КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

ІДЕНТИФІКАЦІЙНО-ПСЕВДОІНВЕРСНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Виконавець:
студент четвертого курсу бакалаврату

Стоян Олександр Олегович

Науковий керівник:
доктор фіз.-мат. наук, професор
Стоян Володимир Антонович

Роботу заслухано на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендовано до захисту, протокол №18 від «10» червня 2022р.

Завідувач кафедри МСС
доктор техн. наук, доцент
Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2022

Анотація

Розглядається інтегральна математична модель лінійного просторово розподіленого динамічного процесу. З використанням дискретно визначеної інформації про вхід-вихід моделі за середньоквадратичним критерієм будується матриця значень її ядра. Запропонований алгоритм розв'язання задачі тестується на двовимірному хвильовому процесі, ядро інтегральної математичної моделі якого відоме в аналітичному вигляді. Виконана оцінка отриманих математичних результатів.

ЗМІСТ

ВСТУП 5
РОЗДІЛ 1 7
МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ ТА ПРОБЛЕМИ ЇХ ПОБУДОВИ. 7
1.1. Математичні моделі класично визначених просторово розподілених динамічних процесів. 7
1.1.1. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем 7
1.1.2. Лінійні дискретно розподільні системи 9
1.1.3. Проблеми математичного моделювання стану просторово розподілених динамічних систем 12
1.1.4. Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях 15
1.2. Інтегральні (математичні) моделі лінійних просторово розподілених систем та проблеми їх побудови. 18
1.2.1. Функція Гріна для просторово-необмежених систем 18
1.2.2. Інтегральні еквіваленти диференціальних математичних моделей усталеної динаміки просторово-необмежених систем 18
1.3. Постановка задач ідентифікації математичної моделі просторово розподілених динамічних систем. 20
РОЗДІЛ 2 24
МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. 24
2.1. Ідентифікація матриці значень функції Гріна лінійних просторово розподілених динамічних систем 24
2.1.1. Лінійна ідентифікація. 24
2.1.2. Квазілінійна ідентифікація. 25
2.1.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація. 26

2.2. Просторово розподілені динамічні системи з дискретно спостережуваним станом. 27

2.2.1. Лінійна ідентифікація. 27

2.2.2. Квазілінійна ідентифікація. 28

2.2.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація. 30

2.3. Просторово розподілені системи із неперервно спостережуваним станом. 32

2.3.1. Лінійна ідентифікація. 32

2.3.2. Квазілінійна ідентифікація. 33

2.3.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація. 35

РОЗДІЛ 3 37

КОМП'ЮТЕРНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ. 37

3.1. Постановка задачі 37

3.2. Методика розв'язання задачі 40

3.3. Розв'язок задачі лінійної ідентифікації. 40

3.4. Програмна реалізація розв'язку задачі лінійної ідентифікації. 44

3.4.1. Опис інтерфейсу користувача програми 45

3.4.2. Алгоритм роботи з програмою 45

3.5. Оцінка результатів дослідження. 47

ВИСНОВКИ 51

Перелік джерел посиланнь 52

ВСТУП

Моделювання – це один із прогресивних методів, що широко застосовується у сучасній науці і в першу чергу, її прикладних галузях. Моделювання дозволяє прискорити технічний прогрес, суттєво змінити терміни освоєння нових виробництв. Математичне моделювання є одним із найсучасніших напрямків, що тісно пов’язано з впровадженням сучасної комп’ютерної техніки та інформаційних технологій.

П'ятдесят років тому слова «модель», «моделювання» були відомі тільки дуже вузькому кругу високопрофесійних фахівців, зв'язаних або з дослідженням складних фізичних і природних процесів і явищ, або із створенням складних технічних об'єктів (в основному, як правило, військового призначення). Сьогодні слова «модель» і «моделювання» відомі навіть школярам, використовуються в звичайному житті і вже не сприймаються як вузькоспеціальні терміни. Комп'ютерні інформаційні технології розширили можливості моделювання і сьогодні важко уявити науково-дослідну і серйозну проектну діяльність без використання методології і сучасних засобів побудови і використання моделей. Можна констатувати, що за останні десятиліття моделювання оформилося в самостійну міждисциплінарну область знань зі своїми об'єктами, закономірностями, підходами і методами дослідження і відноситься до загальних методів наукового пізнання. У роботі розглядаються методи дослідження математичних моделей диференціального та інтегрального типів для процесів і явищ, природа й особливості функціонування яких не дозволяють зробити такі моделі математично коректними, як цього вимагають класичні методи диференціальних рівнянь, математичної фізики та обчислювальної математики. Некоректність математичної моделі вбачатимемо в неузгодженості кількості та якості спостережень за процесом (явищем) з вимогами класичного математичного та обчислювального апарату, який міг би бути використаний для дослідження такої моделі. Розглядаються процеси та явища довільної природи,

функція стану залежить від кількох змінних. Ці координати називаються просторово-часовими.

Також розглядаються задачі побудови зазначеної функції стану за наявності ніяк не регламентованої кількості інформації про поточний, початковий і крайовий стани системи, яку спостерігачі за процесом надають дискретно або неперервно в зручних для них точках, областях та інтервалах.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ ТА ПРОБЛЕМИ ЇХ ПОБУДОВИ.

У цьому розділі буде визначено коло систем і процесів на вивчення динаміки яких буде спрямована ця робота. Також буде описано особливості побудови математичних моделей таких систем. Сформульовані проблеми по дослідженню стану розглядуваних систем та керування ними. Описано ідею розв'язування задач ідентифікації параметрів математичної моделі системи та моделювання зовнішньо-динамічної обстановки, в якій система функціонує. Показано формулювання задач ідентифікації та псевдооберненню лінійних та квазілійних алгебраїчно, інтегрально та функціонально перетворюючих систем. Розв'язання конкретних задач по дослідженню просторово часових систем.

1.1. Математичні моделі класично визначених просторово розподілених динамічних процесів.

1.1.1. Псевдообернення лінійних алгебраїчних систем

Для розв'язування математичних моделей будем використовувати лінійну алгебраїчну систему вигляду:

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

де

- $A-(m\times n)$-вимірна матриця,
- x, b, n та m-вимірні вектори.

Базовою системою для дослідження реальних процесів та явищ є система (1.1). Щоб розв'язати математичну модель вигляду (1.1) у межах лінійної алгебри ми досліджуємо умови існування розв'язку системи (1.1), потім будуємо розв'язок і оцінюємо його однозначність. Але поза увагою

лінійної алгебри залишається питання про визначення вектора x ,який би при заданих A та b найкраще задовольняв співвідношення (1.1) при відсутності розв'язку системи.

За довільних A та b побудуємо вектор $x \in R^n$, такий що:

- точно задовольняє рівняння (1.1), якщо воно має розв'язок;
- був елементом множини розв'язків, якщо таких розв'язків багато;
- був однозначним середньоквадратичним наближенням до розв'язку системи (1.1);
- був елементом множини таких наближень за умов неоднозначності обернення (1.1).

Побудуємо множину для системи (1.1):

$$\Omega_x = \{ x \in R^n : \|Ax - b\|^2 \to \min_x \}. \quad (1.2)$$

За умов неоднозначності множини (1.2) виділимо з неї вектор $\hat{x}$ такий, щоб

$$\hat{x} = \arg\min_{x \in \Omega_x} \|x\|^2. \quad (1.3)$$

Розв'язком задачі (1.1)–(1.3) є:

$$\Omega_x = \{ x : x = A^+ b + v - A^+ A v, \forall v \in R^n \}, \quad (1.16)$$

$$\hat{x} = A^+ b,$$

де

A^+ – псевдообернена матриця, її запишемо як:

$$A^+ = A_2^T (A_2 A_2^T)^+ (A_1^T A_1)^+ A_1^T, \quad (1.4)$$

співвідношення (1.4) коректне при заданих $A_1 \in R^{m\times r}$ та $A_2 \in R^{r\times n}$ (де r – ранг матриці A) $A = A_1 A_2$ та

$$A^+ = A^T (AA^T)^+, \;\; A^+ = (A^T A)^+ A^T. \tag{1.5}$$

Розв'язок (1.16) задачі (1.1)–(1.3) буде однозначним, якщо:

$$\det(A^T A) > 0. \tag{1.6}$$

Точність розв'язку оцінюється величиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{x\in\Omega_x} \|Ax - b\|^2 = b^T b - b^T AA^+ b. \tag{1.7}$$

1.1.2. Лінійні дискретно розподільні системи

Розглянемо узагальнення розв’язку (1.2), (1.3) системи (1.1), коли вихідний вектор $b \in R^m$ отримаємо після під сумовування N лінійно перетворених n-вимірних векторів $x_1,...,x_N$, яке описується співвідношенням:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i x_i = b, \tag{1.8}$$

де

A_i $(i = \overline{1, N})$ – задані, $(m \times n)$-вимірні матриці.

