

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ЖУК ТЕТЯНА ЮРІЇВНА

УДК 517.9

ДИСЕРТАЦІЯ

**ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ
ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ**

Спеціальність 111 — математика

Галузь знань 11 — математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня *доктора філософії*

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Т. Ю. Жук

Науковий керівник

*Капустян Олексій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор*

Київ – 2026

Анотація

Жук Т. Ю. Задачі оптимального керування диференціальними включеннями зі швидкоколивними коефіцієнтами. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 11 "Математика та статистика" за спеціальністю 111 "Математика". – Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Міністерство освіти і науки України, Київ, 2026.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування та наближене знаходження розв'язків задач оптимального керування лінійними та нелінійними за керуванням диференціальними включеннями на скінченних та нескінченних інтервалах зі швидкоколивними коефіцієнтами.

Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, трьох розділів основної частини, висновків, списку використаних джерел та додатку.

У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок даної роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Також цей розділ містить порівняльний аналіз із роботами інших авторів, що містять результати з тематики дисертаційного дослідження. Наведено основні положення застосування методу усереднення та ключові допоміжні результати за його використання. Висвітлено роботи авторів, що займалися його застосуванням, в тому числі в теорії задач оптимальних

керувань.

У другому розділі дисертації досліджується питання про обґрунтування методу усереднення для наближеного розв'язання задачі оптимального керування для диференціального включення, лінійного за змінною керування, та зі швидкоколивними коефіцієнтами. Обґрунтовано збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторій усередненої задачі.

Багатозначність породжує свої специфічні проблеми, такі як замкненість, опуклість сім'ї розв'язків, існування граничних розв'язків, виділення розв'язків із заданими властивостями, тощо. Проте добре розвинений апарат математичного аналізу, що застосовуються до дослідження багатозначних функцій, дає можливість застосування методу усереднення до описаної вище задачі оптимального керування. Окремо розглядалися випадки скінченного часового інтервалу з загальним коерцитивним функціоналом якості та нескінченного часового інтервалу з квадратичним цільовим функціоналом. Також було розглянуто задачу оптимального керування на півосі з багатозначною правою частиною типу Каратеодорі.

У третьому розділі дисертації досліджується питання про існування наближеного розв'язку задачі оптимального керування нелінійною за керуванням системою диференціальних включень з швидкоосцилюючими параметрами. Також було розглянуто зв'язок задачі оптимального керування з усередненими коефіцієнтами та вихідної збуреної системи у випадку скінченного та нескінченного часового проміжку.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

- досліджено застосування методу усереднення для задач оптимального керування диференціальними включеннями;
- для задачі оптимального керування, що є лінійною за керуванням, у випадку ліпшицевої багатозначної правої частини не більш, ніж лінійного росту зі швидкоколивними коефіцієнтами, доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скін-

ченого часового проміжку , так і на півосі;

— для задачі оптимального керування, що є лінійною за керуванням, у випадку напівнеперервної зверху обмеженої багатозначної правої частини зі швидкоколивними коефіцієнтами доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами на нескінченному часовому інтервалі;

— для задачі оптимального керування розв'язками нелінійного за керуванням диференціального включення з ліпшицевою багатозначною правою частиною зі швидкоколивними коефіцієнтами, доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку , так і на півосі.

Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані в роботі результати мають важливе значення для якісної теорії диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною, теорії оптимального керування розв'язками диференціальних включень, та можуть бути використані для наближеного знаходження розв'язків задач оптимального керування диференціальними рівняннями та включеннями зі швидкоосцилюючими змінними.

Ключові слова: оптимальне керування, диференціальне включення, малий параметр, метод усереднення, наближений розв'язок, багатозначне відображення, диференціальне рівняння з багатозначною правою частиною.

Abstract

Zhuk T. Yu. Optimal control problems of differential inclusions with rapidly oscillating coefficients. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

Doctor of Philosophy thesis undertaken in the field of knowledge 11 – Mathematics and statistics in specialty 111 – Mathematics – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2026.

The dissertation is devoted to the study of issues concerning the existence and approximate determination of solutions to optimal control problems for differential inclusions that are linear and nonlinear with respect to the control, on finite and infinite intervals with rapidly oscillating coefficients.

The dissertation consists of abstracts in Ukrainian and English, an introduction, three chapters of the main body, conclusions, a list of references, and an appendix.

In the introduction, the relevance of the topic is substantiated, the connection of this work with scientific programs, plans, and topics is indicated, the aim and objectives, the object, subject, and research methods are established, the scientific novelty and practical significance of the obtained results are presented, the personal contribution of the applicant is characterized, a list of conferences and scientific seminars at which the dissertation was presented is provided, and a brief description of the work is given.

The first chapter of the dissertation provides a review of the literature related to the topic of the dissertation and the results obtained by other authors. This chapter also contains a comparative analysis with the works of other authors that include results related to the subject of the dissertation research. The main provisions of the application of the averaging method and key auxiliary results concerning its use are presented. The works of authors who studied its application, including in the theory of optimal control problems, are highlighted.

The second chapter of the dissertation investigates the issue of substantiating the averaging method for the approximate solution of an optimal control

problem for a differential inclusion that is linear with respect to the control variable and has rapidly oscillating coefficients. The convergence of optimal controls and optimal trajectories of solutions of the exact problem to the optimal control and trajectories of the averaged problem is justified.

Multivaluedness gives rise to its own specific problems, such as closedness, convexity of the family of solutions, existence of limit solutions, selection of solutions with prescribed properties, etc. However, the well-developed apparatus of mathematical analysis applied to the study of multivalued functions makes it possible to apply the averaging method to the optimal control problem described above. The cases of a finite time interval with a general coercive quality functional and an infinite time interval with a quadratic objective functional were considered separately. The optimal control problem on the half-line with a multivalued right-hand side of Carathéodory type was also considered.

The third chapter of the dissertation investigates the issue of the existence of an approximate solution to the optimal control problem for a system of differential inclusions nonlinear with respect to the control and with rapidly oscillating parameters. The relationship between the optimal control problem with averaged coefficients and the original perturbed system in the case of a finite and infinite time interval was also considered.

The following new scientific results were obtained in the dissertation:

- the application of the averaging method to optimal control problems for differential inclusions was investigated;
- for the optimal control problem that is linear with respect to the control, in the case of a Lipschitz multivalued right-hand side of at most linear growth with rapidly oscillating coefficients, the convergence of quality criteria, optimal controls, and solutions to the corresponding values of the optimal control problem with averaged parameters was proved both in the case of a finite time interval and on the half-line;
- for the optimal control problem that is linear with respect to the control, in the case of an upper semicontinuous bounded multivalued right-hand side with rapidly oscillating coefficients, the convergence of quality criteria, optimal controls, and solutions to the corresponding values of the optimal control

problem with averaged parameters on an infinite time interval was proved;

— for the optimal control problem for solutions of a differential inclusion nonlinear with respect to the control, with a Lipschitz multivalued right-hand side with rapidly oscillating coefficients, the convergence of quality criteria, optimal controls, and solutions to the corresponding values of the optimal control problem with averaged parameters was proved both in the case of a finite time interval and on the half-line.

The dissertation is theoretical in nature. The results obtained in the work are of significant importance for the qualitative theory of differential equations with a multivalued right-hand side, the theory of optimal control of solutions of differential inclusions, and may be used for the approximate determination of solutions to optimal control problems for differential equations and inclusions with rapidly oscillating variables.

Key words: optimal control, differential inclusion, small parameter, averaging method, approximate solution, multivalued mapping, differential equation with a multivalued right-hand side.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. О.Д. Кічмаренко, Н.В. Касімова, Т.Ю. Жук, *Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами*, Дослідження в математиці та механіці, 2021, Т.26, №1, С. 38–54.
2. О. Д. Кічмаренко, О. А. Капустян, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук, *Задача оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі*, ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, 2020, Т.23, №3, С. 363-372; translation in Journal of Mathematical Sciences (United States), 2023, 272(2), P. 267—277, <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06415-z>.
3. Kasimova, N., Zhuk, T., Tsyganivska, I., *Approximate solution of the optimal control problem for non-linear differential inclusion on the semi-axes*, Georgian Mathematical Journal, 2023, Vol. 30, No. 6, P. 883–889, <https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2054>.
4. Zhuk, T., Kasimova, N., Ryzhov, A., *Application of the Averaging Method to the Optimal Control Problem of Non-Linear Differential Inclusions on the Finite Interval*, Axioms, 2022, 11(11), P. 653, <https://doi.org/10.3390/axioms11110653>.
5. Sergey Dashkovskiy, Oleksiy Kapustyan, Olena Kapustian, Tetyana Zhuk, *Asymptotic analysis of optimal control problems on the semi-axes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 28, No. 6, P. 1077—1088, <https://doi.org/10.15388/namc.2023.28.33435>.
6. T. Yu. Zhuk, *AVERAGED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS ON THE FINITE AND INFINITE INTERVALS*, Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 45(2), P. 75—82, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).75-82](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).75-82).

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. N. V. Gorban, O. V. Kapustyan, T. Y. Zhuk. Approximate Optimal Control on Semi-Axis for the Reaction-Diffusion Process with Fast-Oscillating Coefficients // International Workshop "QUALITDE-2020 Tbilisi State University, Georgia, 2020, P. 78 - 81.
2. Zhuk T. Yu., Kasimova N.V. APPLICATION OF THE AVERAGING METHOD TO THE LINEAR BY CONTROL OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH FAST PARAMETERS // XXXVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021), Austria, Georgia, Ukraine, 2021, P. 121 - 122.
3. Кічмаренко Ольга Дмитрівна, Касімова Ніна Василівна, Жук Тетяна Юріївна. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА ПІВОСІ // Матеріали МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ, ПРИСВЯЧЕНА 75-РІЧЧЮ КАФЕДРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА 85-РІЧЧЮ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ПАВЛОВИЧА ЛЕНЮКА, м. Чернівці, Україна, 2021, С. 84 - 85.
4. O. Kichmarenko, O. Kapustian, N. Kasimova, T. Zhuk. Approximate Solution of Optimal Control Problem for Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Semi-Axis // International Workshop "QUALITDE-2021 Tbilisi State University, Georgia, 2021, P. 101 - 104.
5. Т. Ю. Жук. Задачі оптимального керування на півосі для диференціальних включень зі швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». К.: Київський університет, 2022, С. 12 - 13.
6. O.A. KAPUSTIAN, N.V. KASIMOVA, T.YU. ZHUK. Optimal control problems at the semi-axes for Caratheodory differential inclusions with fastoscillating coefficients // NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS, Ukraine, Kyiv, 2022, P. 24.
7. Oleksii Kapustyan, Anton Ryzhov, Nina Kasimova, Tetyana Zhuk.

Averaging Method to the Optimal Control Problem of a Non-Linear Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Finite Interval // International Workshop "QUALITDE-2022 Tbilisi State University, Georgia, 2022, P. 108 - 111.

8. Nina Kasimova, Tetiana Zhuk, Iryna Tsyganivska. Application of the averaging method to the optimal control problem for nonlinear differential inclusion with fast-oscillating coefficients on the semi-axes // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». К.: Київський університет, 2023, P. 22 - 23.

9. Zhuk T.Yu., Kasimova N.V., Kuppenko O.P., Tsyganivska I.M., Korol A.I. Investigation of solvability and attainability for optimal control problem for non-linear degenerate parabolic variation inequality in the class of H-admissible solutions // XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023), Polyana, Ukraine, 2023, P. 122.

10. Tetiana Zhuk. Optimal control problems on the semiaxes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». К.: Київський університет, 2024, С. 22.

11. Жук Тетяна. Метод усереднення в задачах оптимального керування для диференціальних включень з швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2024, С. 32 - 34.

12. Жук Тетяна. Про наближене оптимальне керування для диференціального включення зі збуреннями в коефіцієнтах та нефіксованим часом // Матеріали V Міжнародної конференції, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 2024, 37 - 38.

13. Жук Тетяна. Застосування методу усереднення в задачі оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної

конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта» (м. Луцьк, Волинська обл., 2025).

Зміст

ВСТУП	14
1 ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ	23
1.1 Задачі оптимального керування. Загальні відомості	24
1.2 Диференціальні включення	29
1.3 Метод усереднення	34
1.4 Висновки до розділу 1	41
2 НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ З АДИТИВНИМ КЕРУВАННЯМ І ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ	42
2.1 Загальний вигляд задач оптимального керування диференціальними включеннями	43
2.2 Допоміжні результати	46
2.3 Метод усереднення диференціальних включень	50
2.4 Задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на скінченному інтервалі	52
2.4.1 Постановка задачі	52
2.4.2 Основний результат	54

2.5	Задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі	62
2.5.1	Постановка задачі	62
2.5.2	Аналіз допустимих пар	64
2.5.3	Основні результати	68
2.6	Задачі оптимального керування диференціальним включенням типу Каратеодорі зі швидкоколивними коефіцієнтами .	73
2.6.1	Постановка задачі	73
2.6.2	Основні результати	76
2.6.3	Приклад	83
2.7	Висновки до розділу 2	84
3	ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ	85
3.1	Задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на скінченному інтервалі	87
3.1.1	Постановка задачі	87
3.1.2	Припущення та позначення	89
3.1.3	Основний результат	92
3.1.4	Приклад	99
3.2	Задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на півосі	100
3.2.1	Постановка задачі	100
3.2.2	Припущення та позначення	102
3.2.3	Основні результати	104
3.3	Висновки до розділу 3	111
	ВИСНОВКИ	112
	СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	115
	ДОДАТОК	124

ВСТУП

Дисертаційна робота присвячена вивченню питань про існування та наближене знаходження розв'язків задач оптимального керування лінійними та нелінійними за керуванням диференціальними включеннями на скінченних та нескінченних інтервалах зі швидкоколивними коефіцієнтами.

Актуальність теми.

Питання існування та наближеного знаходження розв'язку задачі оптимального керування для диференціальних включень, зокрема тих, що є лінійними за керуванням і містять швидкоколивні змінні, на скінченному та нескінченному інтервалах, а також для нелінійних систем, є надзвичайно важливими як з теоретичної, так і з прикладної точки зору.

По-перше, ці питання є фундаментальними в математичній теорії керування, оскільки без гарантії існування та процедури ефективного наближеного знаходження розв'язку побудова ефективного керування стає неможливою. По-друге, диференціальні включення з швидкоосцилюючими коефіцієнтами широко застосовуються для моделювання реальних процесів, зокрема в техніці, економіці та природничих науках, де мають місце швидкоперіодичні зміни або збурення. Саме тому виникає потреба в розробці ефективних підходів до опису їхньої асимптотичної поведінки, зокрема методів усереднення.

Доведення збіжності розв'язків задачі з швидкоколивними параметрами до розв'язків відповідної усередненої задачі не лише обґрунтовує застосування спрощених моделей, а й дозволяє значно знизити обчислювальні витрати. Крім того, встановлення існування оптимального керування забезпечує стабільність та передбачуваність системи, що є критичним для практичного впровадження керуючих стратегій.

Таким чином, дослідження вказаних питань сприяє розвитку як теоре-

тичних основ теорії диференціальних включень, так і прикладних методів керування складними динамічними системами з багатозначною правою частиною.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження виконане відповідно до індивідуального плану аспірантки кафедри інтегральних та диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка, затвердженого вченою радою механіко-математичного факультету, і в рамках державної бюджетної дослідницької наукової теми 21БНН-06 « Виконання завдань перспективного плану розвитку наукового напрямку "Математичні науки і природничі науки" » Київського національного університету імені Тараса Шевченка (номер державної реєстрації 0121U112941), а також в рамках науково дослідної теми 25ГФ038-01 "Нескінченновимірні еволюційні рівняння із багатозначною та стохастичною динамікою"(номер державної реєстрації 0124U003771).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є дослідження існування та наближеного знаходження розв'язків задач оптимального керування лінійними та нелінійними за керуванням диференціальними включеннями на скінченних та нескінченних інтервалах зі швидкоколивними коефіцієнтами.

Основними завданнями даної роботи є:

- дослідити застосування методу усереднення для задач оптимального керування диференціальними включеннями;
- дослідити збіжність розв'язків та значень критеріїв якості задачі оптимального керування, лінійної за керуванням, у випадку ліпшицевої багатозначної правої частини не більш, ніж лінійного росту зі швидкоколивними коефіцієнтами до розв'язків та відповідних значень критеріїв якості задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі;
- дослідити збіжність розв'язків та значень критеріїв якості задачі оптимального керування, лінійної за керуванням, у випадку напівнеперервної

зверху обмеженої багатозначної правої частини зі швидкоколивними коефіцієнтами до розв'язків та відповідних значень критеріїв якості задачі оптимального керування з усередненими параметрами на нескінченному часовому інтервалі;

— дослідити збіжність розв'язків та значень критеріїв якості задачі оптимального керування розв'язками нелінійного за керуванням диференціального включення з ліпшицевою багатозначною правою частиною та швидкоколивними коефіцієнтами до розв'язків та відповідних значень критеріїв якості задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі.

Об'єктом дослідження є задачі оптимального керування диференціальним включеннями зі швидкоколивними коефіцієнтами.

Предметом дослідження є асимптотична поведінка розв'язків задач оптимального керування диференціальними включеннями зі швидкоосцилюючими коефіцієнтами.

Методи дослідження. У процесі дослідження, проведеного у дисертаційній роботі, застосовуються методи теорії диференціальних рівнянь та включень, методи теорії оптимального керування, методи аналізу багатозначних відображень, методи функціонального аналізу.

Наукова новизна отриманих результатів. Всі результати, отримані в дисертаційній роботі, є новими та математично обґрунтованими. Основні з них такі:

— досліджено застосування методу усереднення для задач оптимального керування диференціальними включеннями;

— доведено, що для задачі оптимального керування, лінійної за керуванням, у випадку ліпшицевої багатозначної правої частини не більш, ніж лінійного росту зі швидкоколивними коефіцієнтами, має місце збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі;

— доведено, що для задачі оптимального керування, що є лінійною за керуванням, у випадку напівнеперервної зверху обмеженої багатозначної правої частини зі швидкоколивними коефіцієнтами має місце збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами на нескінченному часовому інтервалі;

— доведено, що для задачі оптимального керування розв'язками нелінійного за керуванням диференціального включення з ліпшицевою багатозначною правою частиною зі швидкоколивними коефіцієнтами, має місце збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі.

Теоретичне та практичне значення отриманих результатів. Дисертаційна робота має теоретичний характер. Отримані в роботі результати мають важливе значення для якісної теорії диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною, теорії оптимального керування розв'язками диференціальних включень, та можуть бути використані для наближеного знаходження розв'язків задач оптимального керування диференціальними рівняннями та включеннями зі швидкоосцилюючими змінними. Вони можуть слугувати теоретичною основою для моделювання та чисельного аналізу керованих процесів зі швидкоосцилюючими змінними, а також в задачах автоматичного керування.

Особистий внесок здобувача. Автором самостійно отримані основні результати роботи, що виносяться на захист і в супервізію наукового керівника О. В. Капустяна, якому належить визначення плану дослідження та загальне керівництво. Результати дисертації здобувачем було опубліковано в 19 наукових працях, з яких 6 статей та 13 тез у матеріалах наукових конференцій. У статтях [11, 69, 72] О.Д. Кічмаренко та О.А. Капустян належить ознайомлення автора з деякими результатами теорії оптимального керування диференціальними рівняннями та застосування до них теорії усереднення, у статтях [25, 60, 69, 72] Н.В. Касімовій належить загальна схема доведення збіжності розв'язків задач Коші збурених багатозна-

чних систем до усереднених значень; у статтях [25, 60] І. Циганівській та А. Рижову належить редакторська допомога в процесі подання рукописів, обговорення відповідей рецензентам, а також обговорення шляхів можливого застосування одержаних результатів; в роботі [11] С.М. Дашковському належить ознайомлення автора з якісною теорією включень типу Каратеодорі та обговорення одержаних результатів.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на таких наукових конференціях та наукових семінарах:

1. International Workshop "QUALITDE-2020 Tbilisi State University, Georgia, 2020.
2. XXXVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021), Austria, Georgia, Ukraine, 2021.
3. МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 75-РІЧЧЮ КАФЕДРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА 85-РІЧЧЮ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ПАВЛОВИЧА ЛЕНЮКА, м. Чернівці, Україна, 2021.
4. International Workshop "QUALITDE-2021 Tbilisi State University, Georgia, 2021.
5. XX Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». Київ, 2022.
6. NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS, Ukraine, Kyiv, 2022.
7. International Workshop "QUALITDE-2022 Tbilisi State University, Georgia, 2022.
8. XXI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». Київ, 2023.
9. XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023), Polyana, Ukraine, 2023.
10. XXII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». Київ, 2024.
11. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2024.
12. V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народжен-

ня Ганса Гана, Чернівці, Україна, 2024.

13. XIV Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2025.

14. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові керівники — професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький і професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. (Київ, 2023, 2026).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані в дев'ятнадцятих наукових працях, з яких шість статей [11, 25, 60, 61, 69, 72] та тринадцять тез у матеріалах наукових конференцій [18, 23, 24, 27, 31, 62–68, 73]. Статтю [69] опубліковано у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б". Статтю [72] надруковано у науковому фаховому виданні України категорії "А", що індексується у наукометричній базі MathSciNet, англomовна версія видання індексована в наукометричній базі Scopus та входить до квартиля Q3. Статтю [25] надруковано у міжнародному журналі, що індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q2. Статтю [60] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q3. Статтю [11] опубліковано у міжнародному журналі, який індексується у наукометричній базі Scopus та Web of Science та входить до квартиля Q2. Статтю [61] опубліковано у виданні, що внесено до переліку наукових фахових видань України категорії "Б".

Обсяг і структура дисертації. Дисертація складається з анотацій українською та англійською мовами, вступу, трьох розділів, розбитих на підрозділи, висновку, списку використаних джерел та додатку, який містить список публікацій здобувача за темою дисертації та відомості про апробацію результатів. Загальний обсяг роботи становить 129 сторінок. Обсяг основного тексту дисертації 101 сторінку. Список використаної літератури займає 9 сторінок і налічує 74 найменування. Додатки займають 6 сторінок і містять список публікацій за темою дисертації та відомості про

апробацію результатів дисертації.

Зміст роботи. У вступі обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами, встановлено мету і завдання, об'єкт, предмет та методи дослідження, наведено наукову новизну та практичне значення отриманих результатів, охарактеризовано особистий внесок здобувача, наведено список конференцій та наукових семінарів, на яких дисертаційна робота пройшла апробацію, та короткий зміст роботи.

У **першому розділі** дисертаційної роботи наведено огляд літератури, що стосується основних об'єктів та методів дисертації, отриманих іншими авторами.

У **другому розділі** дисертації досліджується питання розв'язності задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами лінійної за керуванням

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), x(0, u(0)) = x_0$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t)$ - m -вимірний вектор керування, який належить даній функціональній множині, f - ліпшицеве багатозначне відображення, що має середнє в метриці Хаусдорфа.

Додатково розглянута усереднена задача. В результаті були визначені умови, за яких для оптимального керування u_ε справедлива збіжність $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ в $L_p([0, T])$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, де u_0 - вектор оптимального керування усередненої задачі. Крім того, розв'язок $x_\varepsilon(t)$ відповідної задачі Коші з $u(t) = u_\varepsilon(t)$ збігається рівномірно на $[0, T]$ до $y(t)$ - розв'язку відповідно

усередненої задачі із керуванням $u(t) = u_0(t)$, тобто

$$x_\varepsilon(t) \Rightarrow y(t), \varepsilon \rightarrow 0$$

рівномірно по $t \in [0, T]$. Також встановлено збіжність критеріїв якості.

