

# КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

## ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра прикладної статистики

### Кваліфікаційна робота

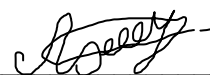
на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 124 Системний аналіз

на тему:

### МОДЕЛЮВАННЯ БЛОКІВ МЕДИЧНОЇ УСТАНОВИ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Виконала студентка 4 курсу  
Околот Ангеліна Ігорівна



(підпис)

Керівник дипломної роботи  
Доцент, кандидат фізико-математичних наук  
Лівінська Ганна Володимирівна



(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших  
авторів без відповідних посилань.

Студент



(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні  
кафедри прикладної статистики

протокол № 11  
від 06 червня 2022р.  
Завідувач кафедри  
Розора І.В.



(підпис)

Київ - 2022

## Зміст

Вступ.....	3
1 Актуальність теми і теорія масового обслуговування .....	6
1.1 Проблеми з якими стикаються відділення інтенсивної терапії .....	6
1.2 Системи масового обслуговування .....	7
1.3 Теорія масового обслуговування у сфері охорони здоров'я.....	11
1.3.1 Аналіз часу очікування та коефіцієнта завантаженості .....	12
1.4 Система $M M n n$ .....	15
2. Моделювання реанімаційного блоку як СМО.....	23
2.1 Використані програмні інструменти.....	23
2.2 Опис блоку медичної установи .....	24
2.3 Вплив зміни різних характеристик на систему .....	30
2.3.1 Ймовірність того, що зайнято <b><i>k</i></b> ліжок .....	31
2.3.2 Вплив інтенсивності надходження на ймовірність <b><i>k</i></b> пацієнтів в палаті.....	32
2.3.3 Вплив кількості ліжок на ймовірність відмови .....	34
2.3.4 Вплив інтенсивності надходження та лікування на завантаженість палати.....	35
2.3.5 Вплив інтенсивності надходження та лікування на ймовірність відмови.....	37
Висновки.....	39
Література.....	41
Додаток .....	43

## Вступ

Особи, відповідальні за прийняття рішень у лікарнях, все більше усвідомлюють необхідність більш ефективно управляти лікарняними ресурсами, які вони контролюють. Щоб надавати якісні послуги, відповідальні особи повинні використовувати інструменти, які дозволяють їм аналізувати, планувати, розставляти пріоритети та, загалом, приймати рішення про найкращий спосіб управління доступними ресурсами. Прикладом проблем, які підлягають аналізу, є оцінка рівня обслуговування, наданого пацієнтам, середнього часу очікування, кількості пацієнтів у черзі, використовуваної потужності та ймовірності того, що пацієнту потрібно чекати, або ж ймовірність відмови пацієнту, коли зайняті усі сервери обслуговування у випадку системи без черги. У лікарняних системах час очікування (при наявності черги) на отримання уваги або ймовірність відмови (без черги) є ключовими елементами вимірювання якості послуги. Таким чином, зменшення зазначених елементів є суттєвим фактором в управлінні цими системами.

Для отримання вищезгаданих властивостей можна використовувати аналітичні засоби, отримані з теорії масового обслуговування. Аналітичні інструменти дозволяють зрозуміти існуючі зв'язки між кожним з елементів системи.

Важливою особливістю медичних процесів (або послуг загалом) є те, що потреба в ресурсах значною мірою є неплановою. Як наслідок, виникає постійною невідповідність між попитом на лікування та наявною потужністю. Більше того, своєчасна допомога дуже важлива, тому переривання обслуговування є звичайними в процесах охорони здоров'я. Не дивно, що охорона здоров'я рясніє затримками. Немає потреби наводити переконливий приклад, ми всі стикалися з цим явищем. Затримки вкрай

небажані не тільки з психологічної точки зору (задоволеність пацієнтів), але й з економічної.

Аналіз черги та ймовірності відмови може значно покращити медичні показники, задоволеність пацієнтів та економічну ефективність медичної допомоги. Блоки охорони здоров'я можна представити як складну мережу масового обслуговування. Системи масового обслуговування корисні зокрема для визначення рівнів потужності (і розподілу потужності), необхідних для своєчасного реагування на запити (мінімізуючи ймовірність відмови). У будь-якому медичному процесі є сторона попиту (мікс пацієнтів і пов'язана з цим варіативність потоку надходжень) і сторона пропозиції (ресурси лікарні, такі як хірурги, медсестри, операційні, зали очікування, відновлення, апарати для візуалізації, лабораторії). Більше того, як попит, так і пропозиція за своєю суттю є стохастичними. Ця стохастична природа створює збурення та перебої під час процесу обслуговування. Саме поєднання аналізу потужності та варіативності робить теорію масового обслуговування настільки корисною. Основна мета полягає в тому, щоб визначити фактори, що впливають на час очікування пацієнтів або ймовірність відмови пацієнту, визначити важелі покращення та проаналізувати компроміси.

В даній роботі розглядається відділення інтенсивної терапії – спеціальне відділення, яке є в більшості лікарень. Воно забезпечує інтенсивний догляд (лікування та спостереження) для людей, які важко хворі або перебувають у нестабільному стані. Людям, які перебувають у відділенні інтенсивної терапії, потрібна постійна медична підтримка, щоб підтримувати працездатність свого організму. Наприклад, вони не в змозі дихати самостійно або у них інша недостатність органів, яка потребує спеціального обладнання для підтримки життєдіяльності людини. Існує багато різних умов і ситуацій, які можуть призвести до збою систем органів. Деякі з найпоширеніших включають: важку аварію, серйозний гострий стан

здоров'я, наприклад, інфаркт або інсульт, важку інфекцію, наприклад пневмонія або зараження крові (сепсис), тощо. Поки людина одужує, медичне обладнання замінює порушення функцій органів. Пацієнти, які можуть дихати самостійно і більше не потребують невідкладної допомоги, будуть переведені в інше відділення для продовження одужання. Час, необхідний для повного відновлення, сильно варіюється від людини до людини, а також залежить від ряду факторів, таких як вік, загальний рівень здоров'я та тяжкості стану пацієнтів.

Дедалі більшу проблему для адміністраторів лікарень та політиків у сфері охорони здоров'я становить розподіл дефіцитних ресурсів (кількість ліжок). Відділення інтенсивної терапії можуть бути затребуваними місцями в завантажених лікарнях, але їхнє розширення є дорогим і важко піддається оцінці. Тому лікарні мають завдання задовольнити попит на послуги інтенсивної терапії з належною потужністю.

## **1 Актуальність теми і теорія масового обслуговування**

### **1.1 Проблеми з якими стикаються відділення інтенсивної терапії**

Є кілька проблем, пов'язаних з відділенням інтенсивної терапії. Перша проблема, з якою доводиться боротися – це дефіцит ліжок. В багатьох випадках рівень заповненості відділення інтенсивної терапії може бути дуже високим, а отже збільшується ймовірність відмови обслуговування пацієнтам. Нестача ліжок відділення інтенсивної терапії може призвести до небажаних наслідків для пацієнтів, деякі з яких можуть закінчитися летальним результатом.

Друга проблема, пов'язана з реанімацією, – це нестача підготовленого персоналу відділення інтенсивної терапії. Серйозність захворювання пацієнтів із реанімаційної допомоги породжує потребу у співвідношенні медичної сестри та пацієнта 1:1. Таким чином, забезпечення більшої кількості ліжок відділення інтенсивної терапії вимагатиме залученості більшої кількості медсестер відділення інтенсивної терапії. Спеціаліст і висококваліфікований характер невідкладної допомоги породжують потребу у великій кількості медичних сестер з відповідною підготовкою. Проте існує нестача кваліфікованих кадрів, що призводить до відмов у госпіталізації, відміни основних планових операцій та великого і стресового навантаження для існуючих медсестер. Щоб полегшити цю проблему, помічники медичних працівників все частіше використовуються для виконання деяких з більш рутинних завдань.

Подальші проблеми, які доводиться вирішувати відділенню інтенсивної терапії, – це витрати. Причини та наслідки нестачі ресурсів, а саме ліжок та медсестер, були вивчені вище. Інтуїтивним рішенням цих проблем було б надання додаткових ресурсів. Однак відносні переваги надання більшої

кількості ліжок для реанімації та найму більшої кількості медсестринського персоналу мають бути зважені з витратами НСЗ. Надання невідкладної допомоги є дорожчим, ніж інші види медичної допомоги через вищі потреби в персоналі, спеціалізованому обладнанні та терапевтичних втручаннях. Велика кількість досліджень показали, що надання послуг пацієнтам із реанімації може коштувати в шість разів дорожче, ніж пацієнтам в загальній палаті.

Одним з підходів, заснованих на математичному моделюванні, який успішно вирішує проблеми в системах охорони здоров'я, є теорія масового обслуговування.

## **1.2 Системи масового обслуговування**

Вивчення математичних моделей, в яких наявні прилади обслуговування та черги є розділом прикладної ймовірності, який називається «теорією масового обслуговування» («теорією черг» в англійській літературі). Теорія масового обслуговування бере свій початок на початку 1900-х років, коли були проведені дослідження для економічного проектування потужності телефонної станції. А. К. Ерланг, данський інженер, зауважив, що запити на телефонну станцію характеризуються випадковими телефонними дзвінками, а обслуговування кожного запиту — випадковою тривалістю кожного дзвінка. Оскільки запит не міг бути запланований, деякі запити на дзвінки не могли бути обслуговані. Ерланг зрозумів, що постійно обслуговувати всі вхідні дзвінки неекономно, але можливо прийняти лише частину з них. Він зробив свій внесок, розробивши точні математичні співвідношення між попитом клієнтів, рівнем обслуговування та чергою або часом очікування клієнтів, враховуючи значні відмінності попиту та обслуговування. Це забезпечило прозорі рівняння для

того, щоб планувати потужність обслуговування для досягнення прийняттого рівня обслуговування. Для оцінки балансу між використанням системи та часом очікування або ймовірністю відмови були додані міркування щодо вартості.

