МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

МІКРОХВИЛЬОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА В ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

КИЇВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ 2015

УДК 538.8(075.8)
ББК 22.31я73
М59

Автори:
І. В. Зависляк, Є. В. Мартиш,
М. О. Попов, І. В. Васильків

Рецензент

д-р фіз.-мат. наук, проф. В. І. Григорук

Рекомендовано до друку вченою радою факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем (протокол № 3 від 14 жовтня 2014 року)

Ухвалено науково-методичною радою Київського національного університету імені Тараса Шевченка 23 грудня 2014 року

М59 **Мікрохвильова** електродинаміка в задачах : навч. посіб. / І. В. Зависляк, Є. В. Мартиш, М. О. Попов, І. В. Васильків. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2015. – 111 с.

Систематизовано матеріал для практичних занять із дисциплін "Мікрохвильова електродинаміка" та "Електродинаміка НВЧ". Перед розв'язанням типових задач стисло наведено необхідні теоретичні відомості. Для самостійної роботи запропоновано набір задач із відповідями до них.

Для студентів та викладачів ВНЗ, фахівців у галузі прикладної електродинаміки та техніки НВЧ.

УДК 538.8(075.8)
ББК 22.31я73

© Зависляк І. В., Мартиш Є. В.,
Попов М. О., Васильків І. В., 2015
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2015

Передмова

Посібник містить типові задачі з дисциплін "Мікрохвильова електродинаміка" та "Електродинаміка НВЧ", які пропонуються студентам, що навчаються за спеціальністю "Радіофізика та електроніка". Як відомо, засвоєння теоретичного матеріалу з певної дисципліни неможливе без практичних навичок, наприклад, розв'язання відповідних задач . Саме тому цей посібник адресовано насамперед студентам для оволодіння необхідним теоретичним матеріалом у поєднанні з практичним досвідом, а це безумовно сприятиме розвитку їх неформального мислення та творчого підходу до справи, що особливо актуально в умовах сучасної вищої школи.

Посібник має 10 тематичних розділів, на початку кожного з яких наведено теоретичні відомості, розрахункові співвідношення та графіки, які необхідні для розв'язання задач. Після теоретичної частини наведено приклади розв'язання типових задач, а на завершення розділу пропонуються задачі для самостійного розв'язування студентами. Для зручності задачі в самостійній роботі мають відповіді.

У роботі над посібником використано вправи із таких відомих книг, як: А. А. Семенов "Теорія електромагнітних хвиль", А. А. Рухадзе та ін. "Основи електродинаміки плазми", В. В. Данилов, І. В. Зависляк, М. Г. Балінський "Спінхвильова електродинаміка". Основою посібника став збірник задач "Електродинаміка та поширення радіохвиль" за редакцією С. І. Баскакова.

Розділ 1

ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ

§ 1.1. Основні теоретичні відомості

Для опису фізичних полів прийнято використовувати їхні математичні моделі – скалярні й векторні поля. В ортогональній криволінійній системі координат (x_1, x_2, x_3) скалярне поле φ набуває вигляду деякої функції $\varphi(x_1, x_2, x_3)$, що набуває чисельних значень – дійсних чи комплексних. Векторне поле **A** задається трьома проекціями на одиничні вектори (орти) обраної системи координат:

$$\mathbf{A} = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3)\mathbf{l}_{x_3}.$$

Для характеристики величини і напрямку швидкості зміни скалярного поля в просторі вводять градієнт цього поля

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\mathbf{l}_{x_1} + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\mathbf{l}_{x_2} + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\mathbf{l}_{x_3}, \qquad (1.1)$$

де h_1, h_2, і h_3 – коефіцієнти Ляме за координатами x_1, x_2 та x_3, що є коефіцієнтами пропорційності між диференціалами узагальнених координат і нескінченно малими ребрами елементарного паралелепіпеда в обраній точці простору.

Наведемо значення коефіцієнтів Ляме для найбільш уживаних координатних систем:

- декартова система координат (x, y, z)
$$h_x = h_y = h_z = 1;$$
- циліндрична система координат (r, φ, z)
$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

- сферична система координат (r, ϑ, φ)

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r\sin\vartheta;$$

Градієнт скалярної функції є вектором, що вказує напрямок максимальної швидкості зміни цієї функції, а його довжина дорівнює швидкості зміни згаданої функції в цьому напрямку. Геометричне зображення скалярного поля виконується нанесенням ліній однакового потенціалу (лінії рівня): $\varphi = \text{const}$. Вектор gradφ напрямлений по нормалі до поверхні $\varphi = \text{const}$. Чим швидше відбувається зміна функції φ, тим більший gradφ і тим ближче одна до одної лінії однакового потенціалу. Градієнт обчислюють у такий спосіб:

- у декартовій системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{l}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{l}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{l}_z;$$

- у циліндричній системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{l}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{l}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{l}_z;$$

- у сферичній системі координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{l}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\mathbf{l}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{l}_\varphi.$$

Опис диференціальних властивостей векторного поля дещо складніший. Векторне поле **A** прийнято характеризувати скалярним полем – дивергенцією div **A** та векторним полем – ротором rot **A**. Значення дивергенції дорівнює густині джерел розглянутого поля в заданій точці простору. Поняття "ротор" особливо наочне при розгляді поля лінійних швидкостей частинок суцільного середовища. Зрозуміло, що течія рідини або газу може мати обертання (завихрення), тоді ротор поля лінійної швидкості не дорівнює нулю. Звідти і пішла назва "ротор", або "вихор". У англомовній літературі зазвичай використовується позначення "curl" (вихор) замість уживаного позначення "rot".

Графічне зображення векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ здійснюється за допомогою силових (або векторних) ліній. Вектор $\mathbf{A}(\mathbf{r}_0)$ є вектором дотичної до силової лінії в точці $\mathbf{r}_0$. При цьому силові лінії

проводяться таким чином, що їх густина пропорційна абсолютному значенню $|\mathbf{A}|$.

Більш формальний підхід веде до поняття циркуляції вектора **A** по лінії *L*, що обмежує контур площею *S*:

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{r}\,.$$

Легко перевірити, що циркуляція постійного вектора завжди дорівнює нулю. Також можна показати, що вона "породжується" на поверхні *S*. Наступний крок – густина "породження" циркуляції, тобто циркуляція, що породжується дуже малою ділянкою поверхні й стосується площі всієї ділянки:

$$\frac{d\Gamma}{dS} = \mathrm{rot}_n\, \mathbf{A}\,,$$

де *n* вказує на те, що береться проекція ротора на нормаль **n**. Тобто формула відповідає циркуляції по нескінченно малому контуру як одиниці площі, яку охоплює контур. Звідси випливає, що напрямок $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ в просторі виражений як напрямок нормалі до такої ділянки, де $d\Gamma/dS$ максимальне. Це визначення схоже з визначенням напрямку градієнта, наведеного вище. Якщо задати скінченну орієнтовану поверхню *S* із контуром *L*, то отримаємо важливе рівняння

$$\oint_L \mathbf{A}\, d\mathbf{r} = \oint_S \mathrm{rot}\,\mathbf{A}\, d\mathbf{S}\,, \qquad (1.2)$$

яке називають *формулою Стокса*.

Дивергенцію векторного поля **A** обчислюють шляхом диференціювання його проекцій за певними правилами:

- у декартовій системі координат

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \qquad (1.3)$$

- у циліндричній системі координат

$$\mathrm{div}\,\mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \qquad (1.4)$$

- у сферичній системі координат

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta)+\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi};\qquad(1.5)$$

- у довільній ортогональній криволінійній системі координат

$$\operatorname{div}\mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(h_2h_3A_{x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(h_1h_3A_{x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(h_1h_2A_{x_3}\right)\right].\quad(1.6)$$

Проекції ротора векторного поля мають такий вигляд:

- у декартовій системі координат.

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y};\qquad(1.7)$$

- у циліндричній системі координат

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_r=\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z},$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_\varphi=\frac{\partial A_r}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial r},$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_z=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right];\qquad(1.8)$$

- у сферичній системі координат

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_r=\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta A_\vartheta)-\frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right],$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_\vartheta=\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\right],$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{A}\right)_\varphi=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\vartheta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta}\right];\qquad(1.9)$$

Ротор векторного поля **A** в довільній системі координат виражають через проекції вихідного поля і коефіцієнти Ляме:

$$\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{\mathbf{l}_{x_1}}{h_2h_3}\left[\frac{\partial\left(h_3A_{x_3}\right)}{\partial x_2}-\frac{\partial\left(h_2A_{x_2}\right)}{\partial x_3}\right]$$
$$+\frac{\mathbf{l}_{x_2}}{h_1h_3}\left[\frac{\partial\left(h_1A_{x_1}\right)}{\partial x_3}-\frac{\partial\left(h_3A_{x_3}\right)}{\partial x_1}\right]+\frac{\mathbf{l}_{x_3}}{h_1h_2}\left[\frac{\partial\left(h_2A_{x_2}\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\left(h_1A_{x_1}\right)}{\partial x_2}\right]. \tag{1.10}$$

Диференціальні операції зі скалярними й векторними полями зручно записувати за допомогою символічного векторного оператора ∇, який називають оператором "набла", або оператором Гамільтона. У декартовій системі координат оператор Гамільтона записується таким чином:

$$\nabla\equiv\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{l}_x+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{l}_y+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{l}_z. \tag{1.11}$$

Доцільність введення цього символічного вектора полягає в тому, що за його допомогою зручно отримувати і записувати різні формули векторного аналізу.

На вектор ∇ можна перенести більшість з основних дій, відомих для звичайних векторів. Однак слід мати на увазі, що аналогія між символічним вектором ∇ і звичайними векторами неповна. У виразах, які містять одну змінну, вектором ∇ можна користуватися так, як і звичайним вектором, а у виразах, які містять добутки кількох змінних, оператор ∇ застосовується відповідно до правила диференціювання добутку. Зокрема, якщо він діє на добуток двох величин, то результат можна представити як суму двох доданків одного і того самого виду, у кожному з яких ∇ діє на один із множників і не діє на інший. Застосування оператора Гамільтона до суми будь-яких доданків завжди зводиться до застосування ∇ до кожного із доданків окремо. Використовуючи цей оператор, відомі диференціальні оператори першого порядку представляють у вигляді

$$\operatorname{grad}U=\nabla U,\ \operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\mathbf{A},\ \operatorname{rot}\mathbf{A}=\left[\nabla\mathbf{A}\right] \tag{1.12}$$

Із диференціальних векторних операцій другого порядку широке застосування в електродинаміці знаходить оператор ∇^2, закон дії якого на векторне поле **A** описується співвідношенням

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \text{rot rot } \mathbf{A}. \qquad (1.13)$$

Диференціальна операція другого порядку, що діє на скалярне поле, задається оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \text{div grad}.$$

Оператор Лапласа в різних координатних системах записується таким чином:

- у декартовій системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad (1.14)$$

- у циліндричній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \qquad (1.15)$$

- у сферичній системі координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}. \qquad (1.16)$$

§ 1.2. Приклади розв'язання типових задач

1.1. Для функції $\Phi = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ знайти похідну за напрямком внутрішньої нормалі до циліндричної поверхні $x^2 + z^2 = a^2 + c^2$ у точці $M_0(a,b,c)$.

Розв'язання. Нехай $f(x,y,z) = x^2 + z^2$. Тоді за умовою задачі поверхня є поверхнею рівня для *f*, яка проходить крізь точку M_0. Відповідно градієнт цієї функції в точці M_0 дорівнює

$$\text{grad}(f(M_0)) = (2a, 0, 2c).$$

Функція f у точці M_0 найшвидше зростає в напрямку градієнта, тобто в напрямку нормалі до заданої поверхні. Із вигляду функції f робимо висновок, що це – напрямок зовнішньої нормалі. Відповідно одиничний вектор внутрішньої нормалі в точці M_0 має вигляд

$$\mathbf{l} = \left(\frac{-a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, 0, \frac{-c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \right).$$

Маємо $\nabla\Phi = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right)$. За визначенням градієнта можна записати $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = (\mathbf{l} \cdot \nabla f)$, тоді

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial \mathbf{l}} = \frac{-a}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot \frac{2a}{a^2} - \frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \cdot \frac{2c}{c^2} = -\frac{4}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

1.2. Знайти ротор векторного поля $\mathbf{a} = y\mathbf{l}_x + z\mathbf{l}_y + x\mathbf{l}_z$ по окружності:

$$C : \left\{ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \;/\; x + y + z = 0 \right\},$$

де задано напрямок руху проти годинникової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі Ox.

Розв'язання. За формулою Стокса (1.2) маємо

$$\int_C \mathbf{a} d\mathbf{r} = \iint_S \mathrm{rot}\mathbf{a} d\mathbf{S} = \iint_S (\mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{S},$$

де S – коло на площині $x+y+z = 0$, межею якого слугує окружність C; $\mathbf{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ – одиничний вектор нормалі до S, напрямок якої узгоджується з напрямком обведення по окружності C за правилом правого гвинта. Розрахуємо rot$\mathbf{a}$ за формулою (1.7):

$$(\mathrm{rot}\mathbf{a})_x = \frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = -1;$$

$$(\mathrm{rot}\mathbf{a})_y = \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = -1;\ (\mathrm{rot}\mathbf{a})_z = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = -1;$$

$$(\mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\ ;$$

$$\iint\limits_S (\mathrm{rot}\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})\mathrm{d}S = -\sqrt{3}\iint\limits_S \mathrm{d}S = -\pi R^2\sqrt{3}.$$

1.3. Для векторного поля $\mathbf{A} = (A_\mathrm{x}, A_\mathrm{y}, A_\mathrm{z})$ із двічі диференційованими компонентами розрахувати: а) div rot**A**; б) rot rot**A**, використовуючи оператор Гамільтона як вектор.

Розв'язання: а) використовуючи колову перестановку множників у змішаному добутку векторів, маємо

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{a}) = (\nabla \cdot [\nabla \cdot \mathbf{a}]) = ([\nabla \cdot \nabla] \cdot \mathbf{a}) = 0\ ;$$

б) використовуючи правило обчислення подвійного векторного добутку та вираз (1.13), отримуємо

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) = [\nabla[\nabla \cdot \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{A} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A}\ .$$

1.4. Розрахувати лапласіан векторного поля

$$\mathbf{A} = \left(\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}, \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \right).$$

Розв'язання. Якщо подіяти оператором Лапласа на компоненти поля, то отримаємо

$$\Delta A_x = \Delta \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = 0,$$

$$\Delta A_y = \Delta \frac{y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = 0,$$

$$\Delta A_z = \Delta \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = 0,$$

тобто $\Delta\mathbf{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z) = (0,0,0)$ – нульовий вектор.

§ 1.3. Задачі для самостійного розв'язання

1.5. Скалярне поле φ задано в декартовій системі координат виразом $\varphi = 3x^2 y\cos z + 2z^2$. Обчислити векторне поле grad φ.

Відповідь:

$$\operatorname{grad}\varphi = 6xy\cos z\ \mathbf{l}_x + 3x^2\cos z\ \mathbf{l}_y + \left(2z - 3x^2 y\sin z\right)\mathbf{l}_z.$$

1.6. Визначити дивергенцію і ротор векторного поля **A**, що характеризується такими складовими в циліндричній системі координат: $A_r = 10/r^3$, $A_\varphi = 0$, $A_z = 0$.

Відповідь: div **A** = $-10/r^3$, rot **A** = 0.

1.7. Визначити дивергенцію і ротор векторного поля **A**, що у сферичній системі координат має єдину складову $A_\vartheta = 8r\exp(-10r)$.

Відповідь: div **A** = 0, rot **A** = $16(1 - 5r)\exp(-10r)\mathbf{I}\,\varphi$

1.8. У декартовій системі координат деяке скалярне поле задано тривимірним інтегралом Фур'є

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(k_1,k_2,k_3)\ \mathrm{e}^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dk_1dk_2dk_3.$$

Обчислити $\Delta\varphi$.

Відповідь:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}F(k_1,k_2,k_3)\ e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}dk_1dk_2dk_3,$$

де $F = -\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)\Phi$.

1.9. Зобразити графічно картину силових ліній векторних полів, заданих у декартовій системі координат своїми проекціями:

$$A_x = y + 10,\ A_y = 0,\ A_z = 0,\ B_x =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ B_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ B_z = 0.$$

1.10. Знайти ротор і дивергенцію векторних полів, заданих у декартовій системі координат:

$$\mathbf{A} = \cos ay\ \mathbf{l}_x + \sin ax\ \mathbf{l}_y + \operatorname{tg} az\ \mathbf{l}_z,\quad \mathbf{B} = 6x\ \mathbf{l}_x + 5z\ \mathbf{l}_y + 10y\ \mathbf{l}_z.$$

Відповідь: $\operatorname{rot}\mathbf{A} = a\left(\cos ax - \sin ax\right)\,\mathbf{l}_x,\ \operatorname{div}\mathbf{A} = a/\cos^2 az,$

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = -5\cdot\mathbf{l}_x,\ \operatorname{div}\mathbf{B} = 6\,.$$

1.11. Використовуючи правила дії з оператором Гамільтона, довести тотожність

$$\operatorname{rot}\left[\mathbf{AB}\right] = \left(\mathbf{B}\nabla\right)\mathbf{A} - \left(\mathbf{A}\nabla\right)\mathbf{B} + \mathbf{A}\operatorname{div}\mathbf{B} - \mathbf{B}\operatorname{div}\mathbf{A}.$$

1.12. У просторі задано два векторних поля **A** і **B**. Знайти вираз для поля **C** = grad (**AB**).

Вказівка: виразити операцію grad через оператор ∇ і скористатися правилом диференціювання добутку.

Відповідь: $\mathbf{C} = \left[\mathbf{A}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right] + \left[\mathbf{B}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right] + \left(\mathbf{B}\nabla\right)\mathbf{A} + \left(\mathbf{A}\nabla\right)\mathbf{B}\,.$

1.13. Довести тотожності векторного аналізу (φ і **A** – довільні диференційовані скалярне та векторне поле):

$$\operatorname{divrot}\mathbf{A} = 0,$$

$$\operatorname{rotgrad}\varphi = 0,$$

$$\operatorname{rot}\left(\varphi\mathbf{A}\right) = \left[\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{A}\right] + \varphi\operatorname{rot}\mathbf{A},$$

$$\operatorname{div}\left(\varphi\mathbf{A}\right) = (A\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi\operatorname{div}\mathbf{A},$$

$$\operatorname{grad}\left(\varphi_1\varphi_2\right) = \varphi_1\operatorname{grad}\varphi_2 + \varphi_2\operatorname{grad}\varphi_1.$$

Р о з д і л 2

РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА

§ 2.1. Основні теоретичні відомості

Класична теорія електромагнетизму базується на рівняннях Максвелла, що описують сукупність емпіричних відомостей про електромагнітне поле. Для вакууму вводять два основних векторних об'єкти – *напруженість електричного поля* **E** та *напруженість магнітного поля* **H**. Окрім того, визначають скалярне поле *об'ємної густини електричного заряду* **ρ** і векторне поле *об'ємної густини електричного струму* $\mathbf{J}_e$, пов'язаного зі спрямованим рухом носіїв заряду в просторі. Система рівнянь Максвелла в диференціальній формі для вакууму щодо згаданих вище величин записується таким чином:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{E} &= \rho / \varepsilon_0, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \qquad (2.1)$$

Ці рівняння містять дві фундаментальні фізичні константи: $\varepsilon_0 = 10^{-9} / (36\pi)$ Ф/м – *електрична стала* та $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – *магнітна стала*.

До основних принципів електродинаміки належить також закон збереження електричного заряду, що знаходить своє відображення в рівнянні неперервності:

$$\operatorname{div}\mathbf{J}_{\text{e}} + \partial\rho / \partial t = 0. \qquad (2.2)$$

Перше рівняння системи (2.1) являє собою диференціальну форму запису відомого закону Ампера, доповнену вектором *густини струму зміщення*:

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Іноді зручно виділяти густину *стороннього* електричного струму $\mathbf{J}_{\text{ст.е}}$. Суму струму зміщення, струму провідності, а також стороннього струму в електродинаміці називають *повним струмом.*

Друге рівняння системи (2.1) описує закон електромагнітної індукції Фарадея. Третє рівняння системи (2.1) стверджує, що джерелом статичного електричного поля є заряди. З цього випливає, що силові лінії електричного поля можуть починатися і закінчуватися тільки на електричних зарядах. Четверте рівняння вказує на те, що не існують монопольні магнітні заряди. Відповідно силові лінії магнітного поля завжди замкнені.

За наявності матеріальних середовищ теорія Максвелла має бути доповненою деякими додатковими уявленнями, які враховують мікроскопічну структуру речовини. Під дією прикладеного електричного поля **E** в середовищі виникає *струм провідності* з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_{\text{e}} = \sigma\mathbf{E}, \qquad (2.3)$$

де σ – питома об'ємна провідність речовини. Співвідношення (2.3) є диференціальною формою запису закону Ома; пропорційність між $\mathbf{J}_{\text{e}}$ і **E** в сильних електричних полях може порушуватися. Молекули або атоми речовини в електричному полі поляризуються, що відображається в теорії введенням векторного поля *електричної поляризації* **P**. Цей вектор у кожній точці характеризує дипольний момент одиниці об'єму речовини. Якщо електромагнітне поле змінюється в часі, то в середовищі виникає електричний струм поляризації з об'ємною густиною

$$\mathbf{J}_{\text{пол}} = \partial\mathbf{P} / \partial\rho$$

У кожній точці середовища прийнято вводити вектор електричного зміщення (індукції)

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}. \qquad (2.4)$$

У результаті перше рівняння Максвелла набуде вигляду

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}. \qquad (2.5)$$

Магнетизм матеріальних середовищ має квантову природу. У межах класичних уявлень визначають *вектор намагніченості* **M**, що є магнітним моментом одиниці об'єму речовини, і вектор магнітної індукції **B**, пов'язаний із **H** та **M** співвідношенням

$$\mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{H} + \mathbf{M}\right).$$

Друге рівняння Максвелла в матеріальному середовищі має вигляд

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t. \qquad (2.6)$$

Третє і четверте рівняння Максвелла записуються так:

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho, \qquad (2.7)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \qquad (2.8)$$

У лінійному наближенні поляризація і намагніченість пов'язані з напруженостями полів співвідношеннями:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi_{\text{діел}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_{\text{м}}\mathbf{H}, \qquad (2.9)$$

де $\chi_{\text{діел}}$, $\chi_{\text{м}}$ – діелектрична і магнітна сприйнятливості речовини. На цій підставі матеріальні рівняння електромагнітного поля можна записати у вигляді

$$\mathbf{D} = \varepsilon_{\text{аб}}\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_{\text{аб}}\mathbf{H}. \qquad (2.10)$$

Коефіцієнтами пропорційності між напруженостями та індукціями є *абсолютна діелектрична проникність* $\varepsilon_{\text{аб}}$ і *абсолютна магнітна проникність* $\mu_{\text{аб}}$. У розрахунках зазвичай використовують *відносні проникності*:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{аб}}/\varepsilon_0, \quad \mu = \mu_{\text{аб}}/\mu_0. \qquad (2.11)$$

Співвідношення виду (2.10) справджуються лише за умови, якщо взаємодія поля і речовини відбувається майже безінерційно. У НВЧ та оптичному діапазонах доводиться враховувати ефекти, що пов'язані з кінцевим часом становлення стану речовини. При цьому можна казати про діелектричну й магнітну проникності, що залежать від частоти.

Четверте рівняння Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ свідчить про те, що в природі не існує магнітних зарядів. Проте іноді буває зручно скористатися формальним уявленням про *сторонній магнітний*

струм, густину якого $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$ вводять у праву частину другого рівняння Максвелла. Остаточно одержуємо:

- рівняння Максвелла в диференціальній формі

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}},\\ &\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t - \mathbf{J}_{\text{ст.м}},\\ &\operatorname{div}\mathbf{D} = \rho,\\ &\operatorname{div}\mathbf{B} = 0; \end{aligned} \tag{2.12}$$

- рівняння Максвелла в інтегральній формі

$$\begin{aligned} &\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{l} = \int_S \left(\partial\mathbf{D}/\partial t + \sigma\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}\right)d\mathbf{S},\\ &\oint_L \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\int_S \left(\partial\mathbf{B}/\partial t + \mathbf{J}_{\text{ст.м}}\right)d\mathbf{S},\\ &\oint_S \mathbf{D}d\mathbf{S} = \int_V \rho dV,\\ &\oint_S \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Зазвичай розглядають гармонічні електромагнітні поля, що змінюються в часі за законом $e^{i\omega t}$ із частотою ω. При цьому рівняння Максвелла записують щодо *комплексних амплітуд полів* таким чином:

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\tilde{\varepsilon}\ \dot{\mathbf{E}} + \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.е}},\\ &\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\tilde{\mu}\ \dot{\mathbf{H}} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}},\\ &\operatorname{div}\dot{\mathbf{D}} = \dot{\rho},\\ &\operatorname{div}\dot{\mathbf{B}} = 0; \end{aligned} \tag{2.14}$$

Ці рівняння містять комплексні діелектричну $\tilde{\varepsilon}_{\text{аб}}$ і магнітну $\tilde{\mu}_{\text{аб}}$ проникності:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon' - i\varepsilon'', \quad \tilde{\mu} = \mu' - i\mu''.$$

Наявність уявних частин проникності вказує на незворотне перетворення частини енергії електромагнітного поля на енергію теплового руху. Виділення тепла може відбуватися як за ра-

хунок струмів провідності, так і за рахунок внутрішнього тертя, що супроводжує процеси поляризації та перемагнічування. Якщо втрати в середовищі пов'язані тільки з наявністю струмів провідності, то $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i\sigma/\omega$, $\tilde{\mu} = \mu$.

У техніці різні речовини прийнято характеризувати за допомогою *тангенсів кутів діелектричних* і *магнітних втрат:*

$$\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = \varepsilon''/\varepsilon', \quad \operatorname{tg}\delta_{\text{м}} = \mu''/\mu'. \tag{2.15}$$

На межі поділу двох матеріальних середовищ із різними електричними параметрами вектори поля мають задовольняти визначені граничні умови. Кожний із векторів (напр., **E**) у точці межі прийнято розкладати на нормальну і тангенціальну (дотичну) складові $\mathbf{E} = E_n\mathbf{l}_n + E_\tau\mathbf{l}_\tau$, де $\mathbf{l}_n$, $\mathbf{l}_\tau$ – орти нормального і тангенціального напрямків, відповідно).