Перетворення системи (1.8) може мати обернення. У іншому випадку обмежимося середньоквадратичним наближенням до такого обернення. Тоді для системи (1.8) можемо побудувати множину:

$$\Omega_x = \{ (x_1,..., x_N) : \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i x_i - b \right\|^2 \to \min_{x_1 \ldots x_N} \}. \tag{1.9}$$

За неоднозначності Ω_x виділимо вектори $\hat{x}_i$ $(i = \overline{1, N})$ такі, щоб:

$$\hat{x}_i = \arg\min_{x_i \in \Omega_x} \|x_i\|^2 \quad (i = \overline{1, N}). \tag{1.10}$$

Розв'язком задачі (1.8)–(1.10) є вектори вигляду:

$$x_i = A_i^T P_1^+ b + v_i - A_i^T P_1^+ A_v \quad (i = \overline{1, N}), \tag{1.11}$$

де

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N} A_i A_i^T,$$

$$A_v = \sum_{i=1}^{N} A_i v_i .$$

За довільних n-вимірних $v_1, ..., v_N$, що дорівнюють нулю, якщо:

$$\det\left[A_i^T A_j \right]_{i,j=1}^{N} > 0, \tag{1.12}$$

та

$$\hat{x}_i = A_i^T P_1^+ b. \tag{1.13}$$

Точність розв'язання задачі ми оцінюємо величиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{(x_1,..,x_N) \in \Omega_x} \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i x_i - b \right\|^2 = b^T b - b P_1 P_1^+ b. \tag{1.14}$$

Розв'язок (1.11), (1.13) задачі (1.8)–(1.10) також може бути поширений на задачу псевдообернення системи

$$\sum_{i=1}^{N} A(t_i) x(t_i) = b, \tag{1.15}$$

значення $x(t_i)$ ($i=\overline{1,N}$) вектор-функцій $x(t)\in R^n$ ($t\in[0,T]$), які визначені в точках $t_i\in[0,T]$ тут $i=\overline{1,N}$ і лінійно перетворені матрицями $A(t_i)\in R^{m\times n}$ ($i=\overline{1,N}$), трансформує у вектор $b\in R^m$. При цьому множина

$$\Omega_x=\{\,(x(t_i)\,(i=\overline{1,N})):\left\|\sum_{i=1}^{N}A(t_i)x(t_i)-b\right\|^2\to\min_{x(t_i)\,(i=\overline{1,N})}\}\,, \tag{1.16}$$

значень $x(t_i)\,(i=\overline{1,N})$ вектора $x(t)$ та $\hat{x}(t_i)$ ($i=\overline{1,N}$) такі, що:

$$\hat{x}(t_i)=\arg\min_{x(t_i)\in\Omega_x}\|x(t_i)\|^2\ \ (i=\overline{1,N})\,, \tag{1.17}$$

визначатимуться співвідношеннями:

$$\begin{aligned}&\Omega_x=\{(x(t_i)\,(i=\overline{1,N})):\,x(t_i)=\\&=A^T(t_i)P_1^{+}b+v(t_i)-A^T(t_i)P_1^{+}A_v\},\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\hat{x}(t_i)=A^T(t_i)P_1^{+}b\,, \tag{1.19}$$

де

$$P_1=\sum_{i=1}^{N}A(t_i)A^T(t_i),$$

$$A_v=\sum_{i=1}^{N}A(t_i)v(t_i),$$

а $v(t_i)$ $(i=\overline{1,N})$ є значеннями довільної n-вимірної вектор-функції $v(t)$ аргументу $t\in[0,T]$, яка дорівнює нулю, якщо:

$$\det\left[A^T(t_i)A(t_j)\right]_{i,j=1}^{i,j=N}>0\,. \tag{1.20}$$

Точність розв'язку (1.18), (1.19) задачі (1.16), (1.17) визначається величиною

$$\varepsilon^2 = b^T b - b^T P_1 P_1^+ b. \qquad (1.21)$$

1.1.3. Проблеми математичного моделювання стану просторово розподілених динамічних систем

Розглянемо проблему дослідження функції стану $y(s)$, розподіленої в області $S_0^T = S_0 \times [0,T]$ динамічної системи, логіка функціонування якої визначена рівнянням:

$$L(\partial_s) y(s) = u(s). \qquad (1.22)$$

Для розглядуваного динамічного процесу (1.1) мають місце початкові (при $t = 0$) і крайові (на контурі Γ просторової області S_0) спостереження вигляду:

$$L_r^0(\partial_t) y(s)\big|_{t=0} = Y_r^0(x) \ \ (r = \overline{1, R_0}, x \in S_0), \qquad (1.22)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s)\big|_{s \in \Gamma \times [0,T]} = Y_\rho^\Gamma(s) \ \ (\rho = \overline{1, R_\Gamma}), \qquad (1.23)$$

або

$$L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x = x_l^0 \in S_0}} = Y_{rl}^0 \ \ (r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \qquad (1.24)$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s)\big|_{s = s_l^\Gamma \in \Gamma \times [0,T]} = Y_{\rho l}^\Gamma \ \ (l = \overline{1, L_\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \qquad (1.25)$$

Ми не будемо накладати жодних обмежень, на відміну від прийнятих у класичних розділах диференціальних рівнянь математичної фізики та обчислювальної математики, на кількість R_0 та R_Γ початково-крайових співвідношень (1.22)–(1.25) (також вони можуть бути відсутніми) і на властивості функцій $Y_r^0(x)$ ($r = \overline{1, R_0}$) та $Y_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$). Дискретність спостережень (1.24), (1.25), робить задачі (1.22),(1.23) та (1.1), (1.24), (1.25)

некоректними й не розв'язними методами аналітичної та обчислювальної математики.

Поставимо задачу побудови функції стану $y(s)$, яка будучи б, розв'язком рівняння (1.1), за середньоквадратичним критерієм,

$$\Phi_1 = \sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0,T]} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(s) \right)^2 ds \to \min_{y(s)}, \tag{1.26}$$

за неперервних спостережень (1.22), (1.23) або

$$\Phi_2 = \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 +$$

$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 \to \min_{y(s)}, \tag{1.27}$$

за дискретних спостережень (1.24), (1.25) узгоджувалася з останніми.

Обмеженість області S_0^T функціонування системи (1.1) і наявність трьох факторів зовнішньодинамічного впливу на стан системи $y(s)$, визначення останнього зобразимо співвідношенням:

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \tag{1.28}$$

складові якого відповідають просторово розподіленим початковим і крайовим збуренням.

Для того щоб побудувати функції $y_\infty(s), y_0(s), y_\Gamma(s)$ введемо функцію $G(s - s')$ досліджуваного процесу – функцію Гріна системи (1.1), розглядуваної в необмеженій просторово-часовій області, співвідношенням

$$L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s'), \tag{1.29}$$

тут $\delta(s-s')$ – δ-функція Дірака.

З вище написаного випливають :

$$y_\infty(s) = \int\limits_{S_0^T} G(s-s')u(s')ds', \tag{1.30}$$

$$y_0(s) = \int\limits_{S^0} G(s-s')u_0(s')ds', \tag{1.31}$$

$$y_\Gamma(s) = \int\limits_{S^\Gamma} G(s-s')u_\Gamma(s')ds', \tag{1.32}$$

тут $u_0(s), u_\Gamma(s)$ – функції, дія яких в областях $S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^n \setminus S_0) \times (0, T]$ згідно з (1.26),(1.27) моделюватиме вплив визначених у (1.22)–(1.25) початково-крайових зовнішньодинамічних збурень. Також зауважимо, що моделюючі функції $u_0(s), u_\Gamma(s)$ і $u(s)$, можуть бути визначені такими векторами

$$u = \mathrm{col}(u(s_m), m = \overline{1, M}) \ \ (s_m \in S_0^T), \tag{1.33}$$

$$u_0 = \mathrm{col}(u_0(s_m^0), m = \overline{1, M_0}) \ \ (s_m^0 \in S^0), \tag{1.34}$$

$$u_\Gamma = \mathrm{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}) \ \ (s_m^\Gamma \in S^\Gamma), \tag{1.35}$$

значень $u_m = u(s_m)$ $(m = \overline{1, M})$, $u_{0m} = u_0(s_m^0)$ $(m = \overline{1, M_0})$, $u_{\Gamma m} = u_\Gamma(s_m^\Gamma)$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$.

У такому випадку:

$$y_\infty(s) = \sum_{m=1}^{M} G(s - s_m)u_m, \tag{1.36}$$

$$y_0(s) = \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) u_{0m}, \tag{1.37}$$

$$y_\Gamma(s) = \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) u_{\Gamma m}. \tag{1.38}$$

Проблема побудови функції $y(s)$ буде зведена до знаходження векторів u_0, u_Γ згідно з критеріями (1.26), (1.27). Визначення функції $G(s - s')$ згідно з (1.29) дозволяє стверджувати, що функція стану $y(s)$, зображена як співвідношеннями (1.28), (1.30)–(1.32.) і співвідношеннями (1.28), (1.36)–(1.38), за будь-яких $u_0(s), u_\Gamma(s)$ та u_0, u_Γ з моделлю (1.1) узгоджуватиметься точно.