З тих пір теорія масового обслуговування була добре розроблена і застосовувалася в багатьох областях: аналіз руху повітря, доріг та використання Інтернету, дизайн послуг у кол-центрах, супермаркетах, банківських, ресторанних та виробничих процесах. Отже, системи масового обслуговування – це такі системи, в які у випадкові моменти часу надходять заявки (запити, вимоги) на обслуговування, які утворюють чергу заявок (крім окремих випадків, коли може бути зазначено, що черга заборонена), при цьому, заявки, що надійшли, обслуговуються за допомогою наявних у розпорядженні системи каналів обслуговування. До кожного закладу приходять клієнти та стоять у черзі на отримання певної послуги. Така ситуація зображена на рисунку 1.1:

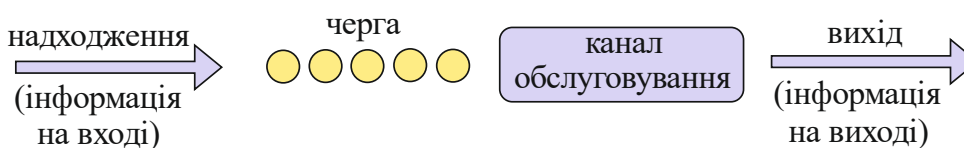


Рисунок 1.1: Загальна схема системи масового обслуговування

Кожна система масового обслуговування характеризується двома основними компонентами: процесом прибуття і процесом обслуговування. Теорія масового обслуговування передбачає створення математичних моделей, що відповідають рисунку 1.1, аналіз системи та оцінку різних показників продуктивності. Оскільки ці процеси зазвичай носять стохастичний характер, теорія масового обслуговування базується на ймовірнісному аналізі. Нижче наведено основні характеристики системи.

Процес прибуття визначає, як клієнти прибувають до об'єкта обслуговування (наприклад, окремо чи групами) і як ці надходження розподіляються в часі. Процес обслуговування визначає ресурси, необхідні для надання послуг. Розрізняють системи марковські і немарковські. В марковських системах момент надходження чергової вимоги і час її обслуговування не залежать від кількості і часу надходження попередніх вимог, вхідний потік вимог і потік вимог, що завершили обслуговування, є пуассонівськими. Заявки приходять випадковим чином із інтенсивністю прибуття  $\lambda$ , час між надходженням розподіляється незалежно та експоненціально. Інтенсивність обслуговування позначається як  $\mu$ , а  $\frac{1}{\mu}$  представляє середній час обслуговування.

Дисципліна черги описує порядок, у якому клієнти входять і залишають чергу. Це може бути за принципом «першим прийшов – першим вийшов» (FIFO), «першим прийшов – останнім вийшов» (FILO), «випадковим прийшов – першим вийшов» (RIRO) або з точки зору пріоритету.

Для аналізу систем масового обслуговування важливою є величина  $P_k$ ,  $k = 0, 1, 2 \dots$ , – ймовірність того, що в системі розміщено  $k$  запитів; через  $n$  зазвичай позначають кількість каналів обслуговування.

Величина  $a = \frac{\lambda}{n\mu}$ , яка називається коефіцієнтом завантаженості системи, представляє поведінку черги з часом. Якщо  $a < 1$ , то канали можуть обробляти заявки швидше, ніж швидкість, з якою у середньому вони надходять. Якщо система працює з  $a < 1$  протягом достатнього періоду часу, то її називають “стабільною” або “стаціонарною”. При цьому кажуть, що система працює в стаціонарному режимі.

У 1953 р. стандарт для характеристики черг був введений Кендаллом. Система позначень Кендалла забезпечує зручну класифікацію систем масового обслуговування у вигляді  $A|B|C|D|E$ , де:

(A) Розподіл інтервалів часу між прибуттями заявок:

- M (markovian) представляє експоненційний, незалежний і однаково розподілений (н.о.р.) час між прибуттями;
- D представляє детермінований (постійний) н.о.р. час між прибуттями;
- $E_k$  представляє н.о.р. час між прибуттями, розподілений за розподілом Ерланга (з параметром  $k$ );
- G представляє н.о.р. час між прибуттям із функцією розподілу загального виду;

(B) Розподіл часу обслуговування (знову зазвичай класифікується як M, D,  $E_k$  або G);

(C) кількість каналів;

(D) потужність системи (кількість місць в системі – кількість серверів плюс кількість місць в черзі, якщо вона є);

(E) Дисципліна черги, наприклад FIFO, FILO або RIRO;

Позначення Кендалла зазвичай спрощується, щоб перерахувати лише перші три символи  $A|B|C$ . У цьому форматі передбачається, що дисципліною черги є FIFO, і ніякі обмеження на потужність системи не накладаються.

В даній роботі при розгляді відділення інтенсивної терапії буде використана система без черг, яка описуватиметься в розділі 1.4.

### 1.3 Теорія масового обслуговування у сфері охорони здоров'я

Теорія масового обслуговування, зокрема, вивчається для застосування в охороні здоров'я. Включає вивчення списків очікування, розгортання машин швидкої допомоги, планування ресурсів невідкладної допомоги та планування ліжок. Взагалі кажучи, невідкладне звернення пацієнта до лікаря є вимогою, а його унікальний стан, який вимагає випадкової тривалості лікування, становить обслуговування.

Зауважимо, що використання теорії масового обслуговування в медичних установах рідко використовувалося, поки не з'явилася робота Бейлі, 1952. У цій роботі теорія черги була використана для розробки системи планування амбулаторії, яка давала прийнятні результати для пацієнтів (з точки зору часу очікування) та персоналу (з точки зору використання). Припускалася однорідність пацієнтів щодо розподілу часу їх обслуговування, а також передбачалося, що всі пацієнти прийшли на прийом вчасно. Протягом наступних років і десятиліть розвинувся дослідницький інтерес до моделювання охорони здоров'я за допомогою теорії масового обслуговування, і зараз існує вже дуже багато досліджень.

Значна кількість досліджень показала, що теорія масового обслуговування може бути корисною в реальних ситуаціях охорони здоров'я, з'явилися деякі огляди напрямів цих досліджень. Наведемо декілька з них. В роботі МакКлейн, 1976 [1] розглянув дослідження моделей для оцінки впливу політики розподілу ліжок на використання, час очікування та ймовірність відмови пацієнтів. В роботі Носек і Вілсон, 2001 [2] розглянуто використання теорії масового обслуговування в аптечних програмах, приділяючи особливу увагу підвищенню рівня задоволеності клієнтів. Задоволеність клієнтів покращується шляхом прогнозування та скорочення часу очікування та коригування рівня персоналу. В роботі Грін, 2006 [3] представлено теорію масового обслуговування у застосуванні в галузі

охорони здоров'я. Досліджено співвідношення між затримками, використанням і кількістю каналів, включаючи базову модель  $M|M|n$ , її припущення та розширення, а також застосування теорії для визначення необхідної кількості каналів.

Маючи достатні дані про час прибуття пацієнтів і тривалість обслуговування, вони підсумовуються з використанням відповідних розподілів ймовірностей, які фіксують важливу інформацію про середнє значення та дисперсію попиту пацієнтів та рівня обслуговування. Як апроксимації випадкового процесу використовуються два розподіли: розподіл Пуассона для опису інтенсивності попиту та експоненційний розподіл для опису тривалості обслуговування. Наприклад, якщо в середньому 20 пацієнтів відвідують клініку з 11:00 до 12:00 у понеділок, це не означає, що час між прибуттям становить рівно 3 хвилини. Розподіл даних про час між надходженнями буде скошено вправо, що припускає експоненційний розподіл як відповідне наближення. Аналогічно кількість пацієнтів, які заходять за 10-хвилинне вікно, приблизно є випадковою величиною, що має розподіл Пуассона. І пуассоновській, і експоненційний розподіл відносяться до одного і того ж випадкового процесу, і це залежить від того, чи ми вивчаємо інтенсивність (Пуассона інтуїтивно зрозуміла для попиту) чи тривалість (експоненційна випадкова величина інтуїтивно зрозуміла для часу обслуговування).

### **1.3.1 Аналіз часу очікування та коефіцієнта завантаженості**

У системі масового обслуговування мінімізація часу очікування клієнтів і максимальний коефіцієнт завантаженості каналів (лікарів, медсестер, лікарняних ліжок тощо) є суперечливими цілями. Розглянемо, як певні конфігурації медичної допомоги впливають на затримку

обслуговування пацієнтів та використання ресурсів охорони здоров'я. Пізніше при моделюванні відділення інтенсивної терапії ми розглянемо один з ключових факторів роботи системи – ймовірність блокування.

### **1.3.1.1 Відмова**

Коли пацієнт чекає в черзі, він може вирішити залишити систему, оскільки не хоче більше чекати. Смерть у черзі також є прикладом відмови. Ймовірність того, що пацієнт відмовиться, зазвичай збільшується разом із довжиною черги та оцінкою пацієнта того, скільки часу йому доведеться чекати, щоб отримати обслуговування. У системах, де попит перевищує потужність системи, відмова є єдиним способом досягнення системою “стану дисфункціональної рівноваги”.

Аналізуючи відсоток пацієнтів, які не дочекалися допомоги, на основі таких факторів, як інтенсивність прибуття, інтенсивність обслуговування, коефіцієнт завантаженості та потужність системи можна зокрема визначити втрату прибутку (під прибутком може розумітися тут не лише фінансові надходження).

Також можна перепроєктувати систему черги, щоб зменшити відсоток відмов. Поширеним підходом є розділення потоку пацієнтів на різні потоки за типом необхідної послуги.

### **1.3.1.2 Групові надходження та групове обслуговування**

Системи масового обслуговування, в яку одночасно прибувають кілька клієнтів і/або обслуговуються групами випадкового розміру, називаються системами масової обслуговування з паралельно-груповим обслуговуванням.

Зокрема, у цьому випадку, можуть розглядатися ймовірності відмови, коли група прийшла в систему з обмеженою потужністю при двох сценаріях підходу, один – коли відхиляться вся група, другий -- лише її надлишок.

### **1.3.1.3 Змінна інтенсивність вхідного потоку вимог**

Хоча більшість аналітичних моделей масового обслуговування передбачає сталу інтенсивність потоку прибуття клієнтів, багато систем охорони здоров'я мають змінну інтенсивність вхідного потоку. У деяких випадках ця інтенсивність може залежати від часу, але не залежить від стану системи. Наприклад, інтенсивність надходження вимог змінюється залежно від часу доби, дня тижня або сезону року. В інших випадках інтенсивність надходження залежить від стану системи. Інтенсивність потоку вимог може з часом збільшуватися через зростання населення або інші фактори.

Ряд досліджень припускають, що збільшення пропускної спроможності (традиційний метод спроби скоротити довгі черги) мало впливає на довжину черги, оскільки щойно пацієнти розуміють, що час очікування скоротиться, інтенсивність прибуття збільшується, що знову збільшує чергу.