Нормальні складові індукцій і тангенціальні складові напруженостей неперервні в кожній точці межі поділу:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \\ B_{1n} &= B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Якщо одне із середовищ – ідеально провідний метал, для якого $\sigma \to \infty$, тоді тангенціальна складова електричного вектора на поверхні відсутня:

$$E_\tau = 0. \tag{2.17}$$

На поверхні металу наявний електричний струм з *поверхневою густиною*

$$\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{l}_n\mathbf{H}]. \tag{2.18}$$

Електромагнітне поле є носієм енергії. Об'ємна густина енергії в будь-якій точці простору

$$w = \frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB}). \tag{2.19}$$

Закон збереження енергії знаходить своє відображення в *теоремі Пойнтінга:*

$$-\operatorname{div}[\mathbf{EH}] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{ED} + \mathbf{HB})\right] + \sigma E^2 + \mathbf{J}_{\text{ст.е}}\mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.м}}\mathbf{H}. \tag{2.20}$$

Вектор Пойнтінга

$$\boldsymbol{\Pi} = [\mathbf{EH}] \tag{2.21}$$

характеризує густину потоку енергії за секунду.

Для полів, що змінюються в часі за гармонічним законом, прийнято вводити комплексний вектор Пойнтінга

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2}\left[\dot{\mathbf{E}}\,\dot{\mathbf{H}}^{*}\right]. \qquad (2.22)$$

Дійсна частина цього вектора

$$\mathbf{\Pi}_{\text{сер}} = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}\,\dot{\mathbf{H}}^{*}\right] \qquad (2.23)$$

дорівнює середньому за період потоку енергії. Якщо всередині певної області немає втрат і електромагнітна енергія залишається сталою, то такий потік енергії крізь поверхню, що оточує цю область, є середнім потоком потужності випромінювання.

Із рівнянь Максвелла випливає ряд додаткових співвідношень, яким мають задовольняти електромагнітні поля. Наприклад, якщо система сторонніх джерел $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.1e}}$ збуджує в просторі електромагнітний процес $\dot{\mathbf{E}}_1$, $\dot{\mathbf{H}}_1$, у той час як системі $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.2e}}$ відповідають поля $\dot{\mathbf{E}}_2$, $\dot{\mathbf{H}}_2$, то справедлива рівність

$$\operatorname{div}\left[\dot{\mathbf{E}}_1\,\dot{\mathbf{H}}_2\right] - \operatorname{div}\left[\dot{\mathbf{E}}_2\,\dot{\mathbf{H}}_1\right] = \dot{\mathbf{E}}_2\,\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.1e}} - \dot{\mathbf{E}}_1\,\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.2e}}, \qquad (2.24)$$

яку називають *лемою Лоренца*.

§ 2.2. Приклади розв'язання типових задач

2.1. У вакуумі існує електромагнітне поле, що гармонічно змінюється в часі. У деякій точці простору вектор $E = 130\cos 2\pi\cdot 10^{10} t\mathbf{l}_x$. Визначити густину струму зміщення в даній точці.

Розв'язання. За визначенням струм зміщення

$$\mathbf{J}_{\text{зм}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -0{,}556\sin 2\pi\cdot 10^{10} t\mathbf{l}_x.$$

Зауважимо, що в просторі струм зсуву і напруженість електричного поля паралельні, однак струм випереджає за фазою напруженість поля на 90°.

2.2. Показати, що з рівнянь Максвелла для вакууму випливають відомі *хвильові рівняння*

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$
$$\nabla^2\mathbf{H} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \qquad (2.25)$$

Розв'язання. Випишемо систему з двох перших рівнянь Максвелла, справедливих для вакууму за відсутності сторонніх джерел

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},$$
$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, \qquad (2.26)$$

і застосуємо операцію rot до другого рівняння системи (2.25):

$$\operatorname{rotrot}\mathbf{E} \equiv \operatorname{graddiv}\mathbf{E} - \nabla^2\mathbf{E} = -\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\mathbf{H}\right).$$

Припускаючи, що в цій області простору немає зарядів ($\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$) і користуючись першим рівнянням (2.26), одержимо хвильове рівняння (2.25) для вектора електричного поля. Рівняння щодо вектора магнітного поля знаходять аналогічно.

2.3. Матеріальне середовище характеризується абсолютними проникностями $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(x, y, z)$, $\mu = \text{const}$. Вивести диференціальне рівняння другого порядку, якому має задовольняти векторне поле **H** у такому неоднорідному середовищі, якщо електромагнітний процес гармонічно змінюється в часі з частотою ω.

Розв'язання. Розглянемо два перших рівняння Максвелла відносно комплексних амплітуд:

$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}} = i\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}},$$
$$\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}} = -i\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \qquad (2.27)$$

і застосуємо операцію rot до першого рівняння (2.27):

$$\operatorname{rotrot}\dot{\mathbf{H}} \equiv \operatorname{graddiv}\dot{\mathbf{H}} - \nabla^2\dot{\mathbf{H}} = i\omega\operatorname{rot}\left(\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\right).$$

Магнітна проникність середовища незмінна в просторі, тому $\operatorname{div}\dot{\mathbf{H}} = 0$, окрім того:

$$\operatorname{rot}\left(\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\right) = \left[\operatorname{grad}\varepsilon\dot{\mathbf{E}}\right] + \varepsilon\operatorname{rot}\dot{\mathbf{E}}.$$

Вектор **E** можна виразити через вектор **H** із першого рівняння

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{-i}{\omega\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}.$$

Якщо ввести позначення $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$, то одержуємо остаточний вигляд шуканого рівняння

$$\nabla^2\dot{\mathbf{H}} + k^2\dot{\mathbf{H}} + \left[\frac{\operatorname{grad}\varepsilon}{\varepsilon}\operatorname{rot}\dot{\mathbf{H}}\right] = 0.$$

2.4. Показати, що рівняння неперервності струму випливає з першого і третього рівнянь Максвелла (2.1).

Розв'язання. Варто взяти до уваги відому тотожність векторного аналізу і записати

$$\operatorname{divrot}\mathbf{H} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\mathbf{E} + \operatorname{div}\mathbf{J}_{\text{e}} = 0,$$

а потім скористатися третім рівнянням Максвелла (2.1). Таким чином, приходимо до рівняння неперервності $\operatorname{div}\mathbf{J}_{\text{e}} + \partial\rho/\partial t = 0$.

§ 2.3. Задачі для самостійного розв'язання

2.5. Показати, що із четвертого рівняння Максвелла в неоднорідному середовищі, магнітна проникність якого є функцією просторових координат, випливає таке рівняння для вектора напруженості магнітного поля:

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_{\text{аб}}}\left(\mathbf{H}\operatorname{grad}\mu_{\text{аб}}\right).$$

2.6. Показати, що електромагнітне поле, яке змінюється у часі за гармонічним законом із частотою ω в області простору, вільної від джерел, задовольняє однорідні рівняння Гельмгольця

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \varepsilon_{аб} \mu_{аб} \dot{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \varepsilon_{аб} \mu_{аб} \dot{\mathbf{H}} = 0.$$

2.7. Вектор напруженості електричного поля **E** в декартовій системі координат має єдину, відмінну від нуля, складову E_x. Показати, що при цьому вектор Пойнтінга не може мати складової вздовж осі *x*.

2.8. У фіксованій точці простору відомі миттєві значення векторів поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E_0} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H_0} \cos(\omega t + \varphi_2),$$

де $\mathbf{E_0}$ і $\mathbf{H_0}$ – сталі вектори.

Показати, що миттєве значення вектора Пойнтінга складається з незмінного в часі середнього значення

$$\mathbf{П}_{сер} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

і змінної частини

$$\mathbf{П}_{зм} = \frac{1}{2}[\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2),$$

що змінюється в часі з подвоєною частотою.

2.9. При феноменологічному описі частотних властивостей полярних діелектриків використовують математичну модель, що уподібнює молекулярні диполі до уявних твердих частинок, що відчувають при своєму русі в'язкий опір навколишнього середовища. При цьому зв'язок між вектором поляризації **P** і вектором напруженості електричного поля **E** встановлюється диференціальним рівнянням

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{1}{T}\mathbf{P} = a\mathbf{E},$$

де *a* – константа; *T* – час релаксації середовища. Вивести залежність комплексної абсолютної діелектричної проникності від частоти.

Відповідь: $\tilde{\varepsilon}_{\text{аб}} = \varepsilon_0 + \dfrac{aT}{1 + i\omega T}$.

2.10. Використовуючи умови попередньої задачі, вивести формулу тангенса кута діелектричних втрат.

Відповідь: $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = \dfrac{a\omega T^2}{\varepsilon_0 + T(a + \omega^2 \varepsilon_0 T)}$.

2.11. Розв'язати задачу 2.9 для випадку, коли динаміка процесу поляризації описується рівнянням

$$\frac{d^2\mathbf{P}}{dt^2} + \frac{2}{T}\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = b\mathbf{E},$$

де ω_0 – власна частота молекулярного диполя; b – константа. Таке рівняння виникає, якщо за модель диполя прийняти осцилятор із тертям. Проаналізувати графіки частотних залежностей дійсної та уявної частин діелектричної проникності.

Відповідь: $\varepsilon_{\text{аб}} = \varepsilon_0 + \dfrac{bT}{(\omega^2 - \omega^2)T + i2\omega}$.

2.12. Комплексні амплітуди векторів електромагнітного поля в деякій точці простору задаються виразами

$$\dot{\mathbf{E}} = 0,85\,\mathrm{e}^{i0,6}\,\mathbf{l}_x - 1,3\,\mathrm{e}^{-i0,7}\,\mathbf{l}_y, \quad \dot{\mathbf{H}} = 4,2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{-i1,2}\,\mathbf{l}_z.$$

Визначити комплексний вектор Пойнтінга і його середнє значення.

Відповідь:

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = -2,73\cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{i0,5}\,\mathbf{l}_x - 1,785\cdot 10^{-3}\,\mathrm{e}^{i1,8}\,\mathbf{l}_y,$$

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_{\text{сер}} = -2,396\cdot 10^{-3}\mathbf{l}_x + 0,406\cdot 10^{-3}\mathbf{l}_y.$$

Р о з д і л 3

ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ

§ 3.1. Основні теоретичні відомості

Плоскі електромагнітні хвилі існують в однорідному необмеженому середовищі. У випадку полів, що змінюються із часом за гармонічним законом, комплексні амплітуди $\dot{\mathbf{E}}$ та $\dot{\mathbf{H}}$ задовольняють рівняння Гельмгольця

$$\begin{aligned} \nabla^2\dot{\mathbf{E}} + k^2\dot{\mathbf{E}} = 0, \\ \nabla^2\dot{\mathbf{H}} + k^2\dot{\mathbf{H}} = 0, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де $k = \omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_{\text{аб}}\tilde{\mu}_{\text{аб}}} = \beta - i\alpha$ – комплексний коефіцієнт поширення, β – коефіцієнт фази, або хвильове число, α – коефіцієнт ослаблення. Оскільки вихідні рівняння Максвелла дають однозначний зв'язок між **E** та **H**, то достатньо знайти розв'язок лише одного із цих рівнянь.

Окремий розв'язок рівняння Гельмгольця описує однорідну плоску хвилю. Якщо остання поширюється вздовж осі z декартової системи координат, тоді вказаний розв'язок має вигляд

$$\dot{\mathbf{E}}(z) = \dot{\mathbf{E}}_1(0)\,\mathrm{e}^{-ikz} + \dot{\mathbf{E}}_2(0)\,\mathrm{e}^{ikz}. \tag{3.2}$$

Перший доданок відповідає прямій (такій, що падає) хвилі, що поширюється в напрямку додатних значень z. Якщо величини $\tilde{\varepsilon}_{\text{аб}}$ і $\tilde{\mu}_{\text{аб}}$ відомі, то β і α можна знайти за допомогою виразу для кореня квадратного з комплексного числа

$$\sqrt{a \pm ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-a}{2}}\right),$$

де $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ – модуль комплексного числа, квадратні корені $\sqrt{r+a}$, $\sqrt{r-a}$ слід вважати додатними.

На високих частотах магнітні властивості більшості середовищ проявляються слабко. Тому з достатнім для практичних цілей ступенем точності можна вважати $\mu_{аб} = \mu_0$.

Оскільки $\tilde{\varepsilon}_{аб} = \varepsilon'_{аб} - i\varepsilon''_{аб} = \varepsilon\varepsilon_0\left(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta_{діел}\right)$, то комплексний коефіцієнт поширення

$$k = \beta - i\alpha = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_{аб}}\sqrt{1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta_{діел}}. \qquad (3.3)$$

Коефіцієнт фази β характеризує зміну фази гармонічних коливань при поширенні хвилі. Відстань, на якій фаза змінюється на 2π рад, називають *довжиною хвилі*, $\lambda = 2\pi/\beta$.

Площину однакових фаз називають *фазовим фронтом хвилі*, а швидкість переміщення цієї площини – *фазовою швидкістю*:

$$V_ф = \omega/\beta. \qquad (3.4)$$

Коефіцієнт фази і коефіцієнт ослаблення можна представити такими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0}\left(\frac{1+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta_{діел}}}{2}\right)^{1/2}, \qquad (3.5)$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0}\left(\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta_{діел}}-1}{2}\right)^{1/2}. \qquad (3.6)$$

Отже, між ними існує співвідношення $\alpha = \beta\,\mathrm{tg}\left(\delta_\varepsilon/2\right)$.

Фазова швидкість

$$V_ф = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\varepsilon}\left(1+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\delta_{діел}}\right)^{1/2}}, \qquad (3.7)$$

довжина хвилі

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}\left(1+\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\delta_{\text{діел}}}\right)^{1/2}}. \qquad (3.8)$$

У формулах (3.5) – (3.8) використано відоме співвідношення

$$\mu_0\varepsilon_0 = c^{-2}.$$

Відношення фазової швидкості в середовищі до швидкості світла називають *коефіцієнтом заломлення* $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Із рівнянь Максвелла випливає, що у випадку плоскої хвилі комплексні амплітуди векторів **E** та **H** пов'язані через *характеристичний опір середовища* $Z_\text{с}$:

$$\dot{E} = Z_\text{с}\dot{H}, \quad \text{де } Z_\text{с} = \sqrt{\widetilde{\mu}_{\text{аб}} \big/ \widetilde{\varepsilon}_{\text{аб}}}. \qquad (3.9)$$

Характеристичний опір для немагнітних середовищ ($\mu_{\text{аб}} = \mu_0$):

$$Z_\text{с} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}(1 - i\,\mathrm{tg}\,\delta_{\text{діел}})^{-\frac{1}{2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}}(1+\mathrm{tg}^2\,\delta_{\text{діел}})^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\delta_{\text{діел}}}{2}}.$$

Аргумент набуває значень від нуля (діелектрики без втрат) до $\pi/4$ (ідеальний метал).

Характеристичний опір для вакууму становить

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} = 120\pi = 376{,}991\ [\text{Ом}].$$

Векторні рівняння (3.1) вказують на те, що будь-який координатний компонент векторів поля задовольняє рівняння $\nabla^2\dot{U} + k^2\dot{U} = 0,$ розв'язком якого в декартовій системі координат є

$$\dot{U} = C\exp[-ik(\xi_x x + \xi_y k + \xi_z z)]. \qquad (3.10)$$

Тут C – константа; ξ_x, ξ_y, ξ_z – комплексні сталі, що задовольняють умову

$$\xi_x{}^2 + \xi_y{}^2 + \xi_z{}^2 = 1. \qquad (3.11)$$

Якщо ξ_x, ξ_y, ξ_z – дійсні числа, тоді вираз (3.10) описує однорідну плоску хвилю, що поширюється в довільному відносно

вихідної системи координат напрямку. Цю хвилю зручно представити формулою

$$\dot{U} = C\exp[-i\gamma(\boldsymbol{\xi}\mathbf{r})]. \qquad (3.12)$$

Числа ξ_x, ξ_y, ξ_z мають зміст напрямних косинусів, які фіксують напрямок поширення хвилі, а $\mathbf{r}$ є радіус-вектором точки (x, y, z). Якщо хоча б одне із чисел ξ_x, ξ_y, ξ_z комплексне, тоді вираз (3.10) буде описувати *неоднорідну плоску хвилю*:

$$U = C\exp\{-i\,\mathrm{Re}[k(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] - \mathrm{Im}[k(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)]\}, \qquad (3.13)$$

у якої фазовий фронт задається рівнянням

$$\mathrm{Re}[k(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] = \mathrm{const},$$

а площина рівних амплітуд – рівнянням

$$\mathrm{Im}[k(\xi_x x + \xi_y y + \xi_z z)] = \mathrm{const}.$$

У загальному випадку фазовий фронт і площина рівних амплітуд утворюють довільний кут. Оскільки рівняння Максвелла лінійні, то будь-яка комбінація їх розв'язків також буде розв'язком. Зокрема, якщо $\dot{E}_x\mathbf{l}_x$ і $\dot{E}_y\mathbf{l}_y$ – розв'язки вихідних рівнянь, тоді

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x\mathbf{l}_x + \dot{E}_y\mathbf{l}_y \qquad (3.14)$$

також є розв'язком рівнянь Максвелла й описує поширення у просторі деякої хвилі. Залежно від співвідношення між фазами та амплітудами $\dot{E}_x$ і $\dot{E}_y$ у кожній точці простору кінець вектора $\mathbf{E}$ буде рухатись по еліпсу з різним відношенням та орієнтацією його півосей. Таку хвилю називають *хвилею з еліптичною поляризацією.* За довільних значень амплітуд і фаз у виразі (3.14) шляхом повороту осей довкола осі z завжди можна ввести нову систему координат (x', y', z'), у якій зсув фаз між координатними компонентами буде становити $\pm 90^0$, а півосі еліпса – збігатися з напрямком осей системи. Кут повороту, який забезпечить таке перетворення системи координат, буде визначати орієнтацію осей еліпса в системі (x, y, z). Відношення великої півосі еліпса до малої називають *коефіцієнтом еліптичності* $k_{\text{ел}}$.

Лінійно поляризована хвиля являє собою один із граничних випадків еліптично поляризованої хвилі. Другий граничний випадок виконується за рівності амплітуд вихідних полів та зсуві фаз між ними, що дорівнює 90^0. Тут кінець вектора **E** рухається по колу, і тому хвилю називають *хвилею із круговою поляризацією*. Поле такої хвилі можна представити виразом

$$\dot{\mathbf{E}}_{\pm} = \dot{E}(\mathbf{l}_x \pm i\mathbf{l}_y). \tag{3.15}$$

Знак "мінус" відповідає хвилі з правою круговою поляризацією, у якої вектор **E** обертається за годинниковою стрілкою (за напрямком поширення), а знак "плюс" – хвилі з лівою круговою поляризацією (напрямок обертання зворотний). Будь-яку хвилю з лінійною поляризацією можна представити сумою двох хвиль із круговою поляризацією, наприклад:

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{l}_x = \dot{\mathbf{E}}_+ + \dot{\mathbf{E}}_-, \tag{3.16}$$

де

$$\dot{\mathbf{E}}_+ = \frac{\dot{E}_x}{2}(\mathbf{l}_x + i\mathbf{l}_y), \quad \dot{\mathbf{E}}_- = \frac{\dot{E}_x}{2}(\mathbf{l}_x - i\mathbf{l}_y). \tag{3.17}$$

Плоска хвиля переносить енергію в напрямку поширення. Для гармонічних полів цей процес описується середнім значенням вектора Пойнтінга:

$$\mathbf{\Pi}_{\text{сер}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}\right]. \tag{3.18}$$

Зазвичай $\mathbf{\Pi}_{\text{сер}}$ зручно виражати лише через напруженість електричного чи магнітного поля

$$\mathbf{\Pi}_{\text{сер}} = \frac{\left|\dot{E}\right|^2}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{Z_{\text{с}}}\right)\mathbf{l}_z = \frac{\left|\dot{H}\right|^2}{2}\mathrm{Re}\left(Z_{\text{с}}\right)\mathbf{l}_z. \tag{3.19}$$

У середовищах без втрат $\mathbf{\Pi}_{\text{сер}}$ не залежить від координати z. Якщо ж середовища зазнають втрат, тоді густина потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі спадає при поширенні за експоненціальним законом

$$\mathbf{\Pi}_{\text{сер}} = \mathbf{\Pi}_{\text{сер}}(0)\exp(-2\alpha z). \tag{3.20}$$

Величину втрат у середовищі характеризують *питомим згасанням* Δ [дБ/м]:

$$\Delta = 20\lg\left[\frac{E(0)}{E(1)}\right] = 10\lg\left[\frac{\Pi(0)}{\Pi(1)}\right],$$

яке пов'язане з коефіцієнтом ослаблення α співвідношенням $\Delta = 8,69\alpha$.

Фазова швидкість плоскої електромагнітної хвилі у середовищі із залежними від частоти параметрами ε' і ε'' також є функцією частоти. Таке явище називають *дисперсією фазової швидкості*. При поширенні складних сигналів у цьому випадку будуть порушені вихідні амплітудні та фазові співвідношення між окремими компонентами спектра та, як наслідок, буде змінюватися форма сигналу в процесі його поширення. Для визначення вигляду сигналу необхідно користуватись спектральним чи операторним методом. Наприклад, припускаючи, що

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)\,\mathrm{e}^{-i\omega t}\,dt$$

є фур'є-перетворенням сигналу у площині $z = 0$, можна знайти сигнал для довільних значень z, використовуючи зворотне перетворення

$$s(t,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\,\mathrm{e}^{-i\gamma z}\mathrm{e}^{i\omega t}\,d\omega. \qquad (3.21)$$

Нехтуючи втратами в середовищі і припускаючи, що спектр сигналу $s(t, z)$ досить вузький (тобто відносна ширина його смуги $\Delta\omega / \omega_0 << 1$), можна отримати, що максимум його обвідної в середовищах із дисперсією поширюватиметься з *груповою швидкістю*

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\,\omega}{d\,\beta}. \qquad (3.22)$$

Якщо умова вузькосмуговості сигналу не виконується, тоді поняття групової швидкості перестає відповідати опису трансформації форми такого сигналу.

§ 3.2. Приклади розв'язання типових задач

3.1. Плоска електромагнітна хвиля із частотою 10^9 Гц поширюється в середовищі з параметрами $\varepsilon = 2,4$, $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = 10^{-1}$, $\mu = 1$. Визначити фазову швидкість, довжину хвилі та коефіцієнт ослаблення.

Розв'язання. Врахуємо, що $\operatorname{tg}\delta_{\varepsilon} << 1$, і розкладемо вираз (3.3) у степеневий ряд. Обмежуючись трьома першими членами, отримаємо

$$k = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_{\text{аб}}}\sqrt{1 - i\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}}} \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_{\text{аб}}}\left(1 - i\frac{\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}}}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2\delta_{\text{діел}}}{8}\right).$$

Таким чином, для діелектрика з малими втратами коефіцієнт фази та коефіцієнт ослаблення наближено дорівнюють один одному:

$$\beta \approx \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_{\text{аб}}}\left(1 + 0,125\operatorname{tg}^2\delta_{\text{діел}}\right),$$

$$\alpha \approx 0,5\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'_{\text{аб}}}.$$

Використовуючи співвідношення (3.4), знайдемо фазову швидкість хвилі

$$V_{\text{ф}} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}(1 + 0,125\operatorname{tg}^2\delta_{\text{діел}})}.$$

Отриманий результат свідчить про те, що наявність втрат у середовищі приводить до зміни величини фазової швидкості. Для $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = 10^{-1}$ поправка становить 0,125 %, тобто можна покласти, що

$$V_{\text{ф}} \approx c / \sqrt{\varepsilon} = 1,94 \cdot 10^8 \text{ [м/с]}.$$

На основі відомої величини фазової швидкості знайдемо довжину хвилі $\lambda = V_{\text{ф}} / f = 0,194$ м. Підстановка вихідних даних в отриману формулу дає $\alpha = 1,622$ м$^{-1}$.

3.2. Обчислити фазову швидкість, коефіцієнт ослаблення та глибину проникнення поля для плоскої електромагнітної хвилі із

частотою 10 МГц, що поширюється в металі з параметрами $\sigma = 5 \cdot 10^7$ См/м, $\mu = 1$.

Розв'язання. У реальних металах густина струмів провідності значно більша густини струмів зміщення. Тому вираз можна наближено записати у вигляді

$$k \approx \omega \sqrt{\mu_0 \left(-i \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} (1 - i).$$

Коефіцієнт фази та коефіцієнт ослаблення в середовищі, що розглядається, чисельно дорівнюють одне одному

$$\beta = \alpha = \sqrt{\omega \sigma \mu_0 / 2} = 44,43 \cdot 10^3 \ [\text{м}^{-1}].$$

На основі відомої величини β можна обчислити фазову швидкість $V_\text{ф} = 1,414 \cdot 10^3$ м/с. За глибину проникнення поля в метал δ приймають відстань, на якій його амплітуда зменшується в e разів. Очевидно, що $\delta = 1 / \alpha = 22,5 \cdot 10^{-6}$ м = 22,5 мкм.

3.3. Плоска електромагнітна хвиля із частотою 10^9 Гц поширюється в середовищі з параметрами $\varepsilon = 2,25$, $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon = 0,01$, $\mu = 1$. Амплітуда електричного поля у площині $z = 0$ дорівнює 100 В/м. Визначити середню густину потоку потужності у площині $z = 1$ м.

Розв'язання. Густина потоку потужності плоскої електромагнітної хвилі визначається виразом

$$\Pi_\text{сер}(z) = \frac{\left| \dot{E} \right|^2}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{Z_\text{с}} \right) \text{e}^{-2\alpha z}.$$

Необхідно обчислити коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір. Діючи так само, як і в задачі 3.1, можна знайти α. Підстановка вихідних даних дає $\alpha = 0,162$ м$^{-1}$.

