

УДК 539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.19>

Володимир ОНИШКЕВИЧ, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0002-4657-5462

e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua

Національний лісотехнічний університет України, Львів, Україна

Галина БАРАБАШ, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0003-3258-8518

e-mail: galynabarabash71@gmail.com

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

КВАЗИСТАТИЧНА КОНТАКТНА ВЗАЄМОДІЯ СКІНЧЕННОГО ЖОРСТКОГО ЦИЛІНДРА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ, ТА ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ЗА ФРИКЦІЙНОГО ТЕПЛОУТВОРЕННЯ

Існує багато математичних моделей, що покликані описати процес контактування тіл, проте розв'язати більшість теоретичних і практичних трибологічних проблем неможливо без розгляду геометричних характеристик контактної взаємодії. Однак у контактних задачах теплопружності фактори скінченності розмірів штампів та криволінійності його основи зазвичай не враховують.

На прикладі осесиметричної задачі про втискування в пружний півпростір скінченного жорсткого кругового циліндра, що обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю, у пропонованій роботі розглянуто методику, яка дає можливість змодельовувати і дослідити широкий спектр явищ, що можуть виникати за взаємодії тіл: відокремлення контактних поверхонь, затинання, одночасне існування зон зчеплення і ковзання. На ділянці контакту внаслідок дії сил тертя утворюється тепло, і неідеальний тепловий контакт між циліндром і півпростором математично моделюється за допомогою "третього тіла" – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактних тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари. Для кожного з контактних тіл розв'язано нестационарне рівняння теплопровідності з початковою умовою на температуру, у решті вихідних співвідношень часова змінна фігурує як параметр. Використовуючи інтегральне перетворення Лапласа за часом, застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля за радіальною координатою для півпростору та метод прямих для циліндра, отримано розподіл температури та теплових полів у циліндрі й півпросторі, контактних напружень і переміщень півпростору. Обернення трансформант шуканих функцій здійснювали числово. Виявлено якісно відмінні етапи загальної картини квазістатичної взаємодії для поставленої задачі. З'ясовано, що перебіг відповідних процесів визначається конкретними навантаженнями і характеристиками пари тертя. Відзначено, що квазістатичні контактні задачі доцільно розглядати тоді, коли початкові дані та характер навантаження спричиняють перевищення максимальних значень досліджуваних величин відповідних характеристик у стаціонарному режимі.

Ключові слова: контакт, тертя, розігрів, теплопровідність, теплопружність.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74F05.

Вступ

Визначення температурних полів у контактних тілах під час їхнього відносного ковзання є однією з актуальних задач трибології. Різноманітність чинників впливу на тепловий режим пари тертя зумовлює складність опису та математичного моделювання такої практичної науково-технічної задачі. Уперше контактну взаємодію в теплопружності розглядали в роботі (George, & Sneddon, 1962), де було досліджено розподіл напружень і переміщень у пружному півпросторі під час втискування в нього жорсткого штампів з певною температурою. Однак у цій та більшості інших публікацій не брали до уваги випинання основи і, як наслідок, цілком можливе відставання деяких ділянок штампів від основи. За спрощених граничних умов задачу неповного контакту плоскої основи штампів з пружним півпростором було розглянуто в роботі (Barber, 1967), дослідження ґрунтувалося на тому, що тепло, яке утворюється внаслідок тертя, розподіляється між двома контактними поверхнями. Математично моделювати режими тертя, зношування та теплоутворення за допомогою розгляду так званого умовного "третього тіла" – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактних тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрію поверхонь тіл у контактній зоні, було запропоновано у роботі (Levyts'kyi, & Onyshkevych, 2002). Для опису контактної взаємодії було використано узагальнені умови теплового контакту, що враховують узагальнену характеристику – коефіцієнт теплопроникності контакту. Математичному моделюванню та розробленню аналітичних і числових методів дослідження контактної взаємодії тіл різної геометричної форми і фізичної структури з урахуванням шорсткості їхніх меж, проковзування і розшарування спряжених поверхонь присвячено монографію (Мартиняк, & Маланчук та ін., 2022). Однак універсальних аналітико-числових методів розв'язування контактних задач у квазістационарній постановці немає, наприклад, у роботі (Онишкевич, & Барабаш, 2023) запропоновано метод послідовно-дискретного розділення граничних умов з використанням рухомої лінії розділення граничних умов, що може бути використане для розв'язування нестационарної задачі шляхом зведення її до послідовності задач із незмінними ділянками прикладання видозмінених граничних умов.