1.1.4. Математичне моделювання динаміки дискретно спостережуваних систем в обмежених просторово-часових областях

З вище написаних проблем побудови функції $y(s)$, визначеного згідно з (1.1) і спостережуваного згідно з (1.22)–(1.25) процесу буде зводитися до знаходження функцій $u_0(s)$ ($s \in S^0$), $u_\Gamma(s)$ ($s \in S^\Gamma$) або векторів u_0, u_Γ їхніх значень, моделюючих згідно з (1.24), (1.25) початково-крайові збурення (1.22)–(1.25).

Розглянемо задачу побудови функції $y(s)$ $(s \in S_0^T = S_0 \times [0,T])$ стану динамічної системи (1.30) за умови, що спостереження визначені згідно з (1.24),(1.39).

Ми у рівняннях (1.24) та в (1.25) шукали вектори u_0, u_Γ, щоб при визначеному згідно з (1.28) і (1.36)-(1.38) $y(s)$ виконувався критерій (1.27), розв'язок рівняння зведеться до задачі:

$$\Phi_2 \to \min_{u_0, u_\Gamma}. \tag{1.39}$$

Це еквівалентно середньоквадратичному щодо u_{0m} $(m = \overline{1, M_0})$ і $u_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$ оберненню системи лінійних алгебраїчних рівнянь, систему ми отримали з рівнянь (1.24),(1.25) підставивши в них розв'язок (1.28),(1.36)-(1.38):

$$A\bar{u} = \bar{Y}. \tag{1.40}$$

Тут

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_\Gamma \end{pmatrix},\ \bar{Y} = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_\Gamma \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$Y_0 = \mathrm{col}((Y_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}},\ l=\overline{1,L_0}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$Y_\Gamma = \mathrm{col}((Y_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{x=x_l^\Gamma},\ l=\overline{1,L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$A_{11} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^0)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}},\ m=\overline{1,M_0}),\ l=\overline{1,L_0}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{12} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_r^0(\partial_t)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\ l=\overline{1,L_0}),\ r=\overline{1,R_0}),$$

$$A_{21} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^0)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ m=\overline{1,M_0}),\ l=\overline{1,L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \mathrm{col}((\mathrm{str}(L_\rho^\Gamma(\partial_x)G(s-s_m^\Gamma)\Big|_{s=s_l^\Gamma},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\ l=\overline{1,L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}).$$

Згідно з (1.11) вектор $\bar{u}$ є визначений системою (1.40) такий, що

$$\bar{u} = \arg\min_{u\in R^{M_0+M_\Gamma}} \left\|Au-\bar{Y}\right\|^2, \tag{1.41}$$

також ми можемо (1.18) записати у вигляді:

$$\bar{u} = A^+(\bar{Y} - Av) + v,$$

тут

v – довільний вектор розмірністю $M_0 + M_\Gamma$,

A^+ – матриця, псевдообернена до A.

Звідси ми можемо знайти множини:

$$\Omega_0 = \{u_0 : \left\| A\bar{u} - \bar{Y} \right\|^2 \to \min_{u_0, u_\Gamma}\} =$$
$$= \{u_0 : u_0 = (A_{11}^T,\ A_{21}^T) P_1^+ (\bar{Y} - Av) + v_{0,}\ \forall v_0 \in R^{M_0}\} \quad , \tag{1.42}$$

та

$$\Omega_\Gamma = \{u_\Gamma : \left\| A\bar{u} - \bar{Y} \right\|^2 \to \min_{u_0, u_\Gamma}\} =$$
$$= \{u_\Gamma : u_\Gamma = (A_{12}^T,\ A_{22}^T) P_1^+ (\bar{Y} - Av) + v_{\Gamma,}\ \forall v_\Gamma \in R^{M_\Gamma}\}, \tag{1.43}$$

де

$$P_1 = AA^T.$$

Точність моделювання початково-крайових умов (1.24),(1.25) функцією $y(s)$, знайденою згідно із (1.28), (1.36)–(1.38) при $u_0 \in \Omega_0$, $u_\Gamma \in \Omega_\Gamma$, будем визначати величиною:

$$\varepsilon^2 = \min_{y(s)} \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} (L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0)^2 +$$
$$+ \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{s=s_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma)^2 =$$
$$= \min_{y(s)} \Phi_2 = \min_{\substack{u_0 \in \Omega_0 \\ u_\Gamma \in \Omega_\Gamma}} \Phi_2 = \bar{Y}^T \bar{Y} - \bar{Y}^T P_1 P_1^+ \bar{Y}.$$

Отже, якщо у нас $\det A^T A > 0$, з цього випливає що у співвідношеннях (1.42) та (1.43) $v_0 = v_\Gamma \equiv 0$, а розглядуване моделювання однозначне. А якщо $\det A^T A = 0$ це означає розв'язок задачі є неоднозначний.

1.2. Інтегральні (математичні) моделі лінійних просторово розподілених систем та проблеми їх побудови.

1.2.1. Функція Гріна для просторово-необмежених систем

Наведемо розрахункові формули для побудови функції Гріна для випадку, коли останній описується лінійним диференціальним рівнянням. Для систем, неописаних лінійною диференціальною моделлю, пропонується алгоритм ідентифікації ядра інтегрального еквіваленту таких моделей на основі спостереження за їх входом-виходом. Розглянемо як впливають вище приведені методики розв'язування систем на квазілінійні динамічні системи за умов точного та оптимального за певним критерієм узгодження результатів ідентифікації зі спостереженням за ними.

1.2.2. Інтегральні еквіваленти диференціальних математичних моделей усталеної динаміки просторово-необмежених систем

Нехай функція стану $y(s)$ визначається лінійною диференціальною моделлю вигляду:

$$L(\partial_s)y(s)=u(s), \quad s=(x,t)\in R^{n+1}, \tag{1.62}$$

тут:

- $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, яким описується логіка системи.
- $u(s)$ – просторово розподілене зовнішньо-динамічне збурення, яке підтримує динаміку системи.

Запишемо інтегральне обернення математичної моделі (1.62):

$$y(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')u(s')ds'. \tag{1.63}$$

Про ядро $G(s-s')$ нам відомо, що:

$$L(\partial_s)G(s-s') = \delta(s-s'), \tag{1.64}$$

де $\delta(s-s')$ – дельта-функція Дірака.

Використовуючи математичну модель (1.63) ми зможемо будувати розрахункові формули для розв'язання задач.

Для практичної побудови функції $G(s-s')$, яка визначена згідно моделей (1.62),(1.63. Будемо виходити з того, шо розв'язком моделі (1.64) є :

$$G(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L(i\lambda)} \prod_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k (x_k - x_k')} e^{i\mu(t-t')} d\lambda, \tag{1.65}$$

тут i – уявна одиниця, $\lambda = \lambda_1, ..., \lambda_n, \mu$, $d\lambda = d\lambda_1 ... d\lambda_n d\mu$.

Фізична природа ядра $G(s-s')$ математичної моделі (1.65) вимагає, щоб визначена згідно (1.65) функція $G(s-s')$:

- при $s = s'$ мала особливість;
- за координатами s та s' була неперервною;
- при $|s-s'| \to \infty$ затухала.

Використовуючи методи комплексної змінної в теорії функції ми функцію (1.65) подамо співвідношенням:

$$G(s-s') = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Res}(\varphi(p), p_k),$$

де

p_k – корені полінома $L(p)$,

$$\varphi(p) = \frac{1}{L(p)} e^{p(s-s')},$$

$\mathrm{Res}(\varphi(p), p_k)$ – інтегральний лишок функцій $\varphi(p)$ в точках p_k,

при цьому, якщо p_k – простий корінь рівняння $L(p) = 0$ то:

$$\mathrm{Res}(\varphi(p), p_k) = \frac{1}{\partial_p L(p)|_{p=p_k}} e^{p_k(s-s')},$$

або якщо корінь p_k має кратність K то:

$$\mathrm{Res}(\varphi(p), p_k) = \frac{1}{(K-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{\partial^{K-1}}{\partial p^{K-1}} [(p - p_k)^K \varphi(p)],$$

Останнє рівняння показує перехід від диференціальної моделі (1.62) до її інтегрального еквіваленту (1.63), який дозволяє наведені вище алгоритми розв'язання задач математичного моделювання стану неповно спостережуваних, просторово розподілених динамічних систем використовувати для дослідження лінійного динамічного процесу в заданій просторово-часовій області.

1.3. Постановка задач ідентифікації математичної моделі просторово розподілених динамічних систем.

Для розв'язування прямих та обернених задач математичного моделювання динаміки неповно спостережуваних просторово розподілених систем на процеси і явища, диференціальна математична модель динаміка яких є невідомою. Дамо алгоритм побудови матриці

$$G = [G(s_l - s'_m)]_{l,m=1}^{l=L;m=M},$$

їх значень та перерізів,

$$G_1(s') = col(G(s_l - s'), l = \overline{1, L}),$$
$$G_2(s) = str(G(s - s'_m), m = \overline{1, M}) \text{ ,}$$

передатної функції $G(s - s')$ інтегральної математичної моделі (1.63) для процесів і явищ, для яких відомі дискретні :

$$\overline{y}^{(i)} = col(y^{(i)}(s_l), l = \overline{1, L}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\overline{u}^{(i)} = col(u^{(i)}(s'_m), m = \overline{1, M}), \quad i = \overline{1, n},$$

(для побудови матриці G), або дискретно-неперервні:

$\overline{y}^{(i)}$, $u^{(i)}(s)$ $(i = \overline{1, n})$ - для побудови перерізу $G_1(s)$;

$y^{(i)}(s)$, $\overline{u}^{(i)}$ $(i = \overline{1, n})$ -для побудови перерізу $G_2(s)$;

спостереження за станом $y(s)$ процесу або явища та функцією $u(s)$ просторово розподілених зовнішньо-динамічних збурень, які цей стан супроводжують.