### **1.3.1.4 Дисципліна пріоритетної черги**

У більшості закладів охорони здоров'я, якщо немає системи запису на прийом, дисципліна черги — це або перший прийшов — перший вийшов, або набір класів пацієнтів, які мають різні пріоритети (як у відділеннях невідкладної допомоги, які лікують пацієнтів екстреної допомоги із загрозою життю травми перед плановими пацієнтами).

При високому завантаженні можна мінімізувати час очікування, віддаючи пріоритет клієнтам, яким потрібні короткі терміни обслуговування. Це правило є формою правила найкоротшого часу обслуговування, яке, як відомо, мінімізує час очікування. Проте воно не завжди є доцільним при роботі з людьми.

### **1.3.1.5 Блокування**

Блокування відбувається, коли система масового обслуговування має обмежену довжину черги. Наприклад, амбулаторія може відмовити пацієнтам, коли її зал очікування заповнений. У реанімаційному відділенні, де пацієнти можуть чекати лише на ліжку, обмежена кількість ліжок може перешкодити відділенню прийняти пацієнтів.

В роботі [4] розглядається медико-хірургічне відділення інтенсивної терапії, де важкохворих пацієнтів не можна поставити в чергу і їм доводиться відмовляти, коли система повністю зайнята. Це окремий випадок, коли довжина черги не може бути більшою за нуль, що називається моделлю чистих втрат.

## **1.4 Система $M|M|n|n$**

Ця система є найстарішою і, таким чином, найвідомішою системою в теорії масового обслуговування. Вперше її розглянув дослідник А.К. Ерланг. Класичним прикладом застосування цієї системи масового обслуговування з відмовами є автоматичні телефонні станції. Тут запитом є звернення клієнта до телефонної станції. Якщо потрібна лінія зв'язку вже зайнята, абонент отримує відмову.

Система масового обслуговування з відмовами складається з  $n$  каналів обслуговування, на які прибувають клієнти згідно з процесом Пуассона із інтенсивністю  $\lambda$ , а час обслуговування розподіляється експоненціально із параметром  $\mu$ . Якщо всі  $n$  каналів будуть зайняті, коли прийде новий клієнт, його буде втрачено, оскільки система заповнена. Найголовніше питання – яка частка клієнтів втрачається. Процес обслуговування клієнтів в такій системі може бути змодельований як процес народження та загибелі, як описано нижче.

Процес народження та загибелі можна розглядати як стохастичний лічильний процес у часі  $\{N(t), t \geq 0\}$ . Якщо  $P_k(t) = P\{N(t) = k\}$  — це ймовірність того, що система перебуває в стані  $k$  у момент часу  $t$ , тобто  $k$  каналів зайняті, що по суті те саме, що  $k$  клієнтів знаходяться на обслуговуванні у системі, то схема переходу процесу народження та загибелі проілюстрована на рисунку 2.1. Коли відбувається «народження», тобто надходження в систему нової вимоги, система переходить із стану  $k$  до  $k + 1$ , а коли настає «смерть» (одна з вимог завершила обслуговування та вийшла з системи), вона, навпаки, переходить із стану  $k$  до  $k - 1$ . Процес визначається інтенсивностями народжуваності та смертності.

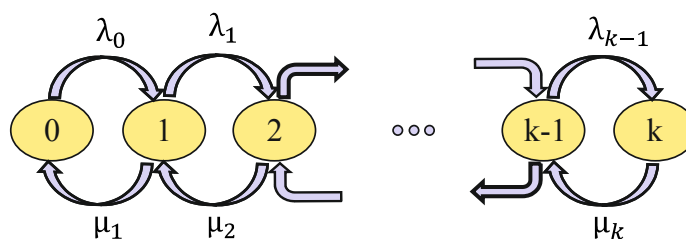


Рисунок 2.1: Граф станів і переходів СМО з відмовами

У системах масового обслуговування, які безпосередньо моделюють поведінку людей, які прибувають на об'єкт обслуговування, що вимагає виконання конкретної послуги, кількість клієнтів у системі є відповідною зміною стану;  $P_k(t)$  можна використовувати для позначення ймовірності того, що в системі в момент часу  $t$  є  $k$  клієнтів.

Отже,  $\{N(t), t \geq 0\}$  є процесом народження та загибелі з інтенсивностями

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & , \text{якщо } k < n, \\ 0 & , \text{якщо } k \geq n, \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Очевидно, стаціонарний розподіл існує, оскільки процес має скінченний простір станів. Стаціонарний розподіл можна отримати як

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} & , \text{якщо } k \leq n, \\ 0 & , \text{якщо } k > n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Завдяки умові нормування маємо

$$P_0 = \left( \sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

і, таким чином, розподіл є

$$P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}}{\sum_{i=0}^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{i!}} = \frac{\frac{\rho^k}{k!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}}, \quad k \leq n. \quad (1.3)$$

де  $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$  – завантаження одного каналу системи.

Найважливішим показником системи є її ймовірність блокування

$$P_n = \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{k=0}^n \frac{\rho^k}{k!}} = B(n, \rho) \quad (1.4)$$

який був введений Ерлангом і називається В-формула Ерланга, або формула втрат (ймовірність відмови щодо обслуговування) і зазвичай позначається як  $B(n, \lambda/\mu)$ .

Використовуючи правило Баєса, легко побачити, що  $P_n$  — це ймовірність втрати клієнта, що прибув. Для невеликих  $n$  ймовірність  $P_0$  можна легко обчислити. Для великого  $n$  і малого  $\rho$   $P_0 \approx e^{-\rho}$ , і таким чином

$$P_k \approx \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho},$$

Для великого  $n$  і великого  $\rho$

$$\sum_{j=0}^n \frac{\rho^j}{j!} \neq e^{-\rho}.$$

Однак у цьому випадку можна використовувати центральну граничну теорему, оскільки знаменник є сумою перших  $(n + 1)$  доданків розподілу Пуассона із середнім  $\rho$ . Таким чином, згідно центральної граничної теореми цей розподіл Пуассона можна апроксимувати нормальним законом із середнім  $\rho$  і середньоквадратичним відхиленням  $\sqrt{\rho}$ , тобто

$$P_n \approx \frac{\Phi(s) - \Phi\left(s - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)}{\Phi(s)} = 1 - \frac{\Phi\left(s - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)}{\Phi(s)},$$

де

$$\Phi(s) = \int_{-\infty}^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

і

$$s = \frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}.$$

Інший спосіб обчислення  $B(n, \rho)$ .— знайти рекурсію. Це можна зробити наступним чином

$$\begin{aligned}
B(n, \rho) &= \frac{\frac{\rho^n}{n!}}{\sum_{i=0}^n \frac{\rho^i}{i!}} = \frac{\frac{\rho}{n} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}}{\sum_{i=0}^s \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho}{n} \frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}} \\
&= \frac{\frac{\rho}{n} B(n-1, \rho)}{1 + \frac{\rho}{n} B(n-1, \rho)} = \frac{\rho B(n-1, \rho)}{n + \rho B(n-1, \rho)}. \tag{1.5}
\end{aligned}$$

Використовуючи  $B(1, \rho) = \frac{\rho}{1+\rho}$  як початкове значення, ймовірності  $B(n, \rho)$  можна обчислити для будь-якого  $n$ . Це важливо, оскільки пряме обчислення може викликати проблему через значення факторіала.

Тепер визначимо основні показники якості обслуговування системи  $M|M|n|n$

- Середня кількість клієнтів у системі, і відповідно середня кількість зайнятих каналів

$$\bar{N} = \bar{n} = \sum_{j=0}^n j P_j = \sum_{j=0}^n j \frac{\rho^j}{j!} P_0 = \rho \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\rho^j}{j!} P_0 = \rho(1 - P_n), \tag{1.6}$$

таким чином, середня кількість запитів для даного каналу дорівнює

$$\frac{\rho}{n} (1 - P_n).$$

- Коефіцієнт завантаженості каналу

Як ми бачимо

$$U_s = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} P_i = \frac{\bar{n}}{n},$$

де  $\bar{n}$  – середня кількість зайнятих каналів.

У цьому випадку

$$U_s = \frac{\rho}{n} (1 - P_n). \quad (1.7)$$

- Середній період простою для даного каналу

Застосовуючи відоме співвідношення

$$P(\text{канал зайнятий}) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\bar{e} + \frac{1}{\mu}}, \quad (1.8)$$

де  $\bar{e}$  – середній час простою каналу. Таким чином

$$\frac{\rho}{n} (1 - P_n) = \frac{\frac{1}{\mu}}{\bar{e} + \frac{1}{\mu}},$$

отже

$$\bar{e} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{1}{\mu}. \quad (1.9)$$

- Середній час завантаженості системи

Ясно, що

$$U_r = 1 - P_0 = \frac{E\delta_r}{\frac{1}{\lambda} + E\delta_r}, \quad (1.10)$$

таким чином

$$E\delta_r = \frac{1 - P_0}{\lambda P_0} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!}}{\lambda(1 + \sum_{i=1}^n \frac{\rho^i}{i!})}. \quad (1.11)$$

Наведемо декілька прикладів використання системи  $M|M|n|n$  та оцінімо якість їх обслуговування.

Приклад 1. Лікарняна палата має 20 ліжок, пацієнти надходять відповідно до процесу Пуассона з інтенсивністю 3 людини на добу і середнім часом перебування у лікарні 5 діб. Знайти основні показники ефективності системи.

Розв'язок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3 * 5 = 15$$

Ймовірність відмови в обслуговуванні буде дорівнювати

$$P_{20} = B(n, \rho) = B(20, 15) = 0.045$$

тобто близько 4.5 %.

Середня кількість пацієнтів у системі і відповідно середня кількість зайнятих ліжок

$$\bar{N} = \bar{n} = \rho(1 - P_n) = 15(1 - 0.045) = 14.325.$$

Коефіцієнт завантаженості ліжка

$$U_s = \frac{15}{20} = 0.75.$$

тобто кожне з ліжок зайняте 75% робочого часу.

Середній час простою ліжка

$$\bar{e} = \frac{n}{\lambda(1 - P_n)} - \frac{1}{\mu} = \frac{20}{3(1 - 0.045)} - 5 = 1.98 \text{ діб.}$$

Приклад 2. В лікарняну палату надходять пацієнти з інтенсивністю 3 людини на добу відповідно до процесу Пуассона, середній час лікування 10 діб. Скільки ліжок потрібно, щоб ймовірність відмови пацієнту була менше 1%?

