

on $(x, y) \in \rho \Rightarrow (\alpha(x), \alpha(y)) \in \rho$ the equivalence is required ([4]). Also different subsemigroups classes of the semigroup $S^{(\rho)}$ are studied ([3], [5]).

For equivalence relation ρ on the set $\mathbf{N} = \{1, \dots, n\}$ and for classic semigroups of transformations of the set $\mathbf{N}$, namely for the symmetric semigroup $\mathcal{T}_n$ of all transformations, for the semigroup $\mathcal{PT}_n$ of all partial transformations and for the inverse symmetric semigroup $\mathcal{IS}_n$ of all partially injective transformations, the order of semigroup $S^{(\rho)}$, amount of idempotents that it has, a structure and an order of it's semigroup $\bigcap_{\rho} S^{(\rho)}$ will be calculated. The terminology and notations from [1] will be used.

Classic finite semigroups of transformations

Let the semigroup (S, M) is either symmetric semigroup $\mathcal{T}_n$ of all transformations of the set $\mathbf{N} = \{1, \dots, n\}$, or the semigroup $\mathcal{PT}_n$ of all partial transformations $\mathbf{N}$, or inverse symmetric semigroup $\mathcal{IS}_n$ of all partially injective transformations of the set $\mathbf{N}$.

It is important to notice that $\mathcal{T}_n$ and $\mathcal{IS}_n$ are subsemigroups of $\mathcal{PT}_n$.

Theorem 1. Let classes of equivalence $M_1, M_2, \dots, M_k$ of a relation ρ on the set $\mathbf{N}$ have corresponding orders $n_1, n_2, \dots, n_k$, where $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.

- a) Semigroup $\mathcal{T}_n^{(\rho)}$ is of order $(n_1^{n_1} + n_2^{n_2} + \dots + n_k^{n_k})(n_1^{n_2} + n_2^{n_2} + \dots + n_k^{n_2}) \dots (n_1^{n_k} + n_2^{n_k} + \dots + n_k^{n_k})$.
b) Semigroup $\mathcal{PT}_n^{(\rho)}$ is of order $((n_1 + 1)^{n_1} + \dots + (n_k + 1)^{n_1 + (1-k)}) \dots ((n_1 + 1)^{n_k} + \dots + (n_k + 1)^{n_k + (1-k)})$.

Proof. a) Let $\alpha \in \mathcal{T}_n^{(\rho)}$. Then $\alpha(M_i)$ belongs to some equivalence class M_j . The mapping $M_i \rightarrow M_j$ can be provided in $n_j^{n_i}$ possible ways. That's why on the equivalence class M_i the transformation α can be provided in $n_1^{n_i} + n_2^{n_i} + \dots + n_k^{n_i}$ possible ways. However, on different classes those transformations α can be independently defined, this proofs the proposition a).

b) Comparing to the previous part, for a representation $M_i \rightarrow M_j$ an image of every element $x \in M_i$ can be identified in $n_j + 1$ ways, because in the point x the mapping can be not identified. But summing up by all of the equivalence classes $M_1, \dots, M_k$ the mapping, that is not identified in each point of class M_i , will be counted k times, each time for each class. That is

why the transformation $\alpha \in \mathcal{PT}_n^{(\rho)}$ on the equivalence class M_i can be provided in $(n_1 + 1)^{n_i} + \dots + (n_k + 1)^{n_i} + (1 - k)$ different ways. To end the proof, it is important to mention again, that on the different classes, those transformations α can be defined independently. $\square$

Let on a set M by identified the equivalence relation ρ_1 , equivalence classes of which are $M_1, \dots, M_p$ of orders $m_1, \dots, m_p$, correspondingly, and on a set N the equivalence relation ρ_2 , equivalence classes of which are $N_1, \dots, N_q$ of orders $n_1, \dots, n_q$ correspondingly. Let us notice, that M and N are disjoint union of $M = M_1 \dot{\cup} M_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} M_p$ and $N = N_1 \dot{\cup} N_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} N_q$ correspondingly. The amount of $f(m_1, \dots, m_p; n_1, \dots, n_q)$ of partial injective representations $\alpha : M \rightarrow N$, that preserve these relations, will be counted, together with the fact, that they satisfy the condition (through $\text{dom } \alpha$ the domain of α is denoted)

$$x\rho_1 y \Rightarrow \alpha(x)\rho_2\alpha(y) \quad \text{for each } x, y \in \text{dom } \alpha. \quad (1)$$

Proposition 1. a) $f(m; n_1, \dots, n_q) = 1 + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \sum_{i=1}^q \binom{n_i}{k} k!$,
b) $f(m_1, \dots, m_p; n) = \sum_{k=0}^{m_1 + \dots + m_p} \binom{m_1 + \dots + m_p}{k} \binom{n}{k} k!$.