При визначенні характеристичного опору для $\operatorname{tg} \delta_\varepsilon << 1$ можна використати наближений вираз для квадратного кореня, що входить до формули (3.10). Тоді

$$Z_\text{с} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon \varepsilon_0}} \frac{1}{1 - 0,5i \operatorname{tg} \delta_\text{діел}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{1}{1 - 0,5i \operatorname{tg} \delta_\text{діел}}.$$

Звідки

$$\Pi_{\text{сер}}(z)=\frac{\left|\dot{E}\right|^2}{2}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{120\pi}\mathrm{e}^{-2\alpha z},$$

або після необхідних обчислень $\Pi_{\text{сер}}(z=1)=14{,}38$ Вт/м^2.

3.4. Деякі речовини (напр., водний розчин цукру) мають різну швидкість поширення для хвиль з лівою та правою круговою поляризацією. Це спричиняє поворот площини поляризації плоскої хвилі з лінійною поляризацією в процесі її поширення. Таку властивість речовин називають *оптичною активністю*. Вважаючи, що значення фазових швидкостей для лівої $V_{\text{л}}$ та правої $V_{\text{п}}$ кругової поляризації задані, вивести формулу, яка визначає кут повороту площини поляризації хвилі на проміжку шляху довжиною L для електромагнітної хвилі із заданою частотою ω.

Розв'язання. Лінійно поляризовану хвилю, що у площині $z=0$ має вигляд $\dot{\mathbf{E}}=E_{0x}\mathbf{l}_x$, можна представити як суму двох хвиль із круговою поляризацією:

$$\dot{\mathbf{E}}_{\text{п}}=\frac{\dot{E}_{0x}}{2}(\mathbf{l}_x+i\mathbf{l}_y),\ \ \dot{\mathbf{E}}_{\text{л}}=\frac{\dot{E}_{0x}}{2}(\mathbf{l}_x-i\mathbf{l}_y).$$

Хвиля із правою круговою поляризацією при поширенні в напрямку осі z буде описуватися виразом

$$\dot{E}_{\text{п}}(z)=E_{0\text{п}}\left(-i\frac{\omega}{V_{\text{п}}}z\right),$$

а з лівою – виразом

$$\dot{E}_{\text{л}}(z)=E_{0\text{л}}\left(-i\frac{\omega}{V_{\text{л}}}z\right).$$

У довільній площині $z\neq 0$ сума цих хвиль являтиме собою хвилю з лінійною поляризацією. Координатні компоненти цієї хвилі дорівнюють

$$\dot{E}_x(z)=\frac{E_{0x}}{2}\left(\mathrm{e}^{-i\beta_{\text{п}}z}+\mathrm{e}^{-i\beta_{\text{л}}z}\right),$$

$$\dot{E}_y(z)=i\frac{E_{0x}}{2}\left(\mathrm{e}^{-i\beta_{\text{п}}z}-\mathrm{e}^{-i\beta_{\text{л}}z}\right).$$

Сумарний вектор **E** утворює деякий кут φ із віссю *x* координатної системи (*x*, *y*, *z*), який залежить від *z*. Тангенс цього кута

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg}\left[\frac{\omega z}{2}\left(\frac{1}{V_{\text{л}}} - \frac{1}{V_{\text{п}}}\right)\right].$$

Таким чином, кут повороту площини поляризації на відрізку шляху довжиною *L* визначається формулою

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\left[\frac{\omega L}{2}\left(\frac{V_{\text{п}} - V_{\text{л}}}{V_{\text{л}} V_{\text{п}}}\right)\right].$$

Зазвичай відмінність швидкостей поширення $V_{\text{л}}$ та $V_{\text{п}}$ мала. Тому наближено

$$\varphi \approx \frac{\omega L}{2V}\frac{V_{\text{п}} - V_{\text{л}}}{V} = \pi\frac{L}{\lambda}\delta V,$$

де V – середнє значення швидкості; δV – відносна різниця швидкостей поширення; $\lambda = V / f$ – довжина хвилі в середовищі.

§ 3.3. Задачі для самостійного розв'язання

3.5. Визначити довжину та фазову швидкість електромагнітної хвилі, що поширюється в середовищі без втрат з відносними проникностями ε = μ = 10, якщо частота хвилі становить 10 МГц.

Відповідь: 3 м, $3\cdot10^7$ м/с.

3.6. Характеристичний опір середовища дорівнює 1508 Ом, відносна діелектрична проникність ε = 1. Визначити відносну магнітну проникність середовища.

Відповідь: 16.

3.7. У середовищі з параметрами ε = 4, μ = 1, σ = 0 поширюється плоска електромагнітна хвиля, комплексна амплітуда вектора напруженості електромагнітного поля якої у площині $z = 0$ становить $\dot{\mathbf{E}} = 0,5\mathbf{l}_x + 0,2\mathbf{l}_y$. Визначити комплексну амплітуду вектора напруженості магнітного поля, якщо хвиля поширюється в напрямку зростання координати *z*.

Відповідь: $\dot{\mathbf{H}} = (-1,061\,\mathbf{l}_x + 2,65\,\mathbf{l}_y)\cdot10^{-3}$ А/м.

3.8. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в немагнітному середовищі без втрат з невідомим значенням діелектричної проникності. Вимірювання показали, що на шляху, який дорівнює 10 см, коливання із частотою 1 ГГц набуває додаткового порівняно з вакуумом зсуву за фазою в 40^0. Визначити відносну діелектричну проникність і коефіцієнт заломлення середовища.

Відповідь: $\varepsilon = 16/9 \simeq 1{,}78$, $n = 4/3 \simeq 1{,}33$.

3.9. Деякий діелектрик на частоті 10 ГГц має параметри: $\varepsilon = 3{,}8$, $\mu = 1$, $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = 10^{-4}$. Визначити довжину хвилі, коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір середовища.

Відповідь: 1,54 см, $2{,}04\cdot10^{-2}$ м$^{-1}$, $193\exp(i0{,}5\cdot10^{-4})$ Ом.

3.10. Кераміка титанату барію ($BaTiO_3$) на частоті 10 ГГц характеризується параметрами: $\varepsilon = 144$, $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = 0{,}6$, $\mu = 1$. Визначити довжину хвилі, коефіцієнт ослаблення та характеристичний опір цього середовища.

Відповідь: 0,24 см, 758 м$^{-1}$, 29 exp (i0,28) Ом.

3.11. У скільки разів зменшиться амплітуда плоскої електромагнітної хвилі із частотою 2 МГц при поширенні в середовищі з параметрами $\sigma = 10^{-3}$ См/м, $\varepsilon = 2$, $\mu = 1$ на шляху довжиною 1 м?

Відповідь: у 1,083 раза.

3.12. Визначити товщину мідного екрана, який забезпечує ослаблення амплітуди електромагнітного поля в 10^4 разів на частотах 50 Гц та 50 МГц.

Відповідь: 9,271 см, 29,374 мкм.

3.13. Визначити товщину екрана, який забезпечує ослаблення амплітуди електромагнітного поля в 10^4 разів на частоті 50 Гц, якщо він виконаний із матеріалу з $\sigma = 5\cdot10^7$ См/м та $\mu = 900$. Порівняти отриманий результат із відповіддю до попередньої задачі.

Відповідь: 3,09 м.

3.14. Питома провідність морської води дорівнює 1 См/м. Визначити, у скільки разів зменшиться амплітуда електромагнітної хвилі з частотою $f = 10^6$ с$^{-1}$ на глибині 10 м. Морську воду можна вважати провідним середовищем.

Відповідь: амплітуда хвилі зменшиться приблизно в 2764 рази.

3.15. У середовищі з параметрами $\varepsilon = 2{,}25$, $\mu = 1$, $\sigma = 0$ поширюється плоска електромагнітна хвиля з амплітудою напруженості електричного поля 100 В/м. Визначити густину потоку потужності, яку переносить хвиля в напрямку поширення.

Відповідь: 10,894 Вт/м^2.

3.16. Амплітуда напруженості магнітного поля плоскої електромагнітної хвилі, що поширюється в середовищі з параметрами $\varepsilon = 3{,}8$, $\mu = 1$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$ См/м, у площині $z = 0$ дорівнює 1 А/м. Визначити густину потоку потужності електромагнітної хвилі на відстані z, що дорівнює 1 м від початку координат.

Відповідь: 94,844 Вт/м^2.

3.17. Середнє значення вектора Пойнтінга плоскої електромагнітної хвилі в процесі поширення зменшується на 10 % на шляху довжиною 2 м. Визначити коефіцієнт ослаблення хвилі.

Відповідь: 0,025 м$^{-1}$.

3.18. Деякі сучасні лазери мають імпульсну потужність порядку 10^6 Вт. Визначити площу поперечного перерізу пучка, за якого відбувається електричний пробій повітря. При розрахунках відмінністю електричних властивостей повітря та вакууму знехтувати, напруженість електричного поля, яке забезпечує пробій, покласти такою, що дорівнює 30 кВ/см.

Відповідь: 0,838 см^2.

3.19. У середовищі із залежним від частоти показником заломлення поширюються два вузькосмугових радіоімпульси з несучими частотами 10 і 20 ГГц. Визначити різницю часів запізнювання імпульсів на відстані 100 км від точки, де вони збіглися за часом, якщо закон зміни показника заломлення записується у вигляді $n = n(\omega) = 10^{-10}\,\omega$.

Відповідь: імпульс із несучою частотою 10 ГГц буде випереджати другий імпульс на 4,18 мс.

3.20. Плоска хвиля поширюється вздовж осі z у полістиролі з $\varepsilon_r = 2{,}55$, при цьому її електричне поле описується функцією $E_y = E_0 \cos(\omega t - kz)$. Частота $f = 2{,}4$ ГГц, $E_0 = 30$ В/м. Знайти:

а) амплітуду і напрямок магнітного поля; б) фазову швидкість; в) коефіцієнт фази; г) зсув фази між позиціями $z_1 = 0{,}1$ м і $z_2 = 0{,}15$ м.

Відповідь: а) $H_x = -0{,}127\cos(\omega t - kz)$; б) $v_p = 1{,}88 \cdot 10^8$ м/с;

в) $k = 80{,}2$ м$^{-1}$; г) $\Delta\varphi = 114^0$.

3.21. Штучний анізотропний діелектричний матеріал має тензор діелектричної проникності

$$(\varepsilon) = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 3i & 0 \\ -3i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

У деякій точці цього матеріалу електричне поле описується рівнянням $\mathbf{E} = 2\hat{x} + 3\hat{y} + 3\hat{z}$. Яких значень у цій точці набувають компоненти вектора $\mathbf{D}$?

Відповідь: $\mathbf{D} = (\varepsilon)\mathbf{E}$, $\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 6i \\ 9 + 4i \\ 16 \end{bmatrix}$.

Р о з д і л 4

ХВИЛЕВОДИ

§ 4.1. Основні теоретичні відомості

Хвилевід являє собою порожню металеву трубу довільного перерізу, усередині якої поширюються електромагнітні хвилі. Зазвичай застосовують хвилеводи прямокутного (рис. 4.1) і круглого (рис. 4.2) перерізів, а іноді – хвилеводи більш складного перерізу, наприклад, *П*-подібні та *Н*-подібні.

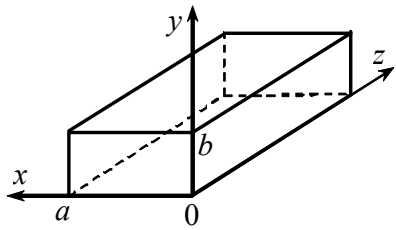


Рис. 4.1

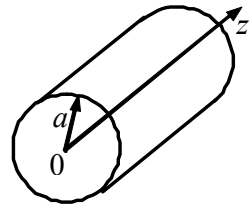


Рис. 4.2

У хвилеводах з ідеально провідними стінками й однорідним заповненням можуть поширюватися хвилі електричного типу (*E*), у яких $\dot{H}_z \equiv 0$, а $\dot{E}_z \neq 0$ (напрямок осі z збігається з поздовжньою віссю хвилеводу), і хвилі магнітного типу (*H*), у яких $\dot{E}_z \equiv 0$, а $\dot{H}_z \neq 0$.

Аналізують хвилі у хвилеводах за допомогою розв'язання рівняння Гельмгольця для складових $\dot{E}_z$ чи $\dot{H}_z$ за рівності нулю

тангенціальної складової вектора електричного поля на стінках хвилеводу.

Припустимо, що хвилевід заповнений діелектриком із відносною діелектричною проникністю ε і магнітною проникністю μ = 1. Кожний конкретний тип хвилі у хвилеводі може поширюватися в тому випадку, якщо

$$\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon} < \lambda_{кр}, \tag{4.1}$$

де λ_0 – довжина хвилі генератора; $\lambda_{кр}$ – критична довжина хвилі, що визначається розмірами і формою поперечного перерізу хвилеводу.

Для хвиль типу E_{mn} і H_{mn} у прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \tag{4.2}$$

де a, b – розміри поперечного перерізу хвилеводу (рис. 4.1).

Для хвиль типу E_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \nu_{mn}, \tag{4.3}$$

де a – радіус хвилеводу; ν_{mn} – *n-й* корінь рівняння $J_m(\chi) = 0$, $J_m(x)$ – функція Бесселя. Для хвиль типу H_{mn} у круглому хвилеводі

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \mu_{mn}, \tag{4.4}$$

де μ_{mn} – *n*-й корінь рівняння $J'_m(\chi) = 0$, $J'_m(x)$ – похідна від функції Бесселя.

Фазова швидкість хвилі у хвилеводі визначається величиною *поздовжнього хвильового числа*

$$k_z = \sqrt{\beta^2\varepsilon - k_c^{\,2}}, \tag{4.5}$$

де $\beta = 2\pi/\lambda_0$; k_c – поперечне (*cross*) хвильове число, яке має такий зв'язок з критичною (*critical*) довжиною хвилі: $k_c = 2\pi/\lambda_{кр}$.

Якщо виконується умова (4.1), то $\beta^2\varepsilon > k_c^{\,2}$, значення k_z дійсне і даний тип хвилі поширюється. Якщо умова (4.1) не виконується, то $\beta^2\varepsilon < k_c^{\,2}$, значення k_z уявне і даний тип хвилі згасає не поширюючись. У цьому випадку формула (4.5) дозволяє визначити коефіцієнт ослаблення хвилі.

Для визначення фазової швидкості та довжини хвилі у хвилеводі можна скористатися співвідношенням

$$k_z = 2\pi / \lambda_{\text{хв}} = \omega / V_{\text{ф}}, \tag{4.6}$$

де $\lambda_{\text{хв}}$ – довжина хвилі у хвилеводі. Із (4.6) одержуємо розрахункові формули для фазової швидкості, довжини хвилі та групової швидкості.

Фазова швидкість становить

$$V_{\text{ф}} = \frac{c / \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}. \tag{4.7}$$

Довжина хвилі у хвилеводі

$$\lambda_{\text{хв}} = \frac{\lambda_0 / \sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}, \tag{4.8}$$

Групова швидкість

$$V_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}, \tag{4.9}$$

де c – швидкість світла у вільному просторі.

Основним типом хвилі в прямокутному хвилеводі за $a > b$ є хвиля H_{10}, для якої $\lambda_{\text{кр}} = 2a$; найближчими вищими типами є хвилі H_{20}, H_{01}, H_{11}. Картину силових ліній поля найпростіших хвиль магнітного типу зображено на рис. 4.3.

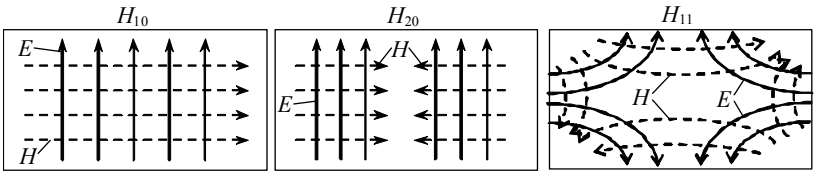


Рис. 4.3

Практичне значення має хвиля типу H_{10} у прямокутному хвилеводі. Складові векторів поля цієї хвилі описуються рівняннями:

$$\begin{aligned}
&\dot{E}_x = \dot{E}_z = \dot{H}_y = 0,\\
&\dot{E}_y = -120\pi i H_0 (2a/\lambda)\sqrt{\mu/\varepsilon}\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ik_z z},\\
&\dot{H}_x = iH_0 (2a/\lambda)\sqrt{1-(\lambda/2a)^2}\,\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ik_z z},\\
&\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)e^{-ik_z z}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Характеристичним опором Z_c хвилеводу називають відношення поперечних складових векторів E та H.

Для хвиль електричного типу

$$Z_c^e = Z_0\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \tag{4.11}$$

Для хвиль магнітного типу

$$Z_c^m = \frac{Z_0}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}, \tag{4.12}$$

де Z_0 – характеристичний опір плоскої хвилі у вільному просторі.

Потужність, що переноситься хвилею будь-якого типу у хвилеводі, визначають інтегруванням вектора Пойнтінга за поперечним перерізом хвилеводу:

$$P_{сер} = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}\left\{\mathbf{l}_z\left[\dot{\mathbf{E}}\,\overset{*}{\mathbf{H}}\right]dS\right\}. \tag{4.13}$$

Підставляючи вираз (4.10) для складових векторів поля у вираз (4.13), одержимо формулу для розрахунку потужності, яка переноситься хвилею типу H_{10} у прямокутному хвилеводі:

$$P = \frac{ab\sqrt{1-\left[\lambda_0/(2a)\right]^2}}{4Z_0} E_0^2, \qquad (4.14)$$

де E_0 – максимальна амплітуда напруженості електричного поля у хвилеводі.

Аналогічно виводиться формула для розрахунку потужності, що переноситься хвилею типу H_{11} у круглому хвилеводі

$$P = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 Z_0} \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \qquad (4.15)$$

Максимальна потужність, яка переноситься у хвилеводі, визначається максимальною допустимою (пробивною) напруженістю електричного поля у хвилеводі. Для сухого повітря за атмосферного тиску $E_{\max} = 30$ кВ/см. Згасання хвиль у хвилеводах залежить від втрат у металевих стінках і в матеріалі, що заповнює хвилевід. Результуючий коефіцієнт ослаблення хвилі у хвилеводі дорівнює сумі коефіцієнтів ослаблення, викликаних втратами в металевих стінках і в діелектрику $\alpha_{\text{заг}} = \alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{д}}$.

Коефіцієнт ослаблення внаслідок втрат у металевих стінках для будь-якої хвилі у хвилеводі довільного перерізу дорівнює

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{1}{2} \frac{R_S \int_L \left|\dot{\mathbf{H}}_\tau\right|^2 dl}{\int_S \text{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}\,\dot{\mathbf{H}}^*\right] d\mathbf{S}}, \qquad (4.16)$$

тут $R_S = A\sqrt{\omega}$ – еквівалентний поверхневий опір металу, де величина A залежить не тільки від властивостей конкретного металу, але й від якості обробки його поверхні; $\dot{\mathbf{H}}_\tau$ – складова магнітного поля, тангенціальна до поверхні металу. Інтеграл у чисельнику виразу (4.16) беруть за контуром перерізу хвилеводу, інтеграл у знаменнику – за його поперечним перерізом. Підставляючи співвідношення для складових векторів поля в загальний вираз (4.16), одержимо розрахункові формули для коефіцієнтів ослаблення конкретних типів хвиль у хвилеводах.

Для хвиль типу H_{10} у прямокутному хвилеводі

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S\left[1+\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2\frac{2b}{a}\right]}{Z_0 b\sqrt{1-\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}; \qquad (4.17)$$

§ 4.2. Приклади розв'язання типових задач

4.1. Які типи хвиль можуть поширюватися в круглому хвилеводі діаметром 3 см, заповненому діелектриком із відносною проникністю $\varepsilon = 3{,}2$? Частота коливань 10 ГГц.

Розв'язання. У такому хвилеводі можуть поширюватися лише ті типи хвиль, для яких виконується умова $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$, де $\lambda = \lambda_0 / \sqrt{\varepsilon} = c / \left(f\sqrt{\varepsilon}\right)$ – довжина хвилі в однорідному безмежному діелектрику. У нашому випадку $\lambda = 1{,}675$ см. Критична довжина хвилі в круглому хвилеводі дорівнює $2\pi a/\nu_{mn}$ для хвиль типу E_{mn} і $2\pi a/\mu_{mn}$ для хвиль типу H_{mn}. Отже, для типів хвиль, що поширюються, мають виконуватися умови $\nu_{mn} < 2\pi a/\lambda$, $\mu_{mn} < 2\pi a/\lambda$, $2\pi a/\lambda = 5{,}627$, які задовольняють такі типи хвиль: E_{01}, E_{02}, E_{11}, E_{21}, H_{01}, H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{31}, H_{21}.

4.2. У прямокутному хвилеводі, що має переріз 4×3 см, поширюється хвиля типу H_{11}. Хвилевід заповнений пінополістиролом із діелектричною проникністю $\varepsilon = 1{,}15$. Частота коливань 8 ГГц. Визначити фазову швидкість і довжину хвилі у хвилеводі.

Розв'язання. Знайдемо критичну довжину хвилі для коливання типу H_{11} у прямокутному хвилеводі

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}} = 4{,}8 \text{ см}.$$

Довжина хвилі генератора $\lambda_0 = c/f = 3{,}75$ см. Фазова швидкість хвилі у хвилеводі

$$V_{\text{ф}} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = 4{,}084\cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Довжина хвилі у хвилеводі

$$\lambda_{\text{хв}} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} = 5{,}105 \text{ см}.$$

4.3. За якого діаметра круглого хвилеводу в ньому може поширюватися тільки один основний тип хвилі за частоти коливань 10 ГГц?

Розв'язання. Спочатку знайдемо довжину хвилі генератора $\lambda_0 = c/f = 3$ см. Основним типом хвилі круглого хвилеводу є хвиля H_{11}. Її критична довжина $\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a / 1{,}841 = 3{,}413a$, звідки отримуємо умову існування хвилі типу H_{11}:

$$a > \lambda_0/3{,}41 = 8{,}79 \text{ мм}.$$

Найближчим вищим типом хвилі в круглому хвилеводі є хвиля E_{01}. Її критична довжина $\lambda_{\text{кр}} = 2\pi a/2{,}405 = 2{,}613a$. Щоб хвиля типу E_{01} не могла поширюватися, має виконуватися умова

$$a < \lambda_0/2{,}61 = 11{,}48 \text{ мм}.$$

Отже, діаметр хвилеводу має бути в межах

$$17{,}58 \text{ мм} < a < 22{,}96 \text{ мм}.$$

4.4. Прямокутний хвилевід перерізом 23 × 10 мм служить для передачі надвисокочастотних імпульсів із прямокутною обвідною. Тривалість імпульсів $\tau = 6$ нс, несуча частота $f_0 = 10$ ГГц. Довжина лінії $l = 50$ м. Оцінити якісно величину спотворень імпульсів, викликаних дисперсією хвилеводу.

Розв'язання. Зазначимо, що в прямокутному хвилеводі перерізом 23 × 10 мм за частоти 10 ГГц може поширюватися лише хвиля типу H_{10}. Її критична довжина $\lambda_{\text{кр}} = 2a = 4{,}6$ см, а критична частота $f_{\text{кр}} = c/\lambda_{\text{кр}} = 6{,}52$ ГГц. Спотворення форми імпульсів у хвилевідній лінії передачі викликані різним часом групового запізнювання для різних складових спектра сигналу. Спектр прямокутного високочастотного імпульсу в області додатних частот описується формулою

$$S(\omega) = \frac{E_\tau}{2} \frac{\sin \dfrac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\dfrac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}$$

і має вигляд, зображений на рис. 4.4.

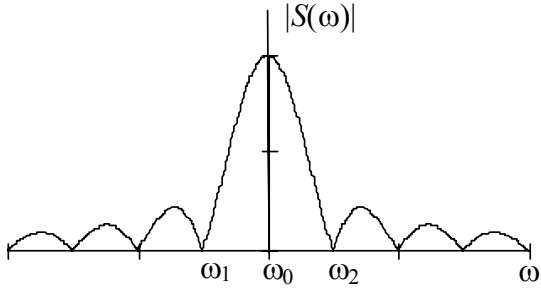


Рис. 4.4

Припустимо, що ширина спектра дорівнює ширині його головного пелюстка. Тоді крайні частоти спектра дорівнюватимуть $f_1 = f_0 - 1/\tau = 9{,}833$ ГГц, $f_1 = f_0 + 1/\tau = 10{,}167$ ГГц. Різниця групового часу запізнювання

$$\Delta t = \frac{l}{V_{\text{гр}}(f_1)} - \frac{l}{V_{\text{гр}}(f_2)}. \qquad (4.18)$$

Використовуючи рівняння (4.9), одержимо

$$\Delta t = \frac{l}{c}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\left(f_{\text{кр}}/f_1\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\left(f_{\text{кр}}/f_2\right)^2}}\right] = 5{,}4 \text{ нс}.$$

§ 4.3. Задачі для самостійного розв'язання

4.5. Які типи хвиль можуть поширюватися в заповненому повітрям прямокутному хвилеводі перерізом 10×4 см за частоти $f = 5$ ГГц?

Відповідь: H_{10}, H_{20}, H_{30}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, E_{11}, E_{21}.

4.6. Які типи хвиль можуть поширюватися у квадратному хвилеводі зі стороною 1 см за частоти 10 ГГц? Хвилевід заповнений діелектриком з відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}6$.

Відповідь: H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{02}, H_{11}, E_{11}.

4.7. Які типи хвиль можуть поширюватися в заповненому повітрям круглому хвилеводі діаметром 6 см за частоти 7,5 ГГц?

Відповідь: E_{01}, E_{11}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, H_{31}.

4.8. Прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм заповнений діелектриком з відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}25$. Частота коливань 8,4 ГГц. Визначити величини $V_ф$ і $\lambda_{хв}$.

Відповідь: $2{,}34 \cdot 10^8$ м/с, 2,78 см.

4.9. Визначити критичну довжину хвилі, критичну частоту і довжину хвилі в прямокутному хвилеводі для хвилі типу E_{11}. Розміри поперечного перерізу 4×3 см. Частота коливань 10 ГГц.