Розв'язок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3 * 10 = 30, \quad P_n = 0.01.$$

За нормальним наближенням

$$P_n = 0.01 = \frac{\Phi\left(\frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right) - \Phi\left(\frac{n - \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right)}.$$

Таким чином

$$0.99\Phi\left(\frac{n + \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right) = \Phi\left(\frac{n - \frac{1}{2} - \rho}{\sqrt{\rho}}\right).$$

Неважко перевірити, використовуючи таблицю для стандартного нормального розподілу, що  $n = 41$ .

Таким чином, апроксимаційне значення  $P_{41}$  дорівнює 0.009917, а точне значення 0.010433.

## 2. Моделювання реанімаційного блоку як СМО

### 2.1 Використані програмні інструменти

Великі мережі систем масового обслуговування моделюють важливі реальні системи, зокрема такі як лікарня. Показники продуктивності для даної системи масового обслуговування часто можна отримати лише за допомогою моделювання, тому що вивчати систему безпосередньо дорого та небезпечно, адже від цього залежить життя людей. Тому у цьому розділі ми будемо моделювати таку систему використовуючи мову програмування R, програмне середовище RStudio, та пакет R simmer.

Пакет `simmer` дозволяє легко створювати імітаційні моделі дискретних подій у R. В основі пакету лежить код на мові C++, тому пакет проводить обрахунки з високою точністю та ефективністю. Також слід зауважити, що пакет `simmer` був розроблений для оптимізації саме медичних процесів.

Однією з характеристик `simmer` є те, що він дозволяє моделювати траєкторії, які описують шлях або кілька альтернативних ланцюжків діяльності в системі. Ці траєкторії наприклад займають і звільняють ресурси. Траєкторії створюються за допомогою функції `trajectory()`. До траєкторії `simmer` можна додати багато дій, опишемо тільки ті, які будуть використовуватися в нашій роботі: `seize` – використовується для початку використання ресурсу; `timeout` – проводить деякий час у змодельованій системі (в нашому випадку цей час визначається експоненціальним розподілом); `release` – використовується для звільнення ресурсу.

Також є генератори, які генерують процес надходження вимог та відсилають їх на траєкторію. Генератори можна додати до середовища моделювання за допомогою функції `add_generator()`. Ресурси можна додати за

допомогою функції `add_resource()`, вони визначають потужність системи та довжину черги.

Після налаштування середовища моделювання та проведення симуляційних запусків можна отримати дані використовуючи такі функції: `get_mon_arrivals` – повертає інформацію про прибуття, таку як ім'я, час коли прибув клієнт та наприклад, завершив своє перебування в системі чи ні; `get_mon_resources` – повертає інформацію про зміни стану в ресурсі, наприклад, час, коли відбулася зміна стану.

Також корисним є візуалізація результатів моделювання за допомогою `simmer.plot`.

## 2.2 Опис блоку медичної установи

Будемо розглядати як систему масового обслуговування – реанімаційну палату у якій пацієнти зазвичай потребують інтенсивного спостереження, і більшість потребує певної механічної або фармакологічної підтримки, наприклад, штучної вентиляції легень або замісної ниркової терапії. Ліжка – прилади обслуговування, їх кількість дорівнює 30. Оскільки при наданні допомоги такого типу як в реанімаційних палатах час очікування пацієнтів в черзі потрібно виключити, то розглядатиметься система без черги. Потік пацієнтів – пуассонівський, тому що для нього виконуються такі умови: стаціонарність, відсутність післядії і ординарність, тобто пацієнти надходять незалежно, зазвичай по одному. У цій роботі ми розглядаємо потік екстрених пацієнтів, тому інтенсивність надходжень пацієнтів будемо вважати сталою, оскільки зміна інтенсивності прибуття мало відслідковуються в залежності, наприклад, від дня тижня або часу доби, на відміну від планових пацієнтів на яких впливають дані фактори. Обслуговування, а фактично час перебування у реанімаційній палаті визначається експоненційним розподілом.

Відповідність пуассонівського потоку та експоненційного обслуговування розглянутій проблемі легко перевірити маючи реальні дані за допомогою графічного аналізу відповідних потоків, методів розвідувального аналізу та відповідних статистичних критеріїв. Отже, враховуючи наведені вище факти отримуємо систему  $M|M|n|n$ .

Оскільки у нас немає реальних даних, то в цій роботі потік вимог та обслуговування ми моделюємо, проте маючи реальні дані неважко оцінити параметри вхідного потоку та обслуговування, а саме:  $\lambda = 3$  – середня кількість пацієнтів в одиницю часу (в даній роботі за одиницю часу будемо вважати день),  $\frac{1}{\mu} = 7$  – середня кількість днів перебування пацієнта в реанімації.

Отже, будемо моделювати систему  $M|M|n|n$  за допомогою пакета `simmer`. А саме за допомогою функцій `trajectory()` та `simmer()` змоделюємо роботу реанімаційної палати з 30 ліжками протягом двох тисяч днів з нульовою чергою. В таблиці 2.1 зображено інформацію про надходження пацієнтів, яку можна отримати застосувавши функцію `get_mon_arrivals()`.

В реанімаційну палату за дві тисячі днів надійшло 5715 пацієнтів, але не всі з них були обслуговані, оскільки довжина черги встановлена на нуль, то частині пацієнтів було відмовлено в госпіталізації, а саме 74 пацієнтам було відмовлено в нашій змодельованій палаті. Для таких пацієнтів стан обслуговування в таблиці 2.1 позначається як `FALSE`, для тих хто отримав лікування як `TRUE`.

ім'я	час прибуття	час виходу із системи	час обслуговування	стан обслуговування
Пацієнт0	0.2327232	1.320273	1.087550	TRUE
Пацієнт1	0.5461688	3.795176	3.249017	TRUE
Пацієнт2	1.0015647	2.300357	1.298792	TRUE
...	...	...	...	...
Пацієнт132	45.8204554	45.820455	0.000000	FALSE
Пацієнт155	51.3468164	58.198377	6.851561	TRUE
...	...	...	...	...

Таблиця 2.1: Отримані дані про надходження пацієнтів

Використаємо також функцію `get_mon_resources()`, яка надає інформацію про зміни стану в ресурсі (ліжка), наприклад фіксує час, коли відбулася зміна, а також відображає кількість зайнятих ліжок в палаті у фіксований час, що еквівалентно кількості пацієнтів в реанімації.

Тепер маючи змодельовану реанімацію підрахуємо основні характеристики роботи системи і відобразимо їх в таблиці 2.2.

$P_n$	$\bar{n}$	$P_0$	$P_{14}$	A	$U_s$	$\bar{t}$
0.01447298	21.02088	0	0.02696741	2.957781	0.700696	6.849932

Таблиця 2.2: Основні характеристики роботи системи

Однією з найважливіших характеристик є ймовірність відмови пацієнту і вона становить близько 1.4%, що з однієї сторони може здатися малим рівнем відмови, але є доволі великою з огляду на те, що пацієнти, які надходять до реанімації мають отримати термінову невідкладну допомогу від якої залежить їх життя, тому пізніше ми будемо намагатися зменшити цей відсоток, наближуючи його до нуля. Ймовірність того, що в палаті не перебуває жоден пацієнт дорівнює 0 (палата порожня), а наприклад, що перебувають 14 пацієнтів дорівнює приблизно 2.7%. Середня кількість зайнятих ліжок в палаті дорівнює 21. Також підраховали абсолютну пропускну здатність, тобто середня кількість пацієнтів, яку може обслужити палата за день, вона позначається як  $A$  та дорівнює 2.96. Середній час перебування пацієнта в реанімації складає 6.8 дні. Важливою характеристикою є завантаженість системи, яка в даному випадку дорівнює близько 70%.

За допомогою бібліотеки `simmer.plot` можемо побудувати графік еволюції середньої кількості пацієнтів в палаті протягом двох тисяч днів, який зображений на рисунку 2.1. Оскільки ми моделюємо палату в якій початкова кількість зайнятих ліжок дорівнювала нулю, то перші 50 – 70 днів роботи реанімаційної палати не дадуть правильне уявлення про функціонування системи загалом, після цього терміну, робота стабілізується та ми бачимо впродовж наступних днів, що кількість пацієнтів в палаті близька до середнього значення, тобто система починає працювати в стаціонарному режимі.

