

УДК 539.3

Вайсфельд Н. Д., д.ф.-м.н., професор,
Журавльова З. Ю., к.ф.-м.н.,
Мойсеєнок О. П., к.ф.-м.н., доцент,
Реут В. В., к.ф.-м.н., доцент

**Дослідження напруженого стану
півсмуги для випадку усталених
коливань**

Одеський національний університет імені І.І.
Мечникова, 65082, м. Одеса, вул. Дворянська, 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

N. D. Vaysfeld, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof,
Z. Yu. Zhuravlova, PhD (Phys.-Math.),
O. P. Moyseenok, Dr. Sci. (Phys.-Math.),
V. V. Reut, Dr. Sci. (Phys.-Math.)

**Investigation of the semi-strip's stress state in
the case of steady-state oscillations**

Odessa I. I. Mechnikov National University, 65082,
Odessa, Dvoryanskaya str., 2,
e-mail: z.zhuravlova@onu.edu.ua

Розглядається пружна півсмуга, що знаходиться під впливом нестационарного навантаження у випадку усталених коливань. Задача шляхом застосування півнескінчених \sin -, \cos -перетворень Фур'є зводиться до одновимірної крайової задачі, яку у просторі трансформант сформульовано у векторному поданні. Отримана задача є неоднорідною, тому запропоновано використання матриці-функції Гріна, яку побудовано у білінійному зображенні. Задоволення крайовій умові по торцю півсмуги зводить розв'язання до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язок останнього пропонується шукати наближено, у формі ряду за ортогональними поліномами. Досліджено напружено-деформівний стан півсмуги в залежності від частоти діючого навантаження та від розмірів ділянки навантаження.

Ключові слова: півсмуга, усталені коливання, перетворення Фур'є, матриця Гріна, сингулярне інтегральне рівняння.

The elastic semi-strip under the dynamic load concentrated at the centre of the semi-strip's short edge is considered. The lateral sides of the semi-strip are fixed. The case of steady-state oscillations is considered. The initial problem is reduced to the one-dimensional problem with the help of the semi-infinite \sin -, \cos -Fourier's transform. The one-dimensional problem is formulated in the vector form. Its solution is constructed as a superposition of the general solution for the homogeneous equation and the partial solution for the inhomogeneous equation. The general solution for the homogeneous vector equation is found with the help of the matrix differential calculations. The partial solution is expressed through Green's matrix-function, which is constructed as the bilinear expansion. The inverse Fourier's transform is applied to the derived expressions for the displacements. The solving of the initial problem is reduced to the solving of the singular integral equation. Its solution is searched as the series of the orthogonal Chebyshev polynomials of the second kind. The orthogonalization method is used for the solving of the singular integral equation. The stress-deformable state of the semi-strip is investigated regarding both the frequency of the applied load, and the load segment's length.

Key Words: semi-strip, steady-state oscillations, Fourier's transform, Green's matrix-function, singular integral equation.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Дослідженню динамічних задач теорії пружності було присвячено чимало робіт. Рівняння руху для системи керування були виведені у [1]. Класичні задачі теорії розсіювання акустичних хвиль на неоднорідностях вперше розв'язано у [2]. У [3] було розглянуто напру-

жено-деформівний стан середовища, що містить тріщини та жорсткі включення, у динамічних постановках. Метод однорідних розв'язків запропоновано у [4] та апробовано на прикладі мішаної задачі теорії пружності у півсмуги. На сьогодні набуває актуальність дослідження

нестационарних динамічних задач для функціонально-градуїзованих п'єзоелектричних середовищ, що містять тріщину [5].

Пружна півсмуга є класичним об'єктом для апробації нових математичних методів розв'язання мішаних задач теорії пружності. Її хвильове поле за умови впливу нестационарного навантаження, прикладеного до її границь, досліджується як за допомогою перетворення Лапласа [6], так і за допомогою застосування асимптотичних методів [7]. Задачі для півсмуги, ускладненої наявністю двох циліндричних отворів, було розв'язано у [8].

Не зважаючи на те, що чимало робіт було присвячено дослідженню хвильового поля нестационарної півсмуги, питання побудови аналітичних розв'язків цієї задачі залишається актуальним. Саме цьому і присвячено дану роботу.

Розглядається пружна півсмуга, що описується у декартовій системі координат співвідношеннями $0 < x < a, 0 < y < \infty$. Розглядається випадок усталених коливань $u_x(x, y) = u(x, y)e^{i\omega t}$, $u_y(x, y) = v(x, y)e^{i\omega t}$.