Proof. a) The nowhere defined mapping satisfies the condition (1). The other mappings, for which $|\text{dom } \alpha| = k > 0$, can be obtained in the following way: first of all, the subset, that consists of k elements is drawn, $A \subseteq M$ (this can be done in $\binom{m}{k}$ ways), than, some class N_i and the next subset, consisting of another k elements are drawn, $B \subseteq N_i$ (this can be done in $\binom{n_i}{k}$ ways). After that, one may construct $k!$ bijective mappings $\alpha : A \rightarrow B$. Obviously, that in such a way all of the partial injective mappings $\alpha : M \rightarrow N$, that satisfy the condition (1), without any repetition are obtained.

b) In this case any injective mapping $\alpha : M \rightarrow N$ satisfies the condition (1). $\square$

Theorem 2. $f(m_1, \dots, m_p; n_1, \dots, n_q) = f(m_1, \dots, m_{p-1}; n_1, \dots, n_q) + \sum_{k=1}^{m_p} \binom{m_p}{k} \sum_{i=1}^q \binom{n_i}{k} f(m_1, \dots, m_{p-1}; n_1, \dots, n_i - k, \dots, n_q) k!$.

Proof. All injective mappings $\alpha : M \rightarrow N$, that satisfy the condition (1), may be distributed into classes depending on the order of a set $\text{dom } \alpha \cap M_p$. The first component corresponds to the case $|\text{dom } \alpha \cap M_p| = 0$. If $|\text{dom } \alpha \cap M_p| = k \geq 1$, so we are to draw k elements in equivalence class M_p

(this can be done in $\binom{m_p}{k}$ ways), afterwards the equivalence class N_i is to be chosen, at which these elements will be mapped, and, finally, in N_i the k images are to be chosen from drawn elements from M_p (this can be done in $\binom{n_i}{k}$ ways). The chosen elements from M_p into the elements from N_i can be mapped in $k!$ ways. The mapping α can be determined on $M \setminus M_p$ in $f(m_1, \dots, m_{p-1}; n_1, \dots, n_i - k, \dots, n_q)$ ways. $\square$

Corollary 1. *If equivalence classes $M_1, \dots, M_k$ of a relation ρ on a set $\mathbf{N}$ are of corresponding orders $n_1, \dots, n_k$, $n_1 + \dots + n_k = n$, so for an order of a semigroup $\mathcal{IS}_n^{(\rho)}$ the recurrent relation takes place: $|\mathcal{IS}_n^{(\rho)}| = f(n_1, \dots, n_{k-1}; n_1, \dots, n_k) +$*

$$\sum_{r=1}^{n_k} \binom{n_k}{r} \sum_{i=1}^k \binom{n_i}{r} f(n_1, \dots, n_{k-1}; n_1, \dots, n_i - r, \dots, n_k) r!.$$

Theorem 3. *Let equivalence classes $M_1, \dots, M_k$ of the equivalence relation ρ be of orders $n_1, \dots, n_k$, where $n_1 + \dots + n_k = n$.*

a) *Semigroup $\mathcal{IS}_n^{(\rho)}$ contains all of idempotents from $\mathcal{IS}_n$. In particular, it has 2^n idempotents.*

b) *The amount of idempotents in semigroup $\mathcal{T}_n^{(\rho)}$ is equal to $\sum_{\substack{1 \leq m_1 + \dots + m_k \leq n \\ m_1 \leq n_1, \dots, m_k \leq n_k}} \prod_{i=1}^k A_i \binom{n_i}{m_i}$, where*

$$A_i = \begin{cases} \sum_{j \neq i} m_j^{n_i}, & \text{if } m_i = 0; \\ m_i^{n_i - m_i}, & \text{if } m_i \neq 0. \end{cases}$$

c) *The amount of idempotents in semigroup $\mathcal{PT}_n^{(\rho)}$ is equal to $\sum_{\substack{0 \leq m_1 + \dots + m_k \leq n \\ m_1 \leq n_1, \dots, m_k \leq n_k}} \prod_{i=1}^k B_i \binom{n_i}{m_i}$, where*

$$B_i = \begin{cases} \sum_{j \neq i} (m_j + 1)^{n_i}, & \text{if } m_i = 0; \\ (m_i + 1)^{n_i - m_i}, & \text{if } m_i \neq 0. \end{cases}$$