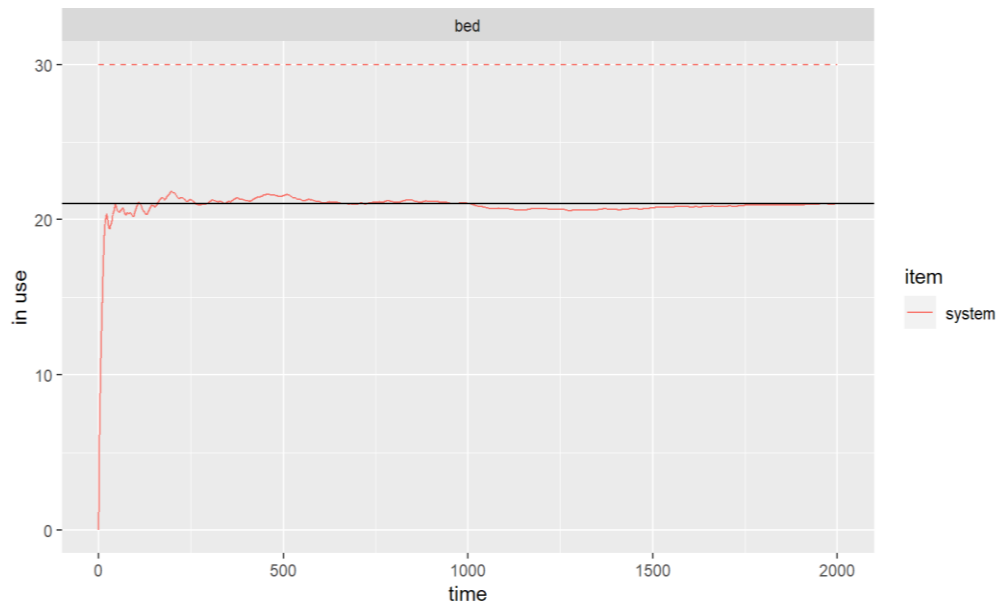


Рисунок 2.1: Еволюція середньої кількості пацієнтів в палаті

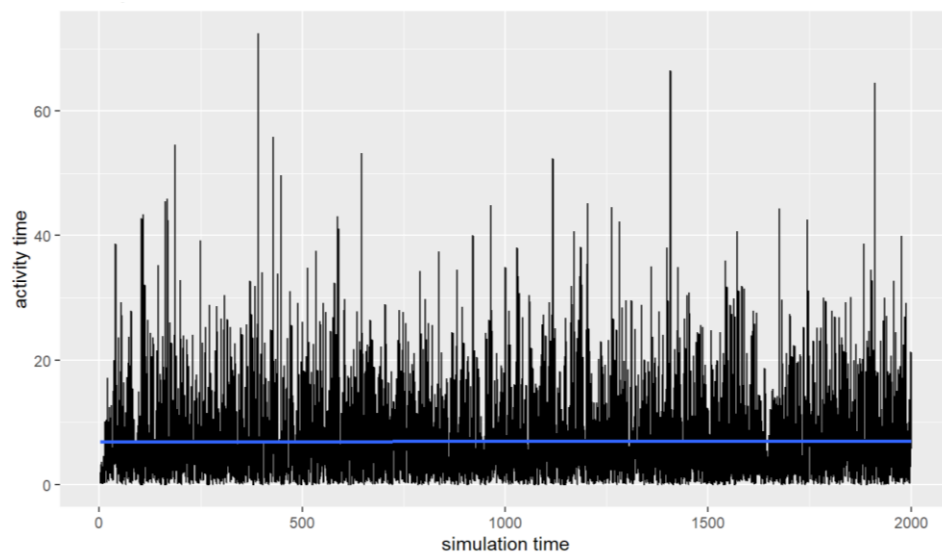


Рисунок 2.2: Еволюція часу обслуговування

Також за допомогою пакета `simmer.plot` побудуємо графік еволюції часу обслуговування, тобто перебування в реанімаційній палаті. Результат зображений на рисунку 2.2.

Побудуємо графік, який відображає завантаженість ліжок в реанімаційній палаті, результати відображені на рисунку 2.3. Одна з основних проблем з якою стикаються завідувачі таких палат, полягає в

непередбачуваності кількості ліжок, які будуть зайняти в той чи інший день. На рисунку 2.3 бачимо велику ступінь варіації щоденної завантаженості ліжок протягом двох тисяч днів. Щоденна зайнятість може становити від 9 до 30 ліжок. Цей високий ступінь варіативності тягне за собою негативні наслідки, зокрема, якщо під час екстреної госпіталізації всі ліжка зайняті, то стан пацієнта може погіршитися, коли будуть вжиті заходи з пошуку ліжка, можливо, в іншому відділенні або іншій лікарні, яка знаходиться на відстані.

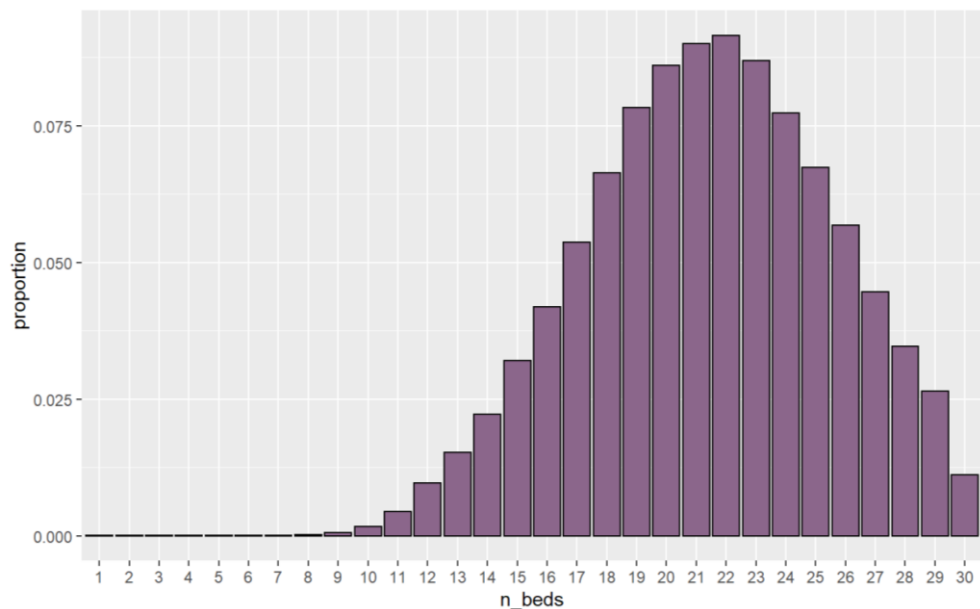


Рисунок 2.3: Розподіл частоти завантаженості ліжок

Тривалість перебування у реанімаційній палаті варіюється в широких межах. Деяким пацієнтам може знадобитися підтримка протягом декількох тижнів, а може й навіть місяців, ще якійсь частині знадобиться всього лише декілька днів для лікування. Тривалість лікування у екстрених пацієнтів набагато непередбачуваніша ніж, наприклад, у планових пацієнтів (в даній роботі планових пацієнтів ми не розглядаємо). У змодельованій палаті містяться дані про тривалість перебування пацієнтів у палаті, розіб'ємо їх на інтервали з кроком 2 дні та відобразимо результати на рисунку 2.4. Дані

містять широкий діапазон значень (мінімум близько 15 хвилин, максимум 56 днів). Для цілей презентації виключимо з графіка тривалість перебування, яка перевищує 30 днів.

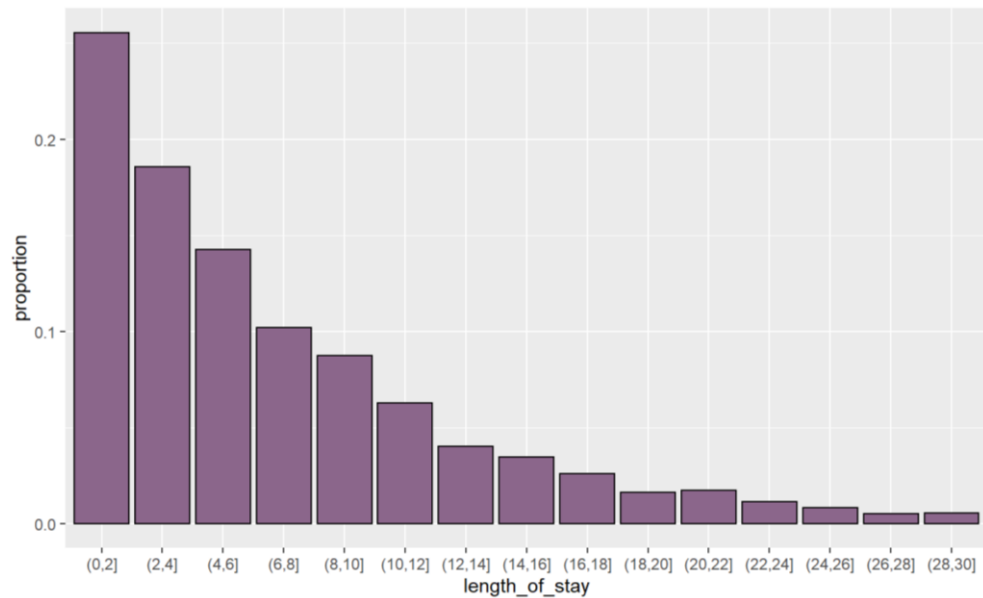


Рисунок 2.4: Розподіл частоти тривалості перебування

### 2.3 Вплив зміни різних характеристик на систему

На роботу реанімаційної палати можуть впливати різні фактори, зокрема, зміна інтенсивності надходження пацієнтів, яку можна пов'язати з збільшенням або зменшенням чисельності населення в місцевості, де розташована лікарня, з природними катастрофами, непередбачуваними спалахами хвороб (наприклад, як COVID-19), війною. Також впливає термін перебування пацієнтів у палаті, наприклад, якщо дуже висока інтенсивність надходження цей термін можуть скорочувати до мінімуму, який можливий в окремих пацієнтів, або ж якщо завантаженість палати низька можуть

продовжувати час лікування д з метою належного догляду за пацієнтом задля запобіганню рецидивів. І звісно ж на функціонування реанімаційної палати впливає кількість ліжок, якими можуть користуватися пацієнти, також впливає кількість медичного персоналу, адже один лікар не може надати належного лікування відразу 30 хворим, але даний фактор у нашій роботі розглядатися не буде. Отже, у цьому розділі ми будемо розглядати як зміна одних показників системи (палати) буде впливати на інші її показники.

### 2.3.1 Ймовірність того, що зайнято $k$ ліжок

Розглянемо, як буде впливати різна кількість наявних ліжок на завантаженість палати при цьому інтенсивність надходження та обслуговування залишиться такою ж.

Результати зображені на рисунку 2.5. Зверху графік ймовірності зайнятих  $k$  ліжок, коли їх максимальна кількість 40, по центру коли 30, власне це її є наша модельована реанімаційна палата та знизу для 20 ліжок.

Ми бачимо, що чим менша кількість ліжок, тим більше графік зміщений вправо, що говорить про те, що ймовірність зайнятої максимальної кількості ліжок збільшується, а отже, завантаженість системи збільшується: для палати з 40 ліжками вона становить 52%, для палати з 30 – 70% та для 20 ліжок – 86%. Ситуації, коли занадто низька завантаженість палати або занадто висока не є вигідними, адже при низькій завантаженості велика кількість ліжок простоюють, але все одно витрачаються кошти на їх належне зберігання, а при високій завантаженості збільшується ймовірність відмови пацієнту, що тягне за собою зрозумілі негативні наслідки. Також можемо побачити як відрізняється ймовірність зайнятих в палаті, наприклад 12 ліжок: для ситуації, де максимальна кількість 40 ліжок – 0.015, для 30 – 0.017, для 20 – 0.027.