При цьому матрицю та перерізи $G_1(s), G_2(s)$ побудуємо так, щоб:

$$G\overline{u}^{(i)} = \overline{y}^{(i)}, \tag{1.66}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(s')u^{(i)}(s')ds' = \overline{y}^{(i)}, \tag{1.67}$$

$$G_2(s)\overline{u}^{(i)} = y^{(i)}(s), \tag{1.68}$$

для $i = \overline{1, n}$.

Якщо інтегральна математична модель (1.63) не ідентифікується лінійно згідно (1.66) – (1.68), виконаємо нелінійне (з деякого класу) перетворення $P(u(s))$, $P(\bar{u})$ її входів $u(s)$ і $\bar{u}$ побудуємо матрицю G та перерізи $G_1(s)$, $G_2(s)$ таким чином, щоб:

$$GP(\bar{u}^{(i)}) = \bar{y}^{(i)}, \tag{1.69}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(s')P(u^{(i)}(s'))ds' = \bar{y}^{(i)}, \tag{1.70}$$

$$G_2(s)P(\bar{u}^{(i)}) = y^{(i)}(s), \tag{4.71}$$

для $i = \overline{1,n}.$

Якщо ми успішно розв'язали задачі (1.69)-(1.71) і лінійну інтегральну математичну модель (1.63) розглядуваного процесу або явища можна успішно замінити наступною квазілінійною функцією:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s-s')P(u(s'))ds' = y(s). \tag{1.72}$$

Якщо задачі (1.69)-(1.72) не розв'язуються точно, то при побудові матриці G та перерізів $G_1(s)$, $G_2(s)$ обмежимося випадком, коли при вибраному з деякого класу нелінійному перетворенні P(u):

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| GP(\bar{u}^{(i)}) - \bar{y}^{(i)} \right\|^2 \to \min_{P(\bullet),G}, \tag{1.73}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} G_1(s')P(u^{(i)}(s'))ds' - \bar{y}^{(i)} \right\|^2 \to \min_{P(\bullet),G_1(s)}, \tag{1.74}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\| G_2(s) P(\bar{u}^{(i)}) - y^{(i)}(s) \right\|^2 ds \to \min_{P(\bullet), G_2(s)} . \qquad (1.75)$$

Останнє еквівалентне тому, що квазілінійна математична модель (1.72) буде побудована згідно критерію

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s') P(u(s')) ds' - y(s) \right)^2 \to \min_{P(\bullet), G(s-s')},$$

і досліджуваний процес або явище буде описувати оптимально, але наближено.

Детальніше про ідентифікацію розглянемо у наступному розділі.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

2.1. Ідентифікація матриці значень функції Гріна лінійних просторово розподілених динамічних систем

Ведемо наступні матриці:

$$U = (\overline{u}^{(1)},\ldots,\overline{u}^{(n)}) = \begin{pmatrix} u_{(1)}^T \\ \vdots \\ u_{(M)}^T \end{pmatrix},$$

$$Y = (\overline{y}^{(1)},\ldots,\overline{y}^{(n)}) = \begin{pmatrix} y_{(1)}^T \\ \vdots \\ y_{(L)}^T \end{pmatrix}.$$

Завдяки цим матрицям ми можемо дати розв'язки задач (1.66),(1.69),(1.77) побудови матриці G значень $G(s_l - s'_m)$ $(l = \overline{1,L}; m = \overline{1,M})$ ядра $G(s-s')$ інтегральної математичної моделі (1.63) просторово розподіленого динамічного процесу (1.62).

2.1.1. Лінійна ідентифікація.

Нехай:

$$y_{(i)}^T (I_n - U^+ U) y_{(i)} = 0 \quad \forall i = \overline{1,L}, \tag{2.1}$$

Розв'язавши задачу (1.66) отримаємо матрицю

$$G = YU^+ + V - VUU^+ \quad \forall V \in R^{L\times M}$$

з елементами

$$G(s_l - s'_m) = y_{(l)}^T U^+ e_m + v_{lm} - v_{(l)}^T U U^+ e_m, \qquad (2.2)$$

тут

e_m $(m = \overline{1, M})$ – m-й орт відповідної розмірності.

$$V = \left[v_{lm}\right]_{l,m=1}^{l=L;m=M} = \mathrm{col}(v_{(l)}^T, \quad l = \overline{1, L})$$

Якщо $\det UU^T > 0$ то $V \equiv 0$.

2.1.2. Квазілінійна ідентифікація.

Якщо умови (2.1) не виконуються розглянемо задачу (1.69). Ми пропускаємо що (2.1) не виконується тільки за деякого $s \in \{1, ..., L\}$, для якого:

$$y_{(s)}^T (I_n - U^+ U)^T (I - U_{(i_*)} U_{(i_*)}^+)(I_n - U^+ U) y_{(s)} = 0$$

при i_* та $U_{(i_*)}$ визначених співвідношенням

$$\begin{aligned} & u_{(i_*)}^T U^+ e_{i_*} \neq 1, \\ & U_{(i_*)} = u_{(i_*)}^{2\otimes} \cdots u_{(i_*)}^{k_*\otimes}, \end{aligned} \qquad (2.3)$$

тут

- $e_{i_*} - i_*$-орт.
- $u_{(i_*)}^{k\otimes} = u_{(i_*)} \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{k\ разів} u_{(i_*)}$ $\otimes$ – операція декартового добутку для k-катих, $(I_n - U^+ U) u_{(i_*)}^{k\otimes} > 0$

і k_*, для якого

$$\mathrm{rank}(I_n - U^+ U)(U_{(i_*)} \vdots u_{(i_*)}^{(k+1)\otimes}) = k_* - 1. \qquad (2.4)$$

За таких умов для $l=\overline{1,L}\quad (l\neq i_*)$ та $m=\overline{1,M}$ $G(s_l-s'_m)$ визначається як і у (4.16), але

$$G(s_{i_*}-s'_m)=y^T_{(i_*)}\tilde{U}^+e_m+v_{i_*m}-v^T_{(i_*)}\tilde{U}\tilde{U}^+e_m.$$

Матрицю $\tilde{U}$ при цьому отримаємо з матриці U заміною $u^T_{(i_*)}$ - рядка на $[\sum_{j=2}^{k_*}\alpha_j u^{j\otimes}_{(i_*)}]^T$, де

$$\alpha=(\alpha_2,\ldots,\alpha_{k_*})^T=U^+_{(i_*)}(I_n-U^+U)y_{(s)}.$$

Цим і закінчується побудова нелінійної моделі

$$GP(\bar{u})=\bar{y} \qquad (2.5)$$

для розглядуваного випадку.

2.1.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація.

Розглянемо випадок коли співвідношення (2.3) не виконується за жодного $i_*\in\{1,\ldots,M\}$ і згідно (1.69) ідентифікація матриці G не можлива, тому при побудові моделі вигляду (2.5) будемо виходити з оптимізаційної задачі (1.77).

У такому випадку визначене вище нелінійне перетворення $P(\cdot)$ можна виконати над рядком з номером:

$$i_*=\arg\min_{i\in\{\overline{1,M}\}}\{y^T_{(s)}Z(\bar{U})y_{(s)}-(y^T_{(s)}P_iP_i^+y_{(s)})^2\},$$

тут:

- $P_i=D_iD_i^T,\quad D_i=Z(\bar{U})(u^{1\otimes}_{(i)}\vdots\ldots\vdots u^{k_*\otimes}_{(i)}),\quad Z(\bar{U})=I_n-U^+U+\dfrac{q_iq_i^T}{\|q_i\|^2}$
- $q_i=U^+e_i, u^{j\otimes}_{(i_*)}\quad (j=\overline{1,k_*})$

та k_*, визначених згідно (2.3), (2.4) і $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_*})^T=D^+_{i_*}y(s).$

2.2. Просторово розподілені динамічні системи з дискретно спостережуваним станом.

2.2.1. Лінійна ідентифікація.

Розглянемо задачу побудови стовпця-функції $G_1(s)$, з використанням співвідношення

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_1(s)u(s)\mathrm{d}s = \overline{y}, \qquad (2.6)$$

описується залежність спостережуваних в точках $s_l\ (l=\overline{1,L})$ станів розподіленої просторово-часової системи від функції зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$.