Відповідь: 4,8 см, 6,25 ГГц, 3,84 см.

4.10. Визначити критичну частоту і фазову швидкість хвилі в круглому хвилеводі діаметром 5 см за частоти 5 ГГц.

Відповідь: 3,516 ГГц, $4{,}219 \cdot 10^8$ м/с.

4.11. Визначити діапазон частот, у межах якого в круглому хвилеводі діаметром 4 см може поширюватися тільки основний тип хвилі.

Відповідь: 4,395–5,740 ГГц.

4.12. Визначити діаметр круглого хвилеводу, якщо фазова швидкість хвилі типу E_{01} за частоти поля 10 ГГц дорівнює $5 \cdot 10^8$ м/с.

Відповідь: 14,34 мм.

4.13. Довжина хвилі у хвилеводі при роботі на основному типі хвилі становить 4,5 см. Розміри поперечного перерізу хвилеводу $2{,}6 \times 1{,}3$ см. Знайти частоту коливань, що передаються.

Відповідь: 8,82 ГГц.

4.14. Фазова швидкість хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі дорівнює $5c$, де c – швидкість світла. Визначити розміри хвилеводу, якщо довжина хвилі у вільному просторі дорівнює 10 см.

Відповідь: $a = 5{,}1$ см; розмір b з умови задачі визначити неможливо.

4.15. Знайти групову швидкість хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі перерізом 72×34 мм за частоти поля 3 ГГц.

Відповідь: $2{,}16 \cdot 10^8$ м/с.

4.16. У круглому хвилеводі поширюється хвиля типу E_{01}, Частота поля 10 ГГц, довжина хвилі у хвилеводі 4 см. Обчислити групову швидкість.

Відповідь: $2{,}25 \cdot 10^8$ м/с.

4.17. У хвилеводі, заповненому діелектриком із відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}25$, поширюється хвиля із фазовою швидкістю $3 \cdot 10^8$ м/с. Визначити групову швидкість.

Відповідь: $1{,}333 \cdot 10^8$ м/с.

4.18. Визначити характеристичний опір хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі перерізом 72×34 мм за частоти коливань 3 ГГц.

Відповідь: 523,9 Ом.

4.19. Визначити характеристичний опір хвилі типу E_{01} у круглому хвилеводі діаметром 30 мм за довжини хвилі генератора 3,2 см.

Відповідь: 217,7 Ом.

4.20. У круглому хвилеводі діаметром 5 см, заповненому діелектриком, поширюється хвиля типу H_{11}. Частота коливань 3 ГГц. Визначити діелектричну проникність речовини, що заповнює хвилевід, якщо фазова швидкість хвилі дорівнює швидкості світла у вільному просторі.

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}37$.

4.21. Пристрій для вимірювання діелектричної проникності речовини являє собою прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм, заповнений діелектриком. Для вимірювання довжини хвилі у хвилеводі по середині його широкої стінки прорізана поздовжня щілина, уздовж якої переміщується зонд із детектором. Хвилевід працює на основному типі хвилі. Визначити діелектричну проникність досліджуваної речовини, якщо за частоти сигналу 10 ГГц довжина хвилі у хвилеводі дорівнює 22,6 мм.

Відповідь: $\varepsilon = 2{,}19$.

4.22. Визначити згасання хвилі типу H_{10} на відрізку прямокутного хвилеводу перерізом 23×10 мм і довжиною 10 см за частоти 6 ГГц.

Відповідь: 46,4 дБ.

4.23. Яку максимальну потужність можна передати через прямокутний хвилевід перерізом 23×10 мм, що працює за частоти 10 ГГц? Хвилевід заповнений повітрям, граничне допустиме значення напруженості електричного поля 30 кВ/см.

Відповідь: 1,04 МВт.

4.24. У круглому хвилеводі радіусом a поширюється хвиля типу H_{01}. На якій відстані від осі хвилеводу напруженість електричного поля має максимальне значення?

Відповідь: 0,48a.

4.25. Через лінію передачі, що являє собою прямокутний хвилевід перерізом 72 × 34 мм і довжиною 50 м, передаються надвисокочастотні імпульси з прямокутною обвідною. Тривалість імпульсів 1 мкс, несуча частота 3 ГГц. Визначити час запізнювання сигналу при проходженні через лінію.

Відповідь: 0,23 мкс.

4.26. Хвилевідна лінія служить для передачі надвисокочастотних імпульсів, причому внаслідок дисперсії відбуваються спотворення форми імпульсів. Спотворення форми імпульсів прийнято вважати неприпустимо великими, якщо різниця часу запізнювання для крайніх складових спектра сигналу перевищує тривалість імпульсу. Визначити максимальну довжину хвилевідної лінії передачі перерізом 28,5 × 12,6 мм, через яку можуть бути передані високочастотні імпульси тривалістю 0,02 мкс із несучою частотою 9380 МГц за умови, що спотворення форми імпульсів не будуть виходити за допустимі межі.

Вказівка: крайніми частотами спектра прямокутного імпульсу вважати краї його головного пелюстка.

Відповідь: 1014 м.

4.27. Визначити згасання хвилі типу H_{10} на одиниці шляху в прямокутному хвилеводі перерізом 72 × 34 мм за частоти поля 3 ГГц. Матеріал стінок хвилеводу – мідь.

Відповідь: 0,02 дБ/м.

4.28. Для далекого хвилевідного зв'язку було запропоновано використовувати круглі хвилеводи, що працюють на хвилі типу H_{01}. Визначити згасання хвилі типу H_{01} у хвилеводі з мідними стінками діаметром 50 мм за довжини хвилі генератора 8 мм.

Відповідь: 1,82 дБ/км.

4.29. Мідний хвилевід довжиною 10 см заповнений діелектриком з $\varepsilon_r = 2,55$ і $\mathrm{tg}\delta_{\text{діел}} = 0,0015$ Вважаючи, що робоча частота $f = 20$ ГГц, знайти загальні втрати при проходженні хвилі крізь хвилевід.

Відповідь: $\sum \alpha_r = 0,71$ дБ.

Р о з д і л 5

ДІЕЛЕКТРИЧНІ ХВИЛЕВОДИ

§ 5.1. Основні теоретичні відомості

Поверхневими хвилями називають такі хвилі, що поширюються вздовж так званих *сповільнювальних структур* (ліній передачі). Фазова швидкість цих хвиль менша за швидкість світла. Існує велика кількість різноманітних видів ліній передачі поверхневих хвиль. Найбільш поширеними є діелектрична пластина, *H*-подібна метал-діелектрична лінія передачі, діелектричний стрижень, гребінчаста структура, діафрагмований хвилевід і спіраль.

Діелектрична пластина. Нескінченна діелектрична пластина (рис. 5.1) є найпростішою сповільнювальною структурою, уздовж якої можуть поширюватися хвилі типів **E** і **H**.

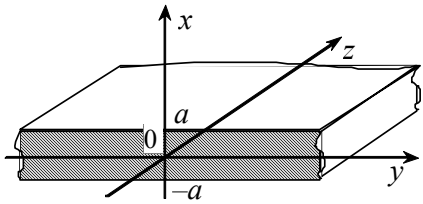


Рис. 5.1

Поле хвилі типу **E** описується рівнянням Гельмгольца. Для складових векторів поля справджуються такі рівності:

- поза пластиною ($|x| > a$):

$$\dot{H}_{y1} = i\omega\varepsilon_0\tau C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z},$$
$$\dot{E}_{x1} = ik_z\tau C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z},$$
$$\dot{E}_{z1} = \tau^2 C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z}, \qquad (5.1)$$
$$\dot{H}_{x1} = \dot{H}_{z1} = \dot{E}_{y1} = 0,$$

де τ – поперечне хвильове число в повітрі ($\varepsilon_п$), причому

$$\tau^2 = k_z^2 - \omega^2\varepsilon_п/c^2; \qquad (5.2)$$

- усередині пластини ($|x| < a$):

$$\dot{H}_{y2} = i\omega\varepsilon_a k_c(A\sin k_c x - B\cos k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z},$$
$$\dot{E}_{x2} = ik_z k_c(A\sin k_c x - B\cos k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z},$$
$$\dot{E}_{z2} = k_c{}^2(A\cos k_c x + B\sin k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z}, \qquad (5.3)$$
$$\dot{H}_{x2} = \dot{H}_{z2} = \dot{E}_{y2} = 0,$$

де k_c – поперечне хвильове число в діелектрику:

$$k_c^2 = \omega^2\varepsilon_{пл}/c^2 - k_z^2 \qquad (5.4)$$

($\varepsilon_{пл}$ – діелектрична проникність пластини).

На межі поділу повітря–діелектрик $x = a$ та $x = -a$ тангенціальні складові поля мають задовольняти граничні умови

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2},\ \dot{H}_{y2} = \dot{H}_{y2}. \qquad (5.5)$$

Усі типи хвиль діелектричної пластини можна розбити на дві групи: 1) парні хвилі E_1, E_3, E_6,..., для яких $A = 0$, $B \neq 0$, а поперечні складові поля описуються парними функціями координати x; 2) непарні хвилі E_2, E_4, E_0,..., для яких $A \neq 0$, $B = 0$ і поперечні складові поля описуються непарними функціями координати x.

Підставляючи вирази (5.1) і (5.3) у граничні умови (5.5), одержимо характеристичні рівняння:

- для парних хвиль

$$\tau a = \frac{1}{\varepsilon} k_c a\,\mathrm{tg}\,k_c a; \qquad (5.6)$$

- для непарних хвиль

$$\tau a = -\frac{1}{\varepsilon} k_c a\,\mathrm{ctg}\,k_c a, \qquad (5.7)$$

де ε – відносна діелектрична проникність пластини. Окрім того, хвильові числа τ і k_c задовольняють рівняння

$$(\tau a)^2 + (k_c a)^2 = (\beta a)^2(\varepsilon - 1). \tag{5.8}$$

Хвилі типу H аналізують аналогічно. Розв'язуючи рівняння Гельмгольца для складової H_z, одержимо рівняння для складових векторів поля:

- поза пластиною

$$\begin{aligned} \dot{E}_{y1} &= -i\omega\mu_0\tau C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{H}_{x1} &= ik_z\tau C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{H}_{z1} &= \tau^2 C\mathrm{e}^{-\tau x}\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{E}_{x1} &= \dot{E}_{z1} = \dot{H}_{y1} = 0; \end{aligned} \tag{5.9}$$

- усередині пластини

$$\begin{aligned} \dot{E}_{y2} &= i\omega\mu_{\text{аб}}k_c(-A\sin k_c x + B\cos k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{H}_{x2} &= ik_z k_c(A\sin k_c x - B\cos k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{H}_{z2} &= {k_c}^2(A\cos k_c x + B\sin k_c x)\mathrm{e}^{-ik_z z}, \\ \dot{E}_{x2} &= \dot{E}_{z2} = \dot{H}_{y2} = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Підстановка рівнянь (5.9) і (5.10) у граничні умови (5.5) дає характеристичні рівняння:

$$\tau a = k_c a \operatorname{tg} k_c a \ \text{ – для парних хвиль } (H_1, H_3, \ldots); \tag{5.11}$$

$$\tau a = -k_c a \operatorname{ctg} k_c a \ \text{ – для непарних хвиль } (H_2, H_4, \ldots). \tag{5.12}$$

Зазвичай характеристичні рівняння розв'язують графічно. Шукані значення τa та $k_c a$, наприклад, для парних хвиль типу H знаходять як координати точки перетину кривої, заданої рівнянням (5.11), з колом, що задається рівнянням (5.8) (рис. 5.2). Характеристичні рівняння можна розв'язувати і чисельними методами (напр., методом половинного ділення).

Після відшукання розв'язку характеристичного рівняння за допомогою рівностей (5.2) чи (5.4) можна визначити поздовжнє хвильове число k_z, а потім фазову швидкість і довжину хвилі в лінії. Модифікаціями розглянутої сповільнювальної структури є

діелектрична пластина на металевій підкладці (рис. 5.3) і *H*-подібна метал-діелектрична лінія передачі (рис. 5.4).

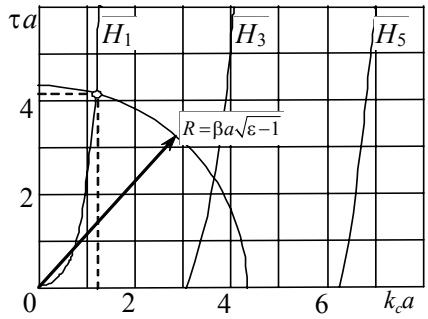


Рис. 5.2

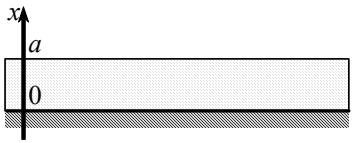


Рис. 5.3

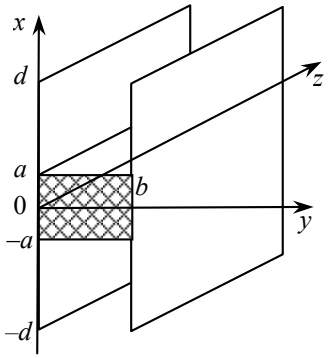


Рис. 5.4

Поле в діелектричній пластині на металевій підкладці має задовольняти граничні умови на поверхні металу. Серед хвиль типу *E* в такій структурі можуть існувати лише парні хвилі, а серед хвиль типу *H* тільки непарні. *H*-подібна метал-діелектрична лінія передачі (рис. 5.4) являє собою діелектричну пластину, обмежену з двох боків металевими площинами. Тут поле має задовольняти граничні умови на поверхні металевих пластин:

$$E_x\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0, \quad E_z\Big|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0. \tag{5.13}$$

Основною хвилею *H*-подібної лінії передачі є хвиля магнітного типу H_{10}, вектор **E** якої має єдину складову, причому всі складові векторів поля не залежать від координати *y*. Ця хвиля цілком аналогічна основній хвилі магнітного типу діелектричної пластини. Вона має таку саму фазову швидкість, як і хвиля типу H_{10} діелектричної пластини. Усі інші типи хвиль *H*-подібної лінії передачі мають одну чи декілька варіацій уздовж осі *y*. Характеристичні рівняння для цих типів хвиль виявляються більш складними.

§ 5.2. Приклади розв'язання типових задач

5.1. Знайти фазову швидкість двох нижчих хвиль магнітного типу, що поширюється вздовж діелектричної пластини товщиною 2 см з відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}9$. Довжина хвилі генератора 3,2 см. Побудувати графіки розподілу поперечних складових векторів поля в напрямку, перпендикулярному пластині.

Розв'язання. Визначимо фазову швидкість хвилі типу H_1. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння (5.11) разом із (5.8). Обчислимо $\beta a\sqrt{\varepsilon - 1} = 2{,}706$. Застосовуючи метод інтерполяції, знайдемо значення $\tau a = 2{,}456$ і $k_c a = 1{,}137$, звідки $\tau = 245{,}6$ м$^{-1}$, $k_c = 113{,}7$ м$^{-1}$. За допомогою формули (5.2) визначимо подовжнє хвильове число k_z:

$$k_z = \sqrt{\beta^2 + \tau^2} = 314{,}4 \text{ м}^{-1},$$

а також знайдемо фазову швидкість хвилі типу H_1:

$$V_\text{ф} = \omega / k_z = 1{,}874 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Аналогічно визначимо параметри хвилі типу H_2:

$$\tau a = 1{,}582,\ k_c a = 2{,}195,\ \tau = 158{,}2 \text{ м}^{-1},$$

$$k_c = 219{,}5 \text{ м}^{-1},\ k_z = 252{,}15 \text{ м}^{-1},\ V_\text{ф} = 2{,}336 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Перейдемо до побудови графіків розподілу поперечних складових векторів поля. Розподіл поля вздовж осі *x* описується рівняннями (5.9) та (5.10). Для парної хвилі типу H_1 у (5.10) слід покласти $A = 0$. Спрощуючи запис виразів для складових поля й опускаючи множник $e^{-ik_z z}$, для хвилі типу H_1 одержимо:

$$E_y = Ce^{-\tau x} \quad -\text{поза пластиною},$$
$$E_y = B\cos k_c x - \text{усередині пластини}. \tag{5.14}$$

Коефіцієнти C і B характеризують амплітуду напруженості поля. Вони пов'язані один з одним граничними умовами (5.5), звідки маємо

$$Ce^{-\tau a} = B\cos k_c a \tag{5.15}$$

Покладемо для визначеності $C = 1$, знайдемо B з умови (5.15) і, підставляючи обчислені раніше значення τ і k_c, побудуємо відповідно до рівняння (5.14) графік розподілу складової E_y (рис. 5.5). Складова H_x має такий самий характер розподілу.

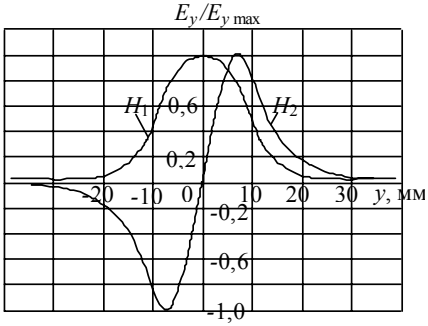


Рис. 5.5

Побудова розподілу складових векторів поля хвилі типу H_2 виконується аналогічно. Спрощуючи рівняння для складових поля і покладаючи в (5.10) $B = 0$, одержимо

$$E_y = Ce^{-\tau x} \quad -\text{поза пластиною},$$
$$E_y = B\sin k_c x - \text{усередині пластини}. \tag{5.16}$$

При цьому коефіцієнти C и A задовольняють умову

$$Ce^{-\tau x} = A\sin k_c a. \tag{5.17}$$

Графік розподілу складової E_y, побудований на основі рівнянь (5.16) і (5.17), наведено на рис. 5.5.

5.2. Визначити значення фазової швидкості хвиль електричного типу, які можуть поширюватися в діелектричній пластині на металевій підкладці (рис. 5.3). Товщина пластини $a = 15$ мм, відносна діелектрична проникність $\varepsilon = 2{,}25$. Частота поля 10 ГГц.

Розв'язання. У діелектричній пластині на металевій підкладці можуть поширюватися тільки парні хвилі електричного типу E_1, E_3,..., у яких критична частота менша від частоти поля. Це можливо за виконання умови $\beta a \sqrt{\varepsilon - 1} > (n - 1)\,\pi/2$ (рис. 5.2), де n – індекс хвилі. Звідси

$$f_{\text{кр}} = \frac{(n-1)c}{4a\sqrt{\varepsilon - 1}}.$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо значення критичних частот для основних типів хвиль:

для хвилі E_1: $f_{\text{кр}} = 0$, тобто хвиля може поширюватися за будь-якої частоти поля;

для хвилі E_3: $f_{\text{кр}} = 8{,}944$ ГГц, тобто хвиля може поширюватися за заданих умов;

для хвилі E_5: $f_{\text{кр}} = 17{,}89$ ГГц (критична частота вища частоти поля), а отже, хвиля не може поширюватися.

Визначимо фазові швидкості хвиль E_1 і E_3, розв'язуючи характеристичне рівняння (5.6) разом із (5.8). Розв'язуючи ці рівняння, одержуємо:

для хвилі E_1: $k_c a = 1{,}3827$, $\tau a = 3{,}2288$,

для хвилі E_3: $k_c a = 3{,}4722$, $\tau a = 0{,}5296$.

За допомогою формули (5.2) визначаємо поздовжнє хвильове число $k_z = \sqrt{\beta^2 + \tau^2}$ і знаходимо фазову швидкість $V_{\text{ф}} = \omega / k_z$. Підставляючи чисельні дані, одержуємо:

для хвилі E_1: $V_{\text{ф}} = 2{,}092 \cdot 10^8$ м/с,

для хвилі E_3: $V_{\text{ф}} = 2{,}958 \cdot 10^8$ м/с.

5.3. У діелектричній пластині товщиною 3 мм хвиля типу H_1 за частоти поля 12 ГГц має фазову швидкість 0,7 с. Визначити відносну діелектричну проникність матеріалу пластини.

Р о з в ' я з а н н я . Знайдемо поздовжнє хвильове число

$$k_z = \omega / V_{\text{ф}} = 349{,}06 \text{ м}^{-1}.$$

За допомогою рівняння (5.2) визначимо значення параметра τa:

$$\tau a = 0{,}9686.$$

Використовуючи метод інтерполяції, визначаємо, що такому значенню τa відповідає $R = \beta a\sqrt{\varepsilon - 1} = 1{,}289$. Звідси

$$\varepsilon = 1 + \left(\frac{1{,}289}{\beta a}\right)^2 = 2{,}644.$$

§ 5.3. Задачі для самостійного розв'язання

5.4. Які типи хвиль можуть поширюватися вздовж діелектричної пластини товщиною 12 мм за частоти поля 10 ГГц? Діелектрична проникність матеріалу пластини $\varepsilon = 3$.

Відповідь: H_1, H_2, E_1, E_2.

5.5. За якої товщини пластини із полістиролу вздовж неї може поширюватися тільки основна хвиля магнітного типу H_1? Довжина хвилі генератора 4,5 см.

Відповідь: $2a < 1{,}80$ см.

5.6. У якому діапазоні частот уздовж діелектричної пластини товщиною $2a = 20$ мм із відносною проникністю $\varepsilon = 3{,}2$ можуть одночасно поширюватися хвилі E_1 і E_2, а хвиля E_3 поширюватися не може?

Відповідь: 5,056 ГГц $< f <$ 10,11 ГГц.

5.7. Визначити фазову швидкість хвилі типу H_1, що поширюється вздовж діелектричної пластини товщиною 5 мм з відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}9$. Довжина хвилі генератора 16 мм.

Відповідь: $2{,}065 \cdot 10^8$ м/с.

5.8. Визначити фазову швидкість хвилі типу E_1, що поширюється в діелектричній пластині товщиною 12 мм із відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}21$ за частоти поля 8 ГГц.

Відповідь: $2{,}726 \cdot 10^8$ м/с.

5.9. Уздовж полістиролової пластини товщиною 18 мм поширюється хвиля типу H_1. Частота поля 6 ГГц. У скільки разів зменшиться напруженість поля при віддаленні від пластини на 20 мм?

Відповідь: у 11,4 раза.

5.10. Знайти відносну проникність діелектричної пластини, уздовж якої поширюється хвиля типу E_1 зі швидкістю $2 \cdot 10^8$ м/с за частоти поля 9380 МГц.

Відповідь: $\varepsilon = 3{,}96$.

5.11. У полістироловій пластині товщиною 20 мм поширюється хвиля типу H_1. За якої частоти напруженість електричного поля на поверхні пластини буде в три рази менша, ніж у центрі?

Відповідь: 14,1 ГГц.

Р о з д і л 6

ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ ІЗ ХВИЛЯМИ *Т*-ТИПУ

§ 6.1. Основні теоретичні відомості

Електромагнітні хвилі, вектори напруженості електричних і магнітних полів яких лежать у площині, що перпендикулярна напрямку поширення, називають *поперечними електромагнітними хвилями*, або хвилями *Т*-типу . Хвиля типу *Т*, на відміну від хвиль типів *Н* і *Е*, поширюється в лінії за будь-якої частоти (f_c= 0), що важливо з практичних міркувань. Для хвиль типу *Т* поперечне хвильове число k_c = 0, тому поздовжнє хвильове число k_z виявляється таким самим, як і у випадку однорідної плоскої хвилі. Для лінії без втрат

$$k_z = \beta = \omega\sqrt{\varepsilon_{аб}\mu_{аб}} \,. \tag{6.1}$$

Звідки

$$V_ф = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{аб}\mu_{аб}}}, \tag{6.2}$$

$$\lambda_{хв} = \lambda. \tag{6.3}$$

Тут λ – довжина однорідної плоскої хвилі в діелектрику з параметрами $\varepsilon_{аб}$, $\mu_{аб.}$.

Характеристичний опір хвилі типу *Т* в лінії без втрат, що позначається Z_c^T і дорівнює відношенню поперечної складової напруженості електричного поля до поперечної складової напруженості магнітного поля біжучої хвилі, збігається з анало-

гічною, величиною, обчисленою для однорідної плоскої хвилі в необмеженому просторі:

$$Z_c^T = Z_c = \sqrt{\mu_{аб} / \varepsilon_{аб}} \,. \tag{6.4}$$

Лінії передачі із хвилею типу *T* характеризуються хвильовим опором $Z_{хв}$, який дорівнює відношенню комплексних амплітуд напруги та струму в режимі біжучих хвиль і виражається через питомі *індуктивність* L_1 та *ємність* C_1 лінії в такий спосіб:

$$Z_{хв} = \sqrt{L_1 / C_1} \,. \tag{6.5}$$

Фазова швидкість у лінії передачі із хвилею типу *T*:

$$V_ф = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \tag{6.6}$$

Потужність, що переноситься хвилею через лінію передачі

$$P = \frac{1}{2}\int_S \mathrm{Re}\left[\dot{\mathbf{E}}\,\dot{\mathbf{H}}^*\right] d\mathbf{S}, \tag{6.7}$$

або

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_{аб}}{\mu_{аб}}}\int_S \left|\dot{\mathbf{E}}\right|^2 dS, \tag{6.8}$$

де інтегрування виконуємо за поперечним перерізом лінії.

Коефіцієнт ослаблення α хвилі в лінії передачі складається із коефіцієнта $\alpha_д$, що враховує втрати в діелектрику, і коефіцієнта $\alpha_м$, що описує втрати в металі:

$$\alpha = \alpha_д + \alpha_м,\ м^{-1}. \tag{6.9}$$

Тут

$$\alpha_д = \frac{1}{2}\omega\sqrt{\varepsilon_{аб}\mu_{аб}} \cdot \mathrm{tg}\delta_\varepsilon \,, \tag{6.10}$$

$$\alpha_м = \frac{1}{2}\frac{R_S \oint_l \left|\dot{\mathbf{H}}_\tau\right|^2 dl}{\int_S Re[\dot{\mathbf{E}}\,\dot{\mathbf{H}}^*]\, dS} \tag{6.11}$$

де R_S – поверхневий опір металу.

Інтегрування в чисельнику виконуємо за контуром перерізу лінії, у знаменнику – за поперечним перерізом лінії.