Об'єктом дослідження є контактна взаємодія жорсткого кругового циліндра скінченної довжини, що обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю і втискується у пружний півпростір за наявності теплоутворення на ділянці контакту від дії сили тертя.

Мета та завдання дослідження – математична постановка осесиметричної квазістационарної задачі теплопружності для цієї трибологічної пари з урахуванням теплоутворення в зоні контакту; моделювання неідеального теплового

контакту за допомогою "третього тіла"; розроблення методики розв'язування поставленої задачі з урахуванням можливого відокремлення контактних поверхонь, затинання, одночасного існування зон зчеплення і ковзання.

1. Постановка задачі

Розглянуто циліндричний штамп із радіусом R і висотою H , що втискується вертикальною силою P у пружний півпростір й обертається навколо своєї осі з постійною кутовою швидкістю ω . Вважаємо, що в початковий момент часу температура циліндра і півпростору є нульовими. Між верхньою поверхнею штампа, бічними поверхнями штампа і ненавантаженою поверхнею півпростору з одного боку та зовнішнім середовищем з іншого здійснюється теплообмін за законом Ньютона з різними коефіцієнтами теплообміну. Тепловий контакт між штампом і півпростором є неідеальним, його моделюємо за допомогою так званого "третього тіла" (Levyts'kyi, & Onyshkevych, 2002) – тонких приповерхневих і проміжкових шарів контактних тіл, фізико-механічні властивості яких відрізняються від властивостей тіл контактної пари, та мікрогеометрією поверхонь тіл у контактній зоні, з використанням узагальненої характеристики – коефіцієнта теплопроникності контакту h . Від дії сили тертя на ділянці контакту відбувається теплоутворення, що пропорційне інтенсивності сили тертя. Температуру зовнішнього середовища вважаємо нульовою. Розв'язування задачі полягає в тому, щоб задовольнити:

1) рівняння теплопружності для півпростору

$$\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} + k \frac{\partial e}{\partial r} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial r}, \Delta u_z + k \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\beta}{\mu} \frac{\partial t}{\partial z}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, e = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1)$$

2) рівняння теплопровідності для циліндра і півпростору

$$\Delta T = X_1 \frac{\partial T}{\partial \tau}, \Delta t = X_2 \frac{\partial t}{\partial \tau}; \quad (2)$$

3) температурні граничні умови

$$z = 0: \frac{\partial T}{\partial z} = \gamma_0 T (0 \leq r \leq R), r = R: \frac{\partial T}{\partial r} = -\gamma_a T (0 \leq z \leq l), \quad (3)$$

$$z = H: \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} = f_T \omega r \sigma_{zz}, \lambda_2 \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z} = h(t - T) (0 \leq r \leq R), \frac{\partial t}{\partial z} = \gamma_H t (r > R) \quad (4)$$

4) силові граничні умови

$$z = H: u_z = f (0 \leq r \leq R), \sigma_{zz} = 0 (r \geq R), \tau_{rz} = 0 (r < \infty); \quad (5)$$