Якщо виконуються такі умови:

$$y_{(l)}^T y_{(l)} - y_{(l)}^T P_2 P_2^+ y_{(l)} = 0, \qquad (2.7)$$

тут:

- $l=\overline{1,L}$
- $P_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} u^{(i)}(s)u^{(j)}(s)ds\right]_{i,j=1}^{i,j=n}$,

то розв'язком задачі (1.67) буде стовпець-функція:

$$G_1(s) = YP_2^+\overline{u}(s) + v(s) - V_U P_2^+\overline{u}(s). \qquad (2.8)$$

Тут:

- $v(s)=\mathrm{col}(v_i(s), i=\overline{1,L})$ - довільна інтегровна в усій просторово-часовій області вектор-функція розмірності L;
- $\overline{u}(s)=\mathrm{col}(u^{(j)}(s),\quad j=\overline{1,n})$ - вектор-функція спостережень за розподіленим просторово-часовим збуренням системи.

$$V_U = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} v_i(s)u^{(j)}(s)ds\right]_{i,j=1}^{i,j=n}.$$

Із (2.8) з врахуванням визначення стовпця-функції $G_1(s)$ ми знаходимо значення:

$$G(s_l - s) = (y^{(1)}(s_l), \ldots, y^{(n)}(s_l))P_2^+ \bar{u}(s) + v_l(s) - v_{lu}^T P_2^+ \bar{u}(s),$$

тут

$$v_{lu} = \mathrm{col}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} v_l(s) u^{(j)}(s) ds,\ j = \overline{1,n} \right),$$

передатної функції $G(s - s')$ інтегральної моделі (1.63). Значення ці будуть однозначними $(v(s) \equiv 0)$ при

$$\lim_{N \to \infty} \det \left[\sum_{k=1}^{n} \bar{u}^{(k)}(s_i) \bar{u}^{(k)}(s_j) \right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0.$$

2.2.2. Квазілінійна ідентифікація.

Розглянемо випадок знаходження вектор-функції $G_1(s)$, коли система (1.67) розв'язків не має, а за наявних спостережень за процесом, вектор-функція $G_1(s)$ не ідентифікується точно. У такому випадку як мінімум одна з умов (2.7) не виконується. Для конкретності вважатимемо, що при $\sigma \in \{1, 2, ..., L\}$ івизначеному вище P_2.

$$y_{(\sigma)}^{\mathrm{T}} y_{(\sigma)} - y_{(\sigma)}^{\mathrm{T}} P_2 P_2^+ y_{(\sigma)} > 0$$

При ідентифікації математичної моделі (1.63) в такому випадку будемо виходити з її нелінійної модифікації:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G_1(s) P(u(s)) \mathrm{d}s = \bar{y}. \qquad (2.9)$$

Проблема побудови вектор-функції $G_1(s)$ в моделі (2.9) зведеться до системи (1.70). Спробуємо розв'язати за наявності значення $s = s_*$, для якого

$$u_*^T P_2^+ u_* \neq 1 \qquad (2.10)$$

при $u_*^T = (u^{(1)}(s_*),...,u^{(n)}(s_*))$.

Нелінійне перетворення вектора u_* виконується за умови (2.10) і утворює послідовність векторів:

$$u_*^{j\otimes} = u_* \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{j \text{ разів}} u_* \quad (j = \overline{2,k_*}),$$

$$(I - P_2^+ P_2) u_*^{j\otimes} > 0 \quad (k = \overline{2,k_*}), \qquad (2.11)$$

$$\operatorname{rank}((I - P_2^+ P_2)(u_*^{2\otimes},\ldots,u_*^{k_*\otimes},u_*^{(k_*+1)\otimes})) = k_* - 1. \qquad (2.12)$$

Виконаємо нелінійне перетворення $\sum_{j=2}^{k_*} c_j u_*^{j\otimes}$ вектора u_* значень вхідної вектор-функції $u_*(s) = (u^{(1)}(s),\ldots,u^{(n)}(s))^T$ в точці $s = s_*$, в якому

$$c = (c_2,\ldots,c_{k_*})^T = U_*^T P_*^+ Y_{(\sigma)} + v - U_*^T P_*^+ v \quad \forall v \in R^{k_*-1},$$

при

$$U_* = (u_*^{2\otimes},\ldots,u_*^{k_*\otimes}), \quad P_* = U_* U_*^T,$$
$$Y_{(\sigma)} = (I - P_2^+ P_2) y_{(\sigma)}$$

та k_* визначеному умовами (4.25), (4.26) ($v \equiv 0$, якщо $\det U_*^T U_* > 0$).

Після чого компоненти $G(s_l - s)$ $(s_l \neq s_\sigma,\ \ l = \overline{1,L})$ вектор-функції $G_1(s)$ визначимо співвідношеннями

$$G(s_l - s) = (y^{(1)}(s_l),\ldots,y^{(n)}(s_l)) P_2^+ \bar{u}(s) + v_l(s) - \bar{v}_{lu}^T P_2^+ \bar{u}(s),$$
$$G(s_\sigma - s) = (y^{(1)}(s_\sigma),\ldots,y^{(n)}(s_\sigma)) \bar{P}_2^+ \bar{\bar{u}}(s) + v_\sigma(s) - \bar{\bar{v}}_{\sigma u}^T \bar{P}_2^+ \bar{\bar{u}}(s)$$
$$(l = \overline{1,L}, \quad l \neq \sigma),$$

тут $v_l(s)$ $(l = \overline{1,L})$ – довільні інтегровні за своїми аргументами функції, а

$$\bar{u}(s) = \mathrm{col}(u^{(i)}(s), \quad i = \overline{1,n}),$$
$$\bar{\bar{u}}(s) = \mathrm{col}(u_*^{(i)}(s), \quad i = \overline{1,n})$$

при

$$u_*^{(i)}(s) = \begin{cases} u^{(i)}(s), & \text{при } s \neq s_{i_*}, \\ \sum_{j=2}^{k_*} c_j (u^{(i)}(s))^j, & \text{при } s = s_{i_*}, \end{cases}$$

$$P_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(i)}(s) u^{(j)}(s) ds \right]_{i,j=1}^{i,j=n},$$
$$\bar{P}_2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} u_*^{(i)}(s) u_*^{(j)}(s) ds \right]_{i,j=1}^{i,j=n},$$
$$\bar{v}_{lu} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_l(s) \bar{u}(s) ds \ (l = \overline{1,L}, l \neq \sigma),$$
$$\bar{\bar{v}}_{\sigma u} = \int_{-\infty}^{+\infty} v_\sigma(s) \bar{\bar{u}}(s) ds.$$

2.2.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація.

Розглянемо випадки задачі побудови вектор-функції $G_1(s)$, коли:

1) умова (2.7) лінійної ідентифікації системи не виконується, тоді задачу (1.74) ми не можемо розв'язати;
2) не виконуються умови нелінійної ідентифікації:
   a) не існує лінійно залежних рядків матриці U тобто умова (2.10) не виконується.
   b) за виконання умови (a) не можна побудувати послідовність векторів $u_*^{j\otimes}$ $(j = \overline{2,k_*})$, що задовольняли б умови (2.11), (2.12).

За умовою 1) задача (1.67) не має точного розв'язку, а за умовою 2) задача (1.70) не може бути розв'язана й отримана з (1.72) нелінійним перетворенням функції розподілених просторово-часових збурень $u(s)$.

Тоді значення s_0 аргументу s, яким визначається рядок

$$u^T(s_0) = (u^{(1)}(s_0), ..., u^{(n)}(s_0))$$

вхідних спостережень, який можна використати для нелінійних перетворень, знайдемо так, щоб :

$$s_0 = \arg\max_s (y_{(\sigma)}^T D(s) D^+(s) y_{(\sigma)})^2.$$

Якщо через $\bar{u}^T(s)$ позначити рядок $u^T(s)$, в якому $s \neq s_0$,то тут

$$D(s) = Z_u^T(u^{1\otimes}(s), ..., u^{k_0\otimes}(s))$$

для $u^{j\otimes}(s)$ ($j = \overline{1, k_0}$) таких, що при

$$Z_u^T = I_n - \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{u}^T(s)\right]^+ \bar{u}^T(s) ds \ \text{rank}(\mathrm{I}_n - P_2^+ P_2)\left(u^{1\otimes}(s), ..., u^{k_0\otimes}(s), u^{(k_0+1)\otimes}(s)\right) = k_0.$$

Після нелінійного перетворення $\sum_{j=1}^{k_0} c_j (u^{(i)}(s_0))^j$ елементів $u^{(i)}(s_0)$ рядка $u^T(s_0)$, в якому за визначеної вище P_2

$$(c_1, ..., c_{k_0})^T = D^+(s_0) y_{(\sigma)},$$

побудуємо рядок-функцію:

$$\tilde{u}_0^T(s) = \left(\left(\begin{array}{c} u^{(i)}(s), s \neq s_0 \\ \left(\sum_{j=1}^{k_0} c_j (u^{(i)}(s))^j, s = s_0 \right) \end{array} \right), i = \overline{1, n} \right),$$

тут:

- $u^{(i)}(s)$ ($i = \overline{1, n}$) – спостереження за зовнішньо-динамічним збуренням $u(s)$

$$G_1(s) = Y\tilde{P}_2^+ \tilde{u}_0(s) + v(s) - v_U \tilde{P}_2^+ \tilde{u}_0(s), \qquad (2.13)$$

тут $v(s) = \mathrm{col}(v_i(s), \quad i = \overline{1, L})$ – довільна інтегровна за своїми аргументами вектор-функція розмірності L, тотожно рівна нулю, якщо $\lim_{N\to\infty}\left[\tilde{u}_0^T(s_i)\tilde{u}_0(s_j)\right]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$, а

$$\tilde{P}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_0(s)\tilde{u}_0^T(s)ds,\ v_U = \int_{-\infty}^{\infty} v(s)\tilde{u}_0^T(s)ds.$$

З рівняння (2.13) маємо:

$$G(s_l - s) = (y^{(1)}(s_l), ..., y^{(n)}(s_l))\tilde{P}_2^+\tilde{u}_0(s) + v_l(s) - v_{Ul}\tilde{P}_2^+\tilde{u}_0(s) \quad (l = \overline{1, L}),$$

де

$$v_{Ul} = \int_{-\infty}^{\infty} v_l(s)\tilde{u}_0(s)ds,$$

2.3. Просторово розподілені системи із неперервно спостережуваним станом.