Коаксіальні лінії передачі. Коаксіальна лінія передачі являє собою систему із двох співвісних металевих циліндрів з діаметрами d і D, розділених шаром діелектрика з проникностями $\varepsilon_{аб}$ і $\mu_{аб}$ (рис. 6.1).

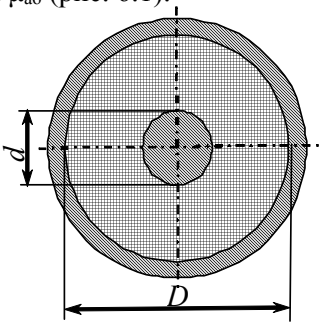


Рис. 6.1

Комплексна амплітуда вектора $\dot{\mathbf{E}}$ біжучої хвилі в коаксіальній лінії передачі без втрат

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{U}}{\ln(D/d)}\frac{1}{r}e^{-i\beta z}\mathbf{l}_r, \quad (6.12)$$

де U – комплексна амплітуда напруги (різниці потенціалів) між внутрішнім і зовнішнім провідниками у зрізі $z = 0$.

Для лінії без втрат

$$Z_c = \sqrt{\mu_{аб}/\varepsilon_{аб}} = 120\pi\sqrt{\mu/\varepsilon} \ \text{[Ом]}. \quad (6.13)$$

Параметри коаксіальної лінії передачі на одиницю довжини:

$$L_1 = \mu_{аб}/(2\pi)\ln(D/d), \ \text{Гн/м}, \quad (6.14)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_{аб}}{\ln(D/d)} \ \text{[Ф/м]}. \quad (6.15)$$

Хвильовий опір коаксіальної лінії передачі

$$Z_{хв} = 60\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\ln\left(\frac{D}{d}\right) = 138\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\lg\left(\frac{D}{d}\right) \ \text{[Ом]}. \quad (6.16)$$

Потужність

$$P = \frac{U^2}{120}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{1}{\ln(D/d)} \ \text{[Вт]}. \quad (6.17)$$

Оскільки

$$U = E_{\max}\frac{d}{2}\ln(D/d) \ \text{[В]}, \quad (6.18)$$

то рівняння (6.17) можна представити у вигляді

$$P = \frac{E_{\max}^2 d^2}{480}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ln(D/d)\ \text{[Вт]}. \qquad (6.19)$$

Коефіцієнт ослаблення хвилі типу T у коаксіальної лінії передачі, що враховує втрати в діелектрику, визначається за формулою (6.10). Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в металі:

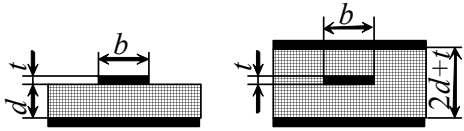
$$\alpha_{\text{м}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{R_{S_1}/d + R_{S_2}/D}{120\pi\ln(D/d)}\ [\text{м}^{-1}], \qquad (6.20)$$

де R_{S_1} і R_{S_2} – поверхневі опори металу внутрішнього і зовнішнього циліндрів, відповідно.

У коаксіальній лінії передачі хвилі електричного та магнітного типів є вищими типами хвиль. Зазвичай їх не використовуються для передачі, проте вони можуть виникати як паразитні. Для пригнічення хвиль вищих типів досить, щоб частота коливань задовольняла нерівність

$$f \le \frac{2c}{\pi\sqrt{\varepsilon\mu}(d+D)}. \qquad (6.21)$$

Смужкові лінії передачі. У техніці НВЧ широко застосовують системи, що скеровують, їх називають смужковими лініями передачі. Вони особливо зручні в друкованих та інтегральних схемах НВЧ. На рис. 6.2 зображені смужкові лінії передачі несиметричного та симетричного типів. Ці лінії або заповнені повітрям, або мають основу із твердого діелектрика.



а) б)

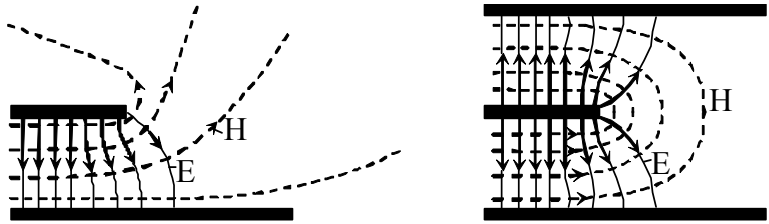
Рис. 6.2

Повна теорія смужкових ліній досить складна. Так звана квазі-хвиля типу T у цих лініях може існувати, якщо ширина струмонесучого провідника та відстань між ним і заземленою пластиною менші половини довжини хвилі в лінії передачі. При

цьому електричне і магнітне поля зосереджені в основному в просторі між провідником і заземленою пластиною. Електричне поле в поперечній площині можна описати рівнянням Лапласа.

У смужкових лініях передачі з діелектричною основою хвилі типу *Т* не можуть поширюватися в чистому вигляді через неоднорідність діелектрика. Однак теорія і досвід показують, що поля і потік потужності зосереджуються головним чином у діелектрику між струмонесучим провідником і заземленою пластиною. Тому можливе припущення про однорідність діелектрика, що заповнює всю лінію передачі.

Картини силових ліній електромагнітного поля в смужкових лініях передачі наведено на рис. 6.3. Для практичних розрахунків зручні такі наближені співвідношення, які добре узгоджуються з експериментальними даними.



а) б)

Рис. 6.3

Питомі ємності для несиметричної смужковій лінії передачі (рис. 6.2, *а*) розраховують за формулами:

$$C_1 = 1{,}06\cdot10^{-11}\,\varepsilon\,(1 + b/d), \qquad (t/d << 1,\ b/d > 0{,}6), \qquad (6.22)$$

$$C_1 = 1{,}06\cdot10^{-11}\,\varepsilon\,(1 + b/d)\frac{1}{1-t/a}, \qquad (b/d < 2), \qquad (6.23)$$

$$C_1 = 1{,}06\cdot10^{-11}\,\varepsilon\left[1+\frac{b}{d}\left(\frac{1}{1-t/a}\right)\right], \quad (b/d > 2). \qquad (6.24)$$

Хвильові опори з урахуванням товщини струмонесучого провідника для несиметричної лінії передачі розраховують за формулами:

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d}(1 - t/d), \qquad (b/d < 2); \qquad (6.25)$$

$$Z_{\text{хв}} = 314\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \dfrac{b}{d}\left(\dfrac{1}{1 - t/d}\right)}, \qquad (b/d > 2). \qquad (6.26)$$

Хвильові опори без урахування товщини провідника визначаються співвідношеннями:

для несиметричної лінії передачі

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d}; \qquad (6.27)$$

для симетричної лінії передачі

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1 + b/d}. \qquad (6.28)$$

Через несиметричну смужкову лінію передачі передається потужність

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 \ln \frac{r_B}{r_A} \text{ [Вт]}, \qquad (6.29)$$

де E_0 – амплітуда напруженості поля в центрі лінії [В/м]. Значення коефіцієнтів r_A і r_B залежно від відношення b/d визначають за таблицями в дод. 1. За $b/d \geq 1$ у формулі (6.29) можна припустити, що

$$\ln \frac{r_B}{r_A} \approx r_B, \qquad (6.30)$$

у результаті чого вона спрощується до

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\varepsilon/\mu} E_0^2 d^2 r_B \text{ [Вт]}. \qquad (6.31)$$

Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в провідних пластинах несиметричної смужкової лінії передачі, дорівнює

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left| \frac{\ln(r_A k_H / 2)}{\ln(r_B / r_A)} \right|. \qquad (6.32)$$

Тут коефіцієнт k_H визначають за формулою

$$k_H \approx 2\sqrt{2\frac{t}{d} + 4\frac{t}{d}}, \qquad (6.33)$$

а значення r_A і r_B за таблицями в дод. 1. Коефіцієнт ослаблення, обумовлений втратами в провідних пластинах симетричної смужкової лінії передачі (за $t/d < 0{,}3$, $b/d > 1$),

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{120\pi d}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{7 - 50t/d + b/d}{3{,}2\left(0{,}1 + t/d\right)\left(4 + b/d\right)} \quad [\text{м}^{-1}]. \qquad (6.34)$$

У формулах (6.32), (6.34) R_S – поверхневий опір металу.

Коефіцієнт ослаблення хвилі типу T у смужковій лінії передачі за рахунок втрат у діелектрику визначається співвідношенням (6.10).

§ 6.2. Приклади розв'язання типових задач

6.1. Знайти відношення між зовнішнім і внутрішнім діаметрами коаксіальної лінії передачі із хвилею типу T, при якому буде мінімальне згасання, вважаючи, що втрати в діелектрику відсутні. Внутрішній і зовнішній циліндри виконані з одного матеріалу.

Розв'язання. Відповідно до рівняння (6.10) $\alpha = \alpha_{\text{м}}$, $\alpha_{\text{д}} = 0$, Коефіцієнт ослаблення $\alpha_{\text{м}}$ у коаксіальній лінії передачі визначаємо відповідно до формули (6.20). Оскільки $R_{S1} = R_{S2} = R_S$, то із формули (6.20) знаходимо

$$\alpha_{\text{м}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{R_S}{120\pi}\,\frac{1/d + 1/D}{\ln\left(D/d\right)}.$$

Перетворимо останнє рівняння так, щоб до нього входило в явному вигляді відношення D/d:

$$\alpha_{\text{м}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\frac{R_S}{120\pi D}\,\frac{\left(D/d + 1\right)}{\ln\left(D/d\right)}.$$

Позначивши $\dfrac{\sqrt{\varepsilon/\mu}R_S}{120\pi D} = A$, $\dfrac{D}{d} = x$, запишемо $\alpha = A\dfrac{1+x}{\ln x}$.

Для відшукання екстремуму необхідно розв'язати рівняння

$$\frac{d\alpha}{dx} = A\frac{\ln x - \dfrac{1+x}{x}}{\ln^2 x} = 0 \quad \text{чи} \quad \ln x = \frac{1+x}{x}.$$

Отримане рівняння трансцендентне. Із графічних побудов отримуємо корінь $x = 3{,}6$, звідки $D/d = 3{,}6$. Таким чином, мінімальне згасання хвилі типу T в коаксіальної лінії передачі відбувається при відношенні $D/d = 3{,}6$.

6.2. Розрахувати хвильовий опір, питомі ємність та індуктивність, а також граничну передану потужність у несиметричній смужковій лінії передачі з повітряним заповненням. Параметри лінії: ширина провідника $b = 5$ мм, відстань між провідником і заземленою пластиною $d = 1$ мм, товщина провідника $t = 0{,}025$ мм (рис. 6.2, *а*), граничне допустиме значення напруженості електричного поля в повітрі $E_{\text{гр}} = 30$ кВ/см.

Розв'язання. Хвильовий опір несиметричної смужкової лінії передачі визначається рівняннями (6.25) або (6.26) залежно від відношення b/d. У нашому випадку $b/d > 2$, тому

$$Z_{\text{хв}} = 314\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\Bigg/\left[1+\frac{b}{d}\left(\frac{1}{1-t/d}\right)\right] \text{ Ом}.$$

Смужкова лінія передачі заповнена повітрям, для якого $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Тоді

$$Z_{\text{хв}} = 314\Bigg/\left[1+\frac{5}{1}\left(\frac{1}{1-0{,}025/1}\right)\right] = 51{,}24 \text{ Ом}.$$

Хвильовий опір можна визначити і за формулою (6.27), тому що в розглянутому випадку $t/d = 0{,}025 << 1$:

$$Z_{\text{хв}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{314}{1+b/d} = \frac{314}{1+5/1} = 52{,}333 \text{ Ом}.$$

Похибка при цьому не перевищує 2,5 %. Питому ємність знаходимо за формулою

$$C_1 = 1{,}06\cdot 10^{-11}\varepsilon\left(1+b/d\right) = 1{,}06\cdot 10^{-11}\left(1+5/1\right) = 63{,}6 \text{ пФ/м},$$

а питому індуктивність за формулою $Z_{\text{хв}} = \sqrt{L_1/C_1}$, звідки $L_1 = Z_{\text{хв}}^2 C_1$, або після чисельних підстановок $L_1 = 0{,}173\times 10^{-6}$ Гн/м. Граничне значення переданої потужності в несиметричній смужковій лінії передачі обчислюється за формулою

$$P_{\text{гр}} = 16{,}88\cdot 10^{-4}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_{\text{гр}}^2 d^2\frac{t}{d}r_B \ \ [\text{Вт}].$$

При відношеннях b/d=5 і t/d = 0,025 за таблицями дод. 1 знаходимо, що r_B = 14,56. Тоді $P_{гр}$ = 5,53 кВт.

§ 6.3. Задачі для самостійного розв'язання

6.3. Розрахувати питомі параметри та хвильовий опір коаксіального кабелю марки РК-75-9-12. Параметри кабелю: діаметр внутрішнього проводу 1,35 мм, діаметр зовнішнього провідника 9,0 мм, відносна проникність діелектрика ε = 2,2.

Відповідь: L_1 = 0,379 мкГн/м, C_1 = 64,4 пФ/м, $Z_{хв}$ = 76,7 Ом.

6.4. Розрахувати хвильовий опір, погонні індуктивність і ємність несиметричної смужкової лінії передачі, заповненої діелектриком. Параметри лінії: ширина струмонесучої смужки b = 1 мм, відстань між струмонесучою смужкою і заземленою пластиною d = 1 мм, товщина струмонесучою смужки t = 0,05 мм (рис. 6.2, *а*). Діелектрик – фторопласт. Втратами в лінії знехтувати.

Відповідь: 26 Ом, 0,126 мкГн/м, 186,3 пФ/м.

6.5. Визначити хвильовий опір несиметричної смужкової лінії передачі, якщо відомо, що як діелектрик використовується матеріал із відносною діелектричною проникністю ε = 2,55, а питома ємність лінії 60 пФ/м.

Відповідь: 88,7 Ом.

6.6. Для коаксіальної лінії передачі з розмірами поперечного перерізу d = 5 мм, D = 11 мм (рис. 6.1) обчислити частоту, до якої хвилі вищих типів не поширюються. Діелектрик – повітря. Як зміниться значення частоти, якщо коаксіальну лінію заповнити діелектриком із ε = 2,1?

Відповідь: f = 11,94 ГГц, зменшиться в 1,45 раза.

6.7. По коаксіальній лінії передачі з розмірами поперечного перерізу d = 12 мм, D = 28 мм (рис. 6.1) на хвилі типу T передається потужність 100 кВт. Діелектрик – повітря. Визначити амплітуду струму в лінії.

Відповідь: 62,72 А.

6.8. По коаксіальній лінії передачі, діаметр внутрішнього циліндра якої d = 2 мм, на хвилі типу T передається потужність 10 Вт. Хвильовий опір лінії становить 60 Ом. Відносна проник-

ність діелектрика ε = 2,2. Знайти максимальні значення напруженостей електричного й магнітного полів у лінії.

Відповідь: $E_{r\,\max}$ = 23,36 кВ/м, $H_{\varphi\,\max}$ = 91,93 А/м.

6.9. У коаксіальній лінії передачі з розмірами поперечного перерізу d = 9 мм, D = 21 мм (рис. 6.1) поширюється хвиля типу T. Визначити граничну передану потужність, якщо пробій відбувається за напруженості електричного поля 30 кВ/см. Діелектрик – повітря.

Відповідь: $1{,}287 \cdot 10^6$ Вт.

6.10. Як лінії передачі використовується коаксіальний кабель марки РК-75-4-11 довжиною 10 м з розмірами поперечного перерізу d = 0,72 мм, D = 4,8 мм. Кабель виготовлений з міді. Діелектрик має параметри ε = 2,2, $\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}} = 5 \cdot 10^{-4}$. Частота переданих коливань 3 ГГц. Визначити к.к.д. системи. Як зміниться к.к.д., якщо частоту переданих коливань збільшити в 4 рази.

Відповідь: 90 %, 79%.

6.11. По коаксіальній кабельній лінії із хвильовим опором 75 Ом протікає струм $I(t,z) = 1{,}2 \cdot 10^{-3} \cos(1{,}5 \cdot 10^{10} t - 80{,}3z)$ А. Визначити частоту, фазову швидкість, довжину хвилі та відносну діелектричну проникність.

Відповідь: f = 2,4 ГГц, $V_{\text{ф}} = 1{,}88 \cdot 10^8$ м/с, $\lambda = 0{,}0782$ м, $\varepsilon_r = 2{,}55$.

Р о з д і л 7

ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ

§ 7.1. Основні теоретичні відомості

Об'ємний резонатор являє собою замкнену порожнину, обмежену металевими стінками, усередині якої існують електромагнітні коливання. Конфігурація об'ємного резонатора може бути довільною, однак найбільш поширений у застосуванні прямокутний (рис. 7.1), циліндричний (рис. 7.2), коаксіальний (рис. 7.3) і квазістаціонарний тороподібний (рис. 7.4) об'ємні резонатори. Усі вони, крім останнього, є власне кажучи закороченими на кінцях відрізками хвилеводів. У таких резонаторах можуть існувати коливання типу E, у яких $H_z = 0$, і коливання типу H, у яких $E_z = 0$. Аналізують поля в резонаторах шляхом розв'язання рівняння Гельмгольця для складових E_z і H_z за рівності нулю тангенціальної складової електричного поля на стінках резонатора. У результаті отримуємо рівняння для резонансної частоти і для складових векторів поля в резонаторі.

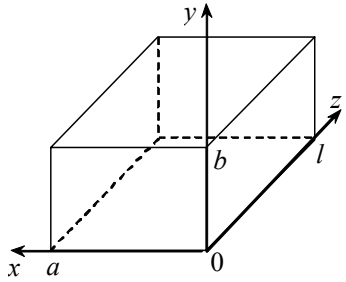


Рис. 7.1

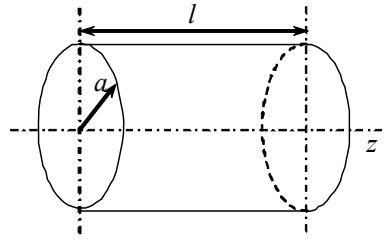


Рис. 7.2

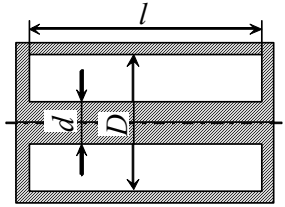


Рис. 7.3

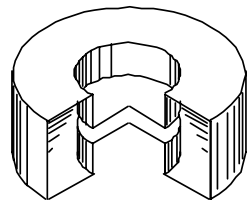


Рис. 7.4

Прямокутний об'ємний резонатор. Резонансна частота коливань типу H_{mnp} чи E_{mnp}:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \qquad (7.1)$$

де a, b, l – геометричні розміри резонатора (рис. 7.1).

Основним *типом коливань* у прямокутному резонаторі, що має мінімальну резонансну частоту, залежно від співвідношення розмірів a, b та l можуть бути H_{101}, H_{011} чи E_{110}. Наприклад, за $b < a$ та $b < l$ основним типом коливань є H_{101}, картину силових ліній поля якого зображено на рис. 7.5, а складові векторів поля описуються рівняннями

$$\begin{aligned}
&\dot{E}_x = 0,\\
&\dot{E}_y = -i\omega\mu_{аб} C\frac{\pi}{a}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right),\\
&\dot{E}_z = 0,\\
&\dot{H}_x = -C\frac{\pi^2}{al}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi z}{l}\right),\\
&\dot{H}_y = 0,\\
&\dot{H}_z = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 C\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).
\end{aligned} \qquad (7.2)$$

Картина силових ліній поля коливань H_{011} та E_{110} відрізняється лише орієнтацією векторів. Наприклад, вектор **E** у коливання H_{011} орієнтований у напрямку осі x, а в коливання E_{110} – у на-

прямку осі *z*. У резонаторі кубічної форми резонансні частоти цих трьох типів коливань збігаються (явище виродження).

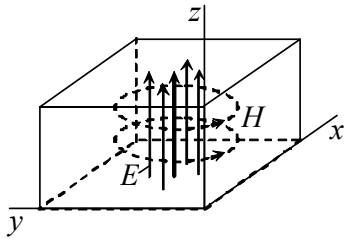


Рис. 7.5

Циліндричний об'ємний резонатор. Резонансна частота коливань типу H_{mnp}:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \qquad (7.3)$$

де ε, μ – відносні діелектричні проникності речовини, що заповнює резонатор; μ_{mn} – *n*-й корінь рівняння $J'_m(x) = 0$. Індекс *p*, що визначає кількість варіацій поля вздовж осі *z*, набуває цілих, ненульових значень.

Основним коливанням типу *H* у циліндричному резонаторі є H_{111}, картину силових ліній поля якого зображено на рис. 7.6.

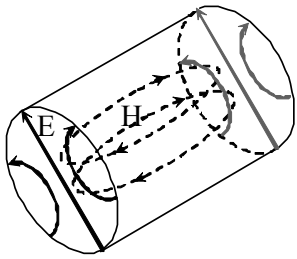


Рис. 7.6

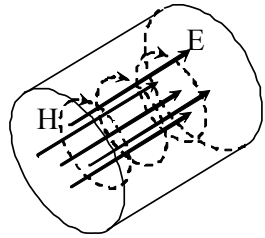


Рис. 7.7

Резонансна частота коливань типу E_{mnp}:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \qquad (7.4)$$

де ν_{mn} – n-й корінь рівняння $J_m(x) = 0$. На відміну від коливань типу H індекс p тут може набувати нульового значення.

Основним коливанням типу E у циліндричному резонаторі є E_{010}, картину силових ліній поля якого зображено на рис. 7.7. Особливістю цього коливання є те, що його резонансна частота

$$f_{010} = \frac{c}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{2{,}405}{\pi a} \qquad (7.5)$$

не залежить від довжини резонатора.

У загальному випадку, коли резонатор являє собою закорочений з обох кінців відрізок довільного хвилеводу, резонансну довжину хвилі визначають з умови

$$l = p\frac{\lambda_{\text{хв}}}{2}, \qquad (7.6)$$

де p – ціле число (поздовжній індекс); $\lambda_{\text{хв}}$ – довжина хвилі у хвилеводі (лінії передачі). Із рівняння випливає формула для резонансної частоти:

$$f_{\text{р}} = \frac{pV_{\text{ф}}}{2l}, \qquad (7.7)$$

де $V_{\text{ф}}$ – фазова швидкість хвилі в лінії передачі, на базі якої виконаний резонатор. Зокрема, для основного коливання типу T_1 об'ємного закороченого з обох кінців відрізком коаксіальної лінії передачі резонатора (рис. 7.3)

$$f_1 = \frac{c}{2l\sqrt{\varepsilon\mu}}. \qquad (7.8)$$

Добротність об'ємного резонатора визначають як відношення енергії електромагнітного поля, запасеної в резонаторі, до енергії, що втрачається за період власних коливань:

$$Q = \frac{f_{mnp}\int\limits_V \mu_{\text{аб}}\left|\mathbf{H}\right|^2 dV}{R_S\oint\limits_S \left|\mathbf{H}_\tau\right|^2 dS}. \qquad (7.9)$$

§ 7.2. Приклади розв'язання типових задач

7.1. Прямокутний об'ємний резонатор має такі розміри: $a = 20$ мм, $b = 25$ мм, $l = 30$ мм. Визначити резонансну довжину хвилі двох нижчих типів коливань. Як вони позначаються?

Розв'язання. У прямокутному резонаторі нижчими можуть бути коливання типів H_{101}, H_{011} і E_{110}, у яких один з індексів дорівнює нулю, а два інших одиниці. Визначимо резонансну довжину хвилі цих типів коливань. Запишемо формулу для резонансної довжини хвилі:

$$\lambda_{mnp} = c / f_{mnp}, \tag{7.10}$$

де $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ – швидкість світла. Підставляючи в (7.10) рівняння (7.1), для $\omega_p = 2\pi f_p$ одержимо

$$\lambda_{mnp} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}}. \tag{7.11}$$

Підставляючи чисельні дані, знайдемо резонансні довжини хвиль для зазначених типів коливань:

H_{101} $\lambda_{101} = 3{,}328$ см,

H_{011} $\lambda_{011} = 3{,}841$ см,

E_{110} $\lambda_{110} = 3{,}123$ см.

Таким чином, основним є коливання H_{011}, у якого значення λ_{mnp} найбільше, за ним слідує коливання H_{101}.

7.2. Визначити граничну енергію, що може бути накопичена в коаксіальному резонаторі (рис. 7.3) з розмірами $d = 10$ мм, $D = 40$ мм, $l = 80$ мм на основному типі коливань. Максимально допустима напруженість електричного поля 30 кВ/см.

Розв'язання. Електричне поле основної хвилі в коаксіальному резонаторі має тільки радіальну складову

$$E_r = \frac{A}{r}\sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \tag{7.12}$$

де A – деякий коефіцієнт. Підставляючи рівняння (7.12) у (6.17), знайдемо енергію, запасену в резонаторі

$$W = \frac{\pi}{2}\varepsilon_{аб} A^2 l \ln\frac{D}{d}. \qquad (7.13)$$

Максимальна напруженість електричного поля згідно з (7.12) існує всередині резонатора на поверхні внутрішнього провідника, тобто за $r = d/2$. Її значення дорівнює $E_{\max} = \frac{2A}{d}$, звідки

$$A = \frac{d}{2} E_{\max}. \qquad (7.14)$$

Підставляючи (7.14) у (7.13), одержимо формулу для розрахунку запасеної енергії

$$W = \frac{\pi}{8}\varepsilon_{аб} E_{\max}^2 d^2 l \ln\frac{D}{d}, \qquad (7.15)$$

чи після чисельних підстановок $W = 0,3466 \cdot 10^{-3}$ Дж.

§ 7.3. Задачі для самостійного розв'язання

7.3. Визначити резонансні частоти коливань типів E_{010} і H_{111} у циліндричному резонаторі, діаметр і довжина якого однакові та дорівнюють 5 см.

Відповідь: 4,593 і 4,622 ГГц, відповідно.

7.4. Який тип коливань є основним у прямокутному резонаторі з розмірами $a = 2$ см, $b = 4$ см, $l = 3$ см? Визначити його резонансну частоту. Який тип коливань є найближчим вищим? Знайти його резонансну частоту.