Отримано подібні результати для задачі оптимального керування зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі з квадратичним цільовим функціоналом. В цьому випадку також отримані відповідні збіжності для критеріїв якості та функцій керування, які в свою чергу гарантують, що якщо усереднена задача має єдиний розв'язок, то визначені збіжності мають місце при всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Окремо розглянуто задачі оптимального керування для диференціального включення типу Каратеодорі, афінного щодо керування з коерцитивним функціоналом вартості на півосі та швидко осцилюючими коефіцієнтами, що залежать від часу. В такому випадку за умови існування середнього в напівметриці Хаусдорфа отримано результат про збіжність критерію якості, фазового вектору та вектору оптимального керування до відповідних параметрів усередненої задачі.

У **третьому розділі** дисертації досліджується задача оптимального керування нелінійною системою диференціальних включень із швидкоосцилюючими параметрами на скінченному інтервалі. Доведено існування розв'язків початкової збуреної задачі оптимального керування та відповідної задачі з усередненими коефіцієнтами. Далі показано, що оптимальне керування задачі з усередненими коефіцієнтами можна розглядати як «приблизно» оптимальне для початкової збуреної задачі.

Далі розглядається задача оптимального керування нелінійною системою диференціальних включень зі швидкозмінними параметрами на півосі. І в ній спочатку доведено існування розв'язків для початкової збуреної задачі оптимального керування та відповідної задачі з усередненими коефіцієнтами. Потім, показано збіжність оптимальних керувань початкової задачі керування до оптимального процесу усередненої задачі та збіжність відповідних функціоналів вартості.

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи.

Подяка. Автор дисертації висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику — доктору фізико-математичних наук, професору Капустяну Олексію Володимировичу — за постановку розглянутих у дисертації задач, постійну підтримку, увагу та допомогу в роботі.

Розділ 1

ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Цей розділ присвячений огляду відомих результатів, що стосуються тематики дисертації.

Як зазначалося у вступі, об'єктом дисертаційного дослідження є задачі оптимального керування диференціальними включеннями зі швидкоколивними коефіцієнтами на скінченному інтервалі та півосі. Предметом ж даного дослідження є розв'язки задач оптимального керування диференціальними включеннями зі швидкоколивними коефіцієнтами.

Важливі результати щодо дослідження розв'язності задач оптимального керування отримані у дисертаційних роботах Ольги Дмитрівни Кічмаренко та Добродзій Тетяни Василівни під керівництвом Олександра Миколайовича Станжицького.

Розвиток аналізу багатозначних відображень і теорії диференціальних включень - диференціальних рівнянь з багатозначною правою частиною, пов'язаний з результатами Ж.-П. Обена та його наукової школи. Значний внесок у розвиток цього напрямку внесли роботи Б.П. Пшеничного, В.С. Мельника та їх учнів, а також роботи В.О. Плотнікова, А.В. Плотнікова, Н.В. Скрипник.

Теорія усереднення для звичайних диференціальних рівнянь та задач керування активно розвивалась в Київській школі нелінійної механіки, зокрема в роботах А.М. Самойленка, М.О. Перестюка, О.М. Станжицького та їх учнів. Для задач керування рівняннями в частинних похідних значний вклад в теорію усереднення внесли роботи П.І. Когута, О.П. Купенко, О.А. Капустян.

1.1 Задачі оптимального керування. Загальні відомості

Задачі оптимального керування є фундаментальним розділом сучасної теорії керування та прикладної математики, що поєднує методи математичного аналізу, диференціальних рівнянь, варіаційного числення, функціонального аналізу, теорії оптимізації та теорії ігор. Основною метою цих задач є визначення закону керування, який забезпечує екстремальне значення заданого функціонала якості при динамічному розвитку системи, що дозволяє переводити систему зі стану початкового у бажаний кінцевий стан або підтримувати оптимальний режим протягом заданого інтервалу часу, а також формалізувати стратегічні рішення у технічних та економічних системах. Математична постановка включає систему диференціальних рівнянь для стану $x(t)$ під дією керування $u(t)$ і обмеження на допустимі значення стану та керування, які можуть включати фізичні, технологічні, економічні або безпекові вимоги. Початкові та кінцеві умови системи можуть бути фіксованими або частково вільними, що визначає складність розв'язку та необхідність введення спряжених змінних у теоретичному аналізі.

Функціонал оптимальності, який оцінює якість керування, зазвичай має інтегральний характер і може включати термінальні складові для оцінки стану системи на кінцевому моменті часу. В економічних застосуваннях функціонал часто інтерпретується як інтеграл дисконтованої корисності, прибутку або доходу, що формалізує часову перевагу ресурсів і дозволяє планувати оптимальні траєкторії економічних змінних у макроекономічних моделях росту, управлінні капіталом, оптимальному споживанні та інвестиційній активності.

Аналітичний апарат теорії оптимального керування базується на принципі максимуму Понтрягіна, який формулює необхідні умови оптимальності через гамільтонову функцію зі станом, керуванням та спряженими змінними. Це дозволяє зводити задачу до системи диференціальних рівнянь зі спряженими змінними, аналіз якої здійснюється методами інтегрування, фазового аналізу та стійкості. Принцип максимуму забезпечує можливість визначення локально оптимальних керувань і дослідження струк-

тури оптимальних режимів, включаючи перемикальні функції у задачах з обмеженнями. Динамічне програмування Беллмана доповнює цей підхід, формулюючи рівняння Гамільтона–Якобі–Беллмана для цільової функції, що дає змогу визначати оптимальні траєкторії стану та керування як функцію часу і стану системи. Це особливо важливо в економіці, де методи оптимального керування застосовуються для аналізу стратегій агентів та довгострокових наслідків їхніх рішень.

Розвиток теорії оптимального керування пов'язаний з працями багатьох видатних математиків і економістів. Окрім вищезгаданих, Френк Пламpton Ремзі запропонував класичну модель оптимального нагромадження капіталу, що стала прикладом економічного застосування методів оптимального керування. М. М. Красовський досліджував стійкість керованих систем і методи оптимального керування для нелінійних систем з обмеженнями.

Сучасна теорія оптимального керування поєднує в собі згадані напрями: принцип максимуму, стійкість, керованість та стабілізацію нелінійних систем, динамічне програмування, чисельні методи, економічні застосування, включаючи оптимізацію портфелів, планування ресурсів і стохастичні системи, та інтегруючі аналітичні методи з чисельними алгоритмами. Вона слугує потужним інструментом для оптимізації складних технічних, економічних та мережевих систем, а також у робототехніці, енергетиці та штучному інтелекті.

Сучасні дослідження в цій галузі також охоплюють чисельні методи високої точності, стохастичне та нелінійне програмування, моделювання складних мережевих систем та інтеграцію з теорією ігор. У прикладній економіці методи оптимального керування використовуються для управління портфелем активів, стратегічного ціноутворення, оптимального виробничого планування, управління запасами та ресурсами, аналізу ризиків і довгострокового планування інвестицій. Теоретичні результати дозволяють прогнозувати поведінку економічних агентів у динамічних системах, визначати оптимальні політики та реагувати на зміни зовнішнього середовища. Методи оптимального керування також інтегруються з теорією ігор, що дозволяє аналізувати стратегічну взаємодію агентів у багатокористувацьких системах.

Завдяки цьому теорія оптимального керування забезпечує універсальний математичний апарат для аналізу, моделювання та оптимізації динамічних систем у техніці, природничих науках та економіці, поєднуючи строгий теоретичний аналіз із практичними застосуваннями для підвищення ефективності, стабільності та безпеки складних систем.

Загалом, теорія оптимального керування забезпечує потужний математичний та аналітичний апарат для дослідження, моделювання та оптимізації динамічних систем у техніці, природничих науках та економіці. Вона дозволяє не лише розробляти теоретично обґрунтовані умови оптимальної поведінки систем та агентів, а й створювати практичні алгоритми для підвищення ефективності, стабільності та безпеки функціонування складних систем, забезпечуючи одночасно глибоке розуміння структурних властивостей оптимальних рішень та їх економічної і технічної інтерпретації.

Теорія оптимального керування є важливим розділом прикладної математики, що поєднує методи варіаційного числення, диференціальних рівнянь, функціонального аналізу та теорії керування. Її метою є визначення такого керування, яке забезпечує оптимальну поведінку динамічної системи відповідно до заданого критерію якості.

У загальному випадку задача оптимального керування формулюється у вигляді знаходження допустимого керування $u(\cdot)$, яке мінімізує функціонал

$$J(u) = \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} L(t, x(t), u(t)) dt, \quad (1.1)$$

за умови, що стан системи задовольняє диференціальне рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

де $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор фазових змінних, $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ — керування, U — множина допустимих керувань.

Залежно від конкретної постановки, у задачі можуть бути присутні:

- обмеження на керування та фазові змінні;
- вільний або фіксований кінцевий момент часу;
- інтегральні, термінальні або комбіновані критерії якості;

- детермінований або стохастичний опис динаміки.

Початки теорії оптимального керування пов'язані з класичним варіаційним численням (Ейлер, Лагранж), однак її сучасний вигляд сформувався у середині ХХ століття. Визначальним результатом стало формулювання принципу максимуму Понтрягіна, який узагальнив необхідні умови екстремуму на випадок систем з керуванням [46].

Паралельно розвивався підхід динамічного програмування, запропонований Р. Беллманом [7], що ґрунтується на принципі оптимальності та приводить до рівняння Гамільтона–Якобі–Беллмана. Цей підхід дозволив сформулювати достатні умови оптимальності, однак на практиці часто стикається з проблемою “прокляття розмірності”.

Протягом десятиліть задачі оптимального керування досліджувалися для різноманітних класів об'єктів. Зокрема, скінченновимірні динамічні системи. Цей клас включає механічні, електромеханічні та аерокосмічні системи, динаміка яких описується звичайними диференціальними рівняннями. Для таких систем були розроблені ефективні аналітичні та чисельні методи синтезу оптимального керування [10].

Для лінійних систем із квадратичним функціоналом якості сформувалася теорія лінійно-квадратичного оптимального керування, що забезпечує існування єдиного оптимального розв'язку у вигляді зворотного зв'язку [2].

Задачі оптимального керування для систем, описуваних рівняннями в частинних похідних (теплопровідність, дифузія, хвильові процеси), розглядаються в рамках функціонально-аналітичних методів [34]. Такі задачі є нескінченновимірними і потребують спеціальних чисельних схем.

У випадку наявності випадкових збурень або шумів виникають задачі стохастичного оптимального керування, що поєднують методи теорії ймовірностей, стохастичних диференціальних рівнянь і динамічного програмування [58].

Методи оптимального керування широко застосовуються в економіці (оптимізація споживання, зростання, інвестицій), екології та медицині, де керування часто має інтерпретацію стратегії прийняття рішень [19, 33].

До найважливіших результатів теорії оптимального керування належать:

- принцип максимуму Понтрягіна як система необхідних умов оптимальності;
- рівняння Гамільтона–Якобі–Беллмана як необхідна та достатня умова оптимальності;
- теореми існування оптимального керування;
- результати про єдиність та стійкість оптимальних розв’язків.

Окрему увагу приділено дослідженню особливих керувань, задач із перемиканнями, а також задач обмеженнями на фазові змінні.

Оскільки аналітичні розв’язки існують лише для обмеженого класу задач, значний розвиток отримали чисельні методи:

- непрямі методи, що базуються на принципі максимуму;
- прямі методи, які зводять задачу до задачі нелінійного програмування;
- гібридні та псевдоспектральні методи [8].

Сучасні дослідження зосереджені на задачах робастного, адаптивного та оптимального керування в умовах невизначеності, а також на інтеграції методів оптимального керування з машинним навчанням та підкріплювальним навчанням.

У низці оглядових статей розроблено систематичну класифікацію методів ADP, зокрема актор–критик алгоритмів, які використовують нейронні мережі для апроксимації функцій вартості та оптимальних стратегій. Доведено умови збіжності та стабільності замкнених систем, а також розглянуто проблеми ідентифікації динаміки та часткової вимірюваності стану.[15, 35, 41]

1.2 Диференціальні включення

У багатьох реальних задачах праві частини диференціальних рівнянь не є однозначно заданими. Невизначеність моделі, шум вимірювань або нечітка експертна інформація породжують ситуації, коли права частина — не функція, а множина або нечітка множина. Це веде до розгляду диференціальних включень. Такі моделі охоплюють ширший спектр невизначеності та дозволяють описати множину можливих траєкторій.

Теорія диференціальних включень є узагальненням класичної теорії диференціальних рівнянь і виникла як відповідь на потребу математичного опису динамічних систем з невизначеністю, множинністю можливих еволюцій або негладкою поведінкою. На відміну від класичних моделей, у яких швидкість зміни стану визначається однозначно, диференціальні включення допускають багатозначну праву частину, що істотно розширює клас допустимих динамічних систем.

Історія теорії диференціальних включень тісно пов'язана з розвитком теорії керування, негладкого аналізу та варіаційних методів.

Перші ідеї, що приводять до багатозначних динамічних систем, з'явилися у середині XX століття у працях, присвячених оптимальному керуванню. У цей період виникла необхідність описувати динаміку систем, у яких керування може набувати значень з деякої множини. Фундаментальний внесок у формування теорії диференціальних включень було зроблено у 1960-х роках. Тоді було запропоновано поняття розв'язку для диференціальних рівнянь з розривною правою частиною, що згодом привело до систематичного вивчення диференціальних включень. Тоді було закладено основи аналізу існування, стійкості та структури множини розв'язків. Подальший розвиток теорії пов'язаний з роботами Жан-П'єра Обена та його школи. Обен сформував сучасну функціонально-аналітичну основу теорії диференціальних включень, зокрема розвинув апарат багатозначних відображень, інтеграла Ауманна та застосування метрики Гаусдорфа. Його монографії стали класичними джерелами для дослідників у цій галузі. Вагомий внесок у розвиток теорії зробили також Френк Кларк та інші дослідники, які поєднали диференціальні включення з варіаційним аналізом, теорією оптимізації та негладким аналізом.

У подальшому диференціальні включення стали базовим інструментом для розвитку теорії оптимального керування, стохастичних і нечітких динамічних систем, а також сучасних моделей робастної динаміки. Сьогодні диференціальні включення є фундаментальним інструментом нелінійного аналізу. Вони лежать в основі теорії оптимального керування, негладких динамічних систем, робастного та адаптивного керування, нечітких і стохастичних моделей.

Диференціальним включенням називається система вигляду

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),$$

де $x(t)$ — функція зі значеннями у фінітновимірному просторі $\mathbb{R}^n$ або у банаховому просторі X , а

$$F : [t_0, T] \times X \rightrightarrows X$$

— багатозначне відображення з непорожніми значеннями [5].

Класичне диференціальне рівняння є окремим випадком диференціального включення, коли $F(t, x)$ складається з одного елемента. Практична цінність таких моделей проявляється у керуванні з обмеженнями, системах із перемиканнями, механіці з тертям, а також у біологічних і економічних моделях з невизначеними параметрами. Диференціальні включення природно виникають у задачах оптимального та робастного керування, механіки негладких систем (сухе тертя, удари), економічної динаміки з множинними рівновагами, біологічного моделювання з невизначеними параметрами, варіаційного аналізу та оптимізації.

Аналіз диференціальних включень базується на використанні простору $K(X)$ непорожніх компактних підмножин банахового простору X , оснащеного метрикою Гаусдорфа d_H . Така структура дозволяє коректно означити неперервність, збіжність і компактність для багатозначних відображень.

Основними умовами на багатозначну праву частину є непорожність, компактність і часто опуклість $F(t, x)$, верхня напівнеперервність по x , вимірність по t , умови лінійного або локального росту. Ці умови є природним узагальненням умов Каратеодорі для звичайних диференціальних рівнянь.

Розв'язком диференціального включення називається абсолютно неперервна функція [5]

$$x : [t_0, T] \rightarrow X,$$

яка задовольняє

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{майже всюди.}$$

Розглядаються різні типи розв'язків, зокрема розв'язки у сенсі Каратеодорі та розв'язки, побудовані за допомогою вимірних селекторів. За стандартних припущень доводиться існування принаймні одного розв'язку для кожної початкової умови. Єдиність, як правило, не гарантується і потребує додаткових структурних припущень. Стійкість і неперервна залежність аналізуються за допомогою узагальнених нерівностей Гронуола та функцій Ляпунова.

Для систем зі швидкозмінною правою частиною застосовується метод усереднення:

$$\dot{x}_\varepsilon(t) \in F\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon(t)\right),$$

який приводить до усередненого включення

$$\dot{y}(t) \in \bar{F}(y(t)),$$

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(s, x) ds.$$

Теорія диференціальних включень є зрілою математичною дисципліною з глибокими історичними коренями та широким спектром застосувань. Вона поєднує класичні методи аналізу з сучасними підходами функціонального та варіаційного аналізу. Її розвиток значною мірою визначив сучасне розуміння динамічних систем з невизначеністю та множинністю можливих еволюцій.

За останні десять років теорія диференціальних включень продовжує активно розвиватися і розширювати свої межі, поєднуючи класичні аналітичні підходи з новими математичними структурами та чисельними методами. Нижче наведено огляд основних напрямів досліджень у цій сфері.

Одним з фундаментальних напрямів є дослідження існування розв'язків

для різних класів диференціальних включень. Для класичних задач, включно з напівнеперервністю зверху правої частини та умовами компактності множин значень, були встановлені основні теореми існування розв'язків та їх застосування до задач оптимального керування опубліковані у журналах SIAM. Крім того, різні підходи, включаючи аналіз у просторі мір, були запропоновані для розширення класичних результатів.

У цьому напрямі вагоме місце займають роботи, які розглядають диференціальні включення як еволюційні рівняння в просторі мір, теореми релаксації та компактності множин розв'язків [9]. Це дозволяє формалізувати та узагальнювати поняття розв'язків для складних нелінійних систем, в тому числі у контексті задач оптимального керування та варіаційних принципів.

У зв'язку з ростом інтересу до моделей з пам'яттю та нерівномірною динамікою великої уваги набули фракційні диференціальні включення. Нові результати зосереджені на існуванні розв'язків для фракційних включень із застосуванням узагальнених операторів, а також на методах чисельного аналізу для таких систем [54]. Такі підходи відкривають перспективи для моделювання складних фізичних та біологічних процесів із некласичною динамікою.

Окрім теоретичних питань, значну увагу приділено розробці аналітичних методів та чисельних алгоритмів для розв'язання диференціальних включень. Зокрема, у контексті негладких систем та оптимального керування було запропоновано чисельні схеми з автоматичним виявленням подій (наприклад, комбінація методів скінченних елементів з детекцією перемикань) для підвищення точності інтегрування та оцінювання чутливості розв'язків [40].

Також варто зазначити розвиток підходів для аналізу зв'язку між диференціальними включеннями та методами оптимізації у багатовимірних просторах, що застосовуються при якісному дослідженні динамічних систем.

У сучасних роботах продовжується розвиток варіаційних методів у теорії диференціальних включень. Наприклад, аналіз лінеаризації диференціальних включень та їхніх властивостей у серії досліджень дозволяє оцінювати

локальні та глобальні властивості розв'язків.

Застосування диференціальних включень в оптимальному керуванні та задачах досяжності залишається напрямом, що інтенсивно розвивається. Нові результати включають аналіз досяжності для лінійних поліедральних систем, стійкість та поведінку систем із використанням бар'єрних функцій, а також оптимальне керування для систем із нелінійними обмеженнями на стан [14].

Окрім того, диференціальні включення продовжують застосовуватися у моделюванні негладких процесів та систем із багатовимірними станами, що характерно для сучасних задач інженерного керування.

Значний інтерес також представляють роботи, що розглядають аналіз безпеки систем через конструкцію бар'єрних функцій для включень, що забезпечують критерії стійкості та безпеки у широкому класі динамічних систем. Такі підходи стають все більш актуальними з огляду на потреби автономатичних систем та робототехніки.

Таким чином, дослідження з диференціальних включень за останні роки продемонстрували значне розширення математичних інструментів, включно з аналітичними, варіаційними та чисельними методами, що дозволяють адекватно описувати складні нелінійні та нерегулярні процеси у різних прикладних контекстах.

1.3 Метод усереднення

Метод усереднення є важливим інструментом в аналізі та розв’язанні задач оптимального керування, зокрема тих, які пов’язані з нелінійними динамічними системами. Він є одним із фундаментальних інструментів асимптотичного аналізу диференціальних систем з малим параметром, що вводить розщеплення часових масштабів: швидкі коливання та повільну еволюцію. Він дозволяє звести дослідження складної нелінійної системи до аналізу простішої усередненої.

Сутність методу полягає у заміні швидко змінної правої частини її середнім по певному періоду, що дозволяє одержати оцінки наближеності розв’язків вихідної і усередненої систем.

Зазвичай початкову систему записують у вигляді

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), \varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1,$$

де t — незалежна змінна, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, а f зазвичай періодична по t з періодом T .

Метод усереднення буде усереднену систему

$$\dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y),$$

$$\bar{f}(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y, 0) ds,$$

значення якої наближують поведінку розв’язків вихідної системи на довгих інтервалах часу $t = \mathcal{O}(1/\varepsilon)$. В умовах гладкості та обмеженості f забезпечується оцінка

$$\|x(t) - y(t)\| = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

для $t \in [0, L/\varepsilon]$, де $L > 0$ є фіксованою константою залежно від обмеженості області, де розглядається задача.

Метод усереднення свої витоки має в працях Юрія Олексійовича Митропольського, який в середині XX століття вперше формалізував підхід усереднення для систем звичайних диференціальних рівнянь з періодичною або швидко змінною правою частиною. Його підхід був спрямований на

отримання асимптотичних розв'язків і аналіз стійкості рівноважних станів у присутності слабких збурень.

Паралельно з розвитком асимптотичних методів у класичній механіці, цей підхід поширювався на нелінійну динаміку і коливальні системи. Усереднення стало ключовим методом у вивченні повільної еволюції амплітуд і фаз коливань у системах з малим параметром у правій частині.

Метод усереднення перекочував із класичних задач нелінійних коливань у більш загальні постановки, такі як диференціальні рівняння з імпульсною дією та граничними умовами, системи із запізненням аргументу, задачі оптимального керування з швидкозмінними параметрами, диференціальні включення та нечіткі моделі, стохастичні і багатofакторні системи.

Основними результатами є оцінки наближення розв'язків вихідної системи та усередненої моделі для малих ε , які забезпечують точність наближення на інтервалах часової довжини $\mathcal{O}(1/\varepsilon)$.

Один із напрямів застосування — крайові задачі для систем із імпульсними збуреннями в нелінійних диференціальних рівняннях. Використання методу усереднення дозволяє звести складну систему з негладкими імпульсними умовами до аналізу більш простої усередненої крайової задачі. Якщо усереднена крайова задача має розв'язок, то існує розв'язок оригінальної задачі, що лежить у малому околі від усередненого.

Метод усереднення яскраво представлений у дослідженні Тетяни Василівни Добродзій, що представлено у її дисертації. Там вона розглядає застосування даного методу для задач оптимального керування звичайними диференціальними рівняннями. Як результат наданого дослідження, отримано факт наближення розв'язків точної та усередненої задач в лінійному і нелінійному випадках та отримано оцінки близькості розв'язків та критеріїв якості точної та усередненої задач. Варто зауважити, що дані результати мають місце як на скінченному часовому інтервалі, так і на півосі. Як бачимо, разом із Олександром Миколайовичем Станжицьким вони розробили підходи до усереднення в оптимальному керуванні на необмежених часових інтервалах, що є важливим узагальненням класичної теорії усереднення для задач із нескінченним горизонтом оптимізації.

Ще одним із прикладів застосування методу усереднення є наукова

діяльність Ольги Дмитрівни Кічмаренко, яка у своїй докторській дисертації (науковий консультант - Олександр Миколайович Станжицький) розглянула застосування методу усереднення у задачах оптимального керування функціонально-диференціальними системами.

У своїй кандидатській дисертації вона розвинула підґрунтя для усереднення в задачах керування системами із запізненням, формалізувавши усереднення для багатокритеріальних задач керування на часових шкалах, обґрунтувавши схеми часткового та повного усереднення та застосувавши метод до квазідиференціальних рівнянь з відхиленням аргументом. У подальшому в докторській дисертації вона розширила асимптотичний аналіз задач оптимального керування диференціальними та функціонально-диференціальними системами із малими параметрами в правих частинах.

