. 109.

34. *Фодчук В.И.* Метод интегральных многообразий для дифференциально-функциональных уравнений и его приложения / В.И. Фодчук, И.И. Клевчук //

Всесоюз. конф. "Нелинейные проблемы диф. уравнений и мат. физики" , тез. докл. – Тернополь, 1989. – С. 438 – 440.

35. *Клевчук И.И.* Некоторые применения интегральных многообразий систем с последействием / И.И. Клевчук // Респ. конф. "Моделирование и исследование устойчивости процессов" , тез. докл. – Киев, 1992. – С. 68 – 69.

36. *Клевчук И.И.* Исследование разностных уравнений с полиномиальными правыми частями / И.И. Клевчук // Конф. "Нелинейные проблемы диф. уравнений и мат. физики-Вторые Боголюбовские чтения" , тез. докл. – Киев, 1992. – С. 69.

37. *Клевчук І.І.* Біфуркація розв'язків сингулярно збурених систем із запізненням / І.І. Клевчук // Всеукр. конф. "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь" , тези доп. – Дрогобич, 1994. – С. 64.

38. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of autooscillations in the system of nonlinear parabolic equations with transformed argument / I.I. Klevchuk // Міжнар. конф. "Асимптотичні та якісні методи в теорії нелінійних коливань". – Київ, 1997. – С. 85 – 86.

39. *Клевчук И.И.* Расщепление линейных дифференциально-функциональных уравнений / И.И. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 1999. – С. 23.

40. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in singularly perturbed parabolic system with transformed argument / I.I. Klevchuk // Intern. conf. "Nonlinear partial differential equations". – Lviv, 1999. – P. 104.

41. *Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для импульсных дифференциально-функциональных уравнений / И.И. Клевчук // Тези доп. VIII міжнар. наук. конф. імені академіка М. Кравчука. – Київ: НТУ (КПІ), 2000. – С. 98.

42. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для импульсных дифференциально-функциональных уравнений / И.И. Клевчук // Тези доп. міжнар. наук. конф. "Диференціальні та інтегральні рівняння". – Одеса, 2000. – С. 135.

43. *Клевчук И.И.* Гомоклинические точки для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием / И.И. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2001. – С. 60.

44. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of an equilibrium point in nonlinear partial differential equations / I.I. Klevchuk // Intern.conf. "Nonlinear partial differential equations". – Kiev, 2001. – P. 63.

45. *Клевчук І.І.* Інтегральні многовиди для диференціально- функціональних рівнянь з інтегральною умовою Ліпшиця / І.І. Клевчук // Міжнар. конф. "Диференціальні рівняння і нелінійні коливання". – Київ, 2001. – С. 68 – 69.

46. *Клевчук І.І.* Стійкість системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням / І.І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2003. – С. 63.

47. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Міжнар.

конф. "Шості Боголюбовські читання". – Київ, 2003. – С. 97.

48. *Клевчук І.І.* Дослідження одновимірних відображень з абсолютно неперервною інваріантною мірою / І.І. Клевчук // Міжнар. конф., присвячена 125 річниці від дня народження Ганса Гана, тези доп. – Чернівці, 2004. – С. 41.

49. *Клевчук И.И.* Применение критерия Мельникова для исследования сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений с запаздыванием / И.И. Клевчук // VII Крымская междунар. мат. школа "Метод функций Ляпунова и его приложения". – Симферополь, 2004. – С. 72.

50. *Клевчук І.І.* Квазіоптимальна стабілізація лінійних неавтономних сингулярно збурених систем із запізненням / І.І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2005. – С. 59.

51. *Клевчук І.І.* Застосування методу інтегральних многовидів до дослідження диференціально-функціональних рівнянь / І.І. Клевчук // Intern. conf. "Modern problems and new trends in probability theory". – Chernivtsi, 2005: Abstracts. – С. 111.

52. Klevchuk I.I. Bifurcation of countable number of periodic solutions in singularly perturbed differential- difference equations / I.I. Klevchuk // Intern. Conf. on Differential Equations. – Lviv, 2006: Book of Abstracts. – P. 106 – 107.

53. *Клевчук І.І.* Біфуркація періодичних розв'язків у сингулярно збуреній системі диференціальних рівнянь із запізненням / І.І. Клевчук // Міжнар. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2006. – С. 62.

54. *Клевчук І.І.* Дослідження періодичних розв'язків диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2007. – С. 51.

55. Klevchuk I.I. Stability of functional differential equations in critical cases / I.I. Klevchuk // Lyapunov memorial conference. – Kharkiv, 2007. – P. 70 – 71.