Відповідь: H_{011}, 6,25 ГГц; E_{110}, 8,38 ГГц.

7.5. Резонатор, що перелаштовується, утворений відрізком прямокутного хвилеводу перерізом 23×10 мм, усередині якого переміщується поршень (рис. 7.8). Визначити межі переміщення поршня для перебудови резонатора в межах 8–12 ГГц. Тип коливання H_{101}.

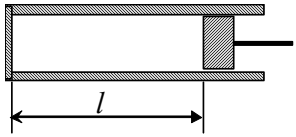


Рис. 7.8

Відповідь:
14,89 мм $\le l \le$ 32,37 мм.

7.6. За якого відношення довжини циліндричного об'ємного резонатора до його радіуса резонансні частоти коливань типів E_{010} і H_{111} будуть однаковими?

Відповідь: $l / a = 2{,}03$.

7.7. Довжина циліндричного об'ємного резонатора вдвічі більша його діаметра. Резонансна частота коливання типу E_{011} дорівнює 6 ГГц. Визначити діаметр резонатора.

Відповідь: 4,026 см.

7.8. Визначити розміри прямокутного об'ємного резонатора, три нижчі резонансні частоти якого дорівнюють 10, 11 та 12 ГГц.

Відповідь: 24,2 × 19, 1 × 16,5 мм.

7.9. Прямокутний об'ємний резонатор із резонансною довжиною 3 см при коливанні типу H_{102}, утворений відрізком стандартного прямокутного хвилеводу перерізом 23 × 10 мм. Визначити довжину резонатора.

Відповідь: 3,957 см.

7.10. Визначити резонансну частоту основного типу коливань коаксіального резонатора, поперечний переріз якого наведено на рис. 7.3. Дано: $D = 20$ мм, $d = 12$ мм, $l = 60$ мм.

Відповідь: 2,5 ГГц.

7.11. Незаповнений резонатор має резонансну частоту 6 ГГц. Яка буде резонансна частота, якщо резонатор заповнити діелектриком із відносною проникністю $\varepsilon = 2{,}7$?

Відповідь: 3,65 ГГц.

7.12. У циліндричному об'ємному резонаторі збуджується коливання типу E_{011}. Для дослідження картини силових ліній поля у стінках резонатора необхідно прорізати вузькі щілини. Указати розташування щілин, які істотно не впливають на поле цього коливання.

Відповідь: поздовжні щілини на бічній стінці і радіальні щілини на торцевих стінках.

7.13. Визначити резонансну частоту і добротність циліндричного об'ємного резонатора, що працює на коливанні типу H_{011}. Діаметр і довжина резонатора 5 см, провідність матеріалу стінок $6{,}1\cdot10^7$ См/м.

Відповідь: f_{011}=7,93 ГГц, Q =37 450.

7.14. Прямокутний об'ємний резонатор виготовлено з алюмінієвого хвилеводу перерізом 23х10 мм^2, довжиною 20 мм, заповненого повітрям. Знайти резонансну частоту та добротність Q мод H_{101}, H_{102}.

Відповідь: f_{101} = 4,802 ГГц, f_{102}= 7,075 ГГц, Q_{101} = 7,521, Q_{102} = 9,119.

7.15. Визначити добротність Q моди E_{111} прямокутного об'ємного резонатора, нехтуючи провідністю стінок і втратами в діелектрику.

Відповідь: $Q = \dfrac{k_0\eta_0}{4R_0}\dfrac{abd(a^2+b^2)}{a^3d+b^3d+a^3b+ab^3}$.

Р о з д і л 8

ЗБУДЖЕННЯ ЗАМКНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

§ 8.1. Основні теоретичні відомості

Збудження хвилеводів. Нехай у нескінченному хвилеводі джерела поля, що містяться в об'ємі V, обмеженому інтервалом $z_1 < z < z_2$ (рис. 8.1), задані функціями $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}}$ та $\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}$.

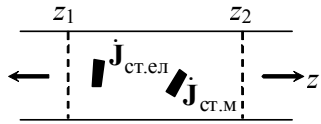


Рис. 8.1

Вважатимемо, що стінки хвилеводу ідеально провідні, а діелектрик, що заповнює хвилевід, не має втрат. Поле поза об'ємом V представлено у вигляді сукупності хвиль електричного й магнітного типів:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n}\dot{\mathbf{E}}_{-n} & (z < z_1), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n}\dot{\mathbf{E}}_{+n} & (z > z_2), \end{cases} \qquad \mathbf{H} = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n}\dot{\mathbf{H}}_{-n} & (z < z_1), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n}\dot{\mathbf{H}}_{+n} & (z > z_2), \end{cases} \tag{8.1}$$

де n – номер типу хвилі у хвилеводі (якщо під n розуміти два індекси, то підсумовування рядів проводять за обома індексами); $C_{\pm n}$ – коефіцієнти збудження; $\dot{\mathbf{E}}_{\pm n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\pm n}$ – комплексні ампліт-

туди векторів поля *n*-го типу. Знак "мінус" вказує на те, що хвиля поширюється у від'ємному напрямку осі *z*.

Задача полягає у визначенні коефіцієнтів збудження. Вимушене поле (7.10) задовольняє неоднорідні рівняння Максвелла. Для того, щоб розв'язати задачу про вимушені коливання у хвилеводі, необхідно володіти розв'язком більш простої задачі про вільні поля, що задовольняють однорідні рівняння Максвелла.

Застосовуючи лему Лоренца до електромагнітного поля (7.10) в об'ємі V і використовуючи як допоміжне поле $\dot{\mathbf{E}}_{\pm n}$, $\dot{\mathbf{H}}_{\pm n}$, *k*-го типу хвиль, комплексні амплітуди якого необхідно визначити, знаходимо вирази для коефіцієнтів збудження

$$\dot{C}_{\pm k} = \frac{1}{N_k}\int\limits_V \left(\dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}}\dot{\mathbf{E}}_{\mp k} - \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_{\mp k}\right)dV, \tag{8.2}$$

де

$$N_k = \int\limits_S \left\{\left[\dot{\mathbf{E}}_{+k}\dot{\mathbf{H}}_{-k}\right] - \left[\dot{\mathbf{E}}_{-k}\dot{\mathbf{H}}_{+k}\right]\right\}\mathbf{l}_z dS \tag{8.3}$$

– норма k-ї власної хвилі.

Збуджувана джерелом *k*-та хвиля переносить через кожний поперечний переріз активну потужність

$$P_\Sigma = \left|\dot{C}_k\right|^2 \frac{1}{4}\left|N_k\right|. \tag{8.4}$$

Збудження об'ємних резонаторів. Якщо об'ємний резонатор обмежений замкненою ідеально провідною поверхнею S_0, то розв'язок рівнянь Максвелла має задовольняти граничну умову

$$\left[\mathbf{l}_n\dot{\mathbf{E}}\right] = 0. \tag{8.5}$$

Будемо вважати, що вільні коливання резонатора відомі, тобто знайдені повна система векторних функцій $\dot{\mathbf{E}}_p$, $\dot{\mathbf{H}}_p$ і власні частоти ω_p. Тут індекс p означає номер типу коливань в об'ємному резонаторі. Власні коливання в об'ємному резонаторі задовольняють умову ортогональності:

$$\int\limits_V \dot{\mathbf{E}}_p\dot{\mathbf{E}}_q dV = 0, \quad \int\limits_V \dot{\mathbf{H}}_p\dot{\mathbf{H}}_q dV = 0 \quad (p \neq q) \tag{8.6}$$

(вважається, що власні частоти всіх типів коливань різні, тобто в резонаторі відсутнє виродження типів коливань).

Норма власного коливання

$$N_{\text{р}} = \int\limits_V \varepsilon_{\text{аб}} \dot{\mathbf{E}}_{\text{р}}^2 dV = \int\limits_V \mu_{\text{аб}} \left| \dot{\mathbf{H}}_{\text{р}}^2 \right| dV. \qquad (8.7)$$

Електромагнітне поле, збуджене в резонаторі, відшукують у вигляді рядів[1]

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{A}_q \dot{\mathbf{E}}_q, \dot{\mathbf{H}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{B}_q \dot{\mathbf{H}}_q. \qquad (8.8)$$

Амплітудні коефіцієнти для коливань типу p обчислюють за формулами:

$$\dot{A}_p = i \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int\limits_V \left(\omega \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega_p \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p \right) dV, \qquad (8.9)$$

$$\dot{B}_p = i \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int\limits_V \left(\omega_p \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p \right) dV. \qquad (8.10)$$

Якщо резонатор не має втрат, то власна частота ω_p дійсна, а за частоти збудження $\omega = \omega_p$ коефіцієнти $\dot{A}_p$, $\dot{B}_p$ і зумовлені ними поля прямують до нескінченності. Для реального об'ємного резонатора, що має втрати, власна частота ω_p комплексна. За великих значень добротності Q_p об'ємного резонатора власна частота

$$\dot{\omega}_p \approx \omega_p + i \frac{\omega_p}{2Q_p}, \qquad (8.11)$$

де Q_p – добротність p-го типу коливань. З огляду на те, що значення Q_p велике, для практичних розрахунків у чисельнику приймають $\dot{\omega}_p = \omega_p$. Тоді

[1] Насправді, у ці ряди слід додати члени, що описують статичні поля джерел. Однак практично їхній внесок у поле, збуджене в резонаторі, невеликий.

$$\dot{A}_p = i\frac{\omega\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}}\dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega_p\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2-\omega_p^2-i\omega_p^2/Q_p)N_p},$$
$$\dot{B}_p = i\frac{\omega_p\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.ел}}\dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}}\dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2-\omega_p^2-i\omega_p^2/Q_p)N_p}. \qquad (8.12)$$

За $\omega = \omega_p$ коефіцієнти $\dot{A}_p$ та $\dot{B}_p$ дорівнюють один одному.

Теорія збурень дозволяє розрахувати зміну власної частоти об'ємного резонатора при деформації його оболонки. Ця деформація може здійснюватися, наприклад, зануренням металевого тіла з об'ємом V у резонатор. Власні частоти ω'_p збудженого резонатора можна розрахувати за відомими частотами ω_p і власними векторними функціями E_p, H_p незбуреного резонатора:

$$\omega'_p = \omega_p\sqrt{1+\frac{\int\limits_{V'}\frac{\mu_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{H}}_p\right|^2}{2}dV - \int\limits_{V'}\frac{\varepsilon_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{E}}_p\right|^2}{2}dV}{\int\limits_V \frac{\varepsilon_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{E}}_p\right|^2}{2}dV}}. \qquad (8.13)$$

Тут $\int\limits_{V'}\frac{\mu_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{H}}_p\right|^2}{2}dV$, $\int\limits_{V'}\frac{\varepsilon_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{E}}_p\right|^2}{2}dV$ – максимальна магнітна й електрична енергії коливання в об'ємі V' до введення елементу, що збуджує; $\int\limits_V \frac{\varepsilon_{\text{аб}}\left|\dot{\mathbf{E}}_p\right|^2}{2}dV$ – повна електромагнітна енергія коливань p-типу в резонаторі до введення збурення.

§ 8.2. Приклади розв'язання типових задач

8.1. Прямокутний резонатор із розмірами a, b, l збуджується елементарним щілинним випромінювачем довжиною $l_{\text{щ}}$ на резо-

нансній частоті коливань типу H_{101}. Щілина розташована на передній стінці резонатора паралельно його основі (рис. 8.2). Координати щілини (x_1, y_1, 0). Комплексна амплітуда напруги між краями щілини $\dot{U}_0$. Добротність об'ємного резонатора $Q_{H_{101}}$ вважати відомою. Визначити комплексні амплітуди електромагнітного поля в резонаторі.

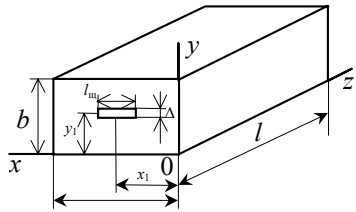


Рис. 8.2

Розв'язання. Коефіцієнти збудження згідно з виразом (8.12) визначаються як

$$\dot{A}_{H_{101}} = \dot{B}_{H_{101}} = \frac{Q_{H_{101}} \int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dV}{\omega_{H_{101}} N_{H_{101}}}, \qquad (8.14)$$

де

$$\dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} = i\frac{a}{l}\sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{l}z\,\mathbf{l}_x - i\cos\frac{\pi}{a}x\sin\frac{\pi}{l}z\,\mathbf{l}_z \qquad (8.15)$$

(див. розд. 7).

Власна частота коливання типу H_{101}:

$$f_{H_{101}} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon_{\text{аб}}\mu_{\text{аб}}}}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{l^2}}\,. \qquad (8.16)$$

Оскільки щілинний випромінювач еквівалентний магнітному диполю з поверхневою щільністю струму $\dot{\eta}_{\text{ст.м}}$, то в чисельнику рівняння (8.14) інтеграл за об'ємом треба замінити інтегралом за поверхнею щілини $S_{\text{щ}}$:

$$\int\limits_V \dot{\mathbf{J}}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} dV = \int\limits_{S_{\text{щ}}} \dot{\eta}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{H_{101}} d\mathbf{S}.$$

А оскільки площа щілини мала (випромінювач елементарний), то векторне поле $\dot{\mathbf{H}}_{H_{101}}$ можна вважати постійним і визначеним у точці (x_1, y_1, 0).

З огляду на те, що для однобічного щілинного випромінювача $I_{\text{ст м}} = \dot{U}_{\text{щ}} = U_0$, одержимо

$$\int\limits_{S_{\text{щ}}} \dot{\eta}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{H}_{101}} d\mathbf{S} = \dot{\eta}_{\text{ст.м}} \Delta l_{\text{щ}} \mathbf{l}_x \dot{\mathbf{H}}_{\text{H}_{101}} = \\ = i\dot{I}_{\text{ст.м}} l_{\text{щ}} \frac{a}{l} \sin\frac{\pi}{a} x_1 = i\dot{U}_0 l_{\text{щ}} \frac{a}{l} \sin\frac{\pi}{a} x_1. \tag{8.17}$$

Норма коливання типу H_{101}:

$$N_{\text{H}_{101}} = \int\limits_V \mu_{\text{аб}} \dot{\mathbf{H}}^2_{\text{H}_{101}} dV = \int\limits_0^l \int\limits_0^b \int\limits_0^a \mu_{\text{аб}} \left(\frac{a^2}{l^2} \sin^2\frac{\pi}{a} x \cos^2\frac{\pi}{l} z + \right. \\ \left. + \cos^2\frac{\pi}{a} x \sin^2\frac{\pi}{l} z \right) dx dy dz = \mu_{\text{аб}} \left(\frac{a^2}{l^2} + 1 \right) \frac{abl}{4} = \mu_{\text{аб}} (a^2 + l^2) \frac{ab}{4l}. \tag{8.18}$$

Підставляючи рівняння (8.17) і (8.18) у (8.14), одержимо

$$\dot{A}_{\text{H}_{101}} = \dot{B}_{\text{H}_{101}} = i \frac{4 Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{щ}} \sin\frac{\pi}{a} x_1}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_{\text{аб}} (a^2 + l^2) b}.$$

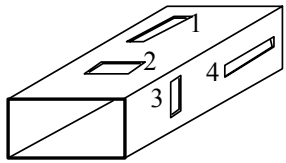
Комплексні амплітуди полів вимушеного коливання типу H_{101}:

$$\dot{\mathbf{E}} = -i \frac{4 Q_{\text{H}_{101}} a U_0 l_{\text{щ}}}{\pi (a^2 + l^2) b} \sin\frac{\pi}{a} x_1 \sin\frac{\pi}{a} x \sin\frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_y,$$

$$\dot{\mathbf{H}} = -\frac{4 Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{щ}} a}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_{\text{аб}} (a^2 + l^2) b l} \sin\frac{\pi}{a} x_1 \sin\frac{\pi}{a} x \cos\frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_x + \\ + \frac{4 Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{щ}}}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_{\text{аб}} (a^2 + l^2) b} \sin\frac{\pi}{a} x_1 \cos\frac{\pi}{a} x \sin\frac{\pi}{l} z \mathbf{l}_z.$$

§ 8.3. Задачі для самостійного розв'язання

8.2. На рис. 8.3 зображено прямокутний хвилевід, у якому прорізані вузькі щілини. За допомогою яких щілин при опроміненні їхнім зовнішнім полем можна збудити хвилю типу H_{10} (те саме й для хвилі E_{11})?

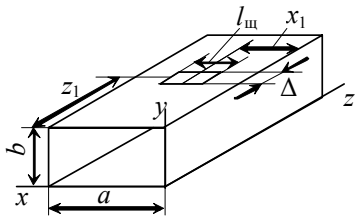


Відповідь: хвилю типу H_{10} можна збудити за допомогою щілин 1, 2, 4, а хвилю типу E_{11} за допомогою щілин 2, 3.

Рис. 8.3

8.3. У широкій стінці напівнескінченного прямокутного хвилеводу прорізана поперечна щілина (рис. 8.4), що опромінюється зовнішнім полем з довжиною хвилі λ_0. Довжина щілини $l_{щ} << \lambda_0$, амплітуда напруги вздовж щілини постійна і дорівнює U_0. Координати центра щілини (x_1, b, z_1). Визначити комплексну амплітуду напруженості електричного поля всередині хвилеводу на відстані від щілини за умови, що $\lambda_0/2 < a < \lambda_0$, $b < \lambda_0/2$. Хвилевід заповнений повітрям.

Відповідь: $\dot{\mathbf{E}} = \dfrac{2U_0 l_{щ}}{ab} \sin\dfrac{\pi}{a}x_1 \cos\beta z_1 \sin\dfrac{\pi}{a}x\, \mathrm{e}^{-ik_z z}\, \mathbf{l}_y$,



де $k_z = \dfrac{2\pi}{\lambda_{10}^H}$,

$\lambda_{10}^H = \dfrac{\lambda_0}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}$.

Рис. 8.4

8.4. У напівнескінченний круглий металевий хвилевід діаметром 6 см уведений тонкий штир довжиною 3 мм, як показано на рис. 8.5. Уздовж штиря протікає змінний електричний струм, амплітуда якого постійна за довжиною і дорівнює 1 А. Частота коливань 3,75 ГГц. Розрахувати передану по хвилеводу потужність

за умови оптимального розташування штиря збудження. Якою при цьому має бути відстань між штирем і закорочуючою стінкою?

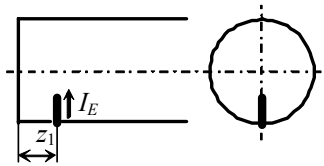


Рис. 8.5

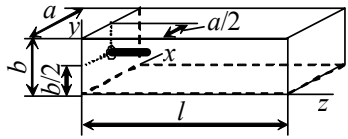


Рис. 8.6

Відповідь: 0,8483 Вт, 3,18 см.

8.5. Прямокутний резонатор із розмірами a, b, l збуджується тонким штирем на резонансній частоті коливання типу E_{110} (рис. 8.6). Добротність резонатора Q^E_{110} відома. Довжина штиря $l_д$, координати його підставки ($a/2$, $b/2$, 0). Розподіл електричного струму по штирю вважати постійним ($l_д << \lambda_0$), амплітуда струму I_0. Визначити комплексну амплітуду напруженості електричного поля в резонаторі.

Відповідь: $\dot{\mathbf{E}} = -\dfrac{4I_0 l_д Q^E_{110}}{\omega^E_{110}\varepsilon_{аб} abl}\sin\dfrac{\pi}{a}x\sin\dfrac{\pi}{b}y\,\mathbf{l}_z$.

8.6. Вказати оптимальне розташування штиря для збудження коливання типу H_{102} у прямокутному об'ємному резонаторі довжиною l.

Відповідь: по середині верхньої чи нижньої стінки на відстані l від торця резонатора.

8.7. Вказати оптимальне розташування штиря для збудження коливання типу E_{012} у циліндричному об'ємному резонаторі.

Відповідь: у центрі торцевої стінки.

Р о з д і л 9

ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

§ 9.1. Основні теоретичні відомості

Особливості поширення електромагнітних хвиль у певному середовищі визначаються властивостями даного середовища. У електродинаміці для локального опису властивостей середовища використовують матеріальні рівняння

$$\mathbf{D} = (\varepsilon_{аб})\mathbf{E} = \varepsilon_0(\varepsilon)\mathbf{E},$$
$$\mathbf{B} = (\mu_{аб})\mathbf{H} = \mu_0(\mu)\mathbf{H},$$
$$\mathbf{J} = (\sigma)\mathbf{E}.$$

Коефіцієнти $(\varepsilon_{аб})$, $(\mu_{аб})$ та (σ) у загальному випадку є тензорами і можуть залежати від ряду параметрів. Характер таких залежностей покладений в основу класифікації різних середовищ. Наприклад, якщо властивості середовища залежать від напрямку прикладених полів **E** та **H**, то такі середовища називають анізотропними. Якщо коефіцієнти $(\varepsilon_{аб})$, $(\mu_{аб})$ та (σ) залежать від абсолютних величин **E** та **H**, то подібні середовища будуть нелінійними. Розрізняють також неоднорідні середовища, у яких величини $(\varepsilon_{аб})$ і $(\mu_{аб})$ є функціями обраної координати і точки середовища, та однорідні середовища, у яких ця залежність відсутня. Коефіцієнти $(\varepsilon_{аб})$, $(\mu_{аб})$ і (σ) можуть залежати і від частоти електромагнітних коливань ω. У цьому випадку середовища дисперсні.

Однорідні ізотропні іонізовані середовища. Унаслідок властивостей іонізованого газу його зазвичай відокремлюють як специфічне середовище, яке називають *плазмою*. За складом газова плазма являє собою суміш нейтральних, від'ємно та додатно заряджених частинок. У цілому плазма квазінейтральна, тобто концентрація від'ємно заряджених частинок (електронів) у середньому дорівнює концентрації додатно заряджених частинок (іонів).

Частинки, що складають плазму, взаємодіють як із зовнішніми електромагнітними полями, так і між собою. Взаємодія між частинками приводить до появи у плазмі різноманітних колективних рухів (коливань), що є характерною властивістю плазми як середовища. Найбільш прості коливання плазми пов'язані з кулонівською взаємодією заряджених частинок. Частоту таких коливань називають плазмовою частотою ω_0. Для електронів

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}},$$

де e та m – заряд і маса електрона, відповідно; n – концентрація електронів у плазмі.

Акт взаємодії між двома частинками у плазмі називають *зіткненням*. Багато процесів у плазмі визначаються величиною ν_{ij} – кількістю зіткнень за 1 с зарядженої частинки сорту i з іншими частинками сорту j. У газовій плазмі найбільш важливою характеристикою є частота зіткнень електронів з нейтральними молекулами газу $\nu_{ем} = \nu$.

Із макроскопічної точки зору плазма характеризується електродинамічними параметрами ε, μ, і σ. Власний магнетизм плазми незначний, і можна з великим ступенем точності вважати, що $\mu = 1$.

Якщо електричне поле відсутнє, то відносна діелектрична проникність і провідність плазми відповідно дорівнюють:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2 + \nu^2}. \qquad (9.1)$$

Якщо $\nu \ll \omega$, то формули (9.1) спрощуються

$$\varepsilon \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \sigma \approx \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2}. \tag{9.2}$$

Поняття плазми можна поширити на електронно-дірковий газ у напівпровідниках. Електродинамічні параметри невиродженого напівпровідника з двома типами електропровідності, для якого ефективні частоти зіткнень електронів і дірок відповідно ν_n і ν_p, а діелектрична проникність ґратки – ε_p, можна представити формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \varepsilon_p \left(1 - \frac{\omega_{0n}^2}{\omega^2 + \nu_n^2} - \frac{\omega_{0p}^2}{\omega^2 + \nu_p^2} \right), \\ \sigma &= \frac{\omega_{0n}^2 \nu_n \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + \nu_n^2} + \frac{\omega_{0p}^2 \nu_p \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + \nu_p^2}, \end{aligned} \tag{9.3}$$

де $\omega_{0n} = \sqrt{\dfrac{e^2 n}{m_n^* \varepsilon_0 \varepsilon_p}}$, $\omega_{0p} = \sqrt{e^2 p / m_p^* \varepsilon_0 \varepsilon_p}$ - плазмові частоти електронів і дірок, відповідно; n і p – концентрації електронів і дірок; m_n^* та m_p^* - ефективні маси електрона та дірки.

Якщо в напівпровіднику існують декілька сортів частинок з різними ефективними масами, тоді це має бути відображено відповідними членами у формулі (9.3). Узагальненою електродинамічною характеристикою середовища є комплексна діелектрична проникність

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - i \frac{\sigma}{\omega}. \tag{9.4}$$

Коефіцієнт поширення плоскої монохроматичної хвилі в середовищі $k = \dfrac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = \beta - i\alpha,$ причому

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}\,,$$
$$\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}\,. \qquad (9.5)$$

Якщо активні втрати у плазмі незначні і виконується умова $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \ll \varepsilon$, тоді вирази (9.5) набувають вигляду

$$\beta = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon}}\,. \qquad (9.6)$$

Іноді коефіцієнти β і α виражають через дійсну та уявну частини коефіцієнта заломлення $n = \sqrt{\tilde{\varepsilon}} = n' - in''$.

При проходженні плоскої електромагнітної хвилі через однорідний шар плазми товщиною L складові векторів електромагнітного поля послаблюються на величину

$$\Delta = 8{,}686\int_0^L \alpha\, dz \ \ [\text{дБ}]. \qquad (9.7)$$

При цьому додатковий зсув фази, викликаний наявністю плазми, визначається формулою

$$\partial\varphi = \int_0^L \beta\, dz \ \ [\text{дБ}]. \qquad (9.8)$$

Однорідні анізотропні середовища. У анізотропних середовищах напрямок прикладеного поля не збігається з напрямком викликаного цим полем відгуку. Наприклад, існують середовища, у яких вектор **E** і вектор електричної поляризовності **P**, який виникає під його впливом, не збігаються за напрямком. Існують також середовища, у яких вектор напруженості магнітного поля **H** і вектор намагніченості **M** відрізняються своїми напрямками. В обох випадках пари векторів **D** і **E** та **B** і **H** пов'язані між собою тензорами другого рангу.