Proof. The transformation $\alpha \in \mathcal{PT}_n$ will be an idempotent if and only if, when it operates identically on its range. ([1], Th. 2.7.2). It is obvious, that $S^{(\rho)}$ can not contain idempotents, that are not idempotents of a semigroup S .

a) However every idempotent from $\mathcal{IS}_n$ is an identical transformation of its domain, so it preserves all of the relations on $\mathbf{N}$, and, subsequently, belongs to every $\mathcal{IS}_n^{(\rho)}$. $\mathcal{IS}_n$ contains 2^n idempotents ([1], Cor. 2.7.3).

b) Let us count the amount of idempotents $\alpha \in \mathcal{T}_n$, for which $|\text{dom } \alpha \cap M_i| = m_i$, $i = 1, \dots, k$. In the equivalence class M_i one may chose m_i elements in $\binom{n_i}{m_i}$ ways. If $m_i \neq 0$, so

other elements from M_i can be only mapped into the set $\text{dom } \alpha \cap M_i$. This can be done in $m_i^{n_i - m_i}$ ways. If $m_i = 0$, then elements from M_i can be mapped into any set out of $\text{dom } \alpha \cap M_j$, $j \neq i$. This can be done in $\sum_{j \neq i} m_j^{n_i}$ ways.

To finish the proof, it is necessary to mention, that the value of an idempotent α on different equivalence classes M_i is chosen independently, and one may sum up by all of the possible sets $(\text{dom } \alpha \cap M_1, \dots, \text{dom } \alpha \cap M_k)$.

c) The proof is similar to the previous one, but transferring from the $\mathcal{T}_n$ to $\mathcal{PT}_n$ it is crucial to account for several additional issues. First, the idempotent in $\mathcal{PT}_n$ can be identified nowhere, that is why the sum $m_1 + \dots + m_k$ can be equal to 0. Second, in $x \notin \text{dom } \alpha$ α can be unidentified, that is why possible values for $\alpha(x)$ are more by one, comparing to the case $\mathcal{T}_n$. $\square$

If $|M| \leq 2$, then every equivalence relation on M coincides with the equality relation or with the total relation. So in such a case $S^{(\rho)} = S$ always holds. By $\text{Eq}(M)$ we will be denoting the set of all equivalence relations on a set M .

Theorem 4. *Let $n > 2$.*

a) *The element $\alpha \in \mathcal{IS}_n$ belongs to a semigroup $S_1 = \bigcap_{\rho \in \text{Eq}(\mathbf{N})} \mathcal{IS}_n^{(\rho)}$ if and only if, when either*

$\text{rank } \alpha \leq 1$, or α is an idempotent, or α is a group element of order 2. In particular, $|S_1| = 2^n + \frac{3n(n-1)}{2}$.

b) *The element $\alpha \in \mathcal{T}_n$ belongs to a semigroup $S_2 = \bigcap_{\rho \in \text{Eq}(\mathbf{N})} \mathcal{T}_n^{(\rho)}$ if and only if either $\text{rank } \alpha = 1$,*

or α is a unit element ε of a semigroup $\mathcal{T}_n$. In particular, $|S_2| = n + 1$.

c) $S_3 = \bigcap_{\rho \in \text{Eq}(\mathbf{N})} \mathcal{PT}_n^{(\rho)} = S_1 \cup \{\alpha \in \mathcal{PT}_n \mid \text{rank } \alpha = 1\}$. In particular, $|S_3| = 2^n(n+1) + \frac{n(5n-1)}{2}$.

Proof. It is important to notice, that in each semigroup of transformations S of elements of a rank ≤ 1 preserve all equivalence relations, so they belong to each semigroup $S^{(\rho)}$. That is why it is important only to verify which elements of rank ≥ 2 belong to $\bigcap_{\rho} S^{(\rho)}$.

a) In $\mathcal{IS}_n$ each idempotent is identical transformation of its domain, so preserves equivalence relation and belong to S_1 . If α is nonidempotent group element of rank 2, then $\text{dom } \alpha = \text{im } \alpha = \{a, b\}$ and $\alpha(a) = b$, $\alpha(b) = a$. No matter

whether a and b belong to same equivalence class of relation ρ , or different ones, α preserves this relation and therefore belongs to S_1 .