2.3.1. Лінійна ідентифікація.

Розглянемо побудову рядка-функції $G_2(s)$, з використанням співвідношення:

$$G_2(s)\overline{u} = y(s)$$

Опишемо залежність функції $y(s)$ стану розподіленої послідовно-часової системи від дискретно спостережуваних в точках s'_m $(m = \overline{1, M})$ зовнішньо-динамічних збурень $u(s)$.

Згідно рівняння (2.7) ми можемо побудувати аналітичну функцію $G_2(s)$, якщо виконуються така умова:

$$(y^{(1)}(s),...,y^{(n)}(s))(I-P_2P_2^{+})(y^{(1)}(s),...,y^{(n)}(s))^T=0 \quad (2.14)$$

для $\forall s$ з області функціонування системи. І при цьому

$$G_2(s)=(y^{(1)}(s),...,y^{(n)}(s))P_2^{+}U^T+v(s)-v(s)UP_2^{+}U^T, \quad (2.15)$$

тут:

- $v(s)=\mathrm{str}(v_i(s),\quad i=\overline{1,M})$ – рядок довільних інтегрованих в розглядуваній області функцій.

Звідси:

$$G(s-s'_m)=(y^{(1)}(s),...,y^{(n)}(s))P_2^{+}\bar{u}(s'_m)+v_m(s)-v(s)P_2^{+}\bar{u}(s'_m), \quad (2.16)$$

$$\bar{u}(s)=\mathrm{col}(u^{(i)}(s),\quad i=\overline{1,n}).$$

Розв'язки (2.15), (2.16) будуть однозначними $(v(s)\equiv 0))$ при $\det UU^T>0$.

При $\det UU^T>0$ розв'язки рівнянь (2.15),(2.16) будуть однозначними $(v(s)\equiv 0))$.

2.3.2. Квазілінійна ідентифікація.

Також розглянемо випадок побудови рядка-функції $G_2(s)$ коли умова (2.14) не виконується хоча б при одному $s_\sigma\in R^n$. Це ідентифікацію функції $G_2(s)$ в рамках умов (1.68) робить неможливим.

Згідно критерію (1.72) ідентифікуємо функцію $G_2(s)$, щоб ідентифікувати функцію нам потрібно, щоб серед векторів $u_{(1)},...,u_{(M)}$ знайшовся вектор $u_{(i_*)}$, лінійно незалежний від інших, для якого виконується :

$$u_{(i_*)}^T(U^TU)^{+}u_{(i_*)}\neq 1.$$

В такому випадку ми побудуємо послідовність векторів:

$$u_{(i_*)}^{j\otimes} = u_{(i_*)} \underbrace{\otimes \ldots \otimes}_{j \text{ ðàç³â}} u_{(i_*)} \quad (j = \overline{2,k_*})$$

таких, щоб

$$(I - U^+U)u_{(i_*)}^{j\otimes} > 0 \quad (j = \overline{2,k_*}), \tag{2.17}$$

$$\operatorname{rank}\left[(I - U^+U)(U_*, u_{(i_*)}^{(k_*+1)\otimes})\right] = k_* - 1, \tag{2.18}$$

тут:

$$U_* = (u_{(i_*)}^{2\otimes}, ..., u_{(i_*)}^{k_*\otimes}).$$

Лінійною комбінацією

$$[\sum_{j=2}^{k_*} c_j u_{(i_*)}^{j\otimes}]^T, \tag{2.19}$$

в якій

$$c = (c_2, ..., c_{k_*})^T = U_*^T (I - U^T U) y_{(\sigma)},$$

замінимо i_* - рядок матриці U.

Після цього m -й елемент $(m = \overline{1,M})$ рядка-функції $G_2(s)$ при $s = s_\sigma$ визначимо співвідношенням

$$G(s_\sigma - s'_m) = (y^{(1)}(s_\sigma), ..., y^{(n)}(s_\sigma) P_{2*}^+ \tilde{u}_{*m} + \nu_m(s_\sigma) - \nu(s_\sigma) P_{2*}^+ \tilde{u}_{*m},$$

в якому $\nu(s) = \operatorname{str}(\nu_m(s), \quad m = \overline{1,M})$ – довільна інтегровна за s вектор-функція, $P_{2*} = \tilde{U}_*^T \tilde{U}_*$,

$$\tilde{u}_{*m}^T = \begin{cases} (u_m^{(i)}(s'_m), i = \overline{1,n}) \quad (m \neq i_*); \\ (\sum_{j=1}^{k_*} c_j (u_{i_*}^{(i)}(s'_m))^j, i = \overline{1,n}) \quad (m = i_*), \end{cases}$$

$$\tilde{U}_* = \operatorname{col}(\tilde{u}_{*m}^T, \quad m = \overline{1,M}).$$

Також $\nu(s) \equiv 0$, якщо $\det \tilde{U}_* \tilde{U}_*^T > 0$.

Елементи $G(s - s'_m)$ векторної функції $G_2(s)$ для $s \neq s_\sigma$ будуть визначатися співвідношеннями (2.16) через матрицю U.

2.3.3. Оптимізаційно-квазілінійна ідентифікація.

Розглянемо випадок розв'язання ідентифікаційної задачі побудови рядка-функції $G_2(s)$, коли умова (2.14) лінійної, або одна із умов (2.17),(2.18) нелінійної ідентифікації розглядуваної системи не виконується .

Тоді нелінійне перетворення (2.19) виконаємо над i_0 - рядком матриці U, значення i_0 і коефіцієнтів $(c_1^{i_0}, \ldots, c_{k_0}^{i_0}) = c_0^T$ якого виберемо з умови:

$$(i_0, c_0) = \arg \max_{i=\overline{1,M},\, c \in R^{k_i}} \Phi(i, c), \qquad (2.20)$$

тут:

$$\Phi(i, c) = \sum_{k=1}^{n} y_{(k)}^T (I - U_i^+ U_i) y_{(k)},$$

де U_i – матриця U, у якій $u_{(i)}^T$ - рядок замінено на $[\sum_{j=1}^{k_i} c_j^{(i)} u_{(i)}^{j\otimes}]^T$, а значення k_i вибирається з умови повноти набору векторів $u_{(i)}^{1\otimes}, \ldots, u_{(i)}^{k_i \otimes} \quad (i = \overline{1, M})$, для яких:

$$(u_{(i)}^{j\otimes})^T (I - U^+ U) u_{(i)}^{j\otimes} > 0 \quad при \quad j = \overline{1, k_i}.$$

Розв'язком задачі (2.20) при фіксованому i буде:

$$c_0^{(i)} = D_{(i)}^+ y_{(l)} \quad (l = \overline{1, L}),$$

де

$$D_i = Z(\bar{U}_i)(u_{(i)}^{1\otimes},\ldots,u_{(i)}^{k_i\otimes}),$$

при $q_i = U^+ e_i$,

$$Z(\bar{U}_i) = Z(U) + \frac{q_i q_i^T}{\|q_i\|^2}, \quad Z(U) = I - U^+ U.$$

Розв'язком ідентифікаційної задачі (2.16) буде:

де за довільних інтегровних у необмеженій просторово-часовій області функцій $v_i(s) \quad (i = \overline{1,M})$

$$v(s) = \mathrm{str}(v_i(s), \quad i = \overline{1,M}),$$

$$\tilde{u}_{0m}^T = \begin{cases} (u^{(i)}(s'_m), \quad i = \overline{1,n}) \quad (m \neq i_0); \\ (\sum_{j=1}^{k_0} c_j^{(i_0)} (u^{(i)}(s'_m))^j, \quad i = \overline{1,n}) \quad (m = i_0), \end{cases}$$

$$P_{20} = U_0^T U_0, \quad (c_1^{i_0},\ldots,c_{k_0}^{i_0})^T = c_0, \quad U_0 = \mathrm{col}(\tilde{u}_{0m}^T, \quad m = \overline{1,M}).$$

Якщо $\det U_0 U_0^T > 0.$ То розв'язок задачі буде однозначним.

РОЗДІЛ 3

КОМП'ЮТЕРНО-АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЯДЕР ІНТЕГРАЛЬНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ.

3.1. Постановка задачі .