На бічних гранях $x = 0, x = a, 0 < y < \infty$ виконуються умови зчеплення $u(0, y) = 0, v(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0, v(a, y) = 0$. По ділянці $0 < a_0 < x < a_1 < a$ задано усталене навантаження

$$\sigma_y|_{y=0} = p(x), \tau_{xy}|_{y=0} = 0, \quad (1)$$

а по ділянкам $0 < x < a_0, a_1 < x < a$ задано умови гладкого контакту $v|_{y=0} = 0, \tau_{xy}|_{y=0} = 0$.

Потрібно визначити поле переміщень та напружень у півсмузі, що задовольняє крайові умови та рівняння руху:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa+1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + q^2 \frac{\kappa-1}{\kappa+1} u = 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{\kappa-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + q^2 v = 0, \end{cases}$$

де ρ - густина, G - модуль пружності, $\kappa = 3 - 4\nu$ - стала Мусхелішвілі, ν - коефіцієнт Пуассона, $q^2 = \rho / G \cdot \omega^2$.

До вихідної задачі застосовано півнескінченні \sin, \cos перетворення Фур'є за змінною y за

$$\begin{bmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta y \\ \sin \beta y \end{bmatrix} dy$$

Крайову задачу у просторі трансформант сформульовано у вигляді векторної крайової задачі. Для цього введено наступні вектори і матриці

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\kappa+1} \\ -\frac{1}{\kappa-1} & 0 \end{pmatrix}, P_\beta = \begin{pmatrix} (\beta^2 - q^2) \frac{\kappa-1}{\kappa+1} & 0 \\ 0 & \beta^2 \frac{\kappa+1}{\kappa-1} - q^2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3-\kappa}{\kappa+1} \chi'(x) \\ -\beta \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \chi(x) \end{pmatrix}, \vec{y}_\beta(x) = \begin{pmatrix} u_\beta(x) \\ v_\beta(x) \end{pmatrix}. \text{ Тут}$$

також введено невідому функцію $\chi(x) = v|_{y=0}$.

У результаті одновимірна крайова задача записується у векторному поданні

$$\begin{cases} L_2 \vec{y}_\beta(x) = \vec{f}(x), \\ \vec{y}_\beta(0) = 0, \vec{y}_\beta(a) = 0 \end{cases}$$

де L_2 - диференційний оператор другого порядку $L_2 \vec{y}_\beta(x) = I \vec{y}_\beta''(x) + 2\beta Q \vec{y}_\beta'(x) - P_\beta \vec{y}_\beta(x)$, I - одинична матриця.

Розв'язок векторної крайової задачі розшукується у вигляді суперпозиції загального розв'язку векторного однорідного рівняння $\vec{y}_\beta^0(x)$ і його часткового векторного розв'язку $\vec{y}_\beta^1(x)$: $\vec{y}_\beta(x) = \vec{y}_\beta^0(x) + \vec{y}_\beta^1(x)$.

Для знаходження розв'язку векторного однорідного рівняння побудовано розв'язок матричного однорідного рівняння [9] $L_2 Y_\beta(x) = 0, 0 < x < a$, тут $Y_\beta(x)$ - матриця порядку 2×2 . Дану матрицю $Y_\beta(x)$ обрано у

формі $Y_\beta(x) = e^{\xi x} I$ і підставлено до однорідного матричного рівняння. В результаті отримано рівність $L_2 e^{\xi x} I = M(\xi) e^{\xi x}$, де матриця $M(\xi)$ визначається як $M(\xi) = I \xi^2 + 2\beta Q \xi - P_\beta$.

Розв'язок матричного рівняння знайдено за формулою [9] $Y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{\xi x} M^{-1}(\xi) d\xi$, де

замкнений контур C охоплює всі особливі точки підінтегральної функції. Після обчислення контурного інтегралу за допомогою теореми про лишки отримано систему матричних фундаментальних розв'язків

$$Y_{1,2}^+(x) = e^{\pm x\sqrt{\beta^2 - q^2}} \begin{pmatrix} \pm \frac{\beta^2(\kappa+1)}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2}(\kappa-1)} & \frac{\beta}{2q^2} \\ -\frac{\beta(\kappa+1)}{2q^2(\kappa-1)} & \mp \frac{\sqrt{\beta^2 - q^2}}{2q^2} \end{pmatrix},$$

$$Y_{3,4}^+(x) = e^{\pm x\sqrt{\beta^2 - q^2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \begin{pmatrix} \mp \frac{\beta^2(\kappa+1) - q^2(\kappa-1)}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1}(\kappa-1)} & -\frac{\beta}{2q^2} \\ \frac{\beta(\kappa+1)}{2q^2(\kappa-1)} & \pm \frac{\beta^2}{2q^2\sqrt{\beta^2 - q^2} \frac{\kappa-1}{\kappa+1}} \end{pmatrix}$$

чим завершено побудову загального розв'язку векторного однорідного рівняння.