Let now element α of rank 2 be not a group element. Then $\text{dom } \alpha \neq \text{im } \alpha$. It implies that α does not preserve equivalence relation, which has one equivalence class $\text{dom } \alpha$, and the other classes consisting of one element. Hence $\alpha \notin S_1$.

Eventually, let $\text{rank } \alpha > 2$ and α be not an idempotent. Then there exists such $a \in \text{dom } \alpha$, that $\alpha(a) \neq a$, and $b \in \text{dom } \alpha$, that $\alpha(b) \neq a$. Therefore α does not preserve equivalence relation, with one equivalence class $\{a, b\}$, and the other classes consisting of one element. Hence, $\alpha \notin S_1$.

$\mathcal{IS}_n$ contains 2^n idempotents, $n(n-1)$ nonidempotent elements of rank 1 and $\frac{n(n-1)}{2}$ nonidempotent group elements of rank 2. Therefore $|S_1| = 2^n + n(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = 2^n + \frac{3n(n-1)}{2}$.

b) Primarily we will be observing the case, when $\alpha \in \mathcal{T}_n$ is different from ε element of a rank > 2 . Then there exists such a , that $\alpha(a) \neq a$, and the condition $\text{rank } \alpha > 2$ implies that there exists such b , that $\alpha(b) \notin \{a, \alpha(a)\}$. But then α does not preserve equivalence relation, which has one equivalence class $\{a, b\}$, and the other classes

consisting of one element. Hence $\alpha \notin S_1$.

Let $\text{rank } \alpha = 2$, the image of α is $\{a, b\}$ and $\alpha(a_1) = a$, $\alpha(b_1) = b$. While $n > 2$, so without losing the generality we can consider that there exists such $a_2 \neq a_1$, that $\alpha(a_2) = a$. We will be denoting by ρ_i the equivalence relation, which has one equivalence class $\{a_i, b_1\}$, $i = 1, 2$, and the other classes consisting of one element. Hence, $\alpha(\{a_i, b_1\}) = \{a, b\}$, then α does not preserve at least one of these relations. So, $\alpha \notin S_2$.

So S_2 contains only elements of rank 1 and unit element ε from the semigroup $\mathcal{T}_n$. Then in $\mathcal{T}_n$ there are n elements of rank 1, so $|S_2| = n + 1$.

c) It is obvious, that $S_3 \supseteq S_1$. By considerations, similar to the part b), it can be proved that elements of a rank > 1 from $\mathcal{PT}_n \setminus \mathcal{IS}_n$ do not belong to the semigroup S_3 . This proves the first part of the proposition c). It is left to count the amount of elements of rank 1 from $\mathcal{PT}_n$, that do not belong to $\mathcal{IS}_n$. However, every transformation of rank 1 is a mapping of some nonempty subset from $\mathbb{N}$ into one of elements from $\mathbb{N}$, so the amount of these transformations of rank 1 will be $n(2^n - n - 1)$. Therefore $|S_3| = |S_1| + n(2^n - n - 1) = 2^n(n + 1) + \frac{n(5n-1)}{2}$. $\square$

Список використаних джерел

1. Ganyushkin O. Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction / Ganyushkin O., Mazorchuk V. / Algebra and Applications Vol. 9. – Springer-Verlag, London. – 2009. – 340p.
2. Sun L. Green's Relations on Semigroups of Transformations Preserving Two Equivalence Relations / Sun L., Pei H. // Journal of Mathematical Research & Exposition. – 29, No.3 (2009). – P.415–422.
3. Araújo J. Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation and a Cross-Section / Araújo J., Konieczny J. // Communications in Algebra. – 32 (2004). – P.1917–1935.
4. Sun L. A partial order on transformation semigroups that preserve double direction equivalence relation / Sun L. // Journal of Algebra and Its Applications, 12(08). – July 2013.
5. Pei H. Abundant Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation / Pei H., Zhou H. // Algebra Colloquium – 2011. – 18, No.01. – P.77–82.