Ряд публікацій О.Д. Кічмаренко присвячено узагальненню методу усереднення для дискретних та функціонально залежних систем, включаючи системи з максимумом у правій частині, що демонструє гнучкість методу при переході від класичних диференціальних рівнянь до складніших нелінійних моделей.

Обидва підходи, як у публікаціях О.Д. Кічмаренко, так і в роботах Т.В. Добродзій та їх колег, демонструють, що метод усереднення:

- є ефективним інструментом для редукції складних систем до простіших усереднених моделей;
- дозволяє отримати оцінки збіжності траєкторій та керувань у присутності швидкоосцилюючих коефіцієнтів;
- забезпечує конструктивні схеми побудови керувань для задач оптимального керування;
- відкриває шлях до чисельних реалізацій та алгоритмічних процедур для практичного застосування в інженерних задачах.

У сукупності, зазначені дисертаційні й публікаційні результати підкреслюють важливість методу усереднення в сучасних математичних дослідженнях, зокрема у задачах теорії керування та аналізу складних динамічних систем. Більше того, дані дослідження свідчать про розвиток методу

усереднення не лише в контексті класичних диференціальних рівнянь, а й у сучасних задачах оптимального керування та диференціальних включень.

Одним із перших і найчастіше цитованих застосувань методу усереднення є знаходження періодичних рішень у системах з малим параметром. Часто до таких задач належать коливальні системи, наприклад маятники або осцилятори. У класичному прикладі схеми усереднення були застосовані для неперервно збуреного згасаючого маятника, де існування та поведінку періодичних рішень встановлюють шляхом аналізу усередненої системи.

Також даний метод застосовується для нелінійних систем із блоками Жордана, де принцип усереднення застосовано до систем з чисто уявними власними значеннями, що ускладнює стандартні підходи. Автори використовують нормальну форму Пуанкаре для спрощення системи і демонструють, що метод усереднення дозволяє отримати наближені рівняння для повільних змін параметрів.

Метод усереднення також ефективний для систем з дискретними або імпульсними діями. Наприклад, у [50] розглядаються крайові задачі для диференціальних рівнянь з ненульовими (нефіксованими) моментами імпульсної дії, і показано, що при наявності розв'язку для усередненої крайової задачі існує розв'язок і для оригінальної імпульсної системи.

У подібному контексті [51] використано усереднення для аналізу систем з імпульсними збуреннями в момент часу, які описують моделі об'єктів із короткочасними впливами. Метод дозволяє встановити збіжність рішень оригінальної та усередненої систем і досліджувати їхню асимптотичну стабільність.

У дискретних моделях із постійним запізненням метод усереднення використовується для побудови наближених рішень і оцінок близькості між точними та усередненими траєкторіями. Такий підхід був розвинений для дискретних рівнянь із залежністю від малих параметрів, де усереднення дозволяє спростити аналіз складних залежностей від запізнень [71].

Крім того, метод застосовують до задач усереднення нечітких інтегральних рівнянь з запізненням. Ці задачі виникають у теорії флуктуаційних процесів, інтегральних рівняннях теорії фільтрації та динаміці рідин, де усереднення дозволяє перейти від складної інтегральної форми до ефе-

ктивнішої усередненої моделі.

У випадку стохастично збурених систем усереднення є невід’ємним інструментом для зниження розмірності і побудови простіших описів. Метод стохастичного усереднення розглядається як спосіб видалення швидких випадкових компонентів, зберігаючи ефект їхнього внеску у повільну динаміку [14]. Це важливо при моделюванні нелінійних систем із шумами або випадковими флуктуаціями, де пряма інтеграція початкової системи надто складна.

Метод усереднення має широкі застосування у механіці, зокрема в аналізі руху механічних систем із сухим тертям або вібраційними приводами. Наприклад, у роботі розглядається побудова другого наближення методом усереднення для системи вертикальних та горизонтальних коливань, що описує рух механізму з сухим тертям. Усереднений аналіз дозволив отримати формулу для середньої швидкості руху та порівняти її з результатами чисельних симуляцій.

Більш загально, у механіці та теорії керування усереднення застосовується для проектування систем із високочастотними впливами (так зване вібраційне керування), де правильний вибір усередненого моделі дозволяє спростити задачу стабілізації або оптимального регулювання.

Метод усереднення активно застосовується і в задачах оптимального керування, зокрема для систем із швидкозмінними параметрами або періодичними збуреннями. Наприклад, в останніх роботах усереднення використовується для знаходження наближених рішень у оптимальному контролі параболічних диференціальних включень з високочастотними компонентами [26]. Такий підхід дозволяє вирішувати задачі оптимального керування із складними залежностями через розв’язання простіших усереднених задач.

Сучасний розвиток методу усереднення включає високоточні схеми усереднення (наприклад, друге наближення, що враховує взаємодію між швидкими та повільними режимами), а також алгоритмічні реалізації для чисельних симуляцій [3]. Це важливо для задач із мультишкальною структурою, де класичне усереднення дає грубе наближення, а високопорядкові методи дозволяють значно покращити точність.

Приклад (усереднення для дискретної системи з малим параметром).

Розглянемо систему дискретних рівнянь із постійним запізненням і малим параметром ε :

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon f(x_n, x_{n-\tau}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

де τ — затримка.

Усереднений опис цієї системи дається рівнянням

$$\bar{x}_{n+1} = \bar{x}_n + \varepsilon \bar{f}(\bar{x}_n),$$

де $\bar{f}$ є середнім значенням f щодо фазових змінних.

Така редукція суттєво спрощує вивчення асимптотичної поведінки розв'язків оригінальної дискретної системи на великих часових масштабах [71].

Метод усереднення відіграє ключову роль у сучасному аналізі диференціальних систем з малим параметром, дозволяючи спростити складну динаміку шляхом заміни її усередненим еквівалентом. Він має глибоку історичну основу й широкий спектр застосувань: від класичних коливальних систем до задач оптимального керування, диференціальних включень та імпульсних систем.

Внески українських дослідників, зокрема О. М. Станжицького, О. Д. Кічмаренко та інших сприяють розвитку методу в напрямі усереднення в складніших системах із запізненнями, часовими шкалами та функціонально-диференціальними залежностями. Таким чином, метод усереднення є не лише теоретично важливим, але й практично значущим інструментом, який сприяє розвитку сучасної науки та техніки.

Метод усереднення є універсальним інструментом для якісного та кількісного аналізу нелінійних динамічних систем, що містять швидкі і повільні часові шкали або періодичні збурення. Застосування варіюється від коливальних механічних систем і стохастичних моделей до крайових задач, імпульсних систем і задач оптимального керування.

Сучасні дослідження зосереджені на розробці високопорядкових методів усереднення, теоретичних обґрунтуваннях для складних систем та чисель-

них алгоритмах для практичних застосувань.

Таким чином, метод усереднення слід розглядати не лише як техніку асимптотичного спрощення рівнянь, а як самостійний концептуальний підхід до аналізу динамічних процесів із прихованою багатомасштабною структурою. Його застосування дозволяє виявляти ефективні закони еволюції системи, які не є очевидними з початкової постановки задачі, особливо у випадках швидких коливань, імпульсних впливів або складних обмежень. Важливою перевагою методу є можливість перенесення результатів якісного аналізу усередненої моделі на вихідну систему, що робить його цінним інструментом у побудові наближених моделей, теоретичному обґрунтуванні чисельних алгоритмів та формуванні інтуїції щодо поведінки складних нелінійних систем.

1.4 Висновки до розділу 1

Цей розділ є допоміжним і не містить нових результатів.

В даному розділі розглянуто поняття, що є основними об'єктами у даному дисертаційному дослідженні, наведено відомі результати, що можуть бути допоміжними. Також у ньому наведені факти, що вказують на актуальність даної проблематики, новизну задач. У пункті 1.1 розглянуто загальний огляд, що стосується задач оптимального керування. У пункті 1.2 наведено аналіз, що стосується диференціальних включень, для яких розглядаються задачі оптимального керування. У пункті 1.3 розглянуто ідею методу, що є основним у доведенні результатів даної дисертації.

Розділ 2

НАБЛИЖЕНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ З АДИТИВНИМ КЕРУВАННЯМ І ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У цьому розділі досліджується питання про обґрунтування методу усереднення до наближеного розв'язання задачі оптимального керування для диференціального включення, лінійного за змінною керування, та зі швидкоколивними коефіцієнтами. Для багатозначної ліпшицевої правої частини на скінченному часовому проміжку для загального корцитивного функціоналу, та на нескінченному часовому проміжку для квадратичного функціоналу обґрунтовано збіжність оптимальних керувань і оптимальних траєкторій розв'язків точної задачі до оптимального керування і траєкторій усередненої задачі. Також було розглянуто задачу оптимального керування на півосі з мноозначною правою частиною типу Каратеодорі.

2.1 Загальний вигляд задач оптимального керування диференціальними включеннями

Як згадувалося в попередньому розділі, метод усереднення є одним із найбільш відомих і добре вивчених асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь і має багато застосувань у класичних [48] і сучасних проблемах [53]. Цей метод дозволяє нам подолати труднощі, що виникають через наявність (швидкоосцилюючих) функцій, таких як $f(\frac{t}{\varepsilon}, x)$ з малим параметром $\varepsilon > 0$, що описують динаміку системи, замінюючи їх усередненим значенням

$$\bar{f}(x) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt. \quad (2.1)$$

Відповідні результати збіжності, є відомими теоремами [47], і послужили основою для глибоких узагальнень багатьох типів еволюційних проблем. Зокрема, значні зусилля були присвячені розширенню методів усереднення для диференціальних включень [4].

Такі узагальнення мотивовані як з практичної точки зору, так і застосуванням в теорії управління, гібридних динамічних системах, у тому числі імпульсивних [16], [13] та інших еволюційних системах, де природним чином виникає багатозначний підхід; а також через суто математичні причини, наприклад, коли обмеження (2.1) не існує.

Досить загальні результати про асимптотичний аналіз включень, які не потребують наявності класичного усередненого значення, були отримані в [16]. Ці результати ґрунтуються на понятті верхньої межі Куратовського.

У даному пункті ми по суті використовуємо цей підхід, застосовуючи його до задачі оптимального керування для диференціального включення

$$\dot{x}(t) \in f(\frac{t}{\varepsilon}, x(t)) + g(x(t))u(t), \quad t \geq 0 \quad (2.2)$$

де $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv } \mathbb{R}^d$ є заданим багатозначним відображенням, $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ є заданим матричним відображенням, і $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ є функцією керування. Тут $\text{conv } \mathbb{R}^d$ позначає множину всіх непорожніх опуклих компактних підмножин $\mathbb{R}^d$ та $d, m \in \mathbb{N}$.

Існує багато результатів усереднюючого типу для задач керування у ви-

падку диференціальних включень, таких як

$$\dot{x}(t) \in \varepsilon f(t, x(t), u(t)), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

див., наприклад, [16].

Розгорнутий огляд теорії усереднення для диференціальних включень, включаючи задачі керування для (2.3), наведено в [16]. Асимптотичний аналіз задач типу (2.2) було проведено в [28] для звичайних диференціальних рівнянь з функцією Ліпшиця f як на скінченних, так і на нескінченних інтервалах часу. Автори [28] припускали існування класичного усереднення $\bar{f}$ і використовували теорему Красносельського–Крейна. Цей підхід природним чином узагальнюється на системи з ліпшицевими багатозначними відображеннями, які мають усереднення $\bar{f}$ у метриці Хаусдорфа (див. [45] для багатозначного аналога теореми Красносельського–Крейна).

Ситуація суттєво ускладнюється, якщо у (2.2) відображення f не є ліпшицевим. У цій роботі ми розглядаємо випадок, коли f у (2.2) є каратеодорієвим багатозначним відображенням, тобто воно є інтегровно обмеженим щодо часової змінної та напівнеперервним зверху щодо фазової змінної. Слідуючи підходу з [16], ми покажемо, що за умов, необхідних для розв’язності задачі оптимального керування з включенням (2.2), оптимальний процес задачі, що залежить від ε , збігається у відповідному сенсі до оптимального процесу задачі оптимального керування для включення

$$\dot{x} \in \bar{f}(x) + g(x)u(t),$$

де $\bar{f}$ є верхньою границею Куратовського [5].

Надалі ми використовуватимемо таке позначення: $|x|$ — норма $x \in \mathbb{R}^d$, $|u|$ — норма $u \in \mathbb{R}^m$, $\text{conv } \mathbb{R}^d$ — множина всіх непорожніх, опуклих, компактних підмножин $\mathbb{R}^d$. Для $A \subset \mathbb{R}^d$ позначаємо $\|A\|_+ := \sup_{a \in A} \|a\|$, $\text{co}A$ — опукла оболонка множини A , $\bar{A}$ — замикання множини A . Для $A, B \subset \mathbb{R}^d$ позначаємо

$$\text{dist}(A, B) := \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|$$

$$\text{dist}_H(A, B) := \max\{\text{dist}(A, B), \text{dist}(B, A)\},$$

а також використовуємо позначення

$$B_1 := \{x, |; ||x|| \leq 1\},$$

$$O_\delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

Для $f : [0, \infty) \mapsto conv(R^n)$ визначаємо

$$\int_0^T f(t)dt := \left\{ \int_0^T l(t)dt \mid l \in L^1(0, T; \mathbb{R}^d), l(t) \in f(t) \text{ a.e.} \right\}.$$

Також позначаємо $|u|_{L^2}^2 = \int_0^\infty |u(t)|^2 dt$.

2.2 Допоміжні результати

Нехай A і B - непорожні, замкнені множини в метричному просторі $\mathbb{R}^n$. Розглянемо наступні величини, що характеризують близькість A і B :

$$\beta(A, B) = \sup_{a \in A} \rho(a, B), \beta(B, A) = \sup_{b \in B} \rho(b, A)$$

$$\begin{aligned} \alpha(A, B) &= \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\} = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\} = \\ &= \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \rho(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \rho(b, a)\} \end{aligned}$$

Зокрема, маємо, що $\alpha(A, B) = \alpha(B, A)$.

Означення 2.2.1. [5] Величину $\alpha(A, B)$ називають відхиленням множин A і B за Хаусдорфом або хаусдорфовою відстанню між A і B .

Розглянемо деякі властивості багатозначних функцій. Кожній точці p із множини $B \in \mathbb{R}^d$ поставимо у відповідність непорожню замкнену множину $F(p) \subset \mathbb{R}^n$. Тоді $F(p)$ - багатозначна функція. Її графік - множина таких точок $(p, q) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, що $p \in D, q \in F(p)$.

Надалі використовуватимемо наступні позначення:

$$F(M) = \bigcup_{p \in M} F(p), |F(M)| = \sup_{y \in F(M)} |y|.$$

Означення 2.2.2. [5] Багатозначна функція F називається обмеженою на множині M , якщо $|F(M)| < \infty$, тобто якщо всі значення функції F в точках множини M містяться у деякій кулі.

Означення 2.2.3. [5] Багатозначна функція $F(p)$ називається:

- α - неперервною в точці p , якщо

$$\alpha(F(p'), F(p)) \rightarrow 0, p' \rightarrow p;$$

- β - неперервною (або напівнеперервною зверху відносно включення) в точці p , якщо

$$\beta(F(p'), F(p)) \rightarrow 0, p' \rightarrow p.$$

Функція $F(p)$ називається α - або β - неперервною на множині D , якщо вона α - або β - неперервна в кожній точці цієї множини.

Зауваження 2.2.1. Оскільки $\beta(A, B) \leq \alpha(A, B)$, то із α - неперервності функції випливає її β - неперервність.

Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (2.4)$$

Означення 2.2.4. [5] Розв'язком диференціального включення (2.4) називається абсолютно неперервна функція $x(t)$ визначена на інтервалі або відрізку і майже скрізь задовольняє включення (2.4).

Означення 2.2.5. [5] Будемо казати, що багатозначна функція $F(t, x)$ в області G задовольняє основні умови, якщо при всіх $(t, x) \in G$ множина $F(t, x)$ - непорожня, обмежена, замкнена, опукла і F - β - неперервна по t, x .

Теорема 2.2.1. [5] Нехай $F(t, x)$ задовольняє основні умови і області G . Тоді для довільної точки $(t_0, x_0) \in G$ $\exists$ розв'язок задачі

$$\dot{x} \in F(t, x), x(t_0) = x_0. \quad (2.5)$$

Якщо область G містить циліндр $z(t) \leq t \leq t_0 + a, |x - x_0| \leq b$, то розв'язок існує принаймні на відрізку

$$t_0 \leq t \leq t_0 + d, d = \min\{a, \frac{b}{m}\}, m = \sup_z |F(t, x)|.$$

Означення 2.2.6. [4, 9] Нехай задана послідовність множин $F_i \in \text{сotr } \mathbb{R}^n$ - сукупність непорожніх комформних підмножин в $\mathbb{R}^n$.

- Верхньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх часткових границь таких послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i . Позначається

$$\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} F_i$$

- Нижньою топологічною границею послідовності $\{F_i\}$ називається сукупність всіх границь збіжних послідовностей $\{f_i\}$, що $f_i \in F_i$ для всіх i . Позначається

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i$$

- Якщо обидві границі існують і

$$\lim_{i \rightarrow \infty} F_i = \overline{\lim_{i \rightarrow \infty} F_i} = F,$$

то множина F називається границею послідовності $\{F_i\}$. В цьому випадку

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha(F_i, F) = 0.$$

Означення 2.2.7. [6] Нехай $F : \mathbb{R}^1 \rightarrow \text{сотр}(\mathbb{R}^n)$ - багатозначне відображення. Інтегралом від відображення $F(t)$ на відрізку часу $[t_0, t_1]$ називається множина

$$G = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \left\{ \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt : f(t) \in F(t) \right\} \quad (2.6)$$

Теорема 2.2.2. (Красносельського-Крейна для диференціальних включень)[44, 45]

Нехай для диференціального включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \quad (2.7)$$

де багатозначне відображення $F(t, x, \lambda)$, що приймає значення в $\text{сopv}(\mathbb{R}^n)$ (підпростір із $\text{сотр}(\mathbb{R}^n)$, що складається із опуклих множин), визначене при $0 \leq t \leq T, x \in D, D$ - обмежена область в $\mathbb{R}^n, \lambda \in \Lambda$ - деяка множина значень параметра λ , що має $\lambda_0 \in \Lambda$ граничною точкою, виконуються наступні умові:

- а) багатозначне відображення $F(t, x, \lambda)$ рівномірно обмежене, неперерв-

не по t , рівномірно неперервне по x рівномірно відносно t і λ : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in [0, T], x \in D, x' \in D$ і $\lambda \in \Lambda$ виконується

$$\alpha(F(t, x', \lambda) - F(t, x, \lambda)) < \varepsilon,$$

як тільки $|x' - x| < \delta$;

б) багатозначне відображення $F(t, x, \lambda)$ - інтегрально неперервне по λ в точці λ_0 , тобто для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ і довільного $x \in D$ виконується умова

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \alpha\left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda_0) ds\right) = 0, \quad (2.8)$$

де інтегральні включення в сенсі Означення 2.7;

в) розв'язки $x(t, \lambda_0)$ включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda_0), \quad (2.9)$$

що задовольняють умову $x(0, \lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$, визначені при $0 \leq t \leq T$ і лежать разом з деяким ρ -околом в області D .

Тоді кожному $\eta > 0$ відповідає такий окіл $U(\lambda_0)$ точки λ_0 , що при $\lambda \in U(\lambda_0)$ для довільного розв'язку $x(t, \lambda)$ (2.7), визначеного при $0 \leq t \leq T$ і такого, що задовольняє початкову умову $x(0, \lambda) = x_0$, існує такий розв'язок $x(t, \lambda_0)$ включення (2.9), що справедлива нерівність $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \eta, 0 \leq t \leq T$.

2.3 Метод усереднення диференціальних включень

Розглянемо диференціальне включення

$$\dot{x} \in \varepsilon X(t, x), X(0) = x_0, \quad (2.10)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$ - малий параметр.

Включенню (2.10) поставимо у відповідність усереднене диференціальне включення

$$\dot{y} \in \varepsilon X_0(y), y(0) = x_0, \quad (2.11)$$

де

$$X_0(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(t, x) dt \quad (2.12)$$

Збіжність в (2.12) розуміється у сенсі метрик Хаусдорфа, а інтеграл від багатозначного відображення $X(t, x)$ розуміється в сенсі Означення 2.7. Сформулюємо аналог теореми для диференціальних включень, що відповідає Теоремі 2.2.2.

Теорема 2.3.1. [44] *Нехай в області $Q = \{t \geq 0, x \in D \subset \mathbb{R}^n, D\}$ - обмежена область Y для диференціального включення із (2.10) виконані наступні умови:*

- а) багатозначне відображення $X : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ рівномірно обмежене, неперервне за t і рівномірно неперервне за x рівномірно відносно t ;*
- б) для всіх $x \in D$ існує границя (2.12);*
- в) розв'язки у (б) включення*

$$\frac{dy}{d\tau} \in X_0(y), y(0) = x_0 \in D^{-1} \subset D, \delta = \varepsilon t, \quad (2.13)$$

визначені при $0 \leq \tau \leq L$ і лежать разом з ρ -околом в D .

Тоді для довільного $\eta > 0$ існує таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для довільного розв'язку $x(t, \varepsilon)$ включення із (2.10), що задовольняє умову $x(0, \varepsilon) = x_0$, існує розв'язок включення (2.13) такий, що на проміжку $[0, L\varepsilon^{-1}]$ справедлива нерівність $\|x(t, \varepsilon) - y(\varepsilon, t)\| < \eta$.

2.4 Задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на скінченному інтервалі

2.4.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування зі швидкоколивними змінними, лінійну за керуванням

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), x(0, u(0)) = x_0 \quad (2.14)$$

із критерієм якості

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf \quad (2.15)$$

Також для задачі (2.14) розглянемо квадратичний за керуванням критерій

$$J_\varepsilon[u] = \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)) \rightarrow \inf \quad (2.16)$$

Тут $\varepsilon > 0$ - малий параметр, $T > 0$ - задана стала, x - фазовий вектор в $\mathbb{R}^d$, $u(t)$ - m -вимірний вектор керування, який належить даній функціональній множині.

За умови існування рівномірного за $x \in \mathbb{R}^d$ середнього

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt = f_0(x), \quad (2.17)$$

де $f_0(x)$ - однозначне відображення, задачі оптимального керування (2.14), (2.15) зі швидкоколивними коефіцієнтами ставиться у відповідність на

$[0, T]$ більш проста задача оптимального керування

$$\dot{y} = f_0(y) + f_1(u)u(t), y(0, u(0)) = x_0 \quad (2.18)$$

із критерієм якості

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, y(t)) + B(t, u(t))] dt + \Psi(y(T)) \rightarrow \inf \quad (2.19)$$

або

$$J_0[u] = \int_0^T [A(t, y(t)) + u^2(t)] dt + \Psi(y(T)) \rightarrow \inf \quad (2.20)$$

2.4.2 Основний результат

Для параметрів задачі (2.14) - (2.15) будемо вважати виконаними наступні умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями є m - вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0, T])$, $p > 1$, які приймають значення в замкненій, опуклій множині $V \subset \mathbb{R}^m$.

Для задачі (2.14), (2.15) допустимими керуваннями будемо вважати m - вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L_p([0, T])$, які приймають значення в замкненій опуклій множині $u \subset \mathbb{R}^m$.