5) початкові умови

$$\tau = 0: t = T = 0, f = \partial f / \partial \tau = 0. \quad (6)$$

Тут $k = (\lambda + \mu) / \mu = 1 / (\lambda - 2\nu)$, ν – коефіцієнт Пуассона, $\beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T$, λ та μ – коефіцієнти Ламе, α_T – температурний коефіцієнт лінійного розширення, $f(\tau)$ – величина осідання штампа, λ_1 та λ_2 – коефіцієнти теплопровідності відповідно для штампа і півпростору, $\gamma_0 = \gamma_a = \gamma_H$ – коефіцієнти теплообміну із зовнішнім середовищем відповідно для торця циліндра, його бічної поверхні і незавантаженої поверхні півпростору, T – температура циліндричного штампа, t – температура півпростору, $X_i = 1/a_i$ ($i = 1, 2$), a_i – коефіцієнти теплопровідності ($i = 1$ відповідає штампі, $i = 2$ відповідає півпростору), h – коефіцієнт теплопроникності контакту, $\tau_{z\theta} = f_T \sigma_{zz}$, де f_T – коефіцієнт тертя. Функції t , T , u_r , u_z , σ_{zz} , τ_{rz} є функціями від трьох дійсних змінних r , z , τ . Вважаємо, що штамп має закруглені краї і в області контакту є обмежений поверхнею обертання, що складається із двох ділянок: за $0 \leq r < r^*$ – площа, а за $r^* \leq r \leq R$ – параболоїд з вершиною в точці r^* :

$$f(r, \tau) = f_1(\tau) - \frac{(r-r^*)^2}{2R_p} H(r-r^*), f_1(\tau) = \text{const}, \quad (7)$$

де величина r^* близька до R , R_p – радіус кривини країв штампа, $H(r-r^*)$ – функція Хевісайда. Під час розв'язування задачі будемо використовувати умову динамічної рівноваги штампа

$$m \frac{\partial^2 f_1(\tau)}{\partial \tau^2} = P(\tau) + 2\pi \int_0^R r \sigma_{zz}(r, H, \tau) dr, \quad (8)$$

де m – маса штампа, P – притискна вертикальна сила.

2. Метод розв'язування задачі

Застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом до рівнянь (2), урахувавши початкові умови (6). Використовуючи метод прямих і задовольняючи другу умову (3), отримане рівняння у безрозмірних змінних $\rho = r/R$, $\zeta = z/H$ можна записати в кожній з N точок розбиття $\rho_i = \Delta\rho(i-1) = (i-1)/(N-1)$, ($i = 1, \dots, N$) та звести задачу теплопровідності для циліндра до системи лінійних диференціальних рівнянь виду $d\vec{w}/d\zeta = B\vec{w}$. Її розв'язок має вигляд

$$\vec{w}^T(\zeta, s) = \left(T^L(\rho_1, \zeta, s), \dots, T^L(\rho_N, \zeta, s), \frac{dT^L(\rho_1, \zeta, s)}{d\zeta}, \dots, \frac{dT^L(\rho_N, \zeta, s)}{d\zeta} \right) \quad (9)$$

і будується за допомогою матричної експоненти

$$\vec{w}(\zeta, s) = \exp(B(s)\zeta) \vec{d}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B^n(s)\zeta^n}{n!} \vec{d}(s), \quad (10)$$

де $B(s)$ – відома матриця розмірності $2N \times 2N$, а вектор $\vec{d}(s)$ визначається з граничних умов (3).

Застосовуючи інтегральне перетворення Ханкеля нульового порядку по радіальній координаті до рівняння для півпростору в трансформантах Лапласа, отримано вирази для подвійних трансформант шуканих напружень, переміщень, температури та теплових потоків. Переходячи у формулах для $t^{LH}(\xi, H, s)$, $q^{LH}(\xi, H, s)$, $u_z^{LH}(\xi, H, s)$, $\sigma_{zz}^{LH}(\xi, H, s)$ до безрозмірного параметра $\eta = \xi R$, застосовуючи обернене перетворення Ханкеля, задовольняючи граничні умови (4) – (5) та продовжуючи отримані вирази на всю вісь ρ за допомогою функції Хевісайда, подамо невідомі функції у вигляді розкладів у ряди Фур'є – Бесселя

$$\phi(\rho, s) = b_0(s) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n(s) J_0(\mu_n \rho), \sigma_{zz}^L(\rho, 1, s) = \sum_{n=1}^N a_n(s) J_0(\mu_n \rho), \quad (11)$$

де μ_n – нулі функції Бесселя нульового порядку $J_0(x)$. Виразивши функції через невідомі коефіцієнти, задовольняючи (8) та першу граничну умову (3) в кожній точці рівномірного розбиття ρ_i , прийдемо до системи рівнянь з $4N$ невідомими: $a_n(s)$, $b_n(s)$ ($n = 1, \dots, N$) та $d_n(s)$ ($n = 1, \dots, 2N$). Обчислення оригіналів функцій $t^L(\rho, H, s)$, $q^L(\rho, H, s)$, $u_z^L(\rho, H, s)$ здійснювали числовим методом у вигляді розвинення в ряд Фур'є за функціями $\sin(2k+1)\theta$, які для дійсних значень $s_n = (2n+1)\sigma$ ($n = 0, 1, \dots, N^*$) утворюють повну ортогональну систему.