References

1. GANYUSHKIN, O., MAZORCHUK, V. (2009) "Classical Finite Transformation Semigroups. An Introduction", Algebra and Applications Vol. 9, Springer-Verlag, London, 340 p.
2. SUN, L., PEI, H. (2009) "Green's Relations on Semigroups of Transformations Preserving Two Equivalence Relations", Journal of Mathematical Research & Exposition 29, No.3, pp. 415–422.
3. ARAÚJO, J., KONIECZNY, J. (2004) "Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation and a Cross-Section", Communications in Algebra, 32, pp. 1917–1935.
4. SUN, L. (2013) "A partial order on transformation semigroups that preserve double direction equivalence relation", Journal of Algebra and Its Applications 12 No.8.
5. PEI, H., ZHOU, H. (2011) "Abundant Semigroups of Transformations Preserving an Equivalence Relation", Algebra Colloquium 18, No.01, pp. 77–82.

Received: 11.06.2017

УДК 519.17

М.А. Дуденко

Листково сконструйовані уніциклічні графи

Національний університет "Києво-
Могилянська академія", 04655, м. Київ, вул.
Григорія Сковороди, 2.
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

M.A. Dudenko

Leaf-constructed unicyclic graphs

National University of Kyiv-Mohyla
Academy, 04655, Kyiv, 2 Scovoroda st.
e-mail: rita.dudenko@gmail.com

Введено поняття сконструйованого та листково сконструйованого графа за допомогою операції додавання ребра. Залежно від типу з'єднання описано умови, за яких уніциклічний граф G , що є листково сконструйованим з дерева T , має метричну розмірність 2 та 3.

Ключові слова: уніциклічні графи, метрична розмірність, метричний базис, листково сконструйовані графи.

A metric dimension of graph G is the smallest size of a subset $S \in V(G)$ that elements can distinguish each vertex pair of G by the shortest-path distance to some vertex in S . Metric dimension as a graph parameter has numerous applications, such as pharmaceutical chemistry, robot navigation, network discovery and verification, sonar, combinatorial optimization, and was also studied for graphs with high degree of symmetry.

The metric dimension decision problem is among the classical NP-hard problems. But for some families of graphs the metric dimension can be computed in polynomial time. For example, formulas for metric dimension are known for specially structured graphs, such as trees and hypercubes. In the paper we present the concept of constucted and leaf-constructed graph with the help of the operation of an edge addition. Depending on the connection type, we give the conditions under which the unicyclic graph G , which is a leaf-constructed from the tree T , has metric dimension 2 and 3.

Key Words: unicyclic graph, metric dimension, metric basis, leaf-constructed graphs.

Communicated by Prof. Kirichenko V.V.

1 Вступ

Кожна мережа може бути представлена як граф, у якому вершини розглядаються як процесори, а ребра між двома довільними вершинами індують зв'язки між процесорами. У праці [1] Кулер розглядав навігацію як графічну структуру, в якій робот рухається від вершини до вершини в графовому просторі. В певний момент часу робот може визначити своє місцезнаходження за допомогою вершин-орієнтирів. Якщо робот знає відстань до достатньої кількості орієнтирів, то його розташування визначається однозначно. Постала проблема в знаходженні мінімальної кількості орієнтирів та їх розташуванні в мережі, щоб робот міг завжди визначити своє місцезнаходження. Виявляється, що мінімальна кількість орієнтирів є метричною розмірністю в графовому просторі, поняття якої було введено Харарі та Мелтером в [2]. Слатер у своїй праці [3] описав користь ідеї пошуку метричної розмірності в довготерміно-

вих засобах навігації. Мелтер і Томеску [4] вивчали метричну розмірність для графів-сіток. Відомо, що обчислення метричної розмірності для довільного графа є NP-важкою проблемою [5], тому в багатьох працях досліджується метрична розмірність конкретних конструкцій графів та операцій над ними (декартового, лексикографічного та корона добутоків). Так, у статті [6] виведено оцінку метричної розмірності уніциклічного графа G , отриманого з дерева T за допомогою додавання ребра: $\dim(T) - 2 \leq \dim(G) \leq \dim(T) + 1$. Відповідно, якщо дерево T має метричну розмірність 2, то виконується нерівність $0 \leq \dim(G) \leq 3$. Оскільки, згідно праці [7], метрична розмірність G дорівнює 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом, то матимемо нерівність $2 \leq \dim(G) \leq 3$. У даній статті описано умови, за яких уніциклічний граф G , листково сконструйований з дерева T ($\dim(T) < 3$), має метричну розмірність 2. Відповідно охарактеризовано типи з'єднання, при

яких отриманий граф G має метричну розмірність 3.