Умова 2. Багатозначна функція $f(t, x) (f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^d))$ визначена і неперервна за сукупністю змінних в Q , а $d \times m$ - неперервна матриця f_1 визначена при $x \in \mathbb{R}^d$ і виконані умови:

- 1) $f(t, x)$ в області Q задовольняє умову лінійного росту за x із константою M , тобто

$$|f(t, x)|_+ := \sup_{\xi \in f(t, x)} |\xi| \leq M(1 + |x|) \quad \forall (t, x) \in Q;$$

- 2) $f(t, x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовільняють умову Ліпшиця за x із константою λ , тобто

$$\alpha(f(t, x), f(t, x')) \leq \lambda |x - x'|,$$

$$|f_1(x) - f_1(x')| \leq \lambda |x - x'|.$$

Умова 3. Рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ існує границя (2.17)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt = f_0(x),$$

де інтеграл розуміється в сенсі Аумана (Означення 2.7), а збіжність - в сенсі метрики Хаусдорфа (Означення 2.6), функція $f_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ - однозначна.

Умова 4. Скалярні функції $A(t, s)$ і $B(t, u)$ визначені при $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in V$ і неперервні за сукупністю змінних причому:

- 1) $A(t, x) \geq 0$, $B(t, u) \geq a|u|^p$ для деякої сталої $a > 0$ і для кожного $t \in [0, T]$ функція $B(t, u)$ - опукла за $u \in V$;
- 2) функція $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^1$ - неперервна за x та невід'ємна.

Зауваження 2.4.1. В силу умов на $f(t, x)$ і $f_1(x)$ маємо, що $\forall \varepsilon > 0$ і для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (2.14) існує на $[0, T]$.

При цьому $x(t, u)$ - абсолютно неперервна функція. Із умов 2, 3 випливає, що f_0 також задовольняє умову Ліпшиця з константою λ . Тому для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок задачі Коші (2.18) $y(t, u)$ існує, єдиний на $[0, T]$ і є абсолютно неперервною функцією. Тому критерії (2.15), (2.16), (2.19), (2.20) мають сенс при всіх допустимих керуваннях.

Сформулюємо наступний результат щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші, одержаний в співавторстві з Н.В. Касімовою. Оскільки ключові оцінки, які одержуються в процесі доведення, будуть використані в подальших результатах, доведення наводиться в повному обсязі.

Теорема 2.4.1. Нехай виконані умови 1-3. Тоді, якщо послідовність $u_\varepsilon \xrightarrow{w} u_0$ в $L_p([0, T])$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то розв'язок $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (2.14) з керуванням $u(t) = u_\varepsilon(t)$ збігається рівномірно на $[0, T]$ до $y(t)$ - розв'язку відповідної задачі Коші (2.18) із керуванням $u(t) = u_0(t)$, тобто

$$x_\varepsilon(t) \Rightarrow y(t), \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.21)$$

рівномірно по $t \in [0, T]$.

Доведення. Множина звичайних розв'язків диференціального включення із (2.14) співпадає з множиною узагальнених розв'язків [19], яка визначається як множина неперервних функцій $x_\varepsilon(t)$, що задовольняють включення

$$x_\varepsilon(t) \in x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon}, x_\varepsilon(s)\right) ds + \int_0^t f_1(x_\varepsilon(s))u_\varepsilon(s)ds. \quad (2.22)$$

В силу умов 1 і 2 отримаємо, що

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + \int_0^t M(1 + |x_\varepsilon(s)|)ds + \\ + \int_0^t (\|f_1(0)\| + \lambda|x_\varepsilon(s)|)|u_\varepsilon(s)|ds$$

або

$$|x_\varepsilon(t)| \leq |x_0| + \int_0^t (M + \|f_1(0)\||u_\varepsilon(s)|)ds + \\ + \int_0^t (M + \lambda|u_\varepsilon(s)|)|x_\varepsilon(s)|ds. \quad (2.23)$$

Використавши нерівність Гронуолла, будемо мати:

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_0| + M + \|f_1(0)\|T^{1/q}) \cdot e^{MT + \lambda T^{1/q}\|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]}} \quad (2.24)$$

Зі слабкої збіжності u_ε до u_0 випливає сильна обмеженість u_ε , тобто

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|u_\varepsilon\|_{L_p[0,T]} < \infty,$$

а тому із (2.23) отримаємо, що $\exists L > 0$:

$$|x_\varepsilon(t)| \leq L \quad (2.25)$$

для всіх $\varepsilon > 0$ і $t \in [0, T]$. Таким чином, маємо рівномірну обмеженість сім'ї $\{x_\varepsilon(t)\}$.

Обґрунтуємо рівностепеневу неперервність сім'ї $x_\varepsilon(t)$ на $[0, T]$. Для довільних $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, використовуючи (2.23) і (2.25), маємо:

$$|x_\varepsilon(t_2) - x_\varepsilon(t_1)| \leq \int_{t_1}^{t_2} M(1 + L)ds + \int_{t_1}^{t_2} (\|f_1(0)\| + \lambda L)|u_\varepsilon(s)|ds \leq$$

$$\leq M(1 + L)(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1)^{1/q}(\|f_1(0)\| + \lambda L) \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_\varepsilon(s)|^p ds \right)^{1/p},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Тоді в силу теореми Арцела існує підпослідовність $x_{\varepsilon_n}(t)$ послідовності $x_\varepsilon(t)$, яка рівномірно на $[0, T]$ збігається до деякої функції $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Із (2.22) маємо:

$$\begin{aligned} x_{\varepsilon_n}(t) &\in x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right) ds + \int_0^t f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) u_{\varepsilon_n}(s) ds \pm \\ &\pm \int_0^t f_1(x_0(s)) u_{\varepsilon_n}(s) ds = x_0 + \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right) ds + \int_0^t \\ &+ \int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s))) u_{\varepsilon_n}(s) ds. \end{aligned} \quad (2.26)$$

В силу умови 2 для функції $f(t, x)$ маємо виконання умови а) Теореми 2.2.2. Зокрема з пункту 1) умови 2 випливає рівномірна обмеженість $f(t, x)$, а із пункту 2) умови 2 маємо рівномірну неперервність $f(t, x)$ по x .

Перевіримо інтегральну неперервність функції $f\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, x\right) := Y(\varepsilon_n, x)$. За умови виконання (2.17), поклавши $f_0 = Y(s, x, 0)$, будемо мати:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^t Y(s, x, \varepsilon_n) ds &= \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x\right) ds = \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^{t/\varepsilon_n} f(\theta, x) d\theta = \\ &= t \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \frac{1}{t/\varepsilon_n} \int_0^{t/\varepsilon_n} f(\theta, x) d\theta = \int_0^t f_0(x) ds = \int_0^t Y(s, x, 0) ds, \end{aligned}$$

де граничне від багатозначних відображень розуміється в сенсі Означення 2.6.

Таким чином, маємо виконання умови б) Теореми 2.2.2. В силу умови 5 маємо виконання умови в) Теореми 2.2.2.

Аналогічно до доведення Теореми 2.2.2, проведеного, зокрема, в [4; 18], можна показати, що

$$\alpha\left(\int_0^t f\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_{\varepsilon_n}(s)\right) ds, \int_0^t f_0(x_0(s)) ds\right) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Далі в силу слабкої збіжності маємо:

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^t f_1(x_0(s))u_{\varepsilon_n}(s)ds = \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)ds. \quad (2.28)$$

Використавши пункт 2) із умови 2 для останнього інтеграла в (2.26), отримаємо оцінку

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^t (f_1(x_{\varepsilon_n}(s)) - f_1(x_0(s)))u_{\varepsilon_n}(s)ds \right| \leq \\ & \leq \lambda \left(\int_0^t |x_{\varepsilon_n}(s) - x_0(s)|^q ds \right)^{1/q} \|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]} \rightarrow 0, \varepsilon_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

в силу рівномірної обмеженості $\|u_{\varepsilon_n}\|_{L_p[0,T]}$. Перейдемо до границі в (2.23) при $\varepsilon_n \rightarrow 0$:

$$x_0(t) \in x_0 + \int_0^t f_0(x_0(s))ds + \int_0^t f_1(x_0(s))u_0(s)ds,$$

тобто $x_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (5), а тому в силу єдиності розв'язку $x_0(t) = y(t)$.

Отже, $x_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow y(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Тому довільна збіжна послідовність функцій із сім'ї збігається до однієї і тієї ж границі. Тим самим маємо твердження теореми.

□

В силу Зауваження 2.4.1 маємо, що для функціонала (2.15) існує мінімізуюча послідовність $\{(x_{\varepsilon}^n(t), u_{\varepsilon}^n(t))\}_{n \geq 1}$. При цьому $x_{\varepsilon}^n(t) = x_{\varepsilon}(t)$ на $[0, T]$ та $u_{\varepsilon}^n(t) = u_{\varepsilon}(t)$. В силу леми Мазура і властивостей множини V маємо, що $u_{\varepsilon}(t) \in V$ для всіх $t \in [0, T]$. Тому згідно прямого методу варіаційного числення задача (2.14), (2.15) має розв'язок.

Далі одержимо наступний результат.

Теорема 2.4.2. *Нехай виконані умови 1–4. Нехай $(x_{\varepsilon}^*(t), u_{\varepsilon}^*(t))$ - розв'язок задачі (2.14), (2.15), J_{ε}^* і J_0^* - відповідні мінімальні значення критеріїв якості в задачах (2.14), (2.15) і (2.18), (2.19).*

Тоді

1)

$$J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

тобто для будь-якого $\eta > 0$ існує $\varepsilon_0 > 0$, таке що для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ маємо

$$|J_\varepsilon^* - J_0^*| < \eta; \quad (2.30)$$

існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, і існує оптимальний процес $(y^*(t), u^*(t))$ в задачі (2.18), (2.19) такі, що

2)

$$x_{\varepsilon_n}^* \rightarrow y^* \quad (2.31)$$

рівномірно на $[0, T]$;

3)

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^* \quad (2.32)$$

слабо в $L_p(0, T)$.

Якщо при цьому усереднена задача має (2.18), (2.19) має єдиний розв'язок, то збіжності (2.31) і (2.32) мають місце для всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ і $(y^*(t), u^*(t))$ - розв'язки задач (2.14), (2.15) і (2.18), (2.19) відповідно, J_ε^* та J_0^* - відповідні значення критеріїв якості. Нехай u - деяке фіксоване допустиме керування. Тоді з оптимальності u_ε^* виводимо

$$J_\varepsilon^* = J_\varepsilon[u_\varepsilon^*] \leq J_\varepsilon[u],$$

тобто

$$\begin{aligned} & \int_0^T [A(t, x_\varepsilon^*(t)) + B(t, u_\varepsilon^*(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon^*(T)) \leq \\ & \int_0^T [A(t, x_\varepsilon(t)) + B(t, u(t))] dt + \Phi(x_\varepsilon(T)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

де x_ε - розв'язок задачі (2.14) з керуванням u .

Тоді з оцінки (2.24) для всіх $t \in [0, T]$

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_0| + M + \|f_1(0)\| T^{1/q}) \cdot e^{MT + \lambda T^{1/q} \|u\|_{L_p[0, T]}} := C_1$$

Використовуючи умову 4, звідси виводимо

$$a \int_0^T |u_\varepsilon^*(t)|^p dt \leq T \sup_{|\xi| \leq C_1} A(t, \xi) + \sup_{|\xi| \leq C_1} \Phi(\xi)$$

Ця оцінка гарантує обмеженість $\{u_\varepsilon^*\}$ в $L_p(0, T)$, а отже, по підпоследовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ слабку збіжність

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^*,$$

де в силу теореми Мазура u^* - допустиме керування.

Тоді, використовуючи Теорему 2.4.1, одержуємо, що по підпоследовності

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) \rightarrow y^*(t)$$

рівномірно на $[0, T]$, де y^* - розв'язок задачі (2.18) з керуванням u^* . Доведемо, що $\{y^*, u^*\}$ - оптимальний процес в задачі (2.18), (2.19). Для цього розглядаємо нерівність (2.33), записану для будь-якого допустимого керування u . Застосовуючи для $\{x_{\varepsilon_n}\}$ Теорему 2.4.1, одержуємо, що по підпоследовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ має місце рівномірна збіжність

$$x_{\varepsilon_n} \rightarrow x,$$

де x - єдиний розв'язок задачі (2.18) з керуванням u . Оскільки функціонал $u \mapsto J[u]$ є опуклим і напівніперервним знизу, то ми можемо перейти до нижньої границі в (2.33) і одержати, що для довільного допустимого керування u справедливо

$$J_0[u^*] \leq J_0[u].$$

Таким чином, $\{y^*, u^*\}$ - оптимальний процес в задачі (2.18), (2.19) і по підпоследовності мають місце збіжності 2), 3).

Далі, зафіксувавши в нерівності (2.33) $u = u^*$, ми одержимо, повторюючи попередні міркування, нерівність

$$J_0[u^*] \leq \liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J_{\varepsilon_n}[u_{\varepsilon_n}^*] \leq J_0[u^*]. \quad (2.34)$$

Це означає, що по підпоследовності

$$\lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} J_{\varepsilon_n}^* = J_0^*.$$

Звідси в силу довільності последовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ одержуємо збіжність 1).
Теорема доведена.

□

Зауваження 2.4.2. Аналогічний результат Теорему 2.4.1 можна одержати для задачі (2.14), (2.16) в просторі $L_2(0, T)$. Більше того, для функціоналу (2.16) з твердження (2.32) можна посилити, замінивши слабку збіжність сильною в просторі $L_2(0, T)$. Дійсно, з оцінки (2.34), а також рівномірної збіжності 2), маємо нерівність

$$\liminf_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^T (u_{\varepsilon_n}^*(t))^2 dt \leq \int_0^T (u^*(t))^2 dt,$$

що разом зі слабкою збіжністю гарантує сильну збіжність в просторі $L_2(0, T)$.

2.5 Задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами на півосі

2.5.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування системою диференціальних включень на півосі з малим параметром і швидко осцилюючими коефіцієнтами

$$\dot{x} \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x\right) + f_1(x)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.35)$$

з критерієм якості

$$J_\varepsilon[x, u] = \int_0^\infty (e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (2.36)$$

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксована стала, що характеризує дисконт, x — фазовий вектор у $\mathbb{R}^d$, $u(t)$ — m -вимірний вектор керування, який набирає значень у деякій множині $U \subset \mathbb{R}^m$.

Нехай для багатозначної функції f існує рівномірно за $x \in \mathbb{R}^d$ середнє

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt = f_0(x), \quad (2.37)$$

де інтеграл від багатозначної функції розуміємо в сенсі Аумана, а межу багатозначної функції розуміємо в сенсі Хаусдорфа.

Задачі оптимального керування на півосі (2.35), (2.36) ставиться у відповідність усереднена задача керування:

$$\dot{y} \in f_0(y) + f_1(y)u(t), \quad y(0) = x_0 \quad (2.38)$$

з критерієм якості

$$J_0[y, u] = \int_0^\infty (e^{-jt} A(t, y(t)) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf. \quad (2.39)$$

Для задачі (2.35), (2.36) і відповідної їй усередненої задачі (2.38), (2.39)

будемо вважати виконаними такі умови:

Умова 1. Допустимими керуваннями будемо вважати m -вимірні вектор-функції $u(\cdot) \in L^2([0, \infty))$, що набирають значень у замкненій, опуклій множині $U \subset \mathbb{R}^m$, при цьому вважаємо також, що $0 \in U$.

Умова 2. Функція $A(t, x)$ визначена при $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, вимірна по t і неперервна по x , причому

$$\exists C > 0 : A(t, x) \geq -C,$$

і задовольняє при $x \in \mathbb{R}^d$ умову росту

$$\exists K > 0 : |A(t, x)| \leq K(1 + |x|^p)$$

для кожного $t \geq 0$ і $x \in \mathbb{R}^d$, $p \geq 0$.

Умова 3. Багатозначна функція $f(t, x)$ ($f : Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d\} \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^d)$) визначена і неперервна в метриці Хаусдорфа за сукупністю змінних в Q , а матричнозначна функція $f_1(x)$ неперервна по $x \in \mathbb{R}^d$ і виконуються такі умови:

1) $f(t, x)$ в області Q задовольняє умову лінійного зростання по x із константами L_1 та L_2 , тобто

$$|f(t, x)|_+ := \sup_{\xi \in f(t, x)} |\xi| \leq L_1 + L_2|x| \quad \forall (t, x) \in Q;$$

$f_1(x)$ в області визначення задовольняє умову лінійного зростання за x із константами L_3 та L_4 , тобто

$$|f_1(x)| \leq L_3 + L_4|x|, \tag{2.40}$$

де

$$j > L_2 p.$$

2) $f(t, x)$ і $f_1(x)$ в області визначення задовольняють умову Ліпшиця по x рівномірно по t із константами $K_1, K_2 > 0$ відповідно.

Умова 4. Середнє значення багатозначної функції f у сенсі границі (2.37) є однозначною неперервною функцією.

2.5.2 Аналіз допустимих пар

Обґрунтуємо результат стосовно розв'язності задачі (2.35), (2.36), (2.38), (2.39).

Лема 2.5.1. *(про існування розв'язку задачі (2.35), (2.36)). При виконанні умов 1 – 3 розв'язок задачі оптимального керування (2.35), (2.36) існує.*

Доведення. Обґрунтування проведемо у кілька кроків. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$.

Крок 1. Існування розв'язку задачі Коші (2.35).

З умов 1, 3 та Теорема 1 із [5] випливає, що для кожного допустимого керування $u(t)$ розв'язок $x(t, u)$ задачі Коші (2.35) існує на $[0, +\infty)$ та є абсолютно неперервною функцією. Тому множина допустимих пар задачі (2.35), (2.36) є непорожньою.

Крок 2. Покажемо, що функціонал у (2.36) досягає скінченного екстремуму. Спочатку виведемо апіорну оцінку для $x(t)$. Оскільки x — абсолютно неперервна функція, то $t \mapsto |x(t)|$ — абсолютно неперервна і

$$\frac{d}{dt}|x(t)| \leq |\dot{x}(t)| \text{ м.с.}$$

Тому будемо мати

$$\frac{d}{dt}|x(t)| \leq |\dot{x}(t)| \leq \|f(t, x)\|_+ + |f_1(x)||u(t)| \leq L_1 + L_2|x(t)| + (L_3 + L_4|x(t)|)|u(t)|.$$

Звідси

$$|x(t)| \leq |x(0)| + \int_0^t (L_1 + L_2|x(s)| + (L_3 + L_4|x(s)|)|u(s)|)ds. \quad (2.41)$$

Застосуємо нерівність Грануола і отримаємо

$$|x(t)| \leq \left(|x(0)| + L_1t + L_3t^{1/2}\|u\|_{L^2} \right) e^{\int_0^t (L_2 + L_4|u(s)|)ds}.$$

Використавши нерівність Юнга, в результаті будемо мати

$$|x(t)| \leq \left(|x(0)| + L_1t + L_3t^{1/2}\|u\|_{L^2} \right) e^{L_2t + \frac{\delta}{2}L_2^4t + \frac{1}{2\delta}\|u\|_{L^2}^2} \quad (2.42)$$

для досить малого $\delta > 0$.

Таким чином, враховуючи нерівність (2.40) та оцінку (2.42), для функціоналу якості одержимо

$$|J_\varepsilon[x, u]| \leq \int_0^\infty e^{-jt}(K(1 + |x|^p))dt + \int_0^\infty u^2(t)dt < \infty.$$

Отже, критерій якості (2.36) має сенс для всіх допустимих керувань.

Крок 3. Нехай $\{(u_n, x_n) \in \Xi\}_{n \in \mathbb{N}}$ — мінімізуюча послідовність задачі (2.35), (2.36), де Ξ — множина допустимих пар задачі (2.35), (2.36):

$$\Xi = \{(u, x) : u \text{ задовольняє умову 1,}$$

x є розв'язком задачі Коші (2.35) для всіх допустимих $u\}$.

Оскільки згідно з умовою 2 $J_\varepsilon[x, u] \geq -C/j$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon[x_n, u_n] = \inf_{(u, x) \in \Xi} J_\varepsilon[x, u] = a_\varepsilon \in (-\infty, +\infty).$$

Завдяки умовам для функції $A(t, x(t))$ будемо мати

$$\int_0^\infty u_n^2(t)dt \leq a_\varepsilon - \int_0^\infty e^{-jt}A(t, x(t))dt + 1 \leq a_\varepsilon + \frac{C}{j} + 1 =: C_{\varepsilon 1}.$$

Звідки маємо обмеженість, а тому й слабку збіжність деякої підпослідовності з $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (для якої для спрощення, не обмежуючи загальності, залишимо ті ж позначення) до деякого елемента u^* у просторі $L^2([0, \infty))$. Належність u^* множині U для кожного $t \geq 0$ впливає з леми Мазура.

Згідно з оцінкою (2.42) та слабкою збіжністю послідовності $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ у просторі $L^2([0, \infty))$ будемо мати рівномірну обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на кожному скінченному інтервалі $[0, T]$, тобто

$$\exists L > 0 : |x_n(t)| \leq L, t \in [0, T]. \quad (2.43)$$

Далі для довільних $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in [0, T]$, використовуючи (2.41) та (2.43),

одержуємо

$$\begin{aligned}
|x_n(t_2) - x_n(t_1)| &\leq \int_{t_1}^{t_2} (L_1 + L_2 L) ds + \int_{t_1}^{t_2} (L_3 + L_4 L) |u_n(s)| ds \leq \\
&\leq (L_1 + L_2 L)(t_2 - t_1) + (L_3 + L_4 L)(t_2 - t_1)^{1/2} \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_n(s)|^2 ds \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає рівностепенева неперервність послідовності $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на кожному $[0, T]$. За теоремою Арцела маємо рівномірну збіжність послідовності $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (а точніше, її підпослідовності) до деякого елемента x^* на кожному $[0, T]$, тим самим маємо поточкову збіжність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на $(0, +\infty)$. За допомогою міркувань, аналогічних до [69] (теорема 3) можна показати, що x^* — це розв’язок задачі Коші (2.35). Тому

$$(u^*(t), x^*(t)) \in \Xi.$$

Завдяки напівнеперервності знизу норми в просторі $L^2([0, \infty))$, властивостям функції $A(t, x(t))$, поточковій збіжності послідовності $x_n(t)$ й оцінці (2.42), застосувавши теорему Лебега, будемо мати

$$\begin{aligned}
\inf_{(u, x) \in \Xi} J_\varepsilon[x, u] &= \lim_{n \rightarrow \infty} J_\varepsilon[x_n, u_n] = \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_n(t)) dt + \int_0^\infty u_n^2(t) dt \right) \geq \\
&\geq \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x^*(t)) dt + \int_0^\infty (u^*)^2(t) dt = J_\varepsilon[x^*, u^*].
\end{aligned}$$

Таким чином, пара $(u^*(t), x^*(t))$ є оптимальною для задачі (2.35), (2.36). □

Зауваження 2.5.1. Завдяки властивостям метрики Хаусдорфа умова 3 виконується для усередненої функції $f_0(x)$ із тими ж сталими, що й для функції $f(t, x)$.

Дійсно,

$$\forall \xi \in F(t, x) : |\xi| \leq L_1 + L_2|x|.$$

Враховуючи, що

$$\text{dist}_H \left(\frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt, f_0(x) \right) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty,$$

маємо, що $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists s_0 : \forall s \geq s_0 \quad f_0(x) \in O_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt \right).$$

Далі одержуємо

$$|f_0(x)| \leq \left\| \frac{1}{s} \int_0^s f(t, x) dt \right\| + \varepsilon \leq \frac{1}{s} \int_0^s \|f(t, x)\|_+ dt + \varepsilon \leq L_1 + L_2|x| + \varepsilon.$$

Звідси бачимо, що п. 1) умови 3 виконується. Аналогічними міркуваннями приходимо до висновку щодо виконання умови Ліпшиця для $f_0(x)$ з константою K_1 .

Тому при виконанні умови 4 можемо зробити висновок про існування та єдиність розв'язку задачі Коші (2.38) на півосі.

Крім того, завдяки лемі можна отримати висновок про існування розв'язку для усередненої задачі (2.38), (2.39).