Гіротропні середовища. Частковим випадком анізотропних середовищ є гіротропні середовища, для яких хоча б один із тензорів (ε) та (μ) має вигляд

$$(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & -i\varepsilon_{xy} & 0\\ i\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix},\quad (\mu)=\begin{pmatrix}\mu_{xx} & -i\mu_{xy} & 0\\ i\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{zz}\end{pmatrix}.$$

Гіромагнітні властивості виявляють деякі середовища, розміщені в постійному магнітному полі. Наприклад, для газової плазми за наявності постійного магнітного поля $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{l}_z$ складові тензора діелектричної проникності записують у вигляді

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= 1-\frac{\omega_0^2}{2\omega}\left[\frac{\omega-\omega_H}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}-\frac{\omega+\omega_H}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right],\\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\omega_0^2}{2\omega}\left[\frac{\omega-\omega_H}{(\omega-\omega_H)^2+\nu^2}-\frac{\omega+\omega_H}{(\omega+\omega_H)^2+\nu^2}\right],\\
\varepsilon_{zz} &= 1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2+\nu^2},
\end{aligned} \tag{9.9}$$

де $\omega_H = \mu_0\dfrac{|e|}{m}H_0 = \gamma H_0 = 2{,}21\cdot 10^5 H_0$ – частота ларморівської прецесії. У цій формулі величина H_0 має розмірність [А/м].

З урахуванням зіткнень складові тензора комплексної діелектричної проникності газової плазми матимуть вигляд

$$\tilde{\varepsilon}_{xx}=1-\frac{\omega_0^2(\omega-i\nu)}{\omega[(\omega-i\nu)^2-\omega_H^2]},\quad \tilde{\varepsilon}_{xy}=\frac{\omega_0^2\omega_H}{\omega[(\omega-i\nu)^2-\omega_H^2]},\quad \tilde{\varepsilon}_{zz}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega(\omega-i\nu)}. \tag{9.10}$$

Прикладом гіромагнітного середовища з тензором (μ) є ферит, розміщений у постійному магнітному полі $\mathbf{H}_0$. Складові тензора комплексної магнітної проникності фериту за $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{l}_z$ записують таким чином:

$$\tilde{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{(\omega - i\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \frac{\omega_M (\omega - i\nu)}{(\omega - i\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{zz} = 1. \quad (9.11)$$

де $\omega_H = \gamma H_0$; $\omega_M = \gamma M_0$ (M_0 – намагніченість насичення фериту).

Складові тензора комплексної магнітної проникності, що описуються виразами (8.11), у загальному випадку містять дійсну та уявну частини:

$$\tilde{\mu}_{xx} = \mu'_{xx} - i\mu''_{xx}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \mu'_{xy} - i\mu''_{xy}.$$

Якщо втрати у фериті відсутні, то

$$\mu_{xx} = \mu'_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{xy} = \mu'_{xy} = \frac{\omega \omega_M}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{zz} = 1. \quad (9.12)$$

Залежність від частоти компонентів *xx* та *yy* тензорів гіротропних середовищ має резонансний характер. Резонансна частота пропорційна напруженості магнітного поля H_0, а ширина резонансної кривої визначається параметром ν.

Загальний розгляд поширення електромагнітної хвилі в гіротропному середовищі зручно звести до двох граничних випадків – поширення хвилі вздовж певної осі (зазвичай уздовж напрямку постійного магнітного поля) і впоперек до неї.

При поширенні плоскої хвилі вздовж постійного підмагнічувального поля спостерігається *ефект Фарадея* - обертання площини поляризації лінійно поляризованої хвилі. Цей ефект пов'язаний з тим, що при повздовжньому (уздовж підмагнічувального поля) поширенні хвилі з правою круговою поляризацією поводять себе так само, як і хвилі, що поширюються в середовищі з параметрами $\varepsilon_{\text{п}} = \sqrt{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}}$, $\mu_{\text{п}} = \sqrt{\mu_{xx} - \mu_{xy}}$, а хвилі з лівою поляризацією – як хвилі в середовищі з параметрами $\varepsilon_{\text{п}} = \sqrt{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{xy}}$, $\mu_{\text{п}} = \sqrt{\mu_{xx} + \mu_{xy}}$. Коефіцієнти поширення для таких хвиль різні:

$$k_{\text{п}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_{\text{п}}\varepsilon_{\text{п}}}, \quad k_{\text{л}} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu_{\text{л}}\varepsilon_{\text{л}}}. \quad (9.13)$$

Представляючи лінійно поляризовану хвилю у вигляді геометричної суми двох векторів з однаковими довжинами, які обертаються в протилежних напрямках, можна знайти кут повороту

площини поляризації для електромагнітної хвилі, що проходить. Якщо хвиля пройшла відстань z_0 у середовищі, що описується співвідношеннями (9.13), тоді цей кут дорівнює

$$\varphi = \frac{z_0}{2}\left(k_{\text{п}} - k_{\text{л}}\right) = \frac{\omega z_0}{2c}\left(\sqrt{\varepsilon_{\text{п}}\mu_{\text{п}}} - \sqrt{\varepsilon_{\text{л}}\mu_{\text{л}}}\right). \qquad (9.14)$$

§ 9.2. Приклади розв'язання типових задач

9.1. Використовуючи рівняння неперервності, отримати вираз для плазмової частоти електронів у плазмі без зіткнень. Вважати, що струм у плазмі переноситься тільки електронами із зарядом e та масою m. Концентрація електронів дорівнює n.

Розв'язання. Нехай ρ – об'ємна густина заряду у плазмі. Густина струму провідності $\mathbf{J}_E$ пов'язана зі зміною об'ємної густини заряду рівнянням неперервності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathbf{J}_E.$$

Для досить швидких процесів, наприклад, для розглядуваних, можна вважати, що струм переноситься тільки найбільш легкими частинками – електронами. Тому густина струму в плазмі $\mathbf{J}_E = en\mathbf{v}_{\text{сер}}$, де $\mathbf{v}_{\text{сер}}$ - середня швидкість електронів. Рівняння руху "середнього" електрона у плазмі без зіткнень має вигляд

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

З урахуванням виразу для густини струму провідності рівняння можна переписати таким чином:

$$\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial t} = -\frac{e^2 n\mathbf{E}}{m}. \qquad (9.15)$$

Продиференціювавши рівняння неперервності за t і використавши вираз (9.15) для однорідної плазми, отримаємо

$$\operatorname{div}\frac{\partial \mathbf{J}_E}{\partial t} = \operatorname{div}\frac{e^2 n\mathbf{E}}{m} = -\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Враховуючи закон Гаусса, знаходимо рівняння вільних коливань об'ємної густини заряду $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_0^2 \rho = 0$, де $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}}$ – плазмова частота.

9.2. У зразку кремнію *p*-типу існують дірки двох сортів. Ефективна маса важких дірок $m^*_{p\text{в}} = 0,49m$ (m – маса електрона), легких - $m^*_{p\text{л}} = 0,16m$. Кількість зіткнень за 1 с важких і легких дірок з іншими частинками становить $\nu_{p\text{в}} = 9,2 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$ та $\nu_{p\text{л}} = 2,6 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$.

Розв'язання. Оскільки даний напівпровідник містить два типи носіїв заряду, то відносна діелектрична проникність кремнію

$$\varepsilon = \varepsilon_p \left(1 - \frac{\omega_{0p\text{в}}^2}{\omega^2 + \nu_{p\text{в}}^2} - \frac{\omega_{0p\text{л}}^2}{\omega^2 + \nu_{p\text{л}}^2} \right),$$

а провідність

$$\sigma = \frac{\omega_{0p\text{в}}^2 \nu_{p\text{в}} \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + \nu_{p\text{в}}^2} + \frac{\omega_{0p\text{л}}^2 \nu_{p\text{л}} \varepsilon_0 \varepsilon_p}{\omega^2 + \nu_{p\text{л}}^2},$$

де

$$\omega_{0p\text{в}}^2 = \frac{e^2 p_{\text{в}}}{m^*_{p\text{в}} \varepsilon_0 \varepsilon_p} = 5,55 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2},$$

$$\omega_{0p\text{л}}^2 = \frac{e^2 p_{\text{л}}}{m^*_{p\text{л}} \varepsilon_0 \varepsilon_p} = 2,80 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$$

- квадрат плазмової частоти важких та легких дірок, відповідно; $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 1,88 \cdot 10^{13}$ с$^{-1}$ - частота сигналу. Підставляючи числові дані у вирази для ε та σ, отримаємо ε = 9,90; σ = 194 См/м.

9.3. Плоска електромагнітна хвиля поширюється в однорідній ізотропній газовій плазмі. Визначити відносну діелектричну про-

никність і провідність плазми, якщо коефіцієнт поширення хвилі на частоті 0,48 ГГц дорівнює $(5 - i\,2)$ м$^{-1}$.

Розв'язання. Використовуючи формулу (9.5), представимо дійсну й уявну частини коефіцієнта заломлення через коефіцієнт фази β та коефіцієнт ослаблення α:

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\beta c}{\omega},$$

$$n'' = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\alpha c}{\omega}.$$

Піднесемо перший і другий вирази до квадрата й віднімемо від першого отриманого співвідношення друге:

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \left(\beta^2 - \alpha^2\right). \qquad (9.16)$$

Обчислимо добуток

$$n'n'' = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha\beta$$

і використаємо цей вираз для відшукання провідності

$$\sigma = 2\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha\beta\omega\varepsilon_0 \,. \qquad (9.17)$$

За умовою задачі $\beta = 5$, $\alpha = 2$. Підставляючи ці значення до виразів (9.16) та (9.17), отримаємо $\varepsilon = 0{,}2078$, $\sigma = 5{,}28 \cdot 10^{-3}$ См/м.

9.4. Знайти значення частоти сигналу пройденої хвилі, при якій у газовій плазмі з параметрами $\omega_0 = 2 \cdot 10^8$ с$^{-1}$ та $\nu = 10^8$ с$^{-1}$ густина струму провідності дорівнює густині струму зміщення.

Розв'язання. Густина струму провідності у плазмі

$$J_{\text{пр}} = \sigma E = \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2 + \nu^2} E.$$

Густина струму зміщення у плазмі

$$J_{\text{зм}} = \omega\varepsilon\varepsilon_0 E = \omega\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}\right)\varepsilon_0 E.$$

Зіставляючи значення густини струму провідності та густини зміщення, отримаємо кубічне рівняння відносно частоти сигналу

$$\omega^3 + \omega\left(\nu^2 - \omega_0^2\right) - \omega_0^2\nu = 0.$$

У канонічній формі це рівняння має вигляд $\omega^3 + 3p\omega + 2q = 0,$ де

$$p = \frac{\nu^2 - \omega_0^2}{3} = -10^{16}, \quad q = \frac{\omega_0^2\nu}{2} = -2\cdot 10^{24}.$$

Легко перевірити, що дійсний корінь останнього рівняння $\omega_1 = u + v,$ де

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = 1{,}55\cdot 10^8; \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = 0{,}64\cdot 10^8.$$

Звідси знаходимо значення частоти сигналу, за якого $J_{\text{пр}} = J_{\text{зм}}$:

$$\omega = (1{,}55 + 0{,}64)\cdot 10^8 = 2{,}19\cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

9.5. Дві плоскі лінійно поляризовані хвилі поширюються в напрямку осі x у монокристалі сапфіра (Al_2O_3), тензор відносної діелектричної проникності якого

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Визначити різницю фаз цих хвиль, що пройшли у сапфірі відстань у 1 см, якщо перша хвиля поляризована вздовж осі y, а друга уздовж осі z. Частоти коливань однакові й дорівнюють 10 ГГц. На цій частоті $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 13{,}2$, $\varepsilon_{zz} = 11{,}4$.

Розв'язання. Хвиля, що характеризується вектором $\mathbf{E}_1 = E\mathbf{l}_y \perp \mathbf{l}_z$, буде звичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{xx}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{13{,}2} = 7{,}609 \text{ рад / см}.$$

Хвиля, що характеризується вектором $\mathbf{E}_2 = E\mathbf{l}_z \,\|\, \mathbf{l}_z$, буде незвичайною з коефіцієнтом фази

$$\beta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{zz}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{11{,}4} = 7{,}071 \text{ рад / см}.$$

Різниця фаз при проходженні звичайною та незвичайною хвилями відстані становить

$$\Delta\varphi = (\beta_0 - \beta_e) z_0 = 30{,}8^{\circ}.$$

§ 9.3. Задачі для самостійного розв'язання

9.6. Концентрація електронів у газовій плазмі дорівнює 10^{10} см$^{-3}$, а частота зіткнень електронів з молекулами 10^9 с$^{-1}$. Визначити відносну діелектричну проникність і провідність плазми. Розрахунок провести для двох частот сигналу: $f_1 = 10^8$ Гц та $f_2 = 10^{10}$ Гц.

Відповідь:

$\varepsilon_1 = -21{,}8$, $\varepsilon_2 = 0{,}992$, $\sigma_1 = 0{,}202$ См/м, $\sigma_2 = 7{,}12\times10^{-5}$ См/м.

9.7. Максимальна концентрація електронів у іоносфері Землі дорівнює 10^6 см$^{-3}$, частота зіткнень електронів з частинками газу – 10^7 с$^{-1}$. Визначити потужність, що поглинається в одиниці об'єму іоносферної плазми, якщо амплітуда напруженості електричного поля плоскої хвилі становить 1 В/м, а довжина хвилі 10 м.

Відповідь: 3,96 мкВт/м^3.

9.8. У напівпровіднику антимоніду галію (GaSb) концентрація електронів становить $7{,}7\cdot10^{14}$ см$^{-3}$, а концентрація дірок $2{,}5\cdot10^{14}$ см$^{-3}$. Ефективні маси електрона і дірки дорівнюють0,05m та 0,5 m, відповідно. Ефективна кількість зіткнень електронів з іншими частинками дорівнює $1{,}7\cdot10^{12}$ с$^{-1}$, а дірок $3{,}8\cdot10^{12}$ с$^{-1}$. Для випромінювання з довжиною хвилі 1 мм визначити дійсну та уявну частини комплексної діелектричної проникності напівпровідника. Відносна діелектрична проникність гратки антимоніду галію $\varepsilon_p = 12{,}5$ (див. вираз (9.3)).

Відповідь: $\tilde{\varepsilon} = 4{,}81 - i7{,}04$.

9.9. При зондуванні однорідної ізотропної газової плазми плоскою електромагнітною хвилею з лінійною поляризацією виміряно питоме згасання 8,68 дБ/м і додатковий зсув фаз на одиниці довжини 10 рад/м. Визначити концентрацію електронів та

ефективну частоту зіткнень електронів з іншими частинками плазми, якщо довжина хвилі зондуючого сигналу 30 см.

Відповідь: $9{,}595\cdot10^{9}$ см$^{-3}$, $3{,}70\cdot10^{8}$ с$^{-1}$.

9.10. Плоска електромагнітна хвиля падає вздовж нормалі з вакууму на кристал сапфіру (Al_2O_3) з тензором діелектричної проникності

$$(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx} & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{pmatrix}.$$

Межа поділу повітря–діелектрик паралельна осі кристала (вісь z). Знайти коефіцієнти відбиття звичайної та незвичайної хвиль на частоті 10 ГГц, на якій $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=13{,}2$ та $\varepsilon_{zz}=11{,}4$.

Відповідь: –0,567, –0,557.

9.11. Із повітря на мідну пластину вздовж нормалі падає хвиля із частотою $f=100$ МГц. Напруженість поля $H_1=1$ А/м. Визначити поле на межі пластини і потужність, яка поглинається пластиною (відносно 1 м^2 її площі).

Відповідь: напруженість магнітного поля $H_\tau=2H_1=2$ А/м;

напруженість електричного поля $E_\tau=7{,}4\cdot10^{-3}\exp(i\,45^0)$ В/м;

потужність $P=R_S|H_\tau|^2=10{,}4$ мВт/м^2.

9.12. Ферит має намагніченість насичення $M_0=3{,}6\cdot10^4$ А/м у полі підмагнічування з напруженістю $9\cdot10^4$ А/м та відносною діелектричною проникністю $\varepsilon=10$. Визначити товщину феритової пластинки L, за якої фазовий зсув між звичайною і незвичайною хвилями на виході з пластинки дорівнює 90°.

Відповідь: $L=0{,}034$ м.

9.13. Отримати вираз тензора діелектричної проникності ε_{ij} для плазми з магнітним полем $\mathbf{B}=B_0\mathbf{l}_z$, у моделі *холодної плазми* (немає зіткнень, теплові швидкості всіх частинок дорівнюють нулю).

Відповідь: $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + j\dfrac{4\pi}{\omega}\sigma_{ij}$, де δ_{ij} – одиничний тензор, σ_{ij} – тензор провідності. Відмінні від нуля компоненти тензора ε_{ij} мають вигляд

$$\varepsilon_{xx\backslash} = \varepsilon_{yy} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2};\ \varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = -\sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2 \Omega_{\alpha}}{\omega(\omega^2 - \Omega_{\alpha}^2)};$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{L\alpha}^2}{\omega^2}.$$

Решта компонентів тензора ε_{ij} дорівнює нулю. У цих формулах Ω_{α} – ларморівська частота частинок плазми сорту α, $\omega_{L\alpha}$ – ленгмюрівська частота частинок плазми сорту α.

9.14. Дослідити збудження високочастотних хвиль у напівобмеженій ізотропній плазмі моноенергетичним нерелятивістським електронним пучком із концентрацією N_b, що летить над її поверхнею зі швидкістю V_0.

Відповідь: спектр частот поверхневих хвиль, що збуджуються (за $\omega_{Л.e} >> \nu_e$ - частоти зіткнень): $\omega = \dfrac{\omega_{Л.e}}{\sqrt{2}} \sim k_z V_0$; інкремент наростання ($\omega \to \omega + i\delta$):

$$\delta = \left(\frac{N_b}{2N_0}\right)^{1/3} \frac{\left(i + \sqrt{3}\right)}{2}\omega, \quad (\delta > \nu_e).$$

Р о з д і л 1 0

СУЧАСНІ КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ КОМПОНЕНТІВ НВЧ-КІЛ

§ 10.1. Основні теоретичні відомості

Програма AppCAD виробництва Agilent Technologies. Програма поширюється безкоштовно, і доступна для завантаження за адресою http://www.hp.woodshot.com/appcad/version 302/setup.exe.

AppCAD – це програма з інтерактивним, інтуїтивно зрозумілим інтерфейсом, що дозволяє швидко здійснювати інженерні розрахунки для НВЧ, мікрохвильових та безпровідних застосувань. За допомогою AppCAD можна проводити аналіз багатьох таких активних і пасивних елементів НВЧ-кіл, як транзистори, діоди, підсилювачі, а також розраховувати геометричні параметри НВЧ-ліній передачі, у тому числі мікросмужкової, компланарної, двопровідної та коаксіальної. Алгоритм роботи з програмою розглянемо на прикладі задачі про розрахунок хвильового опору відкритої мікросмужкової лінії передачі.

Інструкція з розрахунку хвильового опору НВЧ-лінії передачі за допомогою програми AppCAD.

1. Запустити програму (файл AppCAD.exe). З'являється головне меню (рис. 10.1).

2. Обрати пункт Passive Circuits і натиснути в ньому на картинку зі схематичним зображенням необхідного типу лінії передачі. У нашому випадку це Microstrip .

3. З'явиться меню розрахунку параметрів мікросмужкової лінії.

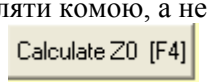
4. Задати в пункті Dielectric діелектричну проникність підкладки, або обрати конкретний матеріал з меню, що випадає. Ввести в полі Frequency частоту, для якої будуть проводитися розрахунки. Цей параметр разом із довжиною лінії L визначатиме електричну довжину лінії.

Питання для самоконтролю: як залежить хвильовий опір мікросмужкової лінії передачі від частоти?

Обрати одиниці, у яких задаватимуться геометричні розміри лінії (поле Length Units). Можливі варіанти: метри, сантиметри, міліметри, дюйми (*inches*) і тисячні частки дюйма (*mils*).

Ввести геометричні параметри лінії: товщину підкладки (H), ширину центральної смужки (W), товщину металевого провідника (T) і довжину лінії (L) у відповідні віконця.

Зауваження: при наборі не цілих чисел, цілу частину від десяткової необхідно відділяти комою, а не крапкою.

5. Натиснути кнопку 

або F4. Якщо всі дані введено правильно, у лівій колонці з'являться результати розрахунків:

- у полі Z0 буде вказано хвильовий опір лінії в омах;
- у полях Elect length – електрична довжина лінії передачі на заданій частоті в одиницях довжини хвилі та градусах;
- у полі 1.0 Wavelength – довжина хвилі в тих самих одиницях, які були обрані в полі Length Units;
- у полі Vp – фазова швидкість хвилі в розрахованій лінії передачі;
- у полі ε_{eff} – ефективна діелектрична проникність розрахованої лінії передачі.

Питання для самоконтролю: яким чином пов'язані між собою Vp та $\varepsilon_{eff.}$?

6. Змінюючи геометричні та електричні параметри мікросмужкової лінії, досягти відповідності хвильового опору заданому значенню.

7. Щоб повернутися в головне меню й обрати інший тип лінії передачі, натиснути F8.

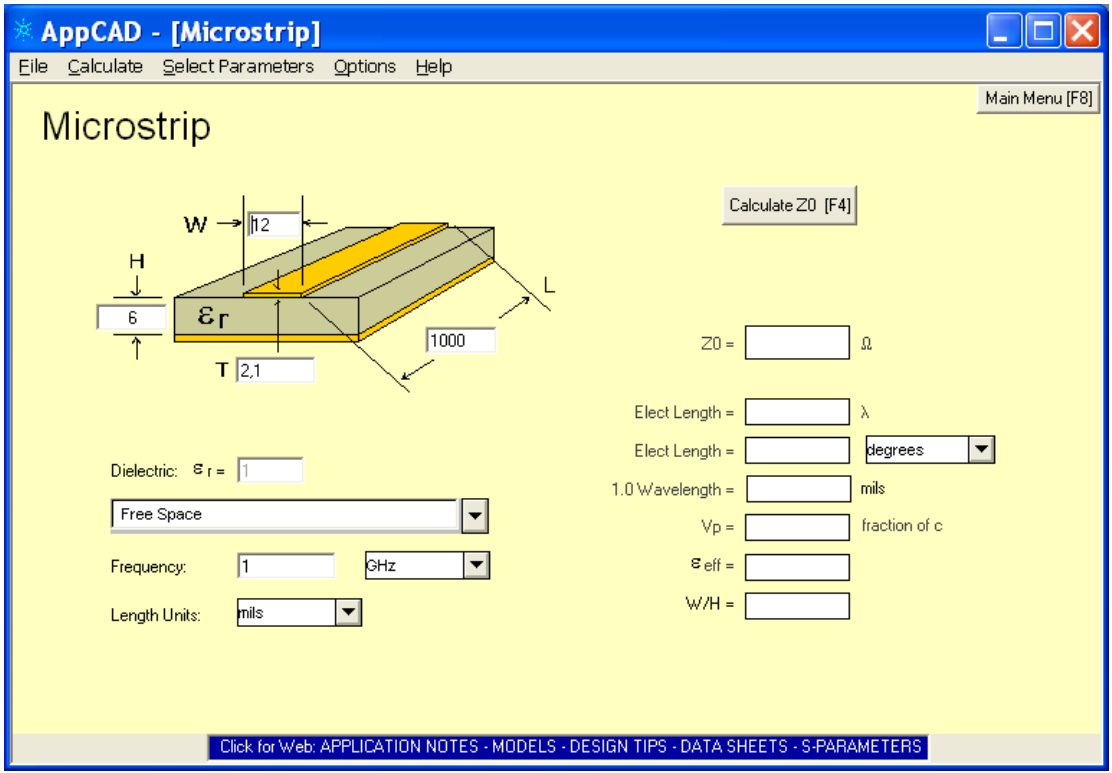

AppCAD - [Microstrip]
File Calculate Select Parameters Options Help
Main Menu [F8]
Microstrip
W
12
H
6
εr
L
1000
T
2,1
Calculate Z0 [F4]
Z0 =
Ω
Elect Length =
λ
Elect Length =
degrees
1.0 Wavelength =
mils
Vp =
fraction of c
εeff =
W/H =
Dielectric: εr =
1
Free Space
Frequency:
1
GHz
Length Units:
mils
Click for Web: APPLICATION NOTES - MODELS - DESIGN TIPS - DATA SHEETS - S-PARAMETERS

Рис. 10.1

Програма Microwave Impedance Calculator MWI-2010 виробництва Rogers Corporation. Програму можна завантажити із сайта виробника: https://www.rogerscorp.com/acm/technology/index.aspx після безкоштовної реєстрації.

MWI-2010 є більш спеціалізованою програмою, ніж AppCAD. Її використовують винятково для розрахунку різноманітних типів смужкових ліній передачі. Вона дозволяє розраховувати більше різновидів таких ліній, зокрема екрановану компланарну лінію, а також симетричну мікросмужкову лінію з діелектричними шарами, що мають різні параметри. За її допомогою також можна розрахувати більше характеристик лінії передачі, зокрема частотну залежність втрат у лінії передачі та частоту відсікання першої вищої ТЕ-моди. Ще однією особливістю є те, що всі параметри підкладок (товщина, комплексна діелектрична проникність і теплопровідність діелектрика, товщина та шорсткість шару міді) відповідають реальним зразкам, виготовлених компанією Rogers Corporation.

Інструкція з розрахунку параметрів НВЧ-лінії передачі в програмі MWI-2010.

1. Запустити файл mwi2010.exe. З'явиться головне вікно програми (рис. 10.2).

2. У меню Design Type обрати необхідний тип смужкової лінії. Схематичне зображення перерізу відповідної лінії з'явиться в лівому верхньому куті програми.

3. У центральному вікні програми обрати матеріал, який виконуватиме роль підкладки для лінії передачі. Його параметри з'являться на панелі Material Properties. За необхідності їх можна змінити вручну.

Обрати на панелі Units систему одиниці: метричну (Metric) чи дюймову (English).