2 Основні означення та необхідні твердження

Нехай $G = (V, E)$ — простий, скінченний, неорієнтовний граф з множиною вершин V , $|V| < \infty$ і множиною ребер E .

Означення 2.1. Для $u, v, w \in V$ вершина u розділяє вершини v і w якщо найкоротша відстань між u і v відрізняється від відстані між u та w .

Означення 2.2. Підмножина $M \subset V$ називається метричним генератором графа G якщо будь-яку пару вершин $w, v \in V$ розділяє хоча б одна вершина $u \in M$.

Зауважимо, що множина вершин $V(G)$ є метричним генератором для самої себе.

Означення 2.3. Метричний генератор графа G потужності, найменшої серед усіх можливих, називається метричним базисом, а його потужність — метричною розмірністю графа G і позначається $\dim(G)$.

Як зазначалось в статті [8] очевидним є той факт, що метричний базис існує для будь-якого графа та не є унікальним. Наприклад, для простого ланцюга P_n з початком у вершині u та кінцем у вершині v підмножини $\{u\}$ та $\{v\}$ будуть метричними базисами.

Нагадаємо, що степінь вершини $\deg_G(v)$ — це кількість ребер, що їй інцидентні.

Означення 2.4. Для деякого графа G листком називається вершина, що має степінь 1. Вершина $v \in V$ внутрішньою якщо $\deg_G(v) \geq 3$. Внутрішня вершина v близька до листка l якщо немає внутрішніх вершин в найкоротшому шляху, що з'єднує v і l .

В попередніх статтях ([9], [10], [11]) було введено поняття 1-листокової та 2-листокової вершин. Узагальнимо його для довільної кількості листків.

Означення 2.5. Для деякого натурального n внутрішня вершина називається n -листоковою якщо вона близька рівно до n листків.

Означення 2.6. Простий граф називається уніциклічним, якщо він містить рівно один цикл.

Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф та $\hat{V}$ — множина вершин циклу даного графа.

Означення 2.7. Говоритимемо, що вершина $u \in V \setminus \hat{V}$ графа G проектується в вершину $w \in \hat{V}$ якщо для довільної вершини $q \in \hat{V}$ виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Вершини степеня 3 циклу, в які проектується вершини степеня 3, що лежать поза циклом, називатимемо основними.

Означення 2.8. [9] Уніциклічний граф G називається парним якщо існує таке натуральне k , для якого $|\hat{V}| = 2k$, і непарним якщо $|\hat{V}| = 2k + 1$.

Означення 2.9. [11] Уніциклічний граф G , що містить лише одну основну вершину, а решта вершин циклу мають степінь 2, називатимемо мінорним графом.

Нехай G — уніциклічний граф і $\hat{G}$ — його підграф, що є ізометричним простому циклу C_k .

Означення 2.10. [9] Уніциклічний граф G називається базисним графом якщо виконуються такі умови:

- 1) для довільної вершини v графа G $\deg_v \leq 3$;
- 2) G містить рівно дві основні вершини;
- 3) в кожну основну вершину може проектуватись рівно одна 2-листокова вершина;
- 4) $\hat{G}$ містить лише основні вершини степеня 3.

Нехай $G_1 = (V_1, E_1)$ і $G_2 = (V_2, E_2)$ — два простих графи. Нехай $v_1 \in V_1$ та $v_2 \in V_2$. Граф $G = (V_1 \cup V_2 / \sim, E_1 \cup E_2)$ називатимемо склеюванням графів G_1 і G_2 по вершинах v_1 і v_2 .

Означення 2.11. [9] Нехай G_1 — базисний граф. Позначимо через u і v основні вершини графа G_1 . Уніциклічний граф G називається обплетенням графа G_1 ланцюгами $L_1, \dots, L_r$ якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \dots, L_r$ таким чином, що кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга, а також для будь-якої 1-листокової вершини w та суміжної з нею вершини a має місце нерівність:

$$d_G(u, v) + d_G(v, w) + 1 \neq d_G(u, a).$$

Лема 1. [9] Непарний уніциклічний граф G , що містить дві основні вершини, має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді коли виконується одна з умов:

- 1) G — базисний граф;
- 2) G є обплетенням деякого базисного графа G_1 .