3. Числові результати

Під час обчислень вважали, що притисна вертикальна сила P задається рівнянням $P(\tau) = F(1 - \exp(-a\tau))$, де a та F є деякими константами. Розглядали, що матеріал циліндра – сталь, а матеріал півпростору – алюміній.

На рис. 1 зображено розподіл контактних напружень, а на рис. 2 – температура на границі півпростору в різні моменти часу.

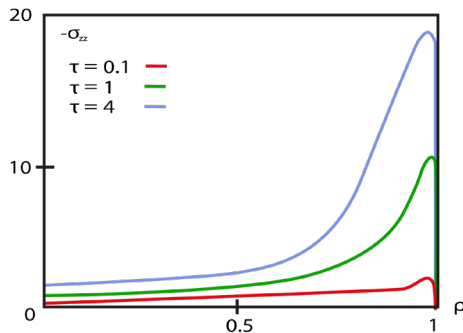


Рис. 1. Розподіл контактних напружень (МПа)

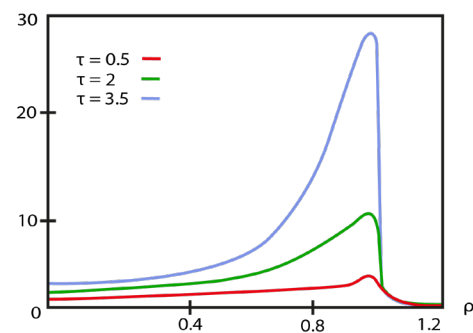


Рис. 2. Температура на границі півпростору (°C)

Дискусія і висновки

На основі проведених числових обчислень й аналізу ділянок зміни знаку контактних напружень з'ясовано, що загальну картину квазістатичної взаємодії у задачі можна описати такими якісно відмінними етапами:

- повне зчеплення основи штампа із суміжною ділянкою півпростору; теплоутворення не відбувається;
- часткове зчеплення основи штампа з контактною ділянкою півпростору; на зовнішньому кільці контакту спостерігаємо проковзування, а відтак і теплоутворення;
- на всій ділянці контакту (за винятком малого околу осрової точки) діють сили тертя і відбувається фрикційний нагрів; контактні напруження перерозподіляються, але радіус ділянки контакту не змінюється;
- відокремлення частини основи циліндра від поверхні півпростору як наслідок дії термічних факторів;
- стаціонарна стадія; жодна із шуканих функцій з часом не змінюється.

Перебіг описаних процесів визначається конкретними навантаженнями і характеристиками пари тертя. У випадку, коли притисна сила і крутий момент, поступово зростаючи, з часом стабілізуються, можна отримати узгодження з відомими класичними результатами роботи (George, & Sneddon, 1962). Квазістатичні контактні задачі доцільно розглядати тоді, коли початкові дані і характер навантаження спричиняються до того, що максимальні значення досліджуваних величин перевищують відповідні характеристики стаціонарного режиму. Математичне моделювання виявлених явищ недосконалого контакту планується продовжити в подальших дослідженнях.

Внесок авторів: Володимир Онишкевич – постановка задачі, методика розв'язування; числові обчислення; Галина Барабаш – аналіз джерел, огляд літератури, збір і перевірка емпіричних даних.