2.5.3 Основні результати

Теорема 2.5.1. *Нехай $(x_\varepsilon^*(t), u_\varepsilon^*(t))$ — розв’язок задачі (2.35), (2.36),*

$$J_\varepsilon^* = \inf_{(x,u) \in \Xi_1} J_\varepsilon[x, u],$$

$$J_0^* = \inf_{(x,u) \in \Xi_2} J_0[x, u],$$

де Ξ_1, Ξ_2 — множини допустимих пар задач (2.35), (2.36) і (2.38), (2.39) відповідно.

Тоді

1)

$$J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0;$$

існує послідовність $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ та існує розв’язок $(y^*(t), u^*(t))$ задачі (2.38), (2.39) такі, що

2)

$$x_{\varepsilon_n}^* \rightarrow y^* \tag{2.44}$$

рівномірно на кожному відрізку $[0, T]$ для довільного $T > 0$;

3)

$$u_{\varepsilon_n}^* \rightharpoonup u^* \tag{2.45}$$

слабко в $L^2([0, \infty))$.

Якщо при цьому усереднена задача (2.38), (2.39) має єдиний розв’язок, то збіжності (2.44), (2.45) мають місце при всіх $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Згідно з лемою розв’язки для задач (2.35), (2.36) та (2.38), (2.39) існують.

Для довільного $\varepsilon > 0$ розглянемо

$$J_\varepsilon[x_\varepsilon^*, u_\varepsilon^*] \leq J_\varepsilon[x_\varepsilon, 0],$$

де $x_\varepsilon(t)$ — розв’язок задачі Коші (2.35) з керуванням $u = 0$.

Завдяки умові 2 маємо

$$\int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) dt \geq -\frac{C}{j}. \tag{2.46}$$

При $u = 0$ для розв'язку $x_\varepsilon(t)$ задачі Коші (2.35) завдяки оцінці (2.42) отримуємо

$$|x_\varepsilon(t)| \leq (|x_\varepsilon(0)| + L_1 t) e^{L_2 t + \frac{\delta}{2} L_2^4 t}, \quad t \geq 0,$$

а тому з умови 2 та (2.40) будемо мати

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[x_\varepsilon, 0] &= \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_\varepsilon(t)) dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-jt} K \left(1 + (|x_\varepsilon(0)| + L_1 t)^p e^{L_2 t p + \frac{\delta}{2} L_2^4 t p} \right) dt \leq c_2. \end{aligned} \quad (2.47)$$

З (2.46) та (2.47), у свою чергу, маємо

$$\int_0^\infty |u_\varepsilon^*(t)|^2 dt \leq c_2 + \frac{C}{j} =: c_3, \quad (2.48)$$

де c_3 не залежить від ε .

Тому послідовність u_ε^* слабо компактна в $L^2([0, +\infty))$.

Нехай $u_{\varepsilon_n}^*$ — слабо збіжна до u_0 послідовність оптимальних керувань, де u_0 — допустиме керування для задачі (2.38), (2.39). Нехай $x_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (2.38) з $u(t) = u_0(t)$. Оскільки зі слабкої збіжності в $L^2([0, \infty))$ випливає слабка збіжність у $L^2([0, T])$ для довільного $T > 0$, то з теореми 3 із [69] одержуємо, що розв'язок $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ задачі Коші (2.35) рівномірно на $[0, T]$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Завдяки довільності T звідси випливає поточкова збіжність $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ до $x_0(t)$ при кожному $t \geq 0$.

Тепер нехай $u^*(t)$ — оптимальне керування в задачі (2.38), (2.39). Зафіксуємо $u^*(t)$ в правій частині (2.35), і нехай $x_{\varepsilon_n}(t, u^*)$ — розв'язок цієї задачі. Застосовуючи до нього попередні міркування, одержуємо, що він збігається рівномірно на $[0, T]$ для будь-якого $T > 0$ збігається до $y^*(t)$ — розв'язку задач Коші (2.38) з керуванням u^* .

Тоді, з точністю до підпослідовності (див. [28]),

$$J_{\varepsilon_n}^* \leq J_0^* + J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n}, u^*] - J_0[y^*, u^*]. \quad (2.49)$$

Але

$$\begin{aligned} & |J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n}, u^*] - J_0[y^*, u^*]| \leq \\ & \leq \int_0^\infty e^{-jt} |A(t, x_{\varepsilon_n}^*(t, u^*)) - A(t, y^*(t))| dt \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

згідно з теоремою Лебега, оцінкою (2.42) й умовами росту $A(t, x)$ по x .

З іншого боку,

$$J_0^* \leq J_{\varepsilon_n}^* + J_0[y^*, u_{\varepsilon_n}^*] - J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n}^*, u_{\varepsilon_n}^*]. \quad (2.51)$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{z}_{\varepsilon_n} \in f(t, z_{\varepsilon_n}) + f_1(z_{\varepsilon_n})u_{\varepsilon_n}^*,$$

$$\dot{x}_0 = f_0(x_0) + f_1(x_0)u_0.$$

Застосувавши до них теорему 3 з [69], отримаємо, що $z_n(t)$ рівномірно на $[0, T]$ і поточною на півосі $t \geq 0$ прямує до $x_0(t)$ при $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Звідси та зі збіжності $x_{\varepsilon_n}^*(t)$ до x_0 одержимо

$$x_{\varepsilon_n}^*(t) - z_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

для кожного $t \geq 0$.

Тому

$$\begin{aligned} & |J_{\varepsilon_n}[x_{\varepsilon_n}^*, u_{\varepsilon_n}^*] - J_0[x_0, u_{\varepsilon_n}^*]| \leq \\ & \leq \int_0^\infty e^{-jt} |A(t, x_{\varepsilon_n}^*(t)) - A(t, x_0(t))| dt + \\ & + \int_0^\infty e^{-jt} |A(t, z_{\varepsilon_n}(t)) - A(t, x_0(t))| dt \rightarrow 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

З (2.49), (2.51), (2.52) випливає, що

$$J_{\varepsilon_n}^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Аналогічно до міркувань із [28] приходимо до висновку, що

$$J_\varepsilon^* \rightarrow J_0^*, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2.53)$$

Звідси маємо твердження 1) теореми.

Покажемо, що u_0 — оптимальне керування усередненої задачі. Дійсно,

$$J_{\varepsilon_n}^* = \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_{\varepsilon_n}^*(t)) dt + \int_0^\infty |u_{\varepsilon_n}^*(t)|^2 dt. \quad (2.54)$$

Враховуючи тепер умову напівнеперервності знизу норми в $L^2([0, +\infty))$, (2.53), теорему Лебега і переходячи до границі в (2.54) при $\varepsilon_n \rightarrow 0$, маємо

$$\begin{aligned} J_0^* &= \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t)) dt + \lim_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \int_0^\infty |u_{\varepsilon_n}^*(t)|^2 dt \geq \\ &\geq \int_0^\infty e^{-jt} A(t, x_0(t)) dt + \int_0^\infty |u_0(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Звідси випливає оптимальність пари (x_0, u_0) , що й доводить твердження 2), 3) теореми.

Також відзначимо, що

$$|J_\varepsilon^* - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n}^*, u_0]| \leq |J_\varepsilon^* - J_0^*| + |J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n}^*, u_0]|.$$

Розглянемо допоміжні системи

$$\dot{x}_\varepsilon \in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x_\varepsilon\right) + f_1(x_\varepsilon)u_0(t) \quad (2.55)$$

і

$$\dot{y}_0 = f_0(y) + f_1(y)u_0(t). \quad (2.56)$$

Застосуємо теорему 3 з [69] до систем (2.55), (2.56), аналогічно до (2.50) отримаємо

$$J_0[x_0, u_0] - J_\varepsilon[x_{\varepsilon_n}^*, u_0] \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Звідси та з твердження 1) теореми одержимо той факт, що u_0 може слугувати наближенням до оптимального керування у вихідній задачі.

Якщо усереднена задача (2.38), (2.39) має єдиний розв'язок, то з наведених вище міркувань випливає, що з довільної послідовності $(x_{\varepsilon_n}^*, u_{\varepsilon_n}^*)$ виділяється збіжна підпослідовність і всі такі підпослідовності збігаються до однієї й тієї ж межі. Звідси маємо останнє твердження теореми.

□

2.6 Задачі оптимального керування диференціальним включенням типу Каратеодорі зі швидкоколивними коефіцієнтами

2.6.1 Постановка задачі

У даному пункті ми розглядаємо задачу оптимального керування для диференціального включення типу Каратеодорі, афінного щодо керування з коерцитивним функціоналом вартості на півосі та швидко осцилюючими коефіцієнтами, що залежать від часу. На відміну від попереднього пункту ми не накладаємо на багатовимірну функцію умову Ліпшиця. За умови напівнеперервності зверху і обмеженості ми доводимо, що коли малий параметр збігається до нуля, розв'язок цієї задачі прямує до деякого розв'язку задачі оптимального керування з усередненими коефіцієнтами, де усереднення ми розуміємо в сенсі верхньої межі Куратовського.

Ми розглядаємо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &\in f\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t)\right) + g(x(t))u(t), \quad t \geq 0, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$u \in \mathcal{U} = \{u \in L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m) \mid u(t) \in U \text{ майже всюди на } (0, \infty)\} \quad (2.58)$$

таке, що

$$J(x, u) = \int_0^\infty (e^{-\gamma t} \varphi(x(t)) + |u(t)|^2) dt \rightarrow \inf, \quad (2.59)$$

де $\varepsilon > 0$ — малий параметр, і f, g, φ задовольняють наступні умови:

- 1) $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^d)$;
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}^d$ відображення $f(\cdot, x)$ має вимірний селектор;
- 3) $\forall t \geq 0$ відображення $f(t, \cdot)$ є напівнеперервним зверху;
- 4) $\exists M \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^d \forall t \geq 0 \quad |f(t, x)|_+ \leq M$;
- 5) $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times m}$ є неперервним і обмеженим, тобто $\exists N \geq 0$ таке, що $|g(x)| \leq N, \quad x \in \mathbb{R}^d$;
- 6) $U \subset \mathbb{R}^m$ є замкнутою, опуклою множиною і $0 \in U$;
- 7) $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною, і існують константи $c > 0$ та $p \geq 1$, такі

що

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^d} \varphi(x) \geq -c, \quad |\varphi(x)| \leq c(1 + \|x\|^p).$$

Для заданої керуючої функції $u \in \mathcal{U}$ розв'язком рівняння (2.57) вважається абсолютно неперервна функція x , яка задовольняє (2.57) майже всюди (м.в.) на $[0, +\infty)$. У цьому випадку кажуть, що $\{x, u\}$ є допустимою парою для (2.57)-(2.59). Допустима пара $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ називається оптимальною парою (або розв'язком) задачі (2.57)-(2.59), якщо для будь-якої допустимої пари $\{x, u\}$ виконується нерівність

$$J(x^\varepsilon, u^\varepsilon) \leq J(x, u).$$

Існування оптимального розв'язку $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ буде встановлено в наступному пункті.

Позначимо

$$J^\varepsilon := \inf J(x, u) = J(x^\varepsilon, u^\varepsilon).$$

Використовуючи підхід з [16], визначимо усереднену функцію $\bar{f}$ на основі поняття верхньої границі в сенсі Куратовського [5]

$$\bar{f}(x) = \cap_{\delta > 0} \bar{F}^\delta(x),$$

де $\bar{F}^\delta$ — опукла оболонка відображення

$$\Phi^\delta(x) = \limsup_{\theta \nearrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} I(\theta T, T, x, \delta),$$

$$I(\theta T, T, x, \delta) = \left\{ \int_{\theta T}^T v(t) dt \mid v(\cdot) \in L^1_{loc}(0, \infty; \mathbb{R}^d), \quad v(t) \in f(t, y), \quad y \in \overline{O_\delta(x)} \right\}.$$

У роботі [16] доведено, що якщо існує

$$\bar{F}(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x) dt$$

у сенсі відстані Хаусдорфа $dist_H$, і якщо $f(t, \cdot)$ є ліпшицевим, то виконується рівність $\bar{f} = \bar{F}$.

$$\dot{x} \in \bar{f}(x) + g(x)u(t), \quad x(0) = x_0, \quad (2.60)$$

$$u \in \mathcal{U} \quad (2.61)$$

$$J(x, u) \rightarrow \inf \quad (2.62)$$

Наша мета — довести, що при $\varepsilon \rightarrow 0$ виконується

$$J^\varepsilon \rightarrow \bar{J}$$

і в певному сенсі

$$\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\} \rightarrow \{\bar{x}, \bar{u}\},$$

де $\bar{x}, \bar{u}$ є розв'язком задачі (2.60)-(2.62), $\bar{J} = J(\bar{x}, \bar{u})$.

2.6.2 Основні результати

Розглянемо задачу (2.57). За умов 1)-5) для кожного $u \in L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m)$ і $\varepsilon > 0$ задача (2.57) має розв'язок [4, 5], і виконується така оцінка:

$$\frac{d}{dx} \|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| \leq M + N|u(t)| \quad \text{м.н.} \quad (2.63)$$

$$\|x(t)\| \leq \|x_0\| + (M + N)t + N|u|_{L^2}^2. \quad (2.64)$$

Крім того, якщо для фіксованого $\varepsilon > 0$ x_n є розв'язком (2.57) для керування u_n , $n \in \mathbb{N}$, і $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_{L^2} < \infty$, то, виділяючи підпоследовність, маємо таку збіжність:

$$u_n \rightarrow u \text{ слабо в } L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m) \quad (2.65)$$

$$x_n \rightarrow x \text{ у } C([0, T]; \mathbb{R}^d), \quad T > 0 \quad (2.66)$$

де x — це розв'язок (2.57) з керуванням u . Якщо додатково $u_n \in \mathcal{U}$ для $n \in \mathbb{N}$, то $u \in \mathcal{U}$.

Лема 2.6.1. *За умов 1)-7) задача оптимального керування (2.57)-(2.59) має розв'язок $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$.*

Доведення. Зафіксуємо деяке $\varepsilon > 0$ і нехай допустимі пари $\{x_n, u_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ такі, що

$$J^\varepsilon = \inf J(x, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u_n).$$

Тоді, відповідно до припущення 7), у формулюванні задачі для достатньо великих n маємо

$$-\frac{c}{\gamma} + \int_0^\infty |u_n(t)|^2 dt \leq J(x_n, u_n) \leq J^\varepsilon + 1.$$

Отже, виділяючи підпоследовність, при $n \rightarrow \infty$ впливає, що $\{x_n, u_n\} \rightarrow \{x, u\}$ у сенсі (2.65), (2.66), і $u \in \mathcal{U}$. Доведемо, що $\{x, u\}$ є оптимальною парою в (2.57)-(2.59). Таким чином, маємо

$$e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) \rightarrow e^{-\gamma t} \varphi(x(t)), \quad t \geq 0$$

Крім того, використовуючи (2.64), отримуємо

$$e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) \leq e^{-\gamma t} c(1 + (\|x_0\| + (M + N)t + N(J^\varepsilon + 1 + \frac{c}{\gamma}))^p) \leq c_1(\varepsilon) e^{-\frac{\gamma}{2}t}.$$

Тоді теорема Лебега про мажоровану збіжність дає

$$\int_0^\infty e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) dt \rightarrow \int_0^\infty e^{-\gamma t} \varphi(x(t)) dt$$

і, відповідно,

$$J^\varepsilon = \varliminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u_n) \geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) dt + \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty |u_n(t)|^2 dt \geq J(x, u)$$

отже, $\{x, u\}$ є розв'язком (2.57)-(2.59).

□

Наступний результат є невеликим узагальненням [16, Theorem 4.1] і [4, Theorem 1.1].

Лема 2.6.2. *Нехай $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^d)$ задовольняє умови 1)-4). Тоді існує послідовність локально ліпшицевих відображень $f^k : [0, \infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \text{conv}$, що задовольняють умови 1)-4) для $k \in \mathbb{N}$ і*

$$f(t, x) \subset \dots \subset f^{k+1}(t, x) \subset f^k(t, x), \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d, k \in \mathbb{N} \quad (2.67)$$

Крім того, для кожного $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}^d$ існують $l_k > 0$ і $\delta_k > 0$, такі що

$$\text{dist}_H(f^k(t, x'), f^k(t, x'')) \leq l_k \|x' - x''\|, \quad x', x'' \in O_{\delta_k}(x), t \geq 0, \quad (2.68)$$

більше того, для будь-якого $\varepsilon > 0$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ існує $K = K(\varepsilon, t, x)$, таке що

$$f^k(t, x) \subset \overline{\text{co}} f(t, O_\varepsilon(x)), \quad k \geq K. \quad (2.69)$$

Доведення. Нехай $\{O_{r_k}(y_i^k)\}_{i=1}^\infty$ є локально скінченним покриттям $\mathbb{R}^d$, де $r_k := \frac{1}{3^{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$. Нехай $\{\psi_i^k\}_{i=1}^\infty$ — це система одиничного розбиття, підпорядкована цьому покриттю та складена з локально ліпшицевих функцій $\text{supp } \psi_i^k \subset O_{r_k}(y_i^k)$, див. [8].

Для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ і $x \in \mathbb{R}^d$ існують $\delta_k = \delta_k(x) > 0$ і $l_k(x) > 0$, такі що $\delta_k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ і

$$N(k, x) := \{i \in \mathbb{N} \mid O_{r_k}(y_i^k) \cap O_{\delta_k}(x) \neq \emptyset\}$$

є скінченним, а для будь-яких $x', x'' \in O_{\delta_k}(x)$

$$\sum_{i \in N(k, x)} |\psi_i^k(x') - \psi_i^k(x'')| \leq l_k(x) \|x' - x''\|.$$

Тоді відображення

$$f^k(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^k(x) \cdot \overline{co}f(t, O_{2r_k}(y_i^k)) = \sum_{i \in N(k, x)} \psi_i^k(x) \cdot \overline{co}f(t, O_{2r_k}(y_i^k))$$

задовольняє умови 1)-4), (2.67), (2.68), див. [4] для деталей. Нарешті, для будь-якого $\varepsilon > 0$ виберемо $K = K(\varepsilon, t, x)$ так, що

$$\delta_k + r_k < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k \geq K.$$

Тоді для будь-якого $i \in N(k, x)$ і будь-якого $z \in O_{2r_k}(y_i^k)$ маємо

$$\|z - x\| \leq \|z - y_i^k\| + \|y_i^k - x\| \leq 2r_k + \delta_k + r_k < \varepsilon.$$

Отже, $f(t, O_{2r_k}(y_i^k)) \subset f(t, O_\varepsilon(x))$ і $f^k(t, x) \subset \overline{co}f(t, O_\varepsilon(x))$. Лему доведено. $\square$

Лема 2.6.3. Нехай $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ і x_n — розв'язок (2.57) з керуванням u_n . Нехай $\{x_n, u_n\} \rightarrow \{x, u\}$ при $n \rightarrow \infty$ у сенсі (2.65), (2.66). Тоді x є розв'язком (2.60) з керуванням u .

Доведення. Нехай f^k — ліпшицеве відображення з леми 2.6.2. Тоді для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ маємо

$$\dot{x}_n(t) \in f^k\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, x_n(t)\right) + g(x_n(t))u_n(t) \quad \text{майже скрізь}$$

Фіксуємо τ_1 таке, що похідна $\dot{x}(\tau_1)$ існує, і нехай τ_1 є точкою Лебега для

$g(x(\cdot))u(\cdot)$. Тоді для будь-якого $n \geq N(x(\tau_1))$ та для достатньо малих $|s - \tau_1|$ маємо $|x_n(s) - x(\tau_1)| < \delta_k$ і

$$\begin{aligned} x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1) &\in \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[f^k \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1) \right) + l_k \|x_n(s) - x(\tau_1)\| \cdot B_1 \right] ds + \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(s))u_n(s)ds, \end{aligned}$$

де l_k взято з (2.68), $B_1 = \{x \mid \|x\| \leq 1\}$. Тоді

$$\begin{aligned} x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1) &\in \int_{\tau_1}^{\tau_2} f^k \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1) \right) ds + l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|x_n(s) - x_n(\tau_1)\| ds \cdot B_1 + \\ &+ l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|x_n(\tau_1) - x(\tau_1)\| \cdot B_1 + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (g(x_n(s))u_n(s) - g(x(s))u(s))ds + \\ &+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x(s))u(s)ds \end{aligned}$$

Нехай $\eta > 0$ — довільно мале. Тоді для достатньо малого $|\tau_2 - \tau_1|$ і достатньо великого $n \in \mathbb{N}$ отримуємо завдяки (2.63):

$$\begin{aligned} l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \|x_n(s) - x_n(\tau_1)\| ds &\leq l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\tau_1}^s (M + N\|u_n(t)\|) dt ds \leq \\ &\leq l_k \int_{\tau_1}^{\tau_2} (M(\tau_2 - \tau_1) + N\sqrt{\tau_2 - \tau_1}\|u_n\|) dt < \frac{\eta}{2}(\tau_2 - \tau_1). \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned} \frac{x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} &\in \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f^k \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x(\tau_1) \right) ds + \\ &+ \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(t))u_n(t)dt + \eta B_1 + \\ &+ \frac{x_n(\tau_2) - x_n(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} \in \frac{\varepsilon_n}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\frac{\tau_1}{\varepsilon_n}}^{\frac{\tau_2}{\varepsilon_n}} f^k(s, x(\tau_1)) ds + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x_n(t))u_n(t)dt + \eta B_1$$

і, переходячи до границі при $n \rightarrow \infty$, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{x(\tau_2) - x(\tau_1)}{\tau_2 - \tau_1} &\in \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2})T} \int_{\frac{\tau_1}{\tau_2}T}^T f^k(s, x(\tau_1))ds + \\ &+ \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} g(x(t))u(t)dt + \eta B_1. \end{aligned}$$

Далі, переходячи до границі при $\tau_2 \rightarrow \tau_1$ і враховуючи, що η — довільно мале, отримуємо

$$\dot{x}(\tau_1) \in \limsup_{\theta \rightarrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} \int_{\theta T}^T \int_{\theta T}^T f^k(s, x(\tau_1))ds + g(x(\tau_1))u(\tau_1). \quad (2.70)$$

Завдяки опуклості інтеграла [7] та в силу (2.69) маємо, що для будь-якого $\delta > 0$ та $x \in \mathbb{R}^d$ існує $K = K(\delta, x)$ таке, що

$$\limsup_{\theta \rightarrow 1} \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 - \theta)T} \int_{\theta T}^T f^k(s, x)ds \subset \bar{F}^\delta(x), \quad k \geq K.$$

Нарешті, з (2.70) маємо для будь-якого $\delta > 0$, що

$$\dot{x}(\tau_1) \in \bar{F}^\delta(x(\tau_1)) + g(x(\tau_1))u(\tau_1)$$

а отже,

$$\dot{x}(\tau_1) \in \bar{f}^\delta(x(\tau_1)) + g(x(\tau_1))u(\tau_1)$$

що завершує доведення лема. □

Тепер ми готові довести наш основний результат.

Теорема 2.6.1. *Нехай умови 1)–7) виконано. Припустимо, що для кожного $u \in \mathcal{U}$ задача (2.60) має єдиний розв'язок. Нехай $\{x^\varepsilon, u^\varepsilon\}$ — оптимальна пара у задачі (2.57)–(2.59), $J^\varepsilon = J(x^\varepsilon, u^\varepsilon)$. Тоді*

$$J^\varepsilon \rightarrow \bar{J}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.71)$$

і по деякій послідовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ виконується

$$x^{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{x} \quad \text{в} \quad C([0, T]; \mathbb{R}^d), \quad T > 0 \quad (2.72)$$

$$u^{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{u} \quad \text{слабо в} \quad L^2(0, \infty; \mathbb{R}^m), \quad (2.73)$$

де $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ — оптимальна пара у задачі (2.60)–(2.62), $\bar{J} = J(\bar{x}, \bar{u})$.