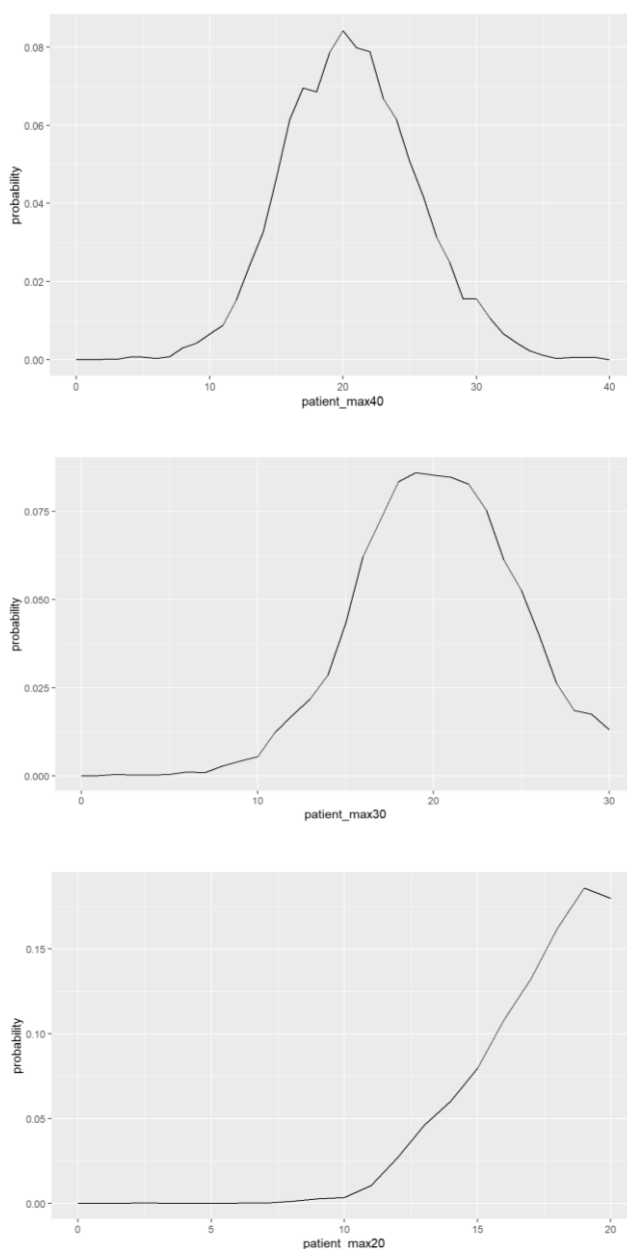


Рисунок 2.5: Ймовірність зайнятих  $k$  ліжок при їх різній максимальній кількості

### 2.3.2 Вплив інтенсивності надходження на ймовірність $k$ пацієнтів в палаті

Аналогічним чином розглянемо як буде впливати різна інтенсивність надходжень на ймовірність того, що в палаті перебуватиме  $k$  пацієнтів при однаковій кількості ліжок, в нашому випадку це 30.

Результати продемонстровані на рисунку 2.6. Отже, бачимо схожу ситуацію як при зміні кількості ліжок, чим більша інтенсивність надходження, тим більше динаміка ймовірності, що  $k$  пацієнтів перебувають в палаті зміщена праворуч. Коли в реанімаційну палату буде надходити одна людина на добу, то її завантаженість буде значно меншою, ніж коли інтенсивність надходження буде дорівнювати 5.

Якщо порівнювати ймовірність, що в палаті буде перебувати, наприклад, 14 пацієнтів, то результати будуть такими: для інтенсивності надходження рівній 1 буде становити 1.3%, для інтенсивності 3 – 0.027% і для інтенсивності 5 – 0.00037%.

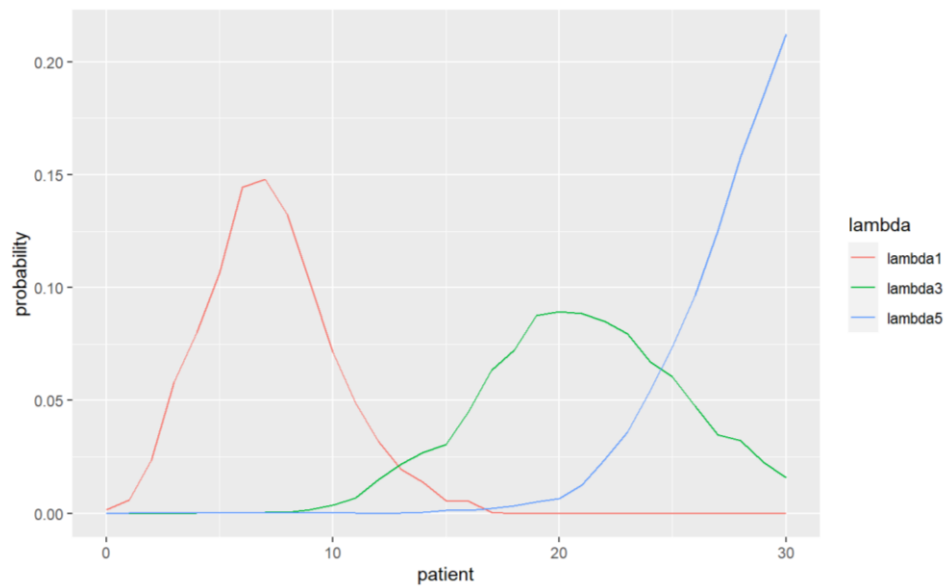


Рисунок 2.6: Ймовірність  $k$  пацієнтів в палаті при різних значеннях  $\lambda$

### 2.3.3 Вплив кількості ліжок на ймовірність відмови

Кількість ліжок в реанімаційній палаті тісно пов'язана з ймовірністю відмови пацієнту, якщо всі ліжка зайняті. Проаналізуємо цю залежність побудувавши графік, який зображений на рисунку 2.7, тут кількість ліжок буде змінюватися від 20 до 40, а інтенсивність надходження та обслуговування буде як в початковому варіанті моделювання палати. Очевидно, що при збільшенні кількості ліжок ймовірність відмови буде зменшуватися, але слід пам'ятати, що також буде зменшуватися завантаженість палати до надто малої величини, тому завдання завідуючого палати знайти компроміс, який буде вигідним для їхньої ситуації.

Отже, при 30 ліжках в палаті наша ймовірність відмови дорівнювала 1.4%, на рисунку 2.7 видно, що для того, щоб ця ймовірність була менше 0.1% кількість ліжок повинна дорівнювати 35, тобто необхідно розширити нашу палату на 5 ліжок, а при наявних 38 місць ймовірність відмови фактично дорівнює нулю, що означає прийняття на лікування усіх пацієнтів, які прибувають в реанімаційну палату.

Подивимося і на випадок, якщо за яких-небудь причин лікарня буде змушена зменшити кількість ліжок у реанімаційній палаті. Це призведе до збільшення ймовірності відмови, що буде погано впливати на якість обслуговування. Наприклад, якщо ми скоротимо кількість ліжок до 24, то ймовірність відмови буде приблизно 9%, що є неприпустимим, адже великий відсоток пацієнтів не зможуть отримати негайну необхідну допомогу, що призведе до погіршення стану здоров'я або навіть до летального випадку.

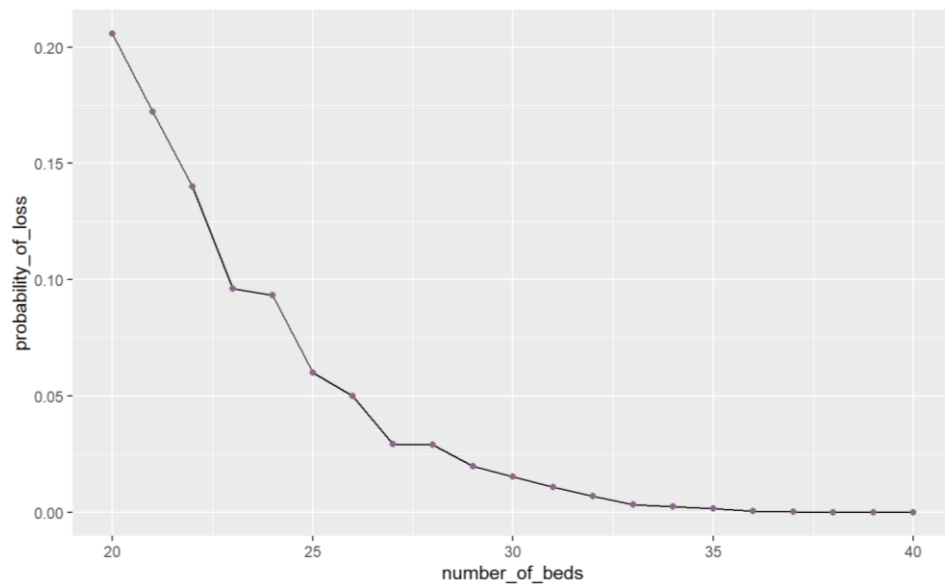


Рисунок 2.7: Ймовірності відмови в залежності від кількості ліжок

### 2.3.4 Вплив інтенсивності надходження та лікування на завантаженість палати

Раніше описувалися причини через які може змінюватися інтенсивність надходження пацієнтів та їх тривалість перебування на лікуванні (в даній роботі ми не розглядаємо змінну інтенсивність при моделюванні, тут мова йде про сталу інтенсивність, але іншу порівняно з початковими даними). Отже, при різних значеннях  $\lambda$  та  $\mu$  змінюється завантаженість палати. Щоб проаналізувати дану ситуацію побудуємо 3D гістограму, яка зображена на рисунку 2.8 та цифрові дані запишемо у таблицю 2.3.

Можемо спостерігати закономірну динаміку, що при збільшенні інтенсивності прибуття завантаженість палати збільшується, аналогічно і при збільшенні терміну перебування на лікуванні пацієнтів. Слід звернути увагу, що збільшення коефіцієнта завантаженості при збільшенні інтенсивності

надходження пацієнтів відбувається швидше, ніж при зростанню терміну перебування.