56. Клевчук І.І. Дослідження стійкості розв'язків різницевих рівнянь у критичному випадку / І.І. Клевчук // Міжнар. мат. конф. імені В.Я. Скоробогатька. - Дрогобич, 2007. – С. 130.

57. *Клевчук И.И.* Устойчивость решений разностных уравнений в критическом случае / И.И. Клевчук // Девятая Крымская междунар. мат. школа "МФЛ – 2008". – Симферополь, 2008. – С. 74.

58. *Клевчук І.І.* Побудова області стійкості для лінійних диференціальних рівнянь з багатьма запізненнями / І.І. Клевчук // Міжнар. наук. конф. "Проблеми стійкості та оптимізації динамічних систем детермінованої та стохастичної структури". – Чернівці, 2010. – С. 77 – 79.

59. *Klevchuk I.I.* Stability of differential difference equations in critical cases / I.I. Klevchuk // Intern. conf. dedicated to the 120th anniversary of Stefan Banach. – Lviv, 2012. – P. 208.

60. *Klevchuk I.I.* Application of asymptotic methods to regularly and singularly perturbed differential difference equations / I.I. Klevchuk // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". – Kyiv, 2013. – С. 34.

61. *Клевчук І.І.* Застосування асимптотичних методів до регулярно і сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь / І.І. Клевчук // Міжнар. конф. "Боголюбовські читання DIF-2013. Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування". – Севастополь, 2013. – С. 114.

62. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом / І.І. Клевчук // IV міжнародна ганська конференція. – Чернівці, 2014. – С. 75 – 76.

63. *Клевчук І.І.* Біфуркація автоколивань параболічних систем із запізнюючим аргументом та малою дифузією / І.І. Клевчук // Intern. conf. "Dynamical system modelling and stability investigation". Abstracts of conference reports. – Kyiv, 2015. – P. 36.

64. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів одного класу параболічних систем / І.І. Клевчук // Міжнар. наук. конф. "Диференціальні рівняння та їх застосування". – Ужгород, 2016. – С. 77.

65. *Klevchuk I.I.* Bifurcation of cycles of parabolic systems with small diffusion / I.I. Klevchuk // Intern. conf. on differential equations ICL 110 – Lviv, 2016. – P. 78.

66. *Клевчук І.І.* Біфуркація циклів параболічних систем із запізненням та малою дифузією / І.І. Клевчук // Міжнар. наук. конф. "Диференціально-функціональні рівняння та їх застосування". – Чернівці, 2016. – С. 55.

АНОТАЦІЯ

Клевчук І.І. Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних рівнянь.–- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.02 –- диференціальні рівняння. Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена розвитку методу інтегральних многовидів для дослідження регулярно та сингулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь.

У дисертаційній роботі доведено нові теореми існування інтегральних многовидів. Встановлено принцип зведення для дослідження стійкості нульового розв'язку диференціально-функціонального рівняння у критичному випадку. Задача зводиться до дослідження стійкості нульового розв'язку відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь, побудованої за допомогою інтегральних многовидів.

Доведена динамічна еквівалентність системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь і деякої простішої системи рівнянь, побудованої за допомогою інтегральних многовидів. Побудована заміна змінних, яка здійснює розщеплення системи лінійних диференціально-функціональних рівнянь на дві

незалежні підсистеми.

Одержано зображення інтегрального многовиду системи сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги періодичної системи. Показано, що при відповідних умовах на праву частину відображення Пуанкаре для сингулярно збуреної системи має трансверсальну гомоклінічну точку.

Доведено існування інтегральних многовидів нелінійної параболічної системи з перетвореним аргументом та досліджена біфуркація інваріантного тора із стану рівноваги. Вивчаються питання існування і стійкості зліченного числа циклів гіперболічних систем диференціальних рівнянь з періодичною умовою.

Доведено існування як завгодно великої кількості циклів автономних параболічних систем диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль рівняння спінового горіння із запізненням. Досліджено асимптотичну поведінку розв'язків нелінійних крайових задач для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Ключові слова: диференціально-функціональне рівняння, інтегральний многовид, стійкість, принцип зведення, декомпозиція, сингулярне збурення, біфуркація, крайова задача, запізнення.

АННОТАЦИЯ

Клевчук И.И. Исследование асимптотического поведения решений дифференциально-функциональных уравнений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико- математических наук по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Министерство образования и науки Украины, Киев, 2017.

Диссертация посвящена развитию метода интегральных многообразий для исследования регулярно и сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений.

В диссертационной работе для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа, импульсных дифференциально-функциональных уравнений и разностных уравнений доказано существование интегральных многообразий и исследованы их свойства. Доказан принцип сведения для исследования устойчивости нулевого решения дифференциально-функционального уравнения в критическом случае. Задача сводится к исследованию устойчивости нулевого решения соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной при помощи интегральных многообразий.