Для отримання часткового розв'язку векторної крайової задачі побудовано матрицю-функцію Гріна для допоміжної крайової задачі [10]

$$\begin{cases} L_2 \bar{y}_\beta(x) = \bar{f}(x) \\ V_i[\bar{y}_\beta(x)] = 0, i = 0, 1 \end{cases}$$

де V_0, V_1 - крайові функціонали.

Ядро інтегрального перетворення обрано у зображенні

$$H(x, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \sin \alpha_n x & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n x \end{pmatrix}, \alpha_n = \frac{n\pi}{a}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Матрицю-функцію Гріна побудовано у формі білінійного розв'язання

$$G(x, \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} H(x, \alpha_n) \Omega_\beta^{-1}(\alpha_n) H(\xi, \alpha_n). \text{ Тут}$$

$$\Omega_\beta(\alpha_n) = -I\alpha_n^2 - 2\beta\alpha_n\tilde{Q} - P_\beta,$$

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/(\kappa+1) \\ 1/(\kappa-1) & 0 \end{pmatrix}, \text{ штрих означає, що}$$

нульовий член помножується на $1/2$.

Розв'язок векторної крайової задачі у просторі трансформант Фур'є має вигляд

$$\bar{y}_\beta(x) = (Y_1(x) + Y_3(x)) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + (Y_2(x) + Y_4(x)) \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} + \int_0^a G(x, \xi) \bar{f}(\xi) d\xi \quad (2)$$

Коефіцієнти $c_i, i = \overline{1, 4}$ знайдено з крайових умов на бічних гранях півсмуги.

До виразу (2) застосовується обернене перетворення Фур'є.

Розв'язання задачі зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння відносно невідомої функції $\chi(x)$. Після заміни змінної сингулярне інтегральне рівняння подано у формі

$$\int_{-1}^1 \tilde{\chi}(\xi, \omega) \tilde{f}(\xi, x, \omega) d\xi = \tilde{r}(x, \omega), -1 < x < 1, \quad (3)$$

де $\tilde{\chi}(\xi, \omega) = \chi([\frac{a_1 - a_0}{2}\xi + \frac{a_0 + a_1}{2}], \omega)$, $\tilde{r}(x, \omega), \tilde{f}(\xi, x, \omega)$ - відомі регулярні функції.

Невідома функція розшукується у вигляді розв'язання

$$\tilde{\chi}(\xi, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\omega) \sqrt{1 - \xi^2} U_n(\xi), \quad \xi \in [-1; 1] \quad (4)$$

Підстановка формули (4) до рівняння (3) зводить його розв'язання до розв'язання нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n(\omega) D_{m,n}(\omega) = f_m(\omega), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

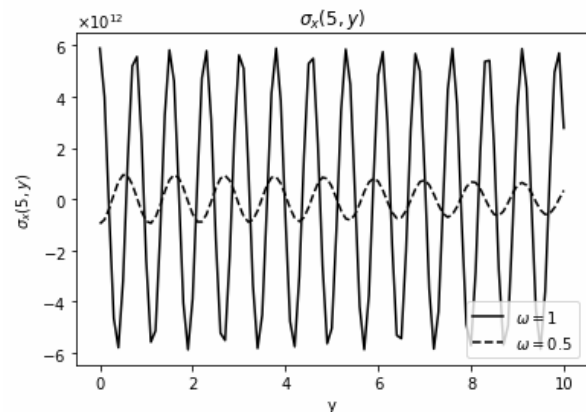


Рис. 2 Напруження $\sigma_x(a/2, y)$ при зміні ω

що розв'язується методом редукції.

Підстановка знайдених сталих у формули (4) та (2) завершує побудову розв'язку вихідної задачі.

Числові розрахунки проведено для пружної півсмуги з параметрами $G = 61.2781955$ ГПа, $\mu = 0.33$, $\rho = 8850$ кг/м³, $p(x, t) = e^{i\omega t}$ ГПа, $a = 10$ м, $a_0 = a - a_1 = a/10$.

Аналіз числових результатів (Рис. 2) показав, що зі зростанням частоти спостерігається зростання амплітуди нормальних напружень. В той же час період є навпаки меншим. Встановлено, що при значенні частоти більшої ніж 3 потрібно застосувати асимптотичні розв'язання переміщень та напружень.