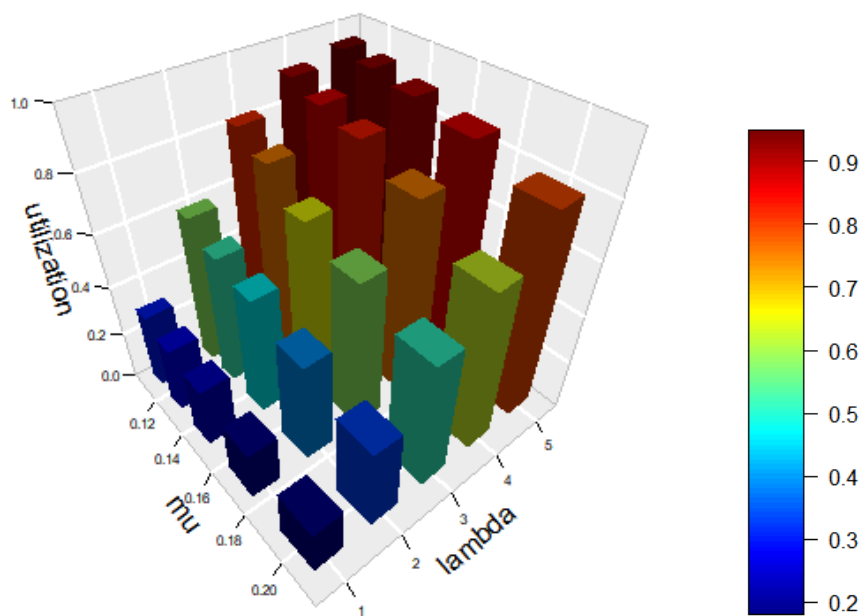


Рисунок 2.8: Завантаженість палати в залежності від значень  $\lambda$  та  $\mu$

$\mu \backslash \lambda$	1	2	3	4	5
1/5	0.166	0.326	0.498	0.659	0.790
1/6	0.194	0.404	0.590	0.764	0.866
1/7	0.229	0.492	0.700	0.841	0.914
1/8	0.272	0.543	0.746	0.885	0.931
1/9	0.292	0.596	0.830	0.911	0.946

Таблиця 2.3: Завантаженість палати в залежності від значень  $\lambda$  та  $\mu$

В таблиці 2.3 виділено коефіцієнт завантаженості палати в початковому варіанті моделювання, тобто при інтенсивності надходження рівній 3 людини на добу та середня тривалість перебування 7 діб. Бачимо, що якщо інтенсивність надходження збільшиться на одну людину, а середній термін перебування в палаті на один день, то завантаженість палати збільшиться близько на 18% . А якщо  $\lambda$  буде дорівнювати 5,  $\mu - 1/9$  (середній термін перебування в палаті дорівнює 9 дням), то завантаженість буде становити близько 95%, що означає постійну роботу реанімаційної палати майже на піку своїх можливостей, до того ж високу ймовірність відмови пацієнтам. Також бачимо, що завантаженість буде становити 16.6% при  $\lambda - 1$  та  $\mu - 1/5$ , що є катастрофічним значенням, тому що більшість ліжок палати взагалі не будуть задіяні, а тому кошти які будуть виділені на їхнє обслуговування витратяться даремно.

### **2.3.5 Вплив інтенсивності надходження та лікування на ймовірність відмови**

Аналогічними міркуваннями як у попередньому розділі можна провести дослідження залежності ймовірності відмови пацієнту при різних значеннях інтенсивності надходження та тривалості лікування. Результати продемонстровані на рисунку 2.9.

Бачимо, що ймовірність відмови зростає швидше при збільшенні інтенсивності надходження, ніж при збільшенні терміну перебування пацієнта в палаті. Наша ймовірність відмови дорівнювала 1.4%, якщо середній термін перебування пацієнтів у палаті збільшиться на 4 дні, тобто стане 11 днів, то ймовірність відмови буде становити близько 18%, а якщо термін перебування залишити 7 днів, а інтенсивність надходження збільшити до 9 людей на день, то ймовірність відмови буде становити 53%, що в

першому випадку, а тим більше в другому дані показники занадто великі і завідувачому палати доведеться намагатися зменшувати їх різними шляхами, зокрема збільшенням кількості ліжок, задля нормального функціонування реанімаційної палати.

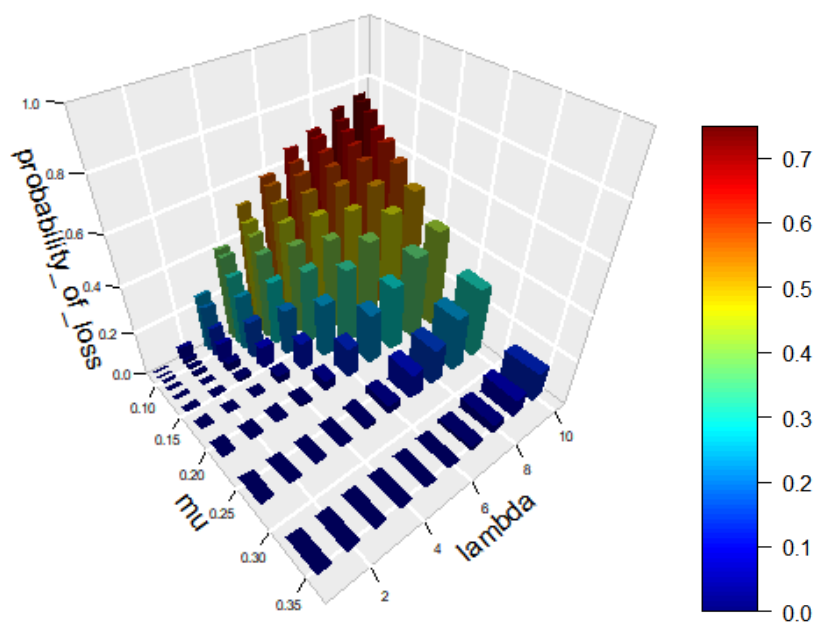


Рисунок 2.9: Ймовірність відмови в залежності від значень  $\lambda$  та  $\mu$

## Висновки

У цій роботі ми побачили корисність моделювання систем масового обслуговування, яке дозволяє оцінити параметри моделі та побачити як будуть впливати зміни одних характеристик на інші. Це дуже потрібно саме для оцінки параметрів реанімаційної палати, оскільки в реальному житті дуже ризиковано перевіряти ту чи іншу можливість лікарні, бо від цього може залежати життя людей.

Ми розглядали багатоканальну СМО з втратами. Потік пацієнтів розглядався як пуассонівський процес, а час перебування пацієнта на лікуванні експоненціальним розподілом.

Для того, щоб зрозуміти можливості реанімаційної палати ми припускали різні ситуації та варіанти для параметрів системи і дивилися як вони будуть впливати на систему загалом. Однією з найголовніших характеристик була ймовірність відмови пацієнту, логічно, що ми хотіли дослідити яким чином можна її зменшити, або ж за яких обставин ця ймовірність збільшиться. Побачили, що найочевиднішим шляхом зменшення ймовірності відмови є збільшення кількості ліжок, наприклад збільшивши кількість місць в нашій змодельованій реанімаційній палаті на 5 ліжок, ймовірність відмови зменшиться від 1.4% до 0.1%. Варто зауважити, що ймовірність відмови системи спадає експоненційно при лінійному збільшенні ліжок, тому, насправді, для того, щоб досягнути дуже низької ймовірності відмови, потрібне відносно невелике збільшення кількості місць. Також очевидно, що на ймовірність відмови буде впливати інтенсивність надходження пацієнтів та їх середній термін перебування в реанімаційній палаті, чим більшими будуть ці показники, тим більшою буде ймовірність відмови. Але слід звернути увагу, що досліджувана ймовірність буде зростати швидше при збільшенні інтенсивності надходження ніж при

збільшенні середнього терміну перебування, аналогічно працює і при зменшенні даних показників.

Не менш важливою характеристикою розглянутої системи є середня завантаженість палати. Ми побачили, що зміна інтенсивності надходження та середнього терміну перебування в палаті практично аналогічно впливають на завантаженість системи, як і на ймовірність відмови. Збільшення кількості ліжок може призвести як до позитивних так і до негативних наслідків, адже при високій завантаженості невелика кількість додаткових ліжок може розвантажити систему, але якщо середня завантаженість була на досить не високому рівні, а ми збільшили кількість ліжок, наприклад для зменшення ймовірності відмови, завантаженість виявиться дуже малою, в результаті чого більшість ліжок будуть простоювати, що неефективно з огляду на витрати.

Провівши дослідження можемо також зробити висновок, що при збільшенні середньої завантаженості реанімаційної палати збільшується ймовірність відмови і навпаки. Тому основним завданням, яке мають вирішувати завідувачі лікарень, палат це розподіл ресурсів таким чином, щоб знайти баланс між середньою завантаженістю та ймовірністю відмови. Отримані результати дають можливість формулювати та розв'язувати ряд оптимізаційних задач мінімізації витрат на забезпечення поточного обслуговування палат, включаючи персонал, та мінімізації ризиків, пов'язаних з відмовою пацієнтам в обслуговуванні, можливо, за рахунок певної логістичної структури переведень ургентних хворих до інших структурних підрозділів або до інших медичних закладів.

## Література

- [1] J. O. McClain. Bed planning using queuing theory models of hospital occupancy: a sensitivity analysis. *Inquiry*, 13(2):167–176, 1976.
- [2] R. A. Nosek and J. P. Wilson. Queuing theory and customer satisfaction: a Review of terminology, trends, and applications to pharmacy practice. *Hospital Pharmacy*, 36(3):275–279, 2001.
- [3] L. Green. Queueing analysis in healthcare. In *Patient Flow: Reducing Delay in Healthcare Delivery*, pages 281–307. Springer, 2006.
- [4] M. L. McManus, M. C. Long, A. Cooper, and E. Litvak. Queuing theory accurately models the need for critical care resources. *Anesthesiology*, 100(5):1271–6, May 2004.
- [5] Ucar, Inaki, Bart Smeets, & Arturo Azcorra. (2019). simmer: Discrete-Event Si-mulation for R. *Journal of Statistical Software*, Vol 90, Issue 2.
- [6] Erlang, Agner K. The Theory of Probabilities and Telephone Conversations. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 20(B):33–39, 1909.
- [7] Edward D. Lazowska, John Zahorjan, G. Scott Graham, and Kenneth C. Sevcik. *Quantitative System Performance. Computer System Analysis Using Queueing Network Models*. Prentice-Hall, Inc., 1984. [p116, 117]
- [8] D. G. Kendall. Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain. *The Annals of Mathematical Statistics*, 24(3):338–354, 1953.
- [9] Banks, Jerry, John Carson II, Barry Nelson, and David Nicol. *Discrete-Event System Simulation*, 5th Edition. Pearson Education Limited, Edinburgh Gate, England, 2014.
- [10] Smeets, Bart and Inaki Ucar. *Intro-duction to simmer*, 2020.