Доведення. Нехай при $\varepsilon_n \rightarrow 0$ пара $\{x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\}$ є оптимальною для задачі (2.57)–(2.59). Із оптимальності u_n^ε випливає, що

$$J(x^{\varepsilon_n}, u_n^\varepsilon) \leq J(x_n, 0),$$

де x_n — розв'язок (2.57) при $\varepsilon = \varepsilon_n$; $u = 0$. Тоді, завдяки (2.64), маємо

$$-\frac{c}{\gamma} + \|u_n^\varepsilon\|^2 \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} \varphi(x_n(t)) \leq \int_0^\infty e^{-\gamma t} c(1 + (\|x_0\| + (M+N)t)^p) dt \leq C_1, \quad (2.74)$$

де C_1 не залежить від n . Додатково, з (2.63) маємо

$$\|x_n^\varepsilon(t) - x_n^\varepsilon(s)\| \leq M|t - s| + N|t - s|^{\frac{1}{2}} \|u_n^\varepsilon\|. \quad (2.75)$$

Оцінки (2.74), (2.75) та теорема Арцела–Асколі дають, що існує підпослідовність, на якій $\{x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}\}$, $n \in \mathbb{N}$ збігається до деякої пари $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ у сенсі (2.72), (2.73). Отже, з леми 2.6.3 випливає, що $\bar{x}$ є розв'язком (2.60) з керуванням $u \in \mathcal{U}$. Доведемо, що $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ — оптимальна пара.

Для кожного $u \in \mathcal{U}$ і відповідного розв'язку x_n задачі (2.57) маємо

$$J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq J(x_n, u). \quad (2.76)$$

Аргументуючи аналогічно до доведення леми 2.6.1, отримаємо з (2.76) після переходу до границі:

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x^{\varepsilon_n}, u^{\varepsilon_n}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u). \quad (2.77)$$

З (2.75), де u_n^ε замінено на u , випливає, що $x_n \rightarrow \bar{x}$ у сенсі (2.72). Згідно з лемою 2.6.3, $\bar{x}$ є єдиним розв'язком (2.60) з керуванням u . Отже, з (2.77)

випливає

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(x_n, u) = J(x, u).$$

Ця нерівність означає, що $\bar{x}, \bar{u}$ — оптимальна пара. Застосовуючи попередні аргументи з $u = \bar{u}$, отримуємо

$$J(\bar{x}, \bar{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n, \bar{u}) = J(\bar{x}, \bar{u}).$$

Це означає, що існує

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J^{\varepsilon_n} = J(\bar{x}, \bar{u}).$$

Через довільність послідовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ отримуємо (2.71). Теорему доведено.

□

2.6.3 Приклад

Розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x} \in \begin{cases} \psi_1(\frac{t}{\varepsilon}), & x < 0 \\ [\psi_2(\frac{t}{\varepsilon}), \psi_1(\frac{t}{\varepsilon})], & x = 0 \\ \psi_2(\frac{t}{\varepsilon}), & x > 0 \end{cases} + u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

$$u \in \mathcal{U}, \quad J(x, u) = \int_0^\infty (e^{-t} \varphi(x) + u^2(t)) dt \rightarrow \inf$$

Припускаємо, що ψ_1, ψ_2 є обмеженими, і

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_1(t) dt = \psi_1 > 0, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \psi_2(t) dt = \psi_2 < 0.$$

Легко помітити, що багатозначне відображення

$$f(t, x) = \begin{cases} \psi_1(t), & x < 0 \\ [\psi_2(t), \psi_1(t)], & x = 0 \\ \psi_2(t), & x > 0 \end{cases}$$

а також $g = 1$, $\mathcal{U}$, φ задовольняють умови 1)–7). Зауважимо, що $f(t, \cdot)$ не є відображенням Ліпшиця.

Усереднена задача має вигляд

$$\begin{cases} \dot{x} \in \begin{cases} \psi_1, & x < 0 \\ [\psi_1, \psi_2], & x = 0 \\ \psi_2, & x > 0 \end{cases} + u(t) \\ x(0) = 0 \\ u \in \mathcal{U} \\ J(x, u) \rightarrow \inf \end{cases} \quad (2.79)$$

де задача Коші має єдиний розв'язок для кожного $u \in \mathcal{U}$, [22]. Згідно з Теоремою 2.6.1, послідовність оптимальних пар $x^\varepsilon, u^\varepsilon$ задачі (2.78) збігається до $\bar{x}, \bar{u}$, де $\bar{x}, \bar{u}$ — оптимальна пара задачі (2.79).

2.7 Висновки до розділу 2

Розділ присвячений дослідженню розв'язності задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами лінійної за керуванням та з коерцитивним критерієм якості. Як основний інструмент наближеного розв'язання розглянута задача оптимального керування з усередненими коефіцієнтами. В результаті були визначені умови, за яких при прямуванні малого параметра до нуля розв'язки і значення критерію вихідної збуреної задачі збігаються до розв'язків і значення критерію усередненої задачі. Зокрема, в підрозділі 2.4 була розглянута задача обґрунтування методу усереднення до наближеного розв'язання задачі оптимального керування для диференціального включення, лінійного за змінною керування, та зі швидкоколивними коефіцієнтами для багатозначної ліпшицевої правої частини на скінченному часовому інтервалі для загального корцитивного функціоналу. На основі результату про збіжність розв'язків задач Коші збуреної і усередненої задачі в Теоремі 2.4.2 було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 2.5 відповідна задача була розглянута на нескінченному часовому інтервалі для квадратичного цільового функціоналу. В Теоремі 2.5.1 було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 2.6 було розглянуто задачу оптимального керування для диференціального включення типу Каратеодорі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, афінного щодо керування та з квадратичним функціоналом вартості на півосі. На відміну від попередніх підрозділів, тут не накладалися умови Ліпшиця на багатозначну функцію правої частини. За умови напівнеперервності зверху і обмеженості в Теоремі 2.6.1 доведено збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі, де усереднення розуміємо в сенсі верхньої межі Куратовського.

Результати даного розділу опубліковані в статтях [61, 69, 72], та висвітлено в тезах міжнародних конференцій [24, 65].

Розділ 3

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ НЕЛІНІЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ

Відомо, що метод усереднення є одним із найефективніших інструментів для розв’язання різних задач оптимального керування для диференціальних рівнянь [20, 28, 29, 74], а також для диференціальних включень з швидкоосцилюючими коефіцієнтами [44, 69, 72]. Теорема Красносельського-Крейна [29] та її багатозначний аналог [45] відіграють важливу роль у дослідженні вищезазначених задач.

Інтенсивний розвиток науки і техніки постійно стимулює пошук ефективних методів керування різними природними, економічними, соціальними та технічними процесами. Математичними моделями таких ситуацій є задачі оптимального керування різних класів еволюційних систем. Значна увага приділяється математичним моделям процесів у вигляді диференціальних рівнянь та включень із малим параметром. Для їх розв’язання широко використовуються асимптотичні методи, зокрема метод усереднення. Із численних опублікованих праць, у яких розглядаються подібні задачі, зазначимо [20, 28, 29, 74] для диференціальних рівнянь та [44, 60, 69, 72] для диференціальних включень із швидкоосцилюючими коефіцієнтами, а також для подібних задач (наприклад, мінімаксне, робастне та адаптивне керування) — [12, 38, 39, 52].

При роботі з багатозначними відображеннями виникають специфічні проблеми, проте застосування добре розробленого методу усереднення для задач оптимального керування в такому випадку можливе.

У цьому розділі розглядається задача оптимального керування неліній-

ною системою диференціальних включень із швидкоосцилюючими параметрами. Спочатку ми доводимо існування розв'язків початкової збуреної задачі оптимального керування та відповідної задачі з усередненими коефіцієнтами. Далі доводимо, що оптимальне керування задачі з усередненими коефіцієнтами можна розглядати як «приблизно» оптимальне для початкової збуреної задачі.

3.1 Задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на скінченному інтервалі

3.1.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in X(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), u(t)), t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, u(\cdot) \in U, \\ J[x, u] = \int_0^T L(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(T)) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.1)$$

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ — шуканий фазовий вектор, $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ — шуканий керуючий вплив, $X : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ — багатозначна функція, $U \subset L^2(0, T)$ — заданий клас керувань.

Припускаємо, що рівномірно по відношенню до x для будь-якого $u \in \mathbb{R}^m$ виконується

$$\text{dist}_H \left(\frac{1}{s} \int_0^s X(\tau, x, u) d\tau, Y(x, u) \right) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.2)$$

де границі для багатозначних функцій розглядаються у сенсі [4, 5], dist_H — метрика Хаусдорфа, $Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, а інтеграл багатозначної функції розглядається у сенсі Аумана [6]. Розглядаємо задачу з усередненими правими частинами:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Y(y(t), u(t)), \\ y(0) = x_0, u(\cdot) \in U, \\ J[y, u] = \int_0^T L(t, y(t), u(t))dt + \Phi(y(T)) \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.3)$$

За певних припущень щодо X, L, Φ, U буде доведено, що задачі (3.1) та (3.3) мають розв'язки $\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon$ та $\bar{y}, \bar{u}$ відповідно,

$$\bar{J}_\varepsilon \rightarrow \bar{J}, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.4)$$

де

$$\overline{J}_\varepsilon := J[\overline{x}_\varepsilon, \overline{u}_\varepsilon], \quad \overline{J} := J[\overline{y}, \overline{u}],$$

та по деякій підпоследовності $\varepsilon_n \rightarrow 0$ мають місце збіжності

$$\overline{u}_{\varepsilon_n} \rightarrow \overline{u} \quad \text{у} \quad L^2(0, T), \tag{3.5}$$

$$\overline{x}_{\varepsilon_n} \rightarrow \overline{y} \quad \text{у} \quad \mathbb{C}([0, T]). \tag{3.6}$$

3.1.2 Припущення та позначення

Нехай $Q = \{t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m\}$ і припустимо, що виконуються такі умови.

Припущення 1. Відображення $t, x, u \mapsto X(t, x, u)$ є неперервним у метриці Хаусдорфа.

Припущення 2. Багатозначна функція $X(t, x, u)$ задовольняє умову лінійного росту: $\exists M > 0$ таке, що

$$\|X(t, x, u)\|_+ \leq M(1 + \|x\|) \quad \forall (t, x, u) \in Q,$$

де $\|X(t, x, u)\|_+ = \sup_{\xi \in X(t, x, u)} \|\xi\|$, $\|\xi\|$ — евклідова норма вектора $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Припущення 3. Багатозначна функція $X(t, x, u)$ задовольняє умову Ліпшица: $\exists \lambda > 0$ таке, що

$$\text{dist}_H(X(t, x_1, u_1), X(t, x_2, u_2)) \leq \lambda (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|).$$

Припущення 4. Відображення $(x, u) \mapsto L(t, x, u)$ є неперервним, причому функція $t \mapsto L(t, x, u)$ є вимірною $\forall x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, і

$$|L(t, x, u)| \leq c(t)(1 + \|u\|),$$

де $c(\cdot) \in L^2(0, T)$ — задана функція.

Припущення 5. $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — неперервна функція.

Припущення 6. $U \subset L^2(0, T)$ — компактна множина.

Зауваження 1. Умова компактності є достатньо сильним обмеженням. Її виконання може бути забезпечене шляхом умов на прирости функцій керування. Зокрема, критерій компактності Ріса гарантує, що обмежена і замкнена в $L^2(0, T)$ множина функцій буде компактною тоді і лише тоді, коли

$$\int_0^T |u(t+h) - u(t)|^2 dt \leq \alpha(|h|), \quad \text{де } \alpha(s) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow 0.$$

Зауваження 2. За умовами 1–3 для всіх $u \in L^2(0, T)$ задача Коші

$$\begin{cases} \dot{x} \in X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, u\right), t \in (0, T) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.7)$$

має розв’язок (див., наприклад, [5]), тобто існує абсолютно неперервна функція $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, яка задовольняє включення (3.7) майже всюди.

Зауваження 3. За умови (3.2) багатозначне відображення Y задовольняє умови 2–3, отже $\forall u \in L^2(0, T)$ задача Коші

$$\begin{cases} \dot{y} \in Y(y, u), t \in (0, T) \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.8)$$

має розв’язок.

Розглянемо наступний багатозначний аналог теореми Красносельського–Крейна.

Теорема 3.1.1. [29, 42, 44, 45] Нехай виконуються наступні умови для диференціального включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda), \quad (3.9)$$

з багатозначним відображенням $F(t, x, \lambda)$, яке приймає значення в $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$ (тобто у підпросторі з $\text{conv}(\mathbb{R}^n)$, що складається з опуклих множин), визначеним для $0 \leq t \leq T$; $x \in D$, де D — обмежена область у $\mathbb{R}^n$; $\lambda \in \Lambda$, де Λ — множина значень параметра λ , для якої $\lambda_0 \in \Lambda$ є граничною точкою:

1) багатозначне відображення $F(t, x, \lambda)$ є рівномірно обмеженим, неперервним за t , рівномірно неперервним за x відносно t та λ : $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall t \in [0, T], x \in D, x' \in D$ і $\lambda \in \Lambda$ виконується

$$\text{dist}_H(F(t, x', \lambda) - F(t, x, \lambda)) < \varepsilon$$

якщо $|x' - x| < \delta$;

2) багатозначне відображення $F(t, x, \lambda)$ є інтегрально неперервним за λ в точці λ_0 , тобто для $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ та будь-якого $x \in D$ маємо

$$\text{dist}_H \left(\int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda) ds, \int_{t_1}^{t_2} F(s, x, \lambda_0) ds \right) \rightarrow 0, \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

де інтеграли розглядаються у сенсі Аумана [6];

3) розв'язки $x(t, \lambda_0)$ включення

$$\dot{x} \in F(t, x, \lambda_0), \quad (3.10)$$

що задовольняють умову $x(0, \lambda_0) = x_0 \in D^1 \subset D$, визначені для $0 \leq t \leq T$ і належать області D разом з деяким ρ -окілом.

Тоді для кожного $\eta > 0$ існує околу $U(\lambda_0)$ точки λ_0 такий, що для $\lambda \in U(\lambda_0)$ і довільного розв'язку $x(t, \lambda)$ включення (3.9), визначеного на $0 \leq t \leq T$ і такого, що $x(0, \lambda) = x_0$, існує розв'язок $x(t, \lambda_0)$ включення (3.10), для якого виконується нерівність $\|x(t, \lambda) - x(t, \lambda_0)\| < \eta, 0 \leq t \leq T$.

Зауваження 4. Поняття інтегральної неперервності відіграє ключову роль у дослідженні розглянутої задачі оптимального керування методом усереднення. Відомо [29, 30], що (3.2) еквівалентне інтегральній неперервності.

Зауваження 5. Нехай D та D' — дві області в $\mathbb{R}^n$. Припустимо, що виконується вкладення $D' + \delta B \subset D$ для деякого $\delta > 0$, де $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

3.1.3 Основний результат

Теорема 3.1.1. *За умов припущень 1–6 задача (3.1) (відповідно, задача (3.3)) має розв’язок $\{\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon\}$ (відповідно, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$).*

Доведення. Фіксуємо $\varepsilon > 0$ і надалі не будемо його вказувати. За умов на L та Φ функціонал вартості у (3.1) досягає свого скінченного екстремуму. Отримаємо апріорну оцінку для $x(t)$. Оскільки x є абсолютно неперервною функцією, то й відображення $t \mapsto \|x(t)\|$ також абсолютно неперервне, і

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| \text{ м.с.}$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}\|x(t)\| \leq \|\dot{x}(t)\| \leq \|X(t, x, u)\|_+ \leq M(1 + \|x\|)$$

і

$$\|x(t)\| \leq \|x(0)\| + \int_0^t M(1 + \|x\|)ds = \|x(0)\| + MT + \int_0^t M\|x\|ds$$

Враховуючи нерівність Грануола, маємо

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq (\|x(0)\| + MT) e^{\int_0^t Mds} = \\ &= (\|x(0)\| + MT) e^{Mt} \leq (\|x(0)\| + MT) e^{MT} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Нехай $\{x_n, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — мінімізуюча послідовність для задачі (3.1), тобто:

$$\{x_n, u_n\} \in$$

$$\{(x, u) : u \subset U, x \text{ — розв’язок задачі Коші (3.1) для всіх допустимих } u\}$$

та $J(x_n, u_n) \leq \bar{J} + \frac{1}{n}$. Із (3.11) випливає рівномірна обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на кожному скінченному інтервалі $[0, T]$, тобто $\exists L > 0$:

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t)\| \leq L, \quad t \in [0, T]$$

Крім того,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\dot{x}_n(t)\| \leq L, \quad t \in [0, T] \quad (3.12)$$

і

$$\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} M(1 + L)ds = M(1 + L)(t_2 - t_1)$$

Тому послідовність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ є передкомпактною у $\mathbb{C}([0, T])$. За теоремою Арцела $x_n \rightarrow \bar{x}$ в $C([0, T])$ з точністю до підпослідовності.

Із [4] та (3.12) випливає, що $\bar{x}$ є абсолютно неперервною, а $\dot{x}_n \rightarrow \dot{\bar{x}}$ *-слабо при $n \rightarrow \infty$ у $L^\infty(0, T)$. Оскільки $\forall \varepsilon > 0$ майже всюди за t існує n_0 таке, що $\forall n \geq n_0$

$$\lambda (\|x_n(t) - \bar{x}(t)\| + \|u_n(t) - \bar{u}(t)\|) < \varepsilon,$$

то за припущенням 3 маємо

$$\dot{x}_n(t) \in X \left(\frac{t}{\varepsilon}, x_n(t), u_n(t) \right) \subset O_\varepsilon \left(X \left(\frac{t}{\varepsilon}, x_n(t), u_n(t) \right) \right).$$

Враховуючи теорему збіжності [4], для п.о. t маємо

$$\dot{\bar{x}}(t) \in X \left(\frac{t}{\varepsilon}, \bar{x}(t), \bar{u}(t) \right).$$

За припущенням 6 отримуємо збіжність $u_n \rightarrow \bar{u}, n \rightarrow \infty$ в $L^2[0, T]$ по підпослідовності.

Тепер покажемо, що $\bar{x}, \bar{u}$ — розв'язок (3.1). Оскільки $u_n(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ та $x_n(t) \rightarrow \bar{x}(t), n \rightarrow \infty$ майже всюди за припущенням 4, маємо

$$L(t, x_n(t), u_n(t)) \rightarrow L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ майже всюди, } n \rightarrow \infty,$$

і множина $L(t, x_n, u_n)$ є обмеженою в $L^2(0, T)$. Отже, за лемою Ліонса ма-

ємо слабку збіжність $L(t, x_n, u_n) \rightarrow L(t, \bar{x}, \bar{u})$ в $L^2(0, T)$ при $n \rightarrow \infty$. Звідси

$$\int_0^T L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \rightarrow \int_0^T L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt, \quad n \rightarrow \infty,$$

із збіжністю $\Phi(x_n(T)) \rightarrow \Phi(\bar{x}(T))$ маємо $\lim_{n \rightarrow \infty} J[x_n, u_n] = J[\bar{x}, \bar{u}] = \bar{J}$, отже $\bar{x}, \bar{u}$ — розв'язок (3.1).

□

Розглянемо наступне припущення.

Припущення 7. Припустимо, що для всіх $u(\cdot) \in U$ задача (3.8) має єдиний розв'язок.

Теорема 3.1.2. За припущень 1–6, (3.2) та додатково припущення 7

$$\bar{J}_\varepsilon = J[\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon] \rightarrow \bar{J} := J[\bar{y}, \bar{u}] \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0$$

і по підпоследовності

$$\bar{u}_{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{u} \text{ в } L^2(0, T), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

$$\bar{x}_{\varepsilon_n} \rightarrow \bar{y} \text{ в } C(0, T), \quad \varepsilon_n \rightarrow 0,$$

де $\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{u}_{\varepsilon_n}$ — розв'язок (3.1), а $\bar{y}, \bar{u}$ — розв'язок (3.3).

Доведення. 1) Спочатку доведемо, що якщо $u_n \rightarrow \hat{u}$ в $L^2(0, T)$, x_n — розв'язок (3.7) з $\varepsilon = \varepsilon_n$, $u = u_n$, тоді

$$x_n \rightarrow \hat{y} \text{ в } C([0, T]), \quad (3.13)$$

де $\hat{y}$ — розв'язок (3.8) з $u = \hat{u}$.

Нехай $\hat{y}$ — єдиний розв'язок (3.8) з керуванням $u = \hat{u}$. Тоді

$$\begin{aligned} \|x_n(t) - \hat{y}(t)\| &\leq \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_n(s), u_n(s) \right) ds, \int_0^t Y(\hat{y}(s), \hat{u}(s)) ds \right) \leq \\ &\leq \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_n(s), u_n(s) \right) ds, \int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(s), \hat{u}(s) \right) ds \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(s), \hat{u}(s) \right) ds, \int_0^t Y(s, \hat{y}(s), \hat{u}(s)) ds \right) \leq \\
& \leq \lambda \int_0^t (||x_n(s) - \hat{y}(s)|| + ||u_n(s) - \hat{u}(s)||) ds + I_n,
\end{aligned}$$

де

$$I_n = \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(s), \hat{u}(s) \right) ds, \int_0^t Y(\hat{y}(s), \hat{u}(s)) ds \right).$$

Відомо, що будь-яку функцію з $L^2(0, T)$ можна апроксимувати неперервною у L^2 -нормі, а неперервну — кусково в неперервній нормі. Тоді для будь-якого $\eta > 0$ існує $\hat{u} \in C([0, T])$, таке що

$$||\hat{u} - u||_{L^2(0, T)} \leq \frac{\eta}{3}.$$

Позначимо $\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \chi_{[t_k, t_{k+1})}(t)$ (N залежить лише від η), так що

$$\sup_{t \in [0, T]} ||\hat{u}(t) - \underline{u}(t)|| \leq \frac{\eta}{3},$$

тоді

$$\begin{aligned}
I_n & \leq \lambda \int_0^t ||\hat{u} - u|| ds + \lambda \int_0^t ||\hat{u} - \underline{u}|| ds + \\
& +\text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(s), \underline{u}(s) \right) ds, \int_0^t Y(\hat{y}(s), \underline{u}(s)) ds \right).
\end{aligned}$$

Нехай $\tau_i = \frac{T \cdot i}{m}$, $i = \overline{0, m}$, і виберемо m достатньо великим, щоб для кожного $k \in \overline{1, N}$ існував $\tau_i \in [t_k, t_{k+1})$. Об'єднуючи множини t_k і τ_i та позначаючи отриману множину як $t_{i=0}^{\overline{N}}$, де $\overline{N} \leq N + m$, маємо:

$$|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{1}{m}, \quad \underline{u}(t) = \sum_{i=0}^{\overline{N}} \alpha_i \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

Тоді

$$I_n \leq \lambda T^{1/2} \frac{\eta}{3} + \lambda T \frac{\eta}{3} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=0}^{\overline{N}} \text{dist} H \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(s), \alpha_i \right) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(t_i), \alpha_i \right) ds \right) + \\
& + \sum_{i=0}^{\overline{N}} \text{dist} H \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, \hat{y}(t_i), \alpha_i \right) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(\hat{y}(t_i), \alpha_i) ds \right) + \\
& + \sum_{i=0}^{\overline{N}} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|Y(\hat{y}(t_i), \alpha_i) - Y(\hat{y}(s), \alpha_i)\| ds = \\
& = \lambda T^{1/2} \frac{\eta}{3} + \lambda T \frac{\eta}{3} + I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}.
\end{aligned}$$

Тепер оцінюємо верхню межу для $I_n^{(1)}$:

$$I_n^{(1)} \leq \sum_{i=0}^{\overline{N}} \lambda \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\hat{y}(s) - \hat{y}(t_i)\| ds.$$

Оскільки

$$\hat{y}(s) - \hat{y}(t_i) = \int_{t_i}^s Y(\hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau$$

та враховуючи обмеженість $\hat{y}$, маємо обмеженість багатозначної функції Y з константою C , отже отримуємо

$$\|\hat{y}(s) - \hat{y}(t_i)\| \leq C|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{C}{m}.$$

Нарешті

$$I_n^{(1)} \leq (N + m) \frac{C}{m^2}.$$

Використовуючи аналогічні аргументи, одержуємо таку ж верхню оцінку для $I_n^{(3)}$.