Предметом дослідження даної бакалаврської роботи є динамічні процеси, системи і явища, які мають просторово часові області

$$S_0^T = \{s = (x,t) = (x_1,...,x_n,t) : x \in S_0, t \in [0,T]\},$$

і логіка яких описується рівнянням

$$L(\partial_s)y(s) = u(s), \tag{3.1}$$

тут і далі $\partial_s = (\partial_x, \partial_t) = (\partial_{x_1},...,\partial_{x_n},\partial_t)$ – вектор частинних похідних за просторовими змінними $x_1,...,x_n$ та часом t, $L(\partial_s)$ – лінійний диференціальний оператор, а $u(s)$ – функція розподілених у S_0^T просторово-часових зовнішньодинамічних збурень.

Диференціальна модель (3.1) за можливості доповнюється початково-крайовими спостереженнями за процесом, зокрема вигляду

$$L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0 \in S_0}} = Y_{rl}^0 \quad \left(r = \overline{1,R_0}, l = \overline{1,L_0}\right), \tag{3.2}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma \in \Gamma\times[0,T]} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad \left(l = \overline{1,L_\Gamma}, \rho = \overline{1,R_\Gamma}\right). \tag{3.3}$$

Задача (3.1)-(3.3) побудувати функції y(s) стану системи (3.1) є математично не коректною(кількість початково-крайових умов (3.2), (3.3) не

завжди узгоджується з порядком диференційного рівняння (3.1)). Тому розв'язок задачі (3.1)-(3.3) будується так, що

1) y(s) задовольняє рівнянню (3.1) точно;
2) з початково-крайових спостережень (3.2),(3.3) узгоджувались за середньоквадратичним критерієм

$$\sum_{r=1}^{R_0}\int_{S_0}\left(L_r^0(\partial_t)y(s)\Big|_{t=0}-Y_r^0(x)\right)^2+$$

$$+\sum_{\rho=1}^{R_\Gamma}\int_{\Gamma\times[0,T]}\left(L_\rho^\Gamma(\partial_x)y(s)-Y_\rho^\Gamma(s)\right)^2 ds\to\min_{y(s)}. \qquad (3.4)$$

В роботах В.А. Стояна при розв'язку задачі (3.1)-(3.4) пропонується початково-крайові збурення $Y_{rl}^0\left(r=\overline{1,R_0},l=\overline{1,L_0}\right)$, $Y_{\rho l}^\Gamma\left(l=\overline{1,L_\Gamma},\rho=\overline{1,R_\Gamma}\right)$ моделювати формулами $u_0(s),u_\Gamma(s)$ визначеними в областях $S^0=S_0\times(-\infty,0]$ та $S^\Gamma=(R^n\setminus S_0)\times(0,T]$, або векторами

$$u_0=\mathrm{col}(u_0(s_m^0),m=\overline{1,M_0})\ \ (s_m^0\in S^0),$$

$$u_\Gamma=\mathrm{col}(u_\Gamma(s_m^\Gamma),m=\overline{1,M_\Gamma})\ \ (s_m^\Gamma\in S^\Gamma)$$

значень $u_0=u_0(s_m^0),\ s_m^0\in S^0$ ($m=\overline{1,M_0}$), $u_\Gamma=u_\Gamma(s_m^\Gamma)\ s_m^\Gamma\in s^\Gamma$ ($m=\overline{1,M_\Gamma}$), які визначаються згідно (3.4).

Показано також, що знаходження моделі функції $u_0(s),u_\Gamma(s)$ та векторів $\bar{u}_0,\bar{u}_\Gamma$ їх значення зводяться до розв'язання (середньоквадратичного обернення) систем рівнянь вигляду

$$\int_{(\cdot)}A(s)\begin{pmatrix}u_0(s)\\u_\Gamma(s)\end{pmatrix}ds=\bar{Y}, \qquad (3.5)$$

$$A\begin{pmatrix}u_0\\u_\Gamma\end{pmatrix}=\bar{Y}. \qquad (3.6)$$

Матрична функція $A(s)$ та матриця A визначається аналітично через передатну функцію $G(s-s')$ таку, що

$$y(s)=\int_{(\cdot)} G(s-s')u(s')ds,$$

та матрицю

$$\bar{G}=\left[\, g_{em}=G\left(s_e-s_m^{'}\right)\right]_{e,m=1}^{l=L,m=M}$$

значень цієї функції.

Якщо проблем з псевдообернення рівнянь (3.5),(3.6) не виникає, то проблеми побудови є:

1) не завжди є диференціальна модель вигляду (3.1);
2) не завжди можна побудувати функцію $G(s-s')$ при заданому $L(\partial_s)$.

В задачі бакалаврській роботі ставиться та розв'язується задача побудови матриці $\bar{G}$ значень

$g_{em}(e=L,m=M)$ передатної функції $G(s-s')$ для випадку, коли рівняння (3.1) нема, але за досліджуваним процесом є спостереження

$$\vec{u}^{(i)}=col(u_m{}^{(i)},m=\overline{1,M}),\quad (i=\overline{1,I})$$

за входом u(s) та

$$\vec{y}^{(i)}=col\left(y_l{}^{(i)},l=\overline{1,L}\right),\qquad (i=\overline{1,I})$$

Виходом y(s) так, щоб

$$\bar{G}\vec{u}^{\,(i)}=\vec{y}^{\,(i)}\ \ (\,i=\overline{1,I}\,)\,. \qquad (3.7)$$

Реферат побудови матриці $\bar{G}$ згідно (3.7) зроблений нами в розділах 1,2 роботи. Модифікація прореферованого там підходу та його комп'ютерна реалізація розглянута нижче.

3.2. Методика розв'язання задачі

Диференційну модель (3.1) замінимо інтегральним еквівалентом вигляду

$$y(s) = \int_{S_0^T} G(s - s')u(s')ds', \tag{3.8}$$

де

$$G(s - s') = \frac{H((t-t') - \frac{r}{c})}{2\pi c\sqrt{c^2(t-t')^2 - r^2}}, \tag{3.9}$$

H – функція Хевісайда, $r = \sqrt{(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2}$,

ядро $G(s - s')$ будемо називати функцією Гріна розглядуваного процесу в обмеженій просторово-часовій області ${S_0}^T = \{s = (x_1, x_2, t): (x_1, x_2) \in S_0, t \in [0, T]\}$.

Моделі (3.8) є менш доступні для логічної побудови, вони є простішими для дослідження і можуть розглядатися, як розв'язок лінійного диференційного рівняння (3.1). Але побудувати рівняння (3.8) на базі (3.1), не просто та не завжди можливо.

3.3. Розв'язок задачі лінійної ідентифікації.

За спостереженнями $u^{(i)}(s_m') = u_m^{(i)}$ $(m = \overline{1, M}, i = \overline{1, I})$ $s_m' \in S_0^T$, $y^{(i)}(s_l) = y_l^{(i)}$ $(l = \overline{1, L},\ i = \overline{1, I})$ $s_l \in s_0^T$, побудуємо матрицю

$$G = [G_{lm} = G(s_e - s_m')]_{l,m=1}^{l=L,m=M}, \tag{3.10}$$

значень $G_{lm} = G(s_l - s_m)$ $(l = \overline{1, L}; m = \overline{1, M})$,

так, щоб

$$\bar{G}\vec{u}^{(i)} = \vec{y}^{(i)} \ (i = \overline{1, I}), \tag{3.11}$$

або

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{I} \left\| \bar{G}\vec{u}^{(i)} - \vec{y}^{(i)} \right\| \rightarrow \bar{G}(\min),$$

де при заданих $(\vec{u}^{(i)}, \vec{y}^{(i)})$

$$\vec{u}^{(i)} = col(u_m{}^{(i)}, m = \overline{1, M}), \tag{3.12}$$

$$\vec{y}^{(i)} = col\left(y_l{}^{(i)}, l = \overline{1, L}\right), \tag{3.13}$$

щоб отримати спостереження $\vec{u}^{(i)}, \vec{y}^{(i)}$ $(i = \overline{1, I})$ в лабораторних умовах, аргументи s', s у співвідношеннях (3.8), (3.9) дискретизуємо точками $s_l \in s_0^T, s'_m \in S_0^T$ (точки вибираємо самостійно, через графічний інтерфейс).