- [11] Lander, Jared P. R for Everyone: Advanced Analytics and Graphics 2nd Edition. Pearson Education, Inc. USA: 118-134, 2017.
- [12] JURNAL EMACS (Engineering, MATHematics and Computer Science) Vol.3 No.2 May 2021:79-85
- [13] Basic Queueing Theory: Debrecen, 2011 by :Dr. János Sztrik University of Debrecen, Faculty of Informatics, pages 58-65
- [14] Erlang, A. Solution of some problems in the theory of probabilities of significance in automatic telephone exchanges. The Post Office Electrical Engineers' Journal 10 (1918), 189-197.
- [15] Izabela Komenda. Modelling Critical Care Unit Activities Through Queueing Theory, April 2013
- [16] W. J. Stewart. Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation. Princeton University Press, 1st edition, 2009.
- [17] W. J. Stewart. Probability, Markov Chains, Queues, and Simulation. Princeton University Press, 1st edition, 2009.
- [18] S. C. Kim, I. Horowitz, and K. K. Young. Analysis of capacity management of the intensive care unit in a hospital. European Journal of, 115:36–46, 1999.

## Додаток

### Код програми

```
library(simmer)
library(simmer.plot)
#Вхідні дані
lambda <- 3
mu <- 1/7
n <- 24
#Моделюємо систему M|M|n|n
mmcc.queue <- trajectory() %>%
  seize("bed", amount=1) %>%
  timeout(function() rexp(1, mu)) %>%
  release("bed", amount=1)
mmcc.env <- simmer() %>%
  add_resource("bed", capacity=n, queue_size=0) %>%
  add_generator("patient", mmcc.queue, function() rexp(100, lambda)) %>%
  run(until=2000)
mmcc.res <- get_mon_resources(mmcc.env)
mmcc.res
mmcc.arr <- get_mon_arrivals(mmcc.env)
mmcc.arr
#Ймовірність відмови
pn <- sum(!mmcc.arr$finished) / nrow(mmcc.arr)
pn
#Середня кількість пацієнтів в палаті або середня кількість зайнятих ліжок
delta_time <- diff(mmcc.res$time)
delta_time <- c(delta_time, 0)
res <- mmcc.res$system * delta_time
```

```

N <- sum(res, na.rm=TRUE) / max(mmcc.res$time)
N
#Ймовірність, що в реанімації не буде жодного пацієнта
delta <- diff(mmcc.res$time)
empty <- which(mmcc.res$system == 0)
time_empty <- delta[empty]
sum(time_empty, na.rm=TRUE) / max(mmcc.res$time)
#Ймовірність, що в палаті буде k пацієнтів
delta <- diff(mmcc.res$time)
busy <- which(mmcc.res$system == 14)
time_busy <- delta[busy]
pk <- sum(time_busy, na.rm=TRUE) / max(mmcc.res$time)
pk
#Середній час перебування пацієнта в реанімації
mean(mmcc.arr$activity_time)
#Абсолютна пропускна здатність (кількість пацієнтів за день)
throughput <- lambda * (1 - pn)
throughput
#коефіцієнт завантаженості
mmcc.use <- N/n
mmcc.use
#Еволюція середньої кількості клієнтів у системі + пораховане середнє
значення
plot(mmcc.res, metric="usage", "bed", items="system") + geom_hline(yintercept =
N)
#Будуємо графік зайнятих ліжок у пропорціях
n_beds <- data.frame(prop.table(table(mmcc.res$server)))
names(n_beds)[1] <- "n_beds"
names(n_beds)[2] <- "proportion"
ggplot(data = n_beds, mapping = aes(x = n_beds, y = proportion))+ geom_col(fill
= "plum4", color = "black")

```

```

#Будуємо графік терміна перебування пацієнтів в палаті в пропорціях
length_of_stay <- cut(mmcc.arr$activity_time, breaks = seq(0, 30, 2))
los_prop <- data.frame(prop.table(table(length_of_stay)))
names(los_prop)[2] <- "proportion"

ggplot(data = los_prop, mapping = aes(x = length_of_stay, y = proportion))+
geom_col(fill = "plum4", color = "black")

#Будуємо графіки ймовірності перебування в палаті k пацієнтів в залежності
від кількості ліжок, будемо змінювати n_40 = 40 на n_30 = 30 і n_20 = 20

lambda <- 3
mu <- 1/7
n_40 <- 40
mmcc_40.queue <- trajectory() %>%
  seize("bed", amount=1) %>%
  timeout(function() rexp(1, mu)) %>%
  release("bed", amount=1)
mmcc_40.env <- simmer() %>%
  add_resource("bed", capacity=n_40, queue_size=0) %>%
  add_generator("patient", mmcc_40.queue, function() rexp(100, lambda)) %>%
  run(until=2000)
mmcc_40.res <- get_mon_resources(mmcc_40.env)
mmcc_40.arr <- get_mon_arrivals(mmcc_40.env)
probability <- c()
for (k in 0:n_40){
  delta_40 <- diff(mmcc_40.res$time)
  busy_40 <- which(mmcc_40.res$system == k)
  time_busy_40 <- delta_40[busy_40]
  pk_40 <- sum(time_busy_40, na.rm=TRUE) / max(mmcc_40.res$time)
  probability[k + 1] = pk_40
}
patient_max40 = c(0:40)

```

```

df_1 <- data.frame(patient_max40, probability)
df_1 ggplot(df_1, aes(patient_max40, probability))+ geom_line()
#Графік залежності завантаженості від мю і лямбда
library(plot3D)
utilization_1 <- c()
n <- 30
i <- 1
for (mu in 5:9){
  mmcc.queue <- trajectory() %>%
  seize("bed", amount=1) %>%
  timeout(function() rexp(1, 1/mu)) %>%
  release("bed", amount=1)
for (lambda in 1:5){
  mmcc.env <- simmer() %>%
  add_resource("bed", capacity=n, queue_size=0) %>%
  add_generator("patient", mmcc.queue, function() rexp(100, lambda)) %>%
  run(until=2000)
mmcc.res <- get_mon_resources(mmcc.env)
mmcc.arr <- get_mon_arrivals(mmcc.env)
delta_time <- diff(mmcc.res$time)
delta_time <- c(delta_time, 0)
res <- mmcc.res$system * delta_time
N <- sum(res, na.rm=TRUE) / max(mmcc.res$time)
mmcc.use <- N/n
utilization_1[i] <- mmcc.use
  i = i+1 }
}
mu_2 <- c(1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9)
lambda_2 <- c(1, 2, 3, 4, 5)

```

```
utilization_1
```

```
utilization <- matrix(utilization_1, nrow=5, ncol=5, byrow=TRUE)
```

```
hist3D(mu_2,lambda_2,utilization, zlim=c(0,1), theta=50, phi=40,
axes=TRUE,label=TRUE, nticks=5, ticktype="detailed", space=0.5,
lighting=TRUE, light="diffuse", shade=0.5, bty = "g", xlab = "mu", ylab =
"lambda", zlab = "utilization", cex.axis = 0.5)
```

```
#Графік залежності ймовірності втрати від мю і лямбда
```

```
) library(plot3D)
```

```
loss_1 <- c()
```

```
n <- 3
```

```
i <- 1
```

```
for (mu in 3:12){
```

```
  mmcc.queue <- trajectory() %>%
```

```
  seize("bed", amount=1) %>%
```

```
  timeout(function() rexp(1, 1/mu)) %>%
```

```
  release("bed", amount=1)
```

```
for (lambda in 1:10){
```

```
  mmcc.env <- simmer() %>%
```

```
  add_resource("bed", capacity=n, queue_size=0) %>%
```

```
  add_generator("patient", mmcc.queue, function() rexp(100, lambda)) %>%
```

```
  run(until=2000)
```

```
mmcc.res <- get_mon_resources(mmcc.env)
```

```
mmcc.arr <- get_mon_arrivals(mmcc.env)
```

```
pn <- sum(!mmcc.arr$finished) / nrow(mmcc.arr)
```

```
loss_1[i] <- pn
```

```
  i = i+1 }
```

```
}
```

```
mu_1 <- c(1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11, 1/12)
```

```
lambda_1 <- c(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
```

```
lossing <- matrix(loss_1, nrow=10, ncol=10, byrow=TRUE)
```

```
hist3D(mu_1,lambda_1,lossing, zlim=c(0,1), theta=50, phi=40,
axes=TRUE,label=TRUE, nticks=5, ticktype="detailed", space=0.5,
lighting=TRUE, light="diffuse", shade=0.5, bty = "g", xlab = "mu", ylab =
"lambda", zlab = "probability_of_loss", cex.axis = 0.5)
```

#будуємо графік еволюції часу обслуговування

```
plot(mmcc.arr, metric="activity_time")
```

# Будуємо графік залежності ймовірності що в системі k пацієнтів при різних лямбдах (змінюємо їх на 1, 3, 5 записуємо у вектори, об'єднуємо в датафрейм і будуємо графік)

```
lambda_5 <- 5
```

```
mu <- 1/7
```

```
n <- 30
```

```
mmcc5.queue <- trajectory() %>%
```

```
  seize("bed", amount=1) %>%
```

```
  timeout(function() rexp(1, mu)) %>%
```

```
  release("bed", amount=1)
```

```
mmcc5.env <- simmer() %>%
```

```
  add_resource("bed", capacity=n, queue_size=0) %>%
```

```
  add_generator("patient", mmcc5.queue, function() rexp(100, lambda_5)) %>%
```

```
  run(until=2000)
```

```
mmcc5.res <- get_mon_resources(mmcc5.env)
```

```
mmcc5.arr <- get_mon_arrivals(mmcc5.env)
```

```
lambda5 <- c()
```

```
for (k in 0:n){
```

```
  delta_5 <- diff(mmcc5.res$time)
```

```
  busy_5 <- which(mmcc5.res$system == k)
```

```
  time_busy_5 <- delta_5[busy_5]
```

```
  pk_5 <- sum(time_busy_5, na.rm=TRUE) / max(mmcc5.res$time)
```

```
  lambda5[k + 1] = pk_5 }
```

```
patient = c(0:30)
```

```
df_4 = data.frame(patient, lambda3, lambda5, lambda1)
```

```
df_4  
library(tidyr)  
df_4 %>%  
gather(lambda, value, lambda3, lambda5, lambda1) %>%  
ggplot(aes(x=patient, y=value, color=lambda))+ ylab("probability")+ geom_line()
```