Джерела фінансування. Фінансування здійснюється власним коштом авторів і частково забезпечено Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Мартиняк, Р. М., & Маланчук, Н. І. (2022). *Контактна механіка. Шорсткість, розшарування і зношування поверхонь* : кол. монограф. Видавець Вікторія Кундельська. <https://www.researchgate.net/publication/366177313>
- Онишкевич, В. М., & Барабаш, Г. М. (2023). Фрикційний розігрів системи штамп-пружна півплощина при ковзанні вздовж твірної. *Вісник КНУ ім. Т. Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*, 2, 140–143. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.23>
- Barber, J. R. (1967). Distribution of heat between sliding surfaces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 9(5), 351–354.
- George, D. L., & Sneddon, I. N. (1962). The axisymmetric Boussinesq problem for a heat punch. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 11(5), 665–689.
- Levyts'kyi, V. P., & Onyshkevych, V. M. (2002). Investigation of the influence of properties of a third body on heat generation due to friction. *Journal of Mathematical Sciences*, 109(1), 1251–1256. <https://doi.org/10.1023/A:1013752929389>

References

- Barber, J. R. (1967). Distribution of heat between sliding surfaces. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 9(5), 351–354.
- George, D. L., & Sneddon, I. N. (1962). The axisymmetric Boussinesq problem for a heat punch. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 11(5), 665–689.
- Levyts'kyi, V. P., & Onyshkevych, V. M. (2002). Investigation of the influence of properties of a third body on heat generation due to friction. *Journal of Mathematical Sciences*, 109(1), 1251–1256. <https://doi.org/10.1023/A:1013752929389>
- Martyniak, R. M., & Malanchuk, N. I. (2022). *Contact mechanics. Roughness, layering and surface wear: coll. Monograph*. Publisher Viktoria Kundelska [in Ukrainian]. <https://www.researchgate.net/publication/366177313>
- Onyshkevych, V. M., & Barabash, G. M. (2023). Frictional heating of the system punch-elastic half plane when sliding along the creative line. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series Physics & Mathematics*, 2, 140–143 [in Ukrainian]. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.23>

Отримано редакцією журналу / Received: 15.08.25
Прорецензовано / Revised: 02.10.25
Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Volodymyr ONYSHKEVYCH, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-4657-5462
e-mail: onyshkevych@nltu.edu.ua
Ukrainian National Forestry University, Lviv, Ukraine

Galyna BARABASH, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0003-3258-8518
e-mail: galynabarabash71@gmail.com
Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine

THE UNSTEADY CONTACT INTERACTION OF A ROTATING STIFF FINITE CYLINDER AND ELASTIC HALF-SPACE WITH FRICTIONAL HEAT GENERATION

There are several mathematical models that help describe the contacting process for bodies, but solving the majority of theoretical and practical problems is not impossible without considering the geometric characteristics of contact interaction. However, in the contact problems of thermoelasticity factors of finiteness of stiff dimensions and curvilinearity of its basis are not taken into account mostly.

In the example of an axisymmetric problem about pressing a finite rigid circular cylinder, rotating around its axis with constant angular velocity, into an elastic half-space, we consider the method that allows us to model and investigate a wide range of phenomena arising at the interaction of bodies: separation of contact surfaces, wedging, and simultaneous existence of adhesion and sliding zones. On the contact area, heat is generated by friction forces, and non-ideal heat contact between cylinder and half-space is mathematically modeled using "third body" – thin near-surfaces and intermediate layers of interacting bodies, the physical and mechanical properties of which differ from those of the contact pair, and by the microgeometry of their surfaces in the contact zone. For every contact body, the non-stationary equation of thermal conductivity with initial condition on temperature is solved, and the time variable appears as a parameter in the rest initial ratios. A Laplace integral transformation with respect to the time coordinate and a Hankel integral transformation with respect to the radial coordinate for the half-space and the method of straight lines cylinder are used to solve the problem. The temperature and thermal flux fields in the cylinder and in the half-space, the contact stresses, and the displacements of the half-space are determined. The inversion of the transforms of the desired functions was carried out numerically. Qualitatively distinct stages of the overall picture of unsteady interaction for the formulated problem have been identified. It was found that the course of the relevant processes is determined by specific loads and friction pair characteristics. It is noted that quasi-stationary contact problems should be considered when the initial data and the nature of the load cause the maximum values of the studied quantities of the corresponding characteristics to be exceeded in the stationary mode.

Key words: *contact, friction, heating, thermal conductivity, thermoelasticity.*

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; or in the decision to publish the results.