Отримаємо

$$\begin{pmatrix} G(s_1 - s_1^{'}), & \cdots & G(s_1 - s_M^{'}) \\ \hline G(s_L - s_1^{'}), & \cdots & G(s_L - s_M^{'}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s_1^{'}) \\ \vdots \\ u(s_M^{'}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(s_1) \\ \vdots \\ y(s_L) \end{pmatrix},$$

або

$$\bar{G}\vec{u} = \vec{y}. \tag{3.14}$$

Розглянемо розв'язок рівняння (3.9). Будемо виходити з того, що значення $y^{(i)}(s)$ та $u^{(i)}(s')$ утворюють вектори

$$\vec{y}^{(i)} = \left(y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(i)} \right) = \begin{Bmatrix} y_{(1)}^T \\ \vdots \\ y_{(i)}^T \end{Bmatrix}, \tag{3.15}$$

та

$$\vec{u}^{(i)} = \left(u^{(1)},\ u^{(2)}, \dots\ \ u^{(i)} \right) = \begin{Bmatrix} u_{(1)}^{T} \\ \vdots \\ u_{(i)}^{T} \end{Bmatrix}. \qquad (3.16)$$

Матриця $\bar{G}$ визначатиметься як розв'язок матричної системи

$$\bar{G}U = Y,$$

тут

U, Y - матриці значень, які будуємо з векторів (3.15), (3.16)

$$Y = \left\{ \vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \dots, \vec{y}^{(i)} \right\} = \begin{Bmatrix} y_{(1)}^{T(1)} & \dots & y_{(1)}^{T(M)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ y_{(L)}^{T(1)} & \dots & y_{(L)}^{T(M)} \end{Bmatrix}, \qquad (3.17)$$

$$U = \left\{ \vec{u}^{(1)},\ \vec{u}^{(2)}, \dots, \vec{u}^{(i)} \right\} = \begin{Bmatrix} u_{(1)}^{T(1)} & \dots & u_{(1)}^{T(M)} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ u_{(L)}^{T(1)} & \dots & u_{(L)}^{T(M)} \end{Bmatrix}. \qquad (3.18)$$

$$U^T \bar{G}^T = Y^T,$$

де

$$Y = \begin{Bmatrix} y_{(1)}^{T} \\ \dots \\ y_{(i)}^{T} \end{Bmatrix}, \qquad Y^T = \left(y^{(1)},\ y^{(2)}, \dots\ \ y^{(i)} \right),$$

$$\bar{G} = \begin{Bmatrix} g_{(1)}^{T} \\ \dots \\ g_{(i)}^{T} \end{Bmatrix}, \qquad \bar{G}^T = \left(g^{(1)},\ g^{(2)}, \dots\ \ g^{(i)} \right),$$

$$U^T g_{(i)} = y_{(i)} \qquad i=\overline{1,L},$$

$$g_{(i)} = (U^T)^{+} y_{(i)},$$

$g_{(i)}{}^T = y_{(i)}^T U^+,$

звідси

$$\bar{G} = YU^+, \tag{3.19}$$

де $U^+ -$ обернена матриця.

Алгоритм побудови спостережень $\vec{u}^{(i)},\ \vec{y}^{(i)}$ $(i = \overline{1,I})$:

1. самостійно задаємо функції $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$

де

$$y^{(1)}(s) = \sin\frac{\pi x_1}{X_1}\sin\frac{\pi x_2}{X_2}\sin\omega t \tag{3.20}$$

$$y^{(2)}(s) = \sin\frac{\pi x_1}{X_1}\sin\frac{\pi x_2}{X_2}\sin\omega^2 t \tag{3.21}$$

$$y^{(3)}(s) = \sin\frac{\pi x_1}{X_1}\sin\frac{\pi x_2}{X_2}\sin\omega^3 t \tag{3.22}$$

2. диференціюємо рівняння $y^{(1)}, y^{(2)}, y^{(3)}$ та підставляємо похідні у співвідношення (3.1) знаходим $u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$

де

$$u^1(s') = \omega^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)\sin(\omega t) - c^2\left(-\frac{\pi^2\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_1^2} - \frac{\pi^2\sin(\omega t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_2^2}\right), \tag{3.23}$$

$$u^2(s') = \omega^4 \sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)\sin(\omega^2 t) - c^2\left(-\frac{\pi^2\sin(\omega^2 t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_1^2} - \frac{\pi^2\sin(\omega^2 t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_2^2}\right), \tag{3.24}$$

$$u^3(s') = \omega^6 \sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)\sin\left(\omega^3 t\right) - c^2\left(-\frac{\pi^2 \sin(\omega^3 t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_1^2} - \frac{\pi^2 \sin(\omega^3 t)\sin\left(\frac{\pi x_1}{X_1}\right)\sin\left(\frac{\pi x_2}{X_2}\right)}{X_2^2}\right), \quad (3.25)$$

тут $(X_1, X_2) = 10,\ \omega = 5.$

3. задаємо точки $s_l \in\ s_0^T\ (l = \overline{1, L}),\ s'_m \in S_0^T\ (m = \overline{1, M})$,

4. знаходимо вектори $\vec{u}^{(i)},\ \vec{y}^{(i)}\ (i = \overline{1, I})$, посилаючись на пункт 1 та 2;

5. отриманий набір векторів (3.15),(3.16) підставимо в рівняння (3.14); знаходимо $\bar{G}$;

6. знайдену матрицю значень $\bar{G}$ порівнюємо зі значеннями $G(s_l - s'_m)$ функції $G(s - s')$, визначеної в (3.10).

3.4. Програмна реалізація розв'язку задачі лінійної ідентифікації.

Для проведення розрахунків, була написана програма, яка реалізує алгоритм описаний в підрозділі 3.2. Програма написана у середовищі Microsoft Visual Studio 2019 мовою програмування C++, був використаний фреймворк Window form, який призначений для створення графічного інтерфейсу.

3.4.1. Опис інтерфейсу користувача програми

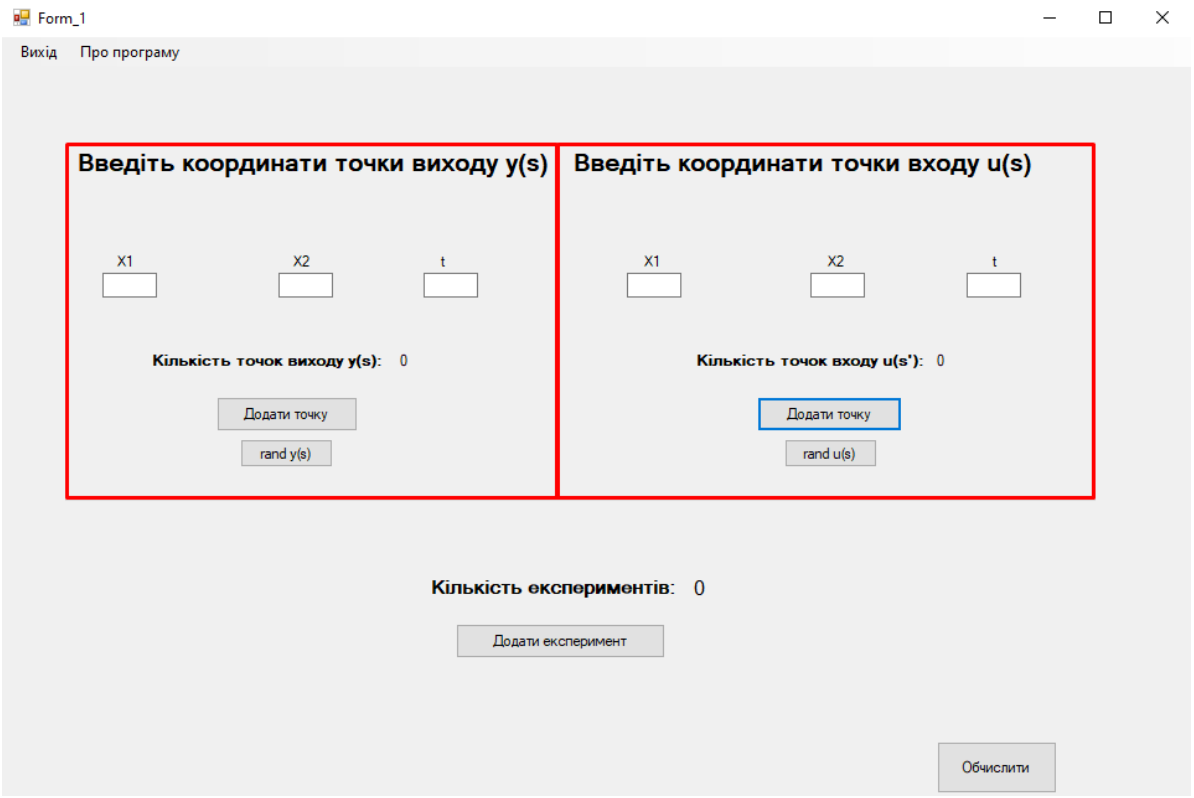

Рис. 1 – Графічний інтерфейс користувача. Поле 1 - поле вводу координат розташування датчиків y(s). Поле 2 - поле вводу координат розташування датчиків u(s').

Для здійснення моделювання потрібно у графічний інтерфейс програми (рис.1) вести вхідні дані: в поле 1 - дані з датчиків виходу y(s), в поле 2 - дані входу $u(s')$.

3.4.2. Алгоритм роботи з програмою

Алгоритм роботи з розробленою програмою для проведення моделювання наступний:

1. В поля 1,2 (рис. 1) додати координати датчиків, які вимірюють y(s) та u(s') s=$(x_1, x_2, t) \in {S_0}^T$, s'=$(x_1, x_2, t) \in {S_0}^T$.
2. Натиснути кнопку “Додати точку”, (кнопка “rand y(s)” та “rand u(s')” заповнює поля координат випадковими числами від 1 до 10).

3. Додати необхідну кількість експериментів, натискаючи кнопку «Додати експеримент».

4. Натиснути кнопку «Обчислити».

5. Результатом роботи програми є дві таблиці значень G та $\bar{G}$. Якщо вони однакові або похибка є не значною – це свідчить про правильність розв'язку поставленої задачі.