Тепер врахуємо (3.2) та теорему 3.1.1, виберемо n_0 так, що для всіх $n \geq n_0$

$$I_n^{(2)} \leq \overline{N} \cdot \frac{\eta}{3 \cdot \overline{N}} = \frac{\eta}{3}.$$

Таким чином,

$$I_n \leq \lambda \cdot T^{1/2} \frac{\eta}{3} + \lambda T \frac{\eta}{3} + \frac{2C(N+m)}{m^2} + \frac{\eta}{3}.$$

Вибираючи m так, щоб $\frac{2C(N+m)}{m^2} < \frac{\eta}{3}$, отримуємо, що $I_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, що доводить збіжність (3.13).

2) Нехай $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, та $\bar{x}_n := \bar{x}_{\varepsilon_n}$, $\bar{u}_n := \bar{u}_{\varepsilon_n}$ — оптимальний процес в (3.1). Тоді по підпоследовності $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ в $L^2(0, T)$ та за результатом з пункту 1) доведення маємо:

$$\bar{x}_n \rightarrow \bar{y} \text{ в } C([0, T]),$$

де $\bar{y}, \bar{u}$ — допустимий процес у (3.3). Враховуючи збіжність

$$L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t)) \rightarrow L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \quad \text{п.в.}$$

та нерівність

$$|L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t))| \leq c(t)(1 + \|\bar{u}_n(t)\|),$$

де $c \in L^2(0, T)$ (через лему Ліонса), отримуємо

$$L(t, \bar{x}_n, \bar{u}_n) \rightarrow L(t, \bar{y}, \bar{u}) \text{ слабо в } L^2(0, T), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[\bar{x}_n, \bar{u}_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^T L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t)) dt + \Phi(\bar{x}_n(T)) \right) = J[\bar{y}, \bar{u}].$$

З іншого боку, для будь-якої допустимої пари x_n, u в (3.1) маємо

$$J[\bar{x}_n, \bar{u}_n] \leq J[x_n, u].$$

Використовуючи результат з пункту 1) доведення, маємо $x_n \rightarrow y$ в $\mathbb{C}([0, T])$, де y, u — допустима пара в (3.3). Крім того,

$$J[x_n, u] \rightarrow J[y, u], \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[\bar{x}_n, \bar{u}_n] = J[\bar{y}, \bar{u}] \leq J[y, u]$$

і ми робимо висновок, що $\bar{y}, \bar{u}$ — оптимальний процес для (3.3).

□

3.1.4 Приклад

Як приклад розглянемо наступну задачу оптимального керування

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in [1 - 2 \sin^2 (\frac{t}{\varepsilon} \cdot x), 1 + 2 \sin^2 (\frac{t}{\varepsilon} \cdot x)] \cdot u, t \in (0, T), \\ x(0) = x_0, u(\cdot) \in [-1, 1], \\ J[x, u] = x(T) \rightarrow \inf. \end{cases}$$

Цій задачі відповідає наступна усереднена задача

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = u(t), t \in (0, T), \\ y(0) = y_0, u(\cdot) \in [-1, 1], \\ J[y, u] = y(T) \rightarrow \inf. \end{cases}$$

Необхідні припущення теореми 2 та 3 виконуються для заданої і усередненої задач. Тому

$$y(T) = x_0 + \int_0^T u(t) dt$$

та $u(t) \equiv -1$ є наближеним керуванням.

3.2 Задачі оптимального керування нелінійними диференціальними включеннями на півосі

3.2.1 Постановка задачі

Розглянемо задачу оптимального керування у вигляді

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x(t), u(t)\right), \\ x(0) = x_0, \quad u(\cdot) \in U, \\ J[x, u] = \int_0^\infty e^{-jt} L(t, x(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.14)$$

Тут $\varepsilon > 0$ — малий параметр, $j > 0$ — фіксоване число, що задає коефіцієнт дисконту, $x : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ — невідома фазова змінна, $u : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невідома керуюча функція, $X : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$ — багатозначна функція, а $U \subset \mathbb{R}^m$.

Припустимо, що рівномірно по x для кожного $u \in \mathbb{R}^m$ виконується:

$$\text{dist}_H \left(\frac{1}{s} \int_0^s X(\tau, x, u) d\tau, Y(x, u) \right) \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.15)$$

де границі багатозначних функцій розглядаються у сенсі [4, 5], dist_H — метрика Хаусдорфа, $Y : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{conv}(\mathbb{R}^n)$, а інтеграл багатозначної функції береться у сенсі Ауманна [6].

Розглянемо таку задачу з усередненим правим боком:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \in Y(y(t), u(t)), \\ y(0) = x_0, \quad u(\cdot) \in U, \\ J[y, u] = \int_0^\infty e^{-jt} L(t, y(t), u(t)) dt \rightarrow \inf. \end{cases} \quad (3.16)$$

За природними припущеннями щодо X , L та U ми покажемо, що задачі (3.14) та (3.16) мають розв'язки.

Також визначимо умови збіжності оптимальних керувань і оптимальних траєкторій початкової задачі до оптимальних керувань і траєкторій задачі

з усередненими коефіцієнтами.

3.2.2 Припущення та позначення

Нехай $Q = t \geq 0, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$ і припустимо, що виконуються наступні припущення.

Припущення 1. Відображення $(t, x, u) \mapsto X(t, x, u)$ є неперервним у метриці Хаусдорфа.

Припущення 2. Багатозначна функція $X(t, x, u)$ задовольняє умови росту: існують $M_1, M_2 > 0$ такі, що

$$\|X(t, x, u)\|_+ \leq M_1 \|x\| + M_2, \quad \forall (t, x, u) \in Q,$$

де $\|X(t, x, u)\|_+ = \sup_{\xi \in X(t, x, u)} \|\xi\|$, $\|\xi\|$ — евклідова норма вектору $\xi \in \mathbb{R}^n$, і $M_1 < j$.

Припущення 3. Багатозначна функція $X(t, x, u)$ задовольняє умову Ліпшиця: існує $L > 0$ таке, що

$$\text{dist}_H(X(t, x_1, u_1), X(t, x_2, u_2)) \leq L (\|x_1 - x_2\| + \|u_1 - u_2\|).$$

Припущення 4. Відображення $(x, u) \mapsto L(t, x, u)$ є неперервним, більш того, функція $t \mapsto L(t, x, u)$ є вимірною для всіх $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, і існує $K > 0$ таке, що

$$|L(t, x, u)| \leq K(1 + \|x\| + \|u\|).$$

Припущення 5. Розглядаємо вимірні вектор-функції $u(t)$, які для майже всіх $t \geq 0$ приймають значення у деякій компактній множині $U \subset \mathbb{R}^m$, а для кожного $T > 0$ функція $u(\cdot)$ належить компактній множині U_T у просторі $L_p([0, T])$ для деякого $p \geq 1$ як допустимі керування.

Зауваження 3.2.1. За припущеннями 1–3 для всіх допустимих $u(t)$ задача Коші

$$\begin{cases} \dot{x} \in X\left(\frac{t}{\varepsilon}, x, u\right), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

має розв'язок (наприклад, [5]) на $[0, +\infty)$ і цей розв'язок є абсолютно неперервною функцією.

Зауваження 3.2.2. За умови (3.15) багатозначне відображення Y задовольняє припущення 2 та 3; отже, для всіх допустимих $u(t)$ задача Коші

$$\begin{cases} \dot{y} \in Y(y, u), \\ y(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

має розв'язок.

3.2.3 Основні результати

Лема 3.2.1. *За припущень 1–5 задача (3.14) (відповідно, задача (3.16)) має розв’язок $\{\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon\}$ (відповідно, $\{\bar{y}, \bar{u}\}$).*

Доведення. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і в подальшому опустимо його позначення. По-перше, зауважимо, що зауваженням 3.2.1 (відповідно, зауваженням 3.2.2) множина припустимих пар непорожня. Покажемо, що за встановлених умов функціонали вартості у (3.14) досягають скінченного екстремуму. З урахуванням абсолютно неперервності функції x як розв’язку (3.16), умов для багатозначної функції X та нерівності Грануола маємо

$$\forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| \leq (\|x_0\| + \frac{M_2}{M_1})e^{M_1 t}. \quad (3.19)$$

Отже, враховуючи припущення 2, 4, 5 та нерівність (3.19), отримуємо

$$\begin{aligned} |J[x, u]| &= \left| \int_0^\infty e^{-jt} L(t, x(t), u(t)) dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-jt} K(1 + \|x(t)\| + \|u(t)\|) dt < \infty. \end{aligned}$$

Нехай $\{x_n, u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — мінімізуюча послідовність для задачі (3.14). Через (3.19) маємо рівномірну обмеженість послідовності $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ на кожному скінченному відрізку $[0, T]$, тобто існує $L_1 > 0$ таке, що

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x_n(t)\| \leq L_1, \quad t \in [0, T],$$

та

$$\|x_n(t_2) - x_n(t_1)\| \leq (M_1 L_1 + M_2)|t_2 - t_1|.$$

Отже, маємо прекомпактність $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ в $C([0, T])$. Завдяки теоремі Арцела-Асколі, вибравши підпослідовність, для будь-якого $T > 0$ маємо

$$x_n \rightarrow \bar{x} \text{ в } C([0, T]).$$

За припущенням 5 послідовність $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ така, що, вибравши підпослідовність, для будь-якого $T > 0$

$$u_n \rightarrow \bar{u} \text{ в } L_p([0, T]) \text{ та п.в.}$$

Отже, $\bar{u}$ є припустимим керуванням, а класичний результат збіжності [4],[5] дозволяє перейти до границі та отримати, що $\bar{x}$ є розв'язком задачі (3.17) з керуванням $\bar{u}$.

За припущенням 4 маємо

$$L(t, x_n(t), u_n(t)) \rightarrow L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \text{ п.в. при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, за теоремою Лебега

$$\int_0^\infty e^{-jt} L(t, x_n(t), u_n(t)) dt \rightarrow \int_0^\infty e^{-jt} L(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому

$$J[\bar{x}, \bar{u}] = \lim_{n \rightarrow \infty} J[x_n, u_n] = \inf_{(x, u) \in \Xi} J[x, u],$$

де Ξ — множина припустимих пар задачі (3.14). Отже, $\{\bar{x}, \bar{u}\}$ є розв'язком (3.14). □

Сформулюємо наступний результат щодо рівномірної збіжності розв'язків задачі Коші, одержаний в співавторстві з Н.В. Касімовою.

Лема 3.2.2. *Нехай виконуються припущення 1–3 та (3.15). Тоді якщо для $T > 0$*

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \text{ в } L_p([0, T]),$$

то

$$x_{\varepsilon_n} \rightarrow y_0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0, \text{ в } C([0, T]),$$

де $x_{\varepsilon_n}(t)$ — розв'язок задачі Коші (3.17) з керуванням $u = u_{\varepsilon_n}$, а $y_0(t)$ — розв'язок задачі Коші (3.18) з керуванням $u = u_0$.

Доведення. Розглянемо допоміжну задачу:

$$\begin{cases} \dot{z}_n \in X\left(\frac{t}{\varepsilon_n}, z_n, u_0\right), \\ z_n(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Множина розв'язків диференціального включення (3.20) співпадає з множиною узагальнених розв'язків [44], яка визначається як множина неперервних функцій, що задовольняють наступне включення

$$z_n(t) \in x_0 + \int_0^t X\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, z_n(s), u_0(s)\right) ds.$$

Маючи подібне включення для $x_n(t) := x_{\varepsilon_n}(t)$, $u_n(t) := u_{\varepsilon_n}(t)$, отримуємо

$$\begin{aligned} \|z_n(t) - x_n(t)\| &\leq \int_0^t \text{dist}_H\left(X\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, z_n(s), u_0(s)\right), X\left(\frac{s}{\varepsilon_n}, x_n(s), u_n(s)\right)\right) ds \leq \\ &\leq L \int_0^t \|z_n(s) - x_n(s)\| ds + L \int_0^T \|u_n(s) - u_0(s)\| ds. \end{aligned}$$

Отже, за допомогою нерівностей Грануола та Гельдера маємо

$$\|z_n(t) - x_n(t)\| \leq LT^{\frac{p-1}{p}} e^{LT} \|u_n - u_0\|_{L_p} \quad (3.21)$$

для $p \geq 1$.

За умов збіжності u_n до u_0 отримуємо

$$z_n - x_n \rightrightarrows 0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{на} \quad [0, T]. \quad (3.22)$$

Доведемо, що

$$z_n \rightrightarrows y_0, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{на} \quad [0, T]. \quad (3.23)$$

Для $t \in [0, T]$ маємо

$$\begin{aligned}
& \|z_n(t) - y_0(t)\| \leq \\
& \leq \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, z_n(s), u_0(s) \right) ds, \int_0^t Y (y_0(s), u_0(s)) ds \right) \leq \\
& \leq \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, z_n(s), u_0(s) \right) ds, \int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(s), u_0(s) \right) ds \right) + \\
& + \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(s), u_0(s) \right) ds, \int_0^t Y (s, y_0(s), u_0(s)) ds \right) \leq \\
& \leq L \int_0^t \|z_n(s) - y_0(s)\| ds + I_n,
\end{aligned}$$

де

$$I_n = \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(s), u_0(s) \right) ds, \int_0^t Y (y_0(s), u_0(s)) ds \right).$$

Для будь-якого $\eta > 0$ оберемо кускову функцію $\underline{u}(t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \cdot \chi_{[t_k, t_{k+1}]}(t)$ (N залежить лише від η), таку що

$$\|u_0 - \underline{u}\|_{L_p} \leq \eta.$$

Тоді

$$I_n \leq 2LT^{\frac{p-1}{p}} \eta + \text{dist}_H \left(\int_0^t X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(s), \underline{u}(s) \right) ds, \int_0^t Y (y_0(s), \underline{u}(s)) ds \right).$$

Нехай $\tau_i = \frac{T \cdot i}{m}, i = \overline{0, m}$, та виберемо m достатньо великим, щоб для кожного $k \in \overline{1, N}$ принаймні одне $\{\tau_i\}$ належало $[t_k, t_{k+1})$. Об'єднавши множини $\{t_k\}$ і $\{\tau_i\}$ та позначивши отриману множину як $\{t_i\}_{i=0}^{\overline{N}}$ з $\overline{N} \leq N + m$, маємо:

$$|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{1}{m}, \quad \underline{u}(t) = \sum_{i=0}^{\overline{N}} \alpha_i \cdot \chi_{[t_i, t_{i+1}]}(t).$$

Тоді

$$\begin{aligned}
I_n &\leq 2LT^{\frac{p-1}{p}}\eta + \\
&+ \sum_{i=0}^{\bar{N}} \text{dist}_H \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(s), \alpha_i \right) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(t_i), \alpha_i \right) ds \right) + \\
&+ \sum_{i=0}^{\bar{N}} \text{dist}_H \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} X \left(\frac{s}{\varepsilon_n}, y_0(t_i), \alpha_i \right) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(y_0(t_i), \alpha_i) ds \right) + \\
&+ \sum_{i=0}^{\bar{N}} \text{dist}_H \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(y_0(t_i), \alpha_i) ds, \int_{t_i}^{t_{i+1}} Y(\hat{y}(s), \alpha_i) ds \right) = \\
&= 2LT^{\frac{p-1}{p}}\eta + I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}.
\end{aligned}$$

Тепер оцінимо останні три доданки згори.

$$I_n^{(1)} \leq \sum_{i=0}^{\bar{N}} L \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|y_0(s) - y_0(t_i)\| ds.$$

Оскільки

$$y_0(s) - y_0(t_i) \in \int_{t_i}^s Y(\hat{y}(\tau), \hat{u}(\tau)) d\tau,$$

та враховуючи обмеження y_0 , маємо обмеженість багатозначної функції Y константою C .

Отже, отримаємо

$$\|y_0(s) - y_0(t_i)\| \leq C|t_{i+1} - t_i| \leq \frac{C}{m}.$$

Нарешті,

$$I_n^{(1)} \leq (N + m) \frac{C}{m^2}$$

Використовуючи аналогічні міркування, ми отримуємо таку саму верхню межу для $I_n^{(3)}$.

Тепер враховуючи (3.15), можемо обрати таке n_0 , що $\forall n \geq n_0$

$$I_n^{(2)} \leq \bar{N} \frac{\eta}{N} = \eta.$$

Об'єднуючи наведені вище нерівності, отримаємо $I_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, що і доводить твердження леми. □

Теорема 3.2.1. *Припустимо, що виконуються припущення 1–5 та (3.15). Припустимо додатково, що для будь-якого допустимого $u(\cdot)$ задача (3.18) має єдиний розв'язок. Тоді маємо такі твердження:*

$$J[\bar{x}_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon] \rightarrow J[\bar{y}, \bar{u}] \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

та, з точністю до підпослідовності, для будь-якого $T > 0$

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \bar{u} \text{ в } L_p([0, T]) \text{ при } \varepsilon_n \rightarrow 0, \\ \bar{x}_{\varepsilon_n} &\rightarrow \bar{y} \text{ в } C([0, T]) \text{ при } \varepsilon_n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

де $\{\bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{u}_{\varepsilon_n}\}$ — розв'язок задачі (3.14), а $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ — розв'язок задачі (3.16).

Доведення. Нехай $\varepsilon_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, і $\bar{x}_n := \bar{x}_{\varepsilon_n}, \bar{u}_n := \bar{u}_{\varepsilon_n}$ — оптимальний процес у (3.14). Аналогічно до тверджень [70, Theorem 2.2], можна побудувати підпослідовність $\{\bar{u}_n\}$ (позначимо її так само), для якої $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ у нормі L_p та майже всюди, де $\bar{u}$ — деяка припустима функція керування. Нехай $\bar{y}$ — розв'язок (3.18) з керуванням $u = \bar{u}$. Враховуючи результати Леми 3.2.2, отримуємо, що для будь-якого $T > 0$ з точністю до підпослідовності $\bar{x}_n \rightarrow \bar{y}$ в $C([0, T])$ при $n \rightarrow \infty$. Через припущення 4 маємо

$$L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t)) \rightarrow L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) \text{ майже всюди при } n \rightarrow \infty.$$

За нерівністю (3.19), припущеннями 2, 4 та 5 існує інтегровна мажоранта на $(0, +\infty)$:

$$|e^{-jt} L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t))| \leq e^{-jt} K(1 + (\|x_0\| + Mt)e^{Mt} + C),$$

де C — стала з обмеженості компактного множини U з припущення 5.

Отже, за теоремою Лебега

$$\int_0^{\infty} e^{-jt} L(t, \bar{x}_n(t), \bar{u}_n(t)) dt \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-jt} L(t, \bar{y}(t), \bar{u}(t)) dt.$$

Покажемо, що $\{\bar{y}, \bar{u}\}$ є оптимальним процесом для (3.16).

Для будь-якої припустимої пари $\{x_n, u\}$ у (3.14) маємо нерівність:

$$J[\bar{x}_n, \bar{u}_n] \leq J[x_n, u].$$

З Лема 3.2.2 випливає, що для будь-якого $T > 0$ з точністю до підпослідовності

$$x_n \rightarrow y \text{ в } C([0, T]),$$

де $\{y, u\}$ — допустима пара у (3.16). Також маємо

$$J[x_n, u] \rightarrow J[y, u], \quad n \rightarrow \infty.$$

Отже, для будь-якого припустимого керування u маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J[\bar{x}_n, \bar{u}_n] = J[\bar{y}, \bar{u}] \leq J[y, u].$$

Через єдиність розв'язку задачі (3.16) остання нерівність означає оптимальність $\{\bar{y}, \bar{u}\}$. Теорему доведено.

□

3.3 Висновки до розділу 3

У третьому розділі дисертації досліджено задачі оптимального керування нелінійними системами диференціальних включень із швидкоосцилюючими параметрами. Обґрунтовано розв'язність таких задач та встановлено зв'язок між збуреною та усередненою задачами. Доведено, що оптимальне керування задачі з усередненими коефіцієнтами є «приблизно» оптимальним для початкової задачі, тобто забезпечує близькість відповідних керувань і функціоналів вартості при малих параметрах збурення. Зокрема, в підрозділі 3.1 була розглянута задача оптимального керування для нелінійного диференціального включення зі швидкоколивними коефіцієнтами для багатозначної ліпшицевої правої частини на скінченному часовому інтервалі. В Теоремі 3.1.1 була доведена розв'язність такої задачі. В Теоремі 3.1.2 за додаткового припущення про однозначну розв'язність усередненого включення при фіксованій функції керування було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 3.2 відповідна задача була розглянута на півосі. Для цієї задачі в Лемі 3.2.1 встановлено існування розв'язків як збуреної, так і усередненої задач оптимального керування. На основі результату про збіжність розв'язків задач Коші збуреної і усередненої задачі в Теоремі 3.2.1 було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. Отримані результати узагальнюють класичні підходи усереднення для диференціальних рівнянь на випадок нелінійних диференціальних включень, що робить їх придатними для ширшого кола прикладних задач керування складними динамічними системами.

Таким чином, у розділі сформовано теоретичне підґрунтя для подальшого аналізу асимптотичної поведінки оптимальних керувань у нелінійних системах із швидкозмінними параметрами та обґрунтовано коректність застосування методів усереднення для побудови наближених оптимальних рішень.

Результати розділу опубліковано в [25, 60] та в тезах міжнародної конференції [23].

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота присвячена дослідженню питань про існування та наближене знаходження розв'язків задач оптимального керування лінійними та нелінійними за керуванням диференціальними включеннями на скінченних та нескінченних інтервалах зі швидкоколивними коефіцієнтами.

У першому розділі дисертаційної роботи наведено огляд літератури за тематикою дисертаційної роботи та результатів, отриманих іншими авторами. Основну увагу зосереджено на теорії оптимального керування для систем диференціальних рівнянь, теорії усереднення диференціальними рівняннями, та теорії диференціальних включень.

Другий розділ присвячений дослідженню розв'язності задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами лінійної за керуванням та з коерцитивним критерієм якості. Як основний інструмент наближеного розв'язання розглянута задача оптимального керування з усередненими коефіцієнтами. В результаті були визначені умови, за яких при прямуванні малого параметра до нуля розв'язки і значення критерію вихідної збуреної задачі збігаються до розв'язків і значення критерію усередненої задачі. Зокрема, в підрозділі 2.4 була розглянута задача обґрунтування методу усереднення до наближеного розв'язання задачі оптимального керування для диференціального включення, лінійного за змінною керування, та зі швидкоколивними коефіцієнтами для багатозначної ліпшицевої правої частини на скінченному часовому інтервалі для загального корцитивного функціоналу. На основі результату про збіжність розв'язків задач Коші збуреної і усередненої задачі в Теоремі 2.4.2 було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 2.5 відповідна задача була розглянута на нескінченному часовому інтервалі для квадратичного цільового функціоналу. В Теоремі 2.5.1 було обґрунто-

вано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 2.6 було розглянуто задачу оптимального керування для диференціального включення типу Каратеодорі зі швидко осцилюючими коефіцієнтами, афінного щодо керування та з квадратичним функціоналом вартості на півосі. На відміну від попередніх підрозділів, тут не накладалися умови Ліпшиця на багатозначну функцію правої частини. За умови напівнеперервності зверху і обмеженості в Теоремі 2.6.1 доведено збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі, де усереднення розуміємо в сенсі верхньої межі Куратовського.