Висновки

У роботі досліджено напружено-деформівний стан півсмуги під впливом усталених коливань, встановлено характеристики напружень та

переміщень в залежності від частоти навантаження та розмірів ділянки.

Список використаних джерел

1. *Тартаковский Г.П.* Динамика систем автоматической регулировки усиления / Г.П. Тартаковский. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1957. – 192 с.
2. *Селезов И.Т.* Рассеяние волн локальными неоднородностями в сплошных средах / И.Т. Селезов, Ю.Г. Кривonos, В.В. Яковлев. – Киев: Наукова думка, 1985. – 136 с.
3. *Mykhaskiv V.V.* Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence / V.V. Mykhaskiv, O.M. Khay // *Int. J. Solids Struct.* - 2009. - №46(3–4). P. 602–616.
4. *Gomilko A.M.* Method of homogeneous solutions and superposition in the mixed problem for an elastic half-strip / A.M. Gomilko, V.T. Grinchenko, V.V. Meleshko // *Soviet Appl. Mech.* – 1990. - №26(2). – P. 193–202.
5. *Wünsche M.* Time-harmonic analysis of cracks in functionally graded piezoelectric materials / M. Wünsche, J. Sladek, V. Sladek, Ch. Zhang // *PAMM.* – 2017. - №17(1). – P. 283-284.
6. *Kubenko V.* Nonstationary load on the surface of an elastic half-strip / V. Kubenko, I. Yanchevskii // *International Applied Mechanics.* – 2015. – №51(3). – P. 303.
7. *Ковалёв В.А.* Анализ точного и приближённого решения для погранслоя в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея в упругой полуполосе / В.А. Ковалёв, О.В. Таранов // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* - 2007. - № 6(56). - С. 43-50.
8. *Itou S.* Transient dynamic stresses around two equal circular cavities in an infinite elastic strip / S. Itou // *Archive of Applied Mechanics.* – 1994. - №64(3). – P. 192-205.
9. *Vaysfel'd N.D.* On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip / Vaysfel'd, N.D. and Zhuravlova, Z.Yu. // *Acta Mechanica.* – 2015. - №226(12). – P. 4159-4172.
10. *Попов Г. Я.* Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г. Я. Попов, С. А. Абдыманов, В. В. Ефимов – Алматы: Рацах, 1999. – 133 с.

References

1. TARTAKOVSKY, G. P. (1957) *Dynamics of automatic gain control systems* (in Russian). Moskow-Leningrad: Gosenergoizdat.
2. SELEZOV, I. T., KRIVONOS, Yu. G. and YAKOVLEV, V. V. (1985) *Wave scattering by local heterogeneity in continuous mediums* (in Russian). Kyiv: Naukova dumka.
3. MYKHASKIV, V. V. and KHAY, O. M. (2009) Interaction between rigid-disc inclusion and penny-shaped crack under elastic time-harmonic wave incidence. *Int. J. Solids Struct.* 46 (3–4). p. 602–616.
4. GOMILKO, A. M., GRINCHENKO, V. T. & MELESHKO, V. V. (1990) Method of homogeneous solutions and superposition in the mixed problem for an elastic half-strip. *Soviet Appl. Mech.* 26 (2). p. 193–202.
5. WÜNSCHE, M., SLADEK, J., SLADEK, V. & ZHANG, CH. (2017) Time-harmonic analysis of cracks in functionally graded piezoelectric materials. *PAMM.* 17 (1). p. 283-284.
6. KUBENKO, V. & YANCHEVSKII, I. (2015) Nonstationary load on the surface of an elastic half-strip. *International Applied Mechanics.* 51 (3), p. 303.
7. KOVALEV, V.A. & TARANOV, O.V. (2007) Analysis of exact and approximate solutions for the boundary layer near the conditional front of the Rayleigh surface wave in an elastic semi-strip (in Russian). *Vestnik SamGu.* 6 (56). p. 43-50.
8. ITOU, S. (1994) Transient dynamic stresses around two equal circular cavities in an infinite elastic strip. *Archive of Applied Mechanics.* 64 (3). p. 192-205.
9. VAYSFEL'D, N.D. & ZHURAVLOVA, Z.YU. (2015) On one new approach to the solving of an elasticity mixed plane problem for the semi-strip. *Acta Mechanica.* 226 (12). p. 4159-4172.
10. POPOV, G. YA., ABDIMANOV S. A. & EFIMOV V. V. (1999) *Funkcii i matrici Grina odnomernih kraevih zadach.* Almatu: Racah.

Надійшла до редколегії 22.04.19