Доказана динамическая эквивалентность системы нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и некоторой более простой

системы уравнений, построенной при помощи интегральных многообразий. Построена замена переменных, которая осуществляет расщепление системы линейных дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа на две независимые подсистемы; такая же замена построена для линейной сингулярно возмущенной системы нейтрального типа и линейной импульсной сингулярно возмущенной системы с запаздыванием. Решена задача квазиоптимальной стабилизации линейной управляемой сингулярно возмущенной системы с запаздыванием.

Получено представление интегрального многообразия системы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений. Исследована бифуркация инвариантного тора из положения равновесия и субфуркация периодических решений. Показано, что при выполнении соответствующих условий на правую часть отображение Пуанкаре для сингулярно возмущенной системы имеет трансверсальную гомоклиническую точку. Метод усреднения применяется для исследования периодических решений консервативной системы с малым запаздыванием. Исследованы инвариантные множества одномерных отображений.

Доказано существование интегральных многообразий нелинейной параболической системы с преобразованным аргументом. Исследована бифуркация инвариантного тора из положения равновесия. Аналогичные результаты получены для сингулярно возмущенной параболической системы с преобразованным аргументом. Доказано существование счетного числа периодических решений гиперболической системы дифференциальных уравнений первого порядка с периодическим условием. Изучены вопросы существования и устойчивости бегущих волн квазилинейного уравнения Кортевега – де Фриза с преобразованным аргументом.

Исследована бифуркация циклов автономных параболических систем дифференциальных уравнений с малой диффузией на окружности. Изучены вопросы существования и устойчивости бегущих волн уравнения спинового горения с запаздыванием. Доказано существование периодических решений автономных параболических систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и малой диффузией, исследована устойчивость бегущих волн для таких систем.

Нелинейные краевые задачи для гиперболических систем дифференциальных уравнений сводятся к разностным и дифференциально-разностным уравнениям. Используя группу Вейля, дано определение обобщенных полиномов Чебышева. Для построения этих полиномов получена рекуррентная формула. Доказано, что полиномиальные отображения эквивалентны кусочно-линейным и имеют счетное число циклов. Показано, что обобщенные полиномы Чебышева удовлетворяют дифференциальным уравнениям с частными производными второго порядка.

Ключевые слова: дифференциально-функциональное уравнение, интегральное многообразие, устойчивость, принцип сведения, декомпозиция,

сингулярное возмущение, бифуркация, краевая задача, запаздывание.

ABSTRACT

Klevchuk I.I. Investigation of the asymptotic behavior of solutions of functional differential equations. – Manuscript.

The thesis for obtaining the scientific degree of doctor of physical and mathematical sciences on the speciality 01.01.02 – differential equations. Kyiv National Taras Shevchenko University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The dissertation is devoted to the investigation of regularly and singularly perturbed functional differential equations with the help of integral manifolds method.

New theorems on the existence of integral manifolds are proved. The reduction principle for investigating the stability of the zero solution of a nonlinear functional differential equations in the critical case is proved. The problem is reduced to investigating the zero solution of an ordinary differential equation constructed by the method of integral manifolds.

A substitution is constructed which decomposed a nonlinear system of functional differential equations to the triangle-block form. It is shown that the system of linear functional differential equations can be splitted into two independent equations by a linear substitution.

A representation of the integral manifold for a singularly perturbed system of differential-difference equations is obtained. Bifurcation of singular points of a periodic system is considered. It is shown that, under certain conditions on the right-hand side, the Poincare map for a singularly perturbed system possesses a transversal homoclinic point.

A nonlinear parabolic system with a transformed argument is considered. The existence of integral manifolds is proved. The bifurcation of an invariant torus from equilibrium is investigated. The problems of the existence and stability of countably many cycles are investigated for hyperbolic systems of differential equations with a transformed argument.

The existence of periodic solutions in an autonomous parabolic system of differential equations on the circle with retarded argument and small diffusion is proved. The problems of the existence and stability of traveling waves are investigated for the equation of spin combustion with delay. The asymptotic behavior of solutions of nonlinear boundary value problems for partial differential equations is established.

Key words: functional differential equations, integral manifold, stability, reduction principle, decomposition, singular perturbation, bifurcation, boundary value problem, time lag.

Підписано до друку 06.03.2017 р. Папір офсетний. Формат 60x84/16.
Ум. друк. арк. 2,27. Зам. № 18. Тираж 100 прим.

Виготівник: Яворський С. Н.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ЧЦ №18 від 17.03.2009 р.
58000, м. Чернівці, вул. І. Франка, 20, оф.18, тел. 099 73 22 544