У третьому розділі дисертації досліджено задачу оптимального керування нелінійними системами диференціальних включень із швидкоосцилюючими параметрами. Обґрунтовано розв'язність таких задач та встановлено зв'язок між збуреною та усередненою задачами. Доведено, що оптимальне керування задачі з усередненими коефіцієнтами є «приблизно» оптимальним для початкової задачі, тобто забезпечує близькість відповідних керувань і функціоналів вартості при малих параметрах збурення. Зокрема, в підрозділі 3.1 була розглянута задача оптимального керування для нелінійного диференціального включення зі швидкоколивними коефіцієнтами для багатозначної ліпшицевої правої частини на скінченному часовому інтервалі. В Теоремі 3.1.1 була доведена розв'язність такої задачі. В Теоремі 3.1.2 за додаткового припущення про однозначну розв'язність усередненого включення при фіксованій функції керування було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі. В підрозділі 3.2 відповідна задача була розглянута на півосі. Для цієї задачі в Лемі 3.2.1 встановлено існування розв'язків як збуреної, так і усередненої задач оптимального керування. На основі результату про збіжність розв'язків задач Коші збуреної і усередненої задачі в Теоремі 3.2.1 було обґрунтовано збіжність критеріїв якості та по підпоследовності збіжність оптимальних процесів збуреної і усередненої задачі.

У дисертаційній роботі отримано такі нові наукові результати:

— досліджено застосування методу усереднення для задач оптимального

керування диференціальними включеннями;

— для задачі оптимального керування, що є лінійною за керуванням, у випадку ліпшицевої багатозначної правої частини не більш, ніж лінійного росту зі швидкоколивними коефіцієнтами, доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі;

— для задачі оптимального керування, що є лінійною за керуванням, у випадку напівнеперервної зверху обмеженої багатозначної правої частини зі швидкоколивними коефіцієнтами доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами на нескінченному часовому інтервалі;

— для задачі оптимального керування розв'язками нелінійного за керуванням диференціального включення з ліпшицевою багатозначною правою частиною зі швидкоколивними коефіцієнтами, доведена збіжність критеріїв якості, оптимальних керувань та розв'язків до відповідних значень задачі оптимального керування з усередненими параметрами як у випадку скінченного часового проміжку, так і на півосі.

Отримані результати узагальнюють і розвивають класичні методи усереднення для диференціальних рівнянь та включень у контексті задач оптимального керування. Зокрема, побудовано математичне обґрунтування застосування методів усереднення для нелінійних систем із швидко змінними параметрами, що істотно розширює можливості аналізу та оптимізації складних динамічних процесів. Одержані результати можуть бути використані для синтезу ефективних керувань у системах із періодично або квазіперіодично змінними параметрами, що часто трапляються в технічних, економічних і природних процесах.

Отже, в дисертаційній роботі розв'язано актуальну наукову проблему — розроблено та обґрунтовано теоретичні основи застосування методів усереднення для дослідження розв'язності та асимптотичної поведінки оптимальних керувань у нелінійних системах диференціальних включень із швидкозмінними параметрами.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abdelgalil M., Poveda J. I., On Lie-Bracket Averaging for a Class of Hybrid Dynamical Systems with Applications to Model-Free Control and Optimization // arXiv:2308.15732, 2023, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2308.15732>.
2. Anderson B. D. O., Moore J. B., Optimal Control: Linear Quadratic Methods // Dover, 2007.
3. Andrews T. C., Wingate B. A., A mean correction for improved phase-averaging accuracy in oscillatory, multiscale differential equations // arXiv:2404.03964, 2024, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.03964>.
4. Aubin J.-P., Cellina A., Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory // Springer, Berlin/Heidelberg, 1984.
5. Aubin J.-P., Frankowska H., Set-Valued Analysis // Birkhäuser Boston, 2008, Reprint of the 1990 edition.
6. Aumann R.J., Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. Appl., Vol. 12, Issue 1, 1965, P.1-12, DOI: 10.1016/0022-247X(65)90049-1.
7. Bellman R., Dynamic Programming // Princeton University Press, 1957.
8. Betts J. T., Practical Methods for Optimal Control // SIAM, 2010.
9. Bonnet B., Frankowska H., Differential Inclusions in Wasserstein Spaces: The Cauchy-Lipschitz Framework // arXiv:2007.08906, 2020, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2007.08906>.
10. Bryson A. E., Ho Y.-C., Applied Optimal Control // Hemisphere Publishing, 1975.

11. Dashkovskiy Sergey, Kapustyan Oleksiy, Kapustian Olena, Zhuk Tetyana, Asymptotic analysis of optimal control problems on the semiaxes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients // Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 28, No. 6, P. 1077–1088, <https://doi.org/10.15388/namec.2023.28.33435> .
12. Dashkovskiy S. and Pavlichkov S., Constructive design of adaptive controllers for nonlinear MIMO systems with arbitrary switchings // IEEE Trans. Autom. Control, 2016, Vol. 61, Issue 7, DOI: 10.1109/TAC.2015.2491679.
13. Dashkovskiy S., Feketa P., Asymptotic properties of Zeno solutions // Nonlinear Anal. Hybrid Syst., Vol.30, 2018, P.256–265.
14. Dejing Lv, Mingze Wu, Reach control problem for linear polytopic differential inclusions // Journal of Difference Equations and Applications, 1-24, 2025, <https://doi.org/10.1080/10236198.2025.2603389>.
15. Derong Liu, Mingming Ha, Shan Xue, State of the Art of Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning // CAAI Artificial Intelligence Research Vol.1(2, 2023, P.93-110, DOI:10.26599/AIR.2022.9150007
16. R. Gama, A. Guerman, G. Smirnov, On the asymptotic stability of discontinuous systems analysed via the averaging method // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Vol.74(4), 2011, P.1513–1522, <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.10.024>.
17. Goebel R., Sanfelice R. G., Teel A. R., Hybrid Dynamical Systems: Modeling, Stability, and Robustness // Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.
18. Gorban N. V., Kapustyan O. V., Zhuk T. Y., Approximate Optimal Control on Semi-Axis for the Reaction-Diffusion Process with Fast-Oscillating Coefficients // International Workshop "QUALITDE-2020 Tbilisi State University, Georgia, 2020, P. 78 - 81.
19. Kamien M. I., Schwartz N. L., Dynamic Optimization // Elsevier, 2012.
20. Kapustian O.A., Kapustyan O.V., Ryzhov A. and Sobchuk V., Approximate optimal control for a parabolic system with perturbations in the coeffi-

- ents on the half-axis // *Axioms*, 2022, Vol.11, N.175, DOI: 10.3390/axioms11040175.
21. Kapustyan V.O., Kapustyan O.A., Mazur., Problem of optimal control for the poisson equation with nonlocal boundary conditions // *Journal of Mathematical Sciences (United States)*, 2014, Vol.201(3), P.325-334.
 22. Kapustyan O.V., Kapustyan O.A., Sukretna A.V., Approximate stabilization for a nonlinear parabolic boundary-value problem // *Ukrainian Mathematical Journal*, 2011, Vol.63(5), P.759-767.
 23. Kapustyan Oleksii, Ryzhov Anton, Kasimova Nina, Zhuk Tetyana, Averaging Method to the Optimal Control Problem of a Non-Linear Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Finite Interval // *International Workshop "QUALITDE-2022 Tbilisi State University, Georgia*, 2022, P. 108 - 111.
 24. KAPUSTIAN O.A., KASIMOVA N.V., ZHUK T.YU., Optimal control problems at the semi-axes for Caratheodory differential inclusions with fastoscillating coefficients // *NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS*, Ukraine, Kyiv, 2022, P. 24.
 25. Kasimova, N., Zhuk, T., Tsyganivska, I., Approximate solution of the optimal control problem for non-linear differential inclusion on the semi-axes // *Georgian Mathematical Journal*, 2023, Vol. 30, No. 6, P. 883–889, <https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2054> .
 26. Kasimova Nina, Feketa Petro, Application of the averaging method to the optimal control of parabolic differential inclusions on the semi-axis, *Axioms*, 2025, Vol.14(1), 74, <https://doi.org/10.3390/axioms14010074> .
 27. Kasimova Nina, Zhuk Tetiana, Tsyganivska Iryna, Application of the averaging method to the optimal control problem for nonlinear differential inclusion with fast-oscillating coefficients on the semi-axes // *Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023»*. К.: Київський університет, 2023, P. 22 - 23.

28. Kichmarenko O. D., Application of the averaging method to optimal control problem of system with fast parameters // International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, Vol. 115, Issue 1, P. 93-114.
29. Kichmarenko O.D, Stanzhytskyi O.M., Sufficient conditions for the existence of optimal controls for some classes of functional-differential equations // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2018, Vol.18(2), P.196-211.
30. Kichmarenko O., Stanzhytskyi O., Optimal control problems for some classes of functional-differential equations on the semi-axis // Miskolc Math. Notes, Vol.20(2), 2019, P.1021–1037.
31. Kichmarenko O., Kapustian O., Kasimova N., Zhuk T., Approximate Solution of Optimal Control Problem for Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Semi-Axis // International Workshop "QUALITDE-2021 Tbilisi State University, Georgia, 2021, P. 101 - 104.
32. Lavrova O., Mogylova V., Stanzhytskyi O., Misiats O., Approximation of the optimal control problem on an interval with a family of optimization problems on time scales // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2017, Vol.17(3), P. 303-314.
33. Lenhart S., Workman J. T., Optimal Control Applied to Biological Models // Chapman & Hall/CRC, 2007.
34. Lions J.-L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations // Springer, 1971.
35. Liu D., Xue et al. S., Adaptive Dynamic Programming for Control: A Survey and Recent Advances // IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics Systems Vol. 99, 2021, P.1-19, DOI:10.1109/TSMC.2020.3042876
36. Maghenem M., Sanfelice R. G., On the Converse Safety Problem for Differential Inclusions // arXiv:2201.13107, 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2201.13107>.
37. Mitropolsky, Yu.A., Lectures on averaging method in nonlinear mechanics // Naukova dumka: Kyiv, 1966.

38. Nakonechnyi O.G., Kapustian O.A., Chikrii, A.O., Approximate Guaranteed Mean Square Estimates of Functionals on Solutions of Parabolic Problems with Fast Oscillating Coefficients Under Nonlinear Observations // Cybernetics and Systems Analysis, 2019, Vol.55(5), P.785-795.
39. Nakonechny A.G., Kapustyan E.A., The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary-value problem // Journal of Automation and Information Sciences, Vol. 34, Issue 5, 2002, P.52–63.
40. Nurkanovi A., Sperl M., Albrecht S., Diehl M., Finite Elements with Switch Detection for Direct Optimal Control of Nonsmooth Systems // arXiv:2205.05337, 2022, <https://doi.org/10.48550/arXiv.2205.05337>.
41. Pei X., Li K., Li Y., A survey of adaptive optimal control theory // Mathematical Biosciences and Engineering, Vol.19(12), 2022, P.12058-12072, DOI:10.3934/mbe.2022561
42. Perestyuk, M.O., Plotnikov, V.A., Samoilenko, A.M., Strypnik, N.V., Impulsive differential equations with multi-valued and discontinuous right-hand side // Institute of Mathematics of Ukraine: Kyiv, 2007.
43. Plotnikov V.A., The Averaging Method in Control Problems // Lybid, Kiev, 1992
44. Plotnikov V.A., Plotnikov A.V., Vityuk A.N., Differential Equations with a Multivalued Right-Hand Side: Asymptotic methods // Odesa, Astroprint, 1999
45. Plotnikova N., The Krasnoselskii-Krein theorem for differential inclusions // Differ. Uravn., Vol.41, 2005, P.997-1000.
46. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes // New York: Interscience, 1962. 360 p.
47. Samoilenko A. M., Stanzhitskii A. N., On averaging differential equations on an infinite interval, //Differ. Equ., Vol.42(4), 2006, P.505–511.
48. Sanders J. A., Verhulst F., Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems // Appl. Math. Sci., Vol. 59, Springer, New York, 1985.

49. Stanzhyts'kyi O.M., Investigation of exponential dichotomy of Itô stochastic systems by using quadratic forms // Ukrainian Mathematical Journal, 2001, Vol.53(11), P.1882-1894.
50. Stanzhytskyi O. M., Uteshova R. E., Mukash M., Mogylova V. V., Application of the method of averaging to boundary value problems for differential equations with non-fixed moments of impulse // Carpathian Math. Publ., Vol.14(2), 2022, P.304–326.
51. Stanzhytskyi O. N., Assanova A. T., Mukash M. A., Averaging method and two-sided bounded solutions on the axis of systems with impulsive effects at non-fixed times // Bull. Karaganda Univ. Math. Ser., Vol.104(4), 2021, P.142–150.
52. Suttner R., Dashkovskiy S., Robustness and averaging properties of a large-amplitude, high-frequency extremum seeking control scheme // Automatica, Vol. 136, 2022, 110020, DOI:10.1016/j.automatica.2021.110020.
53. Suttner R., Dashkovskiy S., Exponential stability for extremum seeking control systems, // IFAC PapersOnLine, Vol.50(1), 2017, P.15464–15470.
54. Talhaouia Omar, Lmoua Hamid, Kajouni Ahmed, Analytical approach for fractional differential hybrid inclusions involving Ψ -Hilfer fractional derivative // Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, Serbia, Filomat 39:25, 2025, P.8841–8853 <https://doi.org/10.2298/FIL2525841T>
55. Wazewski T., Systemes de comande et equations au contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1961, 9, Issue 3, P. 151-155.
56. Wazewski T., Sur une condition equivalente l'equation an contingent // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math., astron. et phys., 1961, 9, Issue 12, P. 865-867.
57. Yasinskyj V. K., Savchuk B. V., Theoretical foundations of the averaging method for quasi-linear stochastic differential-functional equations // Math. Comp. Model., 2025.
58. Yong J., Zhou X. Y., Stochastic Controls // Springer, 1999.

59. Zadoyanchuk N.V., Kas'yanov P.O., Faedo-galerkin method for second-order evolution inclusions with W_λ -pseudomonotone mappings // Ukrainian Mathematical Journal, 2009, Vol.61(2), P.236-258.
60. Zhuk, T., Kasimova, N., Ryzhov, A., Application of the Averaging Method to the Optimal Control Problem of Non-Linear Differential Inclusions on the Finite Interval // Axioms, 2022, 11(11), P. 653, <https://doi.org/10.3390/axioms11110653> .
61. Zhuk T. Yu., AVERAGED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS ON THE FINITE AND INFINITE INTERVALS // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 45(2), P. 75—82, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).75-82](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).75-82) .
62. Zhuk T. Yu., Kasimova N.V, APPLICATION OF THE AVERAGING METHOD TO THE LINEAR BY CONTROL OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH FAST PARAMETERS // XXXVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021), Austria, Georgia, Ukraine, 2021, P. 121 - 122.
63. Zhuk T.Yu., Kasimova N.V., Kuppenko O.P., Tsyganivska I.M., Korol A.I., Investigation of solvability and attainability for optimal control problem for non-linear degenerate parabolic variation inequality in the class of H-admissible solutions // XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023), Polyana, Ukraine, 2023, P. 122.
64. Zhuk Tetiana, Optimal control problems on the semiaxes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». К.: Київський університет, 2024, С. 22.
65. Жук Т. Ю., Задачі оптимального керування на півосі для диференціальних включень зі швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та

молодих вчених «Шевченківська весна 2022». К.: Київський університет, 2022, С. 12 - 13.

66. Жук Тетяна, Метод усереднення в задачах оптимального керування для диференціальних включень з швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2024, С. 32 - 34.
67. Жук Тетяна, Про наближене оптимальне керування для диференціального включення зі збуреннями в коефіцієнтах та нефіксованим часом // Матеріали V Міжнародної конференції, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 2024, 37 - 38.
68. Жук Тетяна, Застосування методу усереднення в задачі оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2025.
69. Кічмаренко О.Д., Касімова Н.В., Жук Т.Ю., Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами // Дослідження в математиці та механіці, 2021, Т.26, №1, С. 38–54.
70. Кічмаренко О. Д., Застосування методу усереднення до задач оптимального керування для звичайних диференціальних рівнянь на півосі. // Український математичний журнал, 2018, Т. 70, № 5, С. 642-654.
71. Кічмаренко О. Д., Усереднення систем дискретних рівнянь із постійним запізненням // Науковий вісник Ужгородського університету. Математика та інформатика, 2012, Вип.23, № 2., С. 76-85.
72. Кічмаренко О. Д., Капустян О. А., Касімова Н. В., Жук Т. Ю., Задача оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі // ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, 2020, Т.23, №3, С. 363-372; translation in Journal

of Mathematical Sciences (United States), 2023, 272(2), P. 267—277, <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06415-z>.

73. Кічмаренко Ольга Дмитрівна, Касімова Ніна Василівна, Жук Тетяна Юріївна, ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА ПІВОСІ // Матеріали МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ, ПРИСВЯЧЕНА 75-РІЧЧЮ КАФЕДРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА 85-РІЧЧЮ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ПАВЛОВИЧА ЛЕНЮКА, м. Чернівці, Україна, 2021, С. 84 - 85.
74. Носенко Т. В., Метод усереднення в деяких задачах оптимального керування // Нелінійні коливання, 2008, Т. 11, № 4, С. 512-519.

ДОДАТОК

Список опублікованих праць здобувача за темою дисертації

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації

1. О.Д. Кічмаренко, Н.В. Касімова, Т.Ю. Жук, *Наближений розв'язок задачі оптимального керування диференціальним включенням зі швидкоколивними коефіцієнтами*, Дослідження в математиці та механіці, 2021, Т.26, №1, С. 38–54.
2. О. Д. Кічмаренко, О. А. Капустян, Н. В. Касімова, Т. Ю. Жук, *Задача оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними коефіцієнтами на півосі*, ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, 2020, Т.23, №3, С. 363-372; translation in Journal of Mathematical Sciences (United States), 2023, 272(2), P. 267—277, <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06415-z>.
3. Kasimova, N., Zhuk, T., Tsyganivska, I., *Approximate solution of the optimal control problem for non-linear differential inclusion on the semi-axes*, Georgian Mathematical Journal, 2023, Vol. 30, No. 6, P. 883–889, <https://doi.org/10.1515/gmj-2023-2054> .
4. Zhuk, T., Kasimova, N., Ryzhov, A., *Application of the Averaging Method to the Optimal Control Problem of Non-Linear Differential Inclusions on the Finite Interval*, Axioms, 2022, 11(11), P. 653, <https://doi.org/10.3390/axioms11110653> .
5. Sergey Dashkovskiy, Oleksiy Kapustyan, Olena Kapustian, Tetyana Zhuk, *Asymptotic analysis of optimal control problemson the semiaxes for Caratheodory differential inclusionswith fast oscillating coefficients*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, Vol. 28, No. 6, P. 1077—1088, <https://doi.org/10.15388/namc.2023.28.33435> .

6. T. Yu. Zhuk, *AVERAGED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL INCLUSIONS ON THE FINITE AND INFINITE INTERVALS*, Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics, 45(2), P. 75—82, [https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45\(2\).75-82](https://doi.org/10.24144/2616-7700.2024.45(2).75-82) .

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

1. N. V. Gorban, O. V. Kapustyan, T. Y. Zhuk. Approximate Optimal Control on Semi-Axis for the Reaction-Diffusion Process with Fast-Oscillating Coefficients // International Workshop "QUALITDE-2020 Tbilisi State University, Georgia, 2020, P. 78 - 81.
2. Zhuk T. Yu., Kasimova N.V. APPLICATION OF THE AVERAGING METHOD TO THE LINEAR BY CONTROL OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL INCLUSIONS WITH FAST PARAMETERS // XXXVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021), Austria, Georgia, Ukraine, 2021, P. 121 - 122.
3. Кічмаренко Ольга Дмитрівна, Касімова Ніна Василівна, Жук Тетяна Юріївна. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДО ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗІ ШВИДКОКОЛИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ НА ПІВОСІ // Матеріали МІЖНАРОДНОЇ НАУКОВОЇ КОНФЕРЕНЦІЇ, ПРИСВЯЧЕНА 75-РІЧЧЮ КАФЕДРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА 85-РІЧЧЮ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ПАВЛОВИЧА ЛЕНЮКА, м. Чернівці, Україна, 2021, С. 84 - 85.
4. O. Kichmarenko, O. Kapustian, N. Kasimova, T. Zhuk. Approximate Solution of Optimal Control Problem for Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Semi-Axis // International Workshop "QUALITDE-2021 Tbilisi State University, Georgia, 2021, P. 101 - 104.
5. Т. Ю. Жук. Задачі оптимального керування на півосі для диференціальних включень зі швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XX Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». К.: Київський університет, 2022, С. 12 - 13.
6. O.A. KAPUSTIAN, N.V. KASIMOVA, T.YU. ZHUK. Optimal control problems at the semi-axes for Caratheodory differential inclusions with fastoscillating coefficients // NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS, Ukraine, Kyiv, 2022, P. 24.

7. Oleksii Kapustyan, Anton Ryzhov, Nina Kasimova, Tetyana Zhuk. Averaging Method to the Optimal Control Problem of a Non-Linear Differential Inclusion with Fast-Oscillating Coefficients on Finite Interval // International Workshop "QUALITDE-2022 Tbilisi State University, Georgia, 2022, P. 108 - 111.

8. Nina Kasimova, Tetiana Zhuk, Iryna Tsyganivska. Application of the averaging method to the optimal control problem for nonlinear differential inclusion with fast-oscillating coefficients on the semi-axes // Матеріали XXI Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». К.: Київський університет, 2023, P. 22 - 23.

9. Zhuk T.Yu., Kasimova N.V., Kупenko O.P., Tsyganivska I.M., Korol A.I. Investigation of solvability and attainability for optimal control problem for non-linear degenerate parabolic variation inequality in the class of H-admissible solutions // XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023), Polyana, Ukraine, 2023, P. 122.

10. Tetiana Zhuk. Optimal control problems on the semiaxes for Caratheodory differential inclusions with fast oscillating coefficients // Матеріали XXII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». К.: Київський університет, 2024, С. 22.

11. Жук Тетяна. Метод усереднення в задачах оптимального керування для диференціальних включень з швидкоколивними коефіцієнтами // Матеріали XIII Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2024, С. 32 - 34.

12. Жук Тетяна. Про наближене оптимальне керування для диференціального включення зі збуреннями в коефіцієнтах та нефіксованим часом // Матеріали V Міжнародної конференції, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 2024, 37 - 38.

13. Жук Тетяна. Застосування методу усереднення в задачі оптимального керування диференціальним включенням із швидкоколивними кое-

фіцієнтами на півосі // Матеріали XIV Міжнародної науково-практичної конференції «Математика. Інформаційні технології. Освіта» (м. Луцьк, Волинська обл., 2025).

Відомості про апробацію результатів дисертації

Конференції

1. International Workshop "QUALITDE-2020 Tbilisi State University, Georgia, 2020.
2. XXXVI International Conference "Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2021), Austria, Georgia, Ukraine, 2021.
3. МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ, ПРИСВЯЧЕНА 75-РІЧЧЮ КАФЕДРИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА 85-РІЧЧЮ ВІД ДНЯ НАРОДЖЕННЯ МИХАЙЛА ПАВЛОВИЧА ЛЕНЮКА, м. Чернівці, Україна, 2021.
4. International Workshop "QUALITDE-2021 Tbilisi State University, Georgia, 2021.
5. XX Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2022». Київ, 2022.
6. NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS, Ukraine, Kyiv, 2022.
7. International Workshop "QUALITDE-2022 Tbilisi State University, Georgia, 2022.
8. XXI Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2023». Київ, 2023.
9. XXXVIII International Conference PROBLEMS OF DECISION MAKING UNDER UNCERTAINTIES (PDMU-2023), Polyana, Ukraine, 2023.
10. XXII Міжнародна науково-практична конференція студентів, аспірантів та молодих вчених «Шевченківська весна 2024». Київ, 2024.
11. XIII Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2024.
12. V Міжнародна конференція, присвяченої 145-річчю з дня народження Ганса Гана, Чернівці, Україна, 2024.

13. XIV Міжнародна науково-практична конференція «Математика. Інформаційні технології. Освіта», м. Луцьк, Волинська обл., 2025.

Наукові семінари

1. Науковий семінар з диференціальних рівнянь Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Наукові керівники — професор, доктор фізико-математичних наук О. М. Станжицький і професор, доктор фізико-математичних наук О. В. Капустян. (Київ, 2023, 2026).