Парний уніциклічний з двома основними вершинами та $|\hat{V}| = 2k$ має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді коли виконується одна з вищезгаданих умов та $d(u, v) \neq k$.

В статті [11] було введено іншу конструкцію обплетення графів.

Означення 2.12. [11] Уніциклічний граф G називається частковим обплетенням графа G_1 , що є уніциклічним графом (або простим циклом), ланцюгами $L_1, \dots, L_r$ якщо G утворений з G_1 склеюванням вершин степеня 2 циклу з кінцями ланцюгів $L_1, \dots, L_r$, причому кожна вершина степеня 2 склеюється з кінцем лише одного ланцюга.

Лема 2. [11] Нехай G — уніциклічний граф, що містить не більше однієї основної вершини. Граф G має метричну розмірність 2 тоді і тільки тоді, коли він є частковим обплетенням простого циклу C_n або частковим обплетенням мінорного графа G_1 ланцюгами $L_1, \dots, L_r$.

Позначимо символом n_v кількість листків, для яких v є внутрішньою вершиною.

Лема 3. [12] Якщо T — дерево (не ланцюг), то $\dim(T) = \sum_{v \in V, n_v \geq 1} (n_v - 1)$.

Використовуючи дане твердження, можемо сформулювати умови, за яких метрична розмірність дерева буде дорівнювати 2. Має місце наступна теорема.

Теорема 1. Дерево T має метричну розмірність $\dim(T) = 2$ тоді і тільки тоді коли у нього немає жодної вершини степеня більшого, ніж 3, існує або лише одна 3-листова і жодної 2-листової, або дві 2-листові вершини. Зокрема, не може існувати рівно одна 2-листова вершина.

Proof. Нехай T — дерево і $\dim(T) = 2$. Припустимо, що T не містить вершин степеня строго більшого, ніж 2. Тоді T є ланцюгом і згідно з результатом статті [7] $\dim(T) = 1$. Отримали суперечність. Отже, граф T містить принаймні одну вершину степеня 3.

Нехай T містить вершину w , що має степінь 4. Тоді можливі такі випадки:

- 1) w — єдина внутрішня вершина. Тоді їй відповідає 4 листки. За лемою 3 $\dim(T) = 3$.
- 2) w — вершина степеня 4, k — 2-листова вершина. Згідно з лемою 3 до базису потрібно взяти три листки, що є близькими до w і один листок, близький до k . Отримали ту саму рівність $\dim(T) = 3$.

Отже, всі вершини дерева мають степінь, що не перевищує 3.

Зауважимо, що довільне дерево T з $\dim(T) = 2$, яке не має вершин степеня більшого, ніж 3, не може мати рівно одну 2-листову вершину. Припустимо, що така вершина w існує. Тоді $\deg_w = 2$ або $\deg_w = 3$. В першому випадку згідно означення 2.5 w має бути внутрішньою, тому має виконуватись умова $\deg_w \geq 3$. В другому випадку якщо решта вершин дерева T мають степінь менший, ніж 3, то w — єдина внутрішня вершина, а тому буде 3-листовою. Якщо існуватиме ще хоча б одна вершина u степеня 3, то u буде також 2-листовою. В усіх випадках отримали суперечність.

Покажемо, що у T не може бути більше двох 2-листових вершин. Нехай T все ж має три 2-листові вершини v_1, v_2, v_3 . Тоді згідно з лемою 3 до базису потрібно взяти по одному листку p_1, p_2, p_3 , що є близькими до v_1, v_2, v_3 відповідно. В цьому випадку $\dim(T) = 3$. Отже, в дереві T може існувати рівно дві 2-листові вершини.

Доведемо в іншу сторону. Нехай T — дерево, що не має вершин степеня строго більшого, ніж 3. Причому серед вершин степеня 3 існує не більше двох 2-листових. Тоді якщо граф містить рівно одну вершину w степеня 3 і не має жодної 2-листової вершини, то w близька до трьох листків. Отже, згідно з лемою 3 $\dim(T) = 2$. У випадку коли в дерева T існує n внутрішніх вершин, причому дві з них є 2-листовими, а решта $n - 2$ мають по одному листку, $\dim(T) = 2$ за тією ж таки лемою 3. $\square$