Задати товщину шару діелектрика (пункт Thickness (H) панелі Material Properties), ширину центрального провідника (пункт Conductor Width (W) панелі Circuit Parameters) і, якщо це передбачено конструкцією лінії, відстань між провідниками (пункт Conductor Space (S) панелі Circuit Parameters), а також довжину лінії (пункт Length).

Задати товщину шару міді (пункт Copper Thickness (T) панелі Circuit Parameters).

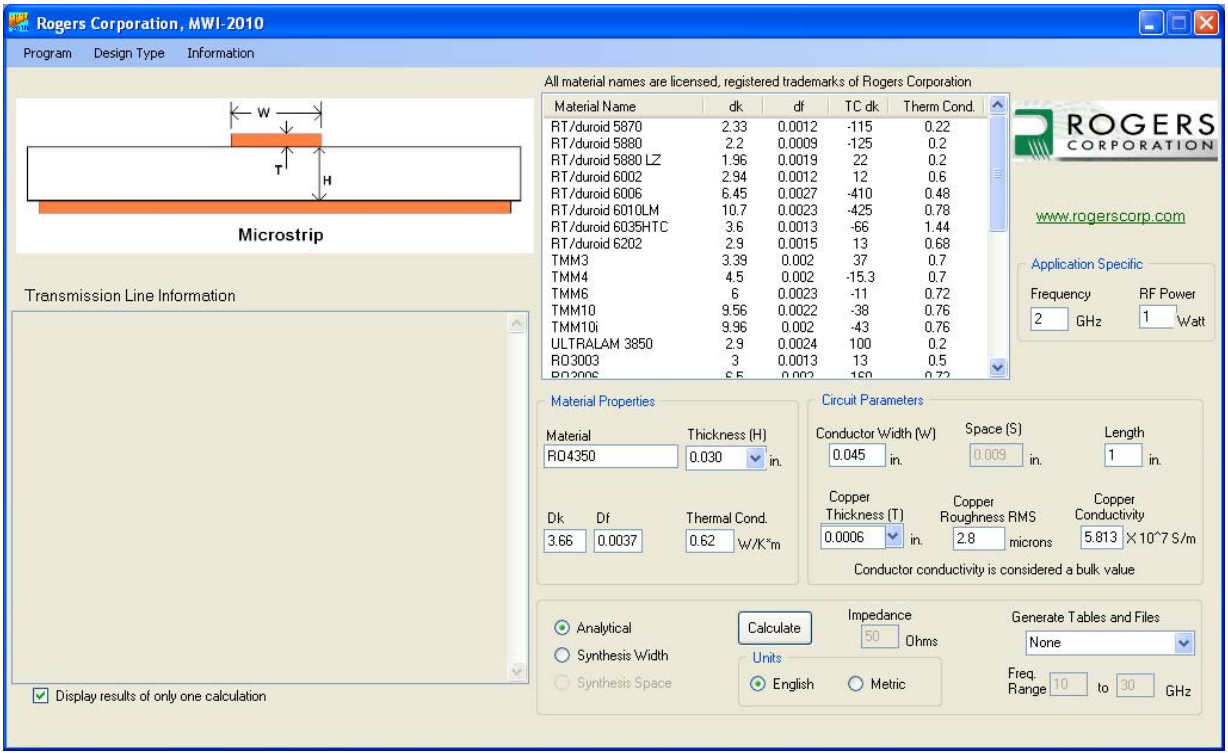

Rogers Corporation, MWI-2010
Program
Design Type
Information
All material names are licensed, registered trademarks of Rogers Corporation
Material Name dk df TC dk Therm Cond.
RT/duroid 5870 2.33 0.0012 -115 0.22
RT/duroid 5880 2.2 0.0009 -125 0.2
RT/duroid 5880 LZ 1.96 0.0019 22 0.2
RT/duroid 6002 2.94 0.0012 12 0.6
RT/duroid 6006 6.45 0.0027 -410 0.48
RT/duroid 6010LM 10.7 0.0023 -425 0.78
RT/duroid 6035HTC 3.6 0.0013 -66 1.44
RT/duroid 6202 2.9 0.0015 13 0.68
TMM3 3.39 0.002 37 0.7
TMM4 4.5 0.002 -15.3 0.7
TMM6 6 0.0023 -11 0.72
TMM10 9.56 0.0022 -38 0.76
TMM10i 9.96 0.002 -43 0.76
ULTRALAM 3850 2.9 0.0024 100 0.2
RO3003 3 0.0013 13 0.5
ROGERS CORPORATION
www.rogerscorp.com
W
T
H
Microstrip
Application Specific
Frequency
2 GHz
RF Power
1 Watt
Transmission Line Information
Material Properties
Material
RO4350
Thickness (H)
0.030 in.
Dk
3.66
Df
0.0037
Thermal Cond.
0.62 W/K*m
Circuit Parameters
Conductor Width (W)
0.045 in.
Space (S)
0.009 in.
Length
1 in.
Copper Thickness (T)
0.0006 in.
Copper Roughness RMS
2.8 microns
Copper Conductivity
5.813 X 10^7 S/m
Conductor conductivity is considered a bulk value
Analytical
Synthesis Width
Synthesis Space
Calculate
Impedance
50 Ohms
Units
English
Metric
Generate Tables and Files
None
Freq. Range 10 to 30 GHz
Display results of only one calculation

Рис. 10.2

Провідність міді задається автоматично, однак, якщо передбачається використання іншого металу, його провідність можна врахувати, змінивши значення, що стоїть в пункті Copper Conductivity.

У пунктах Thickness (H) та Copper Thickness (T) є можливість або обрати цю величину із стандартного ряду значень для НВЧ-діелектриків, які виробляє компанія "Роджерс", або ввести відповідні числа самостійно.

На панелі Application Specific задати робочу частоту для розрахунків (Frequency) і потужність НВЧ-сигналу (RF Power). Натиснути кнопку Calculate. Після цього в лівому вікні Transmission Line Information з'являться результати розрахунків параметрів лінії передачі. Набір параметрів містить, зокрема, хвильовий опір (Impedance), ефективну діелектричну проникність (Effective dk), втрати на одиницю довжини в діелектрику, металевих екранах і в цілому (Dielectric Loss, Conductor loss, Total loss), фазову швидкість хвилі (Phase Velocity), довжину хвилі в лінії передач (Wavelength in transmission line), частоту відсікання першої вищої ТЕ-моди (Lowest Hybrid TE1 mode frequency), набігання фази (Phase Delay) і час затримки сигналу (Time Delay). Ці дані можна скопіювати і вставити в будь-який текстовий редактор.

Для певних типів ліній передач існує можливість отримати інформацію про залежність втрат на поширення від робочої частоти. Для цього в режимі Analytical у списку Generate Table and Files, що випадає, обрати пункт Table, Loss vs. Freq (або File, Loss vs. Freq), задати початкову і кінцеву частоти для розрахунків (пункт Freq. Range) та натиснути Calculate. У першому випадку дані будуть представлені у вигляді таблиці у вікні Transmission Line Information, а в другому – збережені в текстовому файлі в папці з програмою.

4. Окрім режиму розрахунку (кнопка Analytical), програма ще може працювати в режимі підбору геометричних параметрів для забезпечення заданого хвильового опору. Для цього при розрахунках типів лінії, де така можливість існує, треба замість Analytical обрати пункти Synthesis Width або Synthesis Space, після чого ввести у вікно Impedance бажане значення хвильового опору в омах (Ом) і натиснути Calculate. Після цього на пане-

лі Transmission Line Information з'являться параметри лінії передачі, у тому числі необхідне значення ширини провідника або зазору між провідниками.

5. У програмі, у пункті меню Information містяться посилання на наукові статті, у яких описано відповідний тип лінії передачі та посилання на різноманітну технічну документацію на сайті виробника (підпункти Material Datasheets та Technical Information).

Інші програми для розрахунку НВЧ-ліній передачі. Більш досконалими програмами, що дозволяють не тільки визначати хвильовий опір, але й моделювати розподіл електричного та магнітного НВЧ-полів у лінії передачі, густину струмів у металевих екранах, а також розраховувати повний набір комплексних S-параметрів у заданому діапазоні частот у лінії передачі довільної конфігурації є такі програмні продукти, як Ansoft HFSS та Microwave Studio.

§ 10.2. Приклади розв'язання типових задач

10.1. Яку ширину центральної смужки повинна мати мікросмужкова лінія передач, виготовлена на підкладці з RT/duroid ®5500 товщиною 1 мм, щоб її хвильовий опір дорівнював 50 Ом? Товщина шару міді, нанесеної на діелектрик, дорівнює 30 мкм (рис. 10.3)).

Розв'язання. За ширини смужки 2,8 мм опір дорівнює 49,94 Ом. Такої точності цілком достатньо для практичних задач.

10.2. Визначити необхідну величину зазору між одноміліметровими смужками екранованої компланарної лінії передач, виготовленої на підкладці з RT/duroid 5880 товщиною 0,508 мм, за якої її хвильовий опір дорівнюватиме 50 Ом? Товщина шару міді, нанесеної на діелектрик, дорівнює 33 мкм (1 oz ED).

Розв'язання. Ширина зазору має становити 0,126 мм, при цьому опір дорівнює 50,09 Ом (рис.10.4).

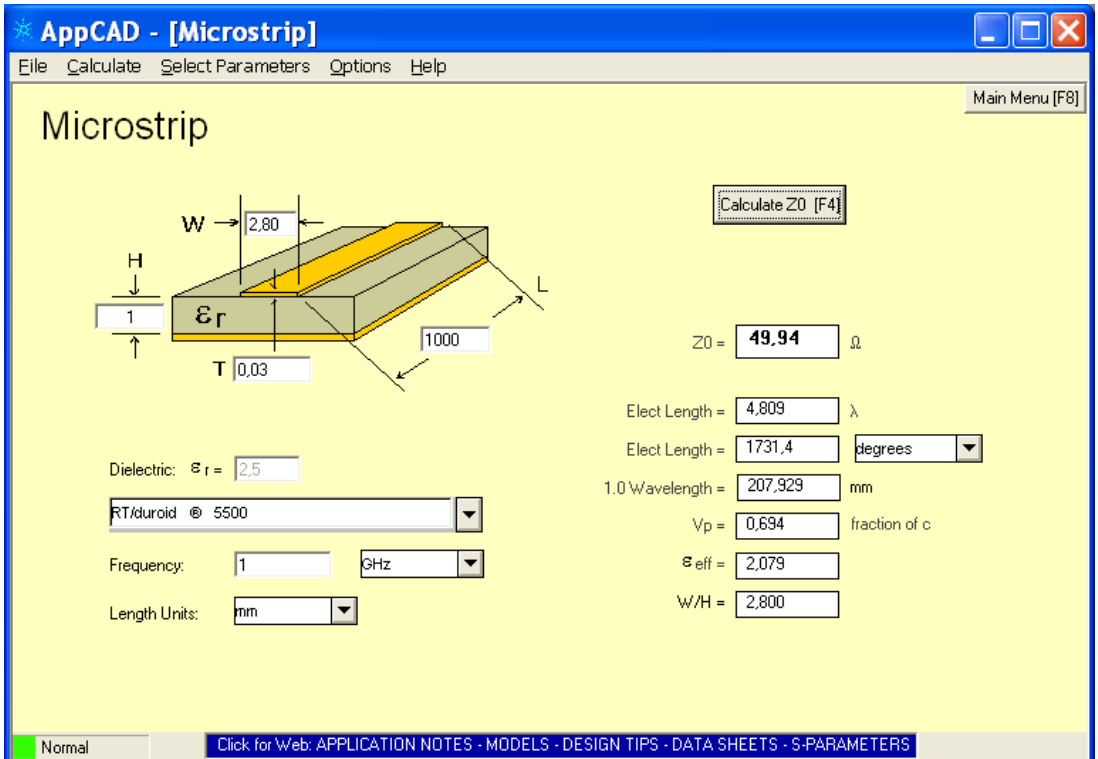

AppCAD - [Microstrip]
File Calculate Select Parameters Options Help
Main Menu [F8]
Microstrip
W
2,80
H
1
εr
T
0,03
L
1000
Calculate Z0 [F4]
Z0 =
49,94
Ω
Elect Length =
4,809
λ
Elect Length =
1731,4
degrees
1.0 Wavelength =
207,929
mm
Vp =
0,694
fraction of c
εeff =
2,079
W/H =
2,800
Dielectric: εr =
2,5
RT/duroid @ 5500
Frequency:
1
GHz
Length Units:
mm
Normal
Click for Web: APPLICATION NOTES - MODELS - DESIGN TIPS - DATA SHEETS - S-PARAMETERS

Рис. 10.3

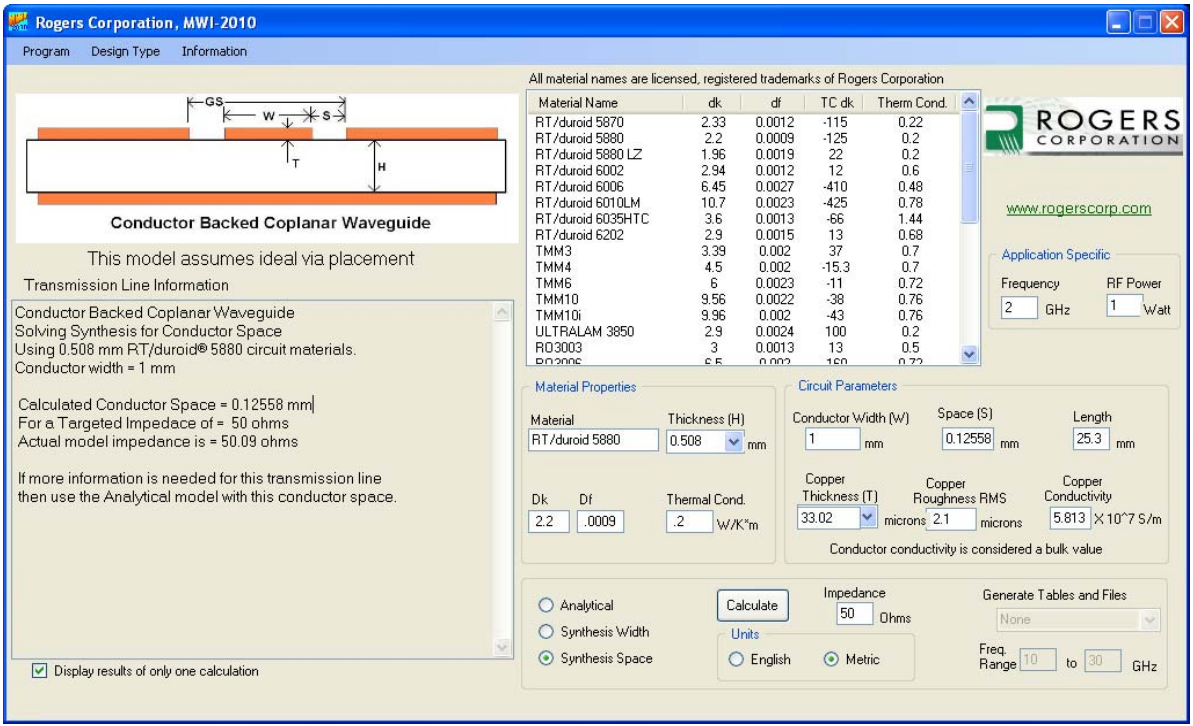

Rogers Corporation, MWI-2010
Program
Design Type
Information
All material names are licensed, registered trademarks of Rogers Corporation
GS
W
S
T
H
Conductor Backed Coplanar Waveguide
This model assumes ideal via placement
Transmission Line Information
Conductor Backed Coplanar Waveguide
Solving Synthesis for Conductor Space
Using 0.508 mm RT/duroid® 5880 circuit materials.
Conductor width = 1 mm
Calculated Conductor Space = 0.12558 mm
For a Targeted Impedace of = 50 ohms
Actual model impedance is = 50.09 ohms
If more information is needed for this transmission line
then use the Analytical model with this conductor space.
Display results of only one calculation
Material Name
dk
df
TC dk
Therm Cond.
RT/duroid 5870 2.33 0.0012 -115 0.22
RT/duroid 5880 2.2 0.0009 -125 0.2
RT/duroid 5880 LZ 1.96 0.0019 22 0.2
RT/duroid 6002 2.94 0.0012 12 0.6
RT/duroid 6006 6.45 0.0027 -410 0.48
RT/duroid 6010LM 10.7 0.0023 -425 0.78
RT/duroid 6035HTC 3.6 0.0013 -66 1.44
RT/duroid 6202 2.9 0.0015 13 0.68
TMM3 3.39 0.002 37 0.7
TMM4 4.5 0.002 -15.3 0.7
TMM6 6 0.0023 -11 0.72
TMM10 9.56 0.0022 -38 0.76
TMM10i 9.96 0.002 -43 0.76
ULTRALAM 3850 2.9 0.0024 100 0.2
RO3003 3 0.0013 13 0.5
ROGERS CORPORATION
www.rogerscorp.com
Application Specific
Frequency
2
GHz
RF Power
1
Watt
Material Properties
Material
RT/duroid 5880
Thickness (H)
0.508
mm
Dk
2.2
Df
.0009
Thermal Cond.
.2
W/K*m
Circuit Parameters
Conductor Width (W)
1
mm
Space (S)
0.12558
mm
Length
25.3
mm
Copper Thickness (T)
33.02
microns
Copper Roughness RMS
2.1
microns
Copper Conductivity
5.813
X 10^7 S/m
Conductor conductivity is considered a bulk value
Analytical
Synthesis Width
Synthesis Space
Calculate
Units
English
Metric
Impedance
50
Ohms
Generate Tables and Files
None
Freq. Range
10
to
30
GHz

Рис. 10.4

§ 10.3. Задачі для самостійного розв'язання

10.3. Користуючись програмою AppCAD, побудувати залежність хвильового опору мікросмужкової лінії передачі, виготовленої на підкладці з RT/duroid ® 5880 товщиною 0,5 мм на частоті 5 ГГц, від ширини центральної смужки при її зміні в межах 0,5–2 мм (покласти товщину смужки такою, що дорівнює 30 мкм).

10.4. Побудувати залежність ефективної діелектричної проникності і фазової швидкості електромагнітних хвиль у лінії передачі, виготовленій на підкладці товщиною 1 мм із матеріалу з $\varepsilon = 5$, від ширини центральної смужки при її зміні в межах 1–3 мм. Робоча частота 1 ГГц, товщина смужки 10 мкм.

10.5. Для мікросмужкової лінії передачі, виготовленої на підкладці з корунду (alumina, Al_2O_3, $\varepsilon = 9{,}8$) із шириною центральної смужки 1 мм, побудувати залежність хвильового опору від товщини діелектричної підкладки при її зміні в межах від 0,5 до 1,5 мм.

10.6. Використовуючи програму MWI-2010 для мікросмужкової лінії передачі, виготовленої на підкладці з RT/duroid®5880 товщиною 0,508 мм і шириною центральної смужки 1,55 мм, побудувати залежність втрат на одиницю довжини лінії в діелектрику та в металі від частоти в діапазоні частот 1–10 ГГц.

10.7. Використовуючи програму MWI-2010, для компланарної екранованої лінії передачі, виготовленої на підкладці з RT/duroid®5880 товщиною 0,508 мм, шириною центральної смужки 1,55 мм і величиною зазорів 0,85 мм, побудувати залежність втрат на одиницю довжини лінії в діелектрику та металі від частоти в діапазоні частот 1–10 ГГц.

10.8. Для мікросмужкової лінії передачі, виготовленої на підкладці із матеріалу з $\varepsilon = 9{,}8$, шириною центральної смужки 1 мм, побудувати залежність частоти відсікання першої вищої моди від товщини підкладки при зміні її в межах 0,5–2 мм.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Значення коефіцієнтів r_A і r_B для різних відношень b/d і t/d, які використовують при розрахунку несиметричної смужкової лінії передачі

Таблиця 1.1. Значення коефіцієнтів *ra* і *rb* за $t/d = 0{,}025$

b/a	r_B	r_A
1	5,1289	$1{,}0365 \cdot 10^{-1}$
1,5	6,4321	$4{,}5160 \cdot 10^{-2}$
2	7,6705	$2{,}0195 \cdot 10^{-2}$
2,5	8,8691	$9{,}1289 \cdot 10^{-3}$
3	10,0405	$4{,}1461 \cdot 10^{-3}$
3,5	11,1919	$1{,}8871 \cdot 10^{-3}$
4	12,3280	$8{,}5969 \cdot 10^{-4}$
4,5	13,4520	$3{,}9182 \cdot 10^{-4}$
5	14,5661	$1{,}7862 \cdot 10^{-4}$
5,5	15,6719	$8{,}1432 \cdot 10^{-6}$

Таблиця 1.2. Значення коефіцієнтів *ra* і *rb* за $t/d = 0{,}06$

b/a	r_B	r_A
1	5,8905	$1{,}3372 \cdot 10^{-1}$
1,5	7,3660	$4{,}9481 \cdot 10^{-2}$
2	8,7697	$2{,}2142 \cdot 10^{-2}$
2,5	10,1290	$1{,}0012 \cdot 10^{-2}$
3	11,4578	$4{,}5479 \cdot 10^{-3}$
3,5	12,7643	$2{,}0700 \cdot 10^{-3}$
4	14,0536	$9{,}4308 \cdot 10^{-4}$
4,5	15,3293	$4{,}2984 \cdot 10^{-4}$
5	16,5938	$1{,}9595 \cdot 10^{-4}$
5,5	17,8490	$8{,}9333 \cdot 10^{-5}$

Додаток 2

Корені функцій Бесселя та їх похідних

Таблиця 2.1. Значення коренів функцій Бесселя $J_m(x)$

m	n			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223
4	7,588	11,065	14,373	17,616

Таблиця 2.2. Значення коренів похідних функцій Бесселя $J'_m(x)$

m	n		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	11,403
4	5,317	9,284	12,626

Додаток 3

Електродинамічні параметри деяких матеріалів, що використовуються в техніці НВЧ

Таблиця 3.1. Параметри високочастотних діелектриків

Параметр	**Матеріал**			
	Поліетилен	**Полістирол**	**Фторо-пласт**	**Плавлений кварц**
ε	2,25	2,56	2,08	3,80
$\operatorname{tg}\delta_{\text{діел}}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2{,}5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Таблиця 3.2. Значення провідності металів

Провідність	**Матеріал**			
	Срібло	**Мідь**	**Латунь**	**Цинк**
σ, См/м	$6{,}1 \cdot 10^7$	$5{,}7 \cdot 10^7$	$1{,}4 \cdot 10^7$	$1{,}7 \cdot 10^7$

З М І С Т

Передмова 3
Розділ 1
ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОГО АНАЛІЗУ 4
§ 1.1. Основні теоретичні відомості 4
§ 1.2. Приклади розв'язання типових задач 9
§ 1.2. Задачі для самостійного розв'язання 12
Розділ 2
РІВНЯННЯ МАКСВЕЛЛА 14
§ 2.1. Основні теоретичні відомості 14
§ 2.2. Приклади розв'язання типових задач 19
§ 2.3. Задачі для самостійного розв'язання 21
Розділ 3
ПЛОСКІ ЕЛЕКТРОМАГНІТНІ ХВИЛІ 24
§ 3.1. Основні теоретичні відомості 24
§ 3.2. Приклади розв'язання типових задач 30
§ 3.3. Задачі для самостійного розв'язання 33
Розділ 4
ХВИЛЕВОДИ 37
§ 4.1. Основні теоретичні відомості 37
§ 4.2. Приклади розв'язання типових задач 42
§ 4.3. Задачі для самостійного розв'язання 44
Розділ 5
ДІЕЛЕКТРИЧНІ ХВИЛЕВОДИ 48
§ 5.1. Основні теоретичні відомості 48
§ 5.2. Приклади розв'язання типових задач 52
§ 5.3. Задачі для самостійного розв'язання 55
Розділ 6
ЛІНІЇ ПЕРЕДАЧІ ІЗ ХВИЛЯМИ *Т*-ТИПУ 57
§ 6.1. Основні теоретичні відомості 57
§ 6.2. Приклади розв'язання типових задач 63
§ 6.3. Задачі для самостійного розв'язання 65

Розділ 7
ОБ'ЄМНІ РЕЗОНАТОРИ 67
§ 7.1. Основні теоретичні відомості 67
§ 7.2. Приклади розв'язання типових задач 71
§ 7.3. Задачі для самостійного розв'язання 72
Розділ 8
ЗБУДЖЕННЯ ЗАМКНЕНИХ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ 75
§ 8.1. Основні теоретичні відомості 75
§ 8.2. Приклади розв'язання типових задач 78
§ 8.3. Задачі для самостійного розв'язання 81
Розділ 9
ПОШИРЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ХВИЛЬ У РІЗНИХ СЕРЕДОВИЩАХ 83
§ 9.1. Основні теоретичні відомості 83
§ 9.2. Приклади розв'язання типових задач 89
§ 9.3. Задачі для самостійного розв'язання 93
Розділ 10
СУЧАСНІ КОМП'ЮТЕРНІ ПРОГРАМИ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ КОМПОНЕНТІВ НВЧ-КІЛ 96
§ 10.1. Основні теоретичні відомості 96
§ 10.2. Приклади розв'язання типових задач 102
§ 10.3. Задачі для самостійного розв'язання 105
ДОДАТКИ 106
Додаток 1. Значення коефіцієнтів rA і rB для різних відношень *b*/*d* і *t*/*d*, що використовуються при розрахунку несиметричної смужкової лінії передачі 107
Додаток 2. Корені функцій Бесселя та їх похідних 108
Додаток 3. Електродинамічні параметри деяких матеріалів, що використовуються в техніці НВЧ 109

Навчальне видання

ЗАВИСЛЯК Ігор Володимирович
МАРТИШ Євген Власович
ПОПОВ Максим Олександрович
ВАСИЛЬКІВ Іннеса Вікторівна

МІКРОХВИЛЬОВА ЕЛЕКТРОДИНАМІКА В ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Формат 60x84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 6,5. Наклад 200. Зам. № 214-7219.
Вид. № Рф6*. Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний.
Підписано до друку 16.03.15

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
01601, Київ, б-р Т. Шевченка, 14, кімн. 43
☎ (044) 239 32 22; (044) 239 31 72; тел./факс (044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.kiev.ua
http: vpc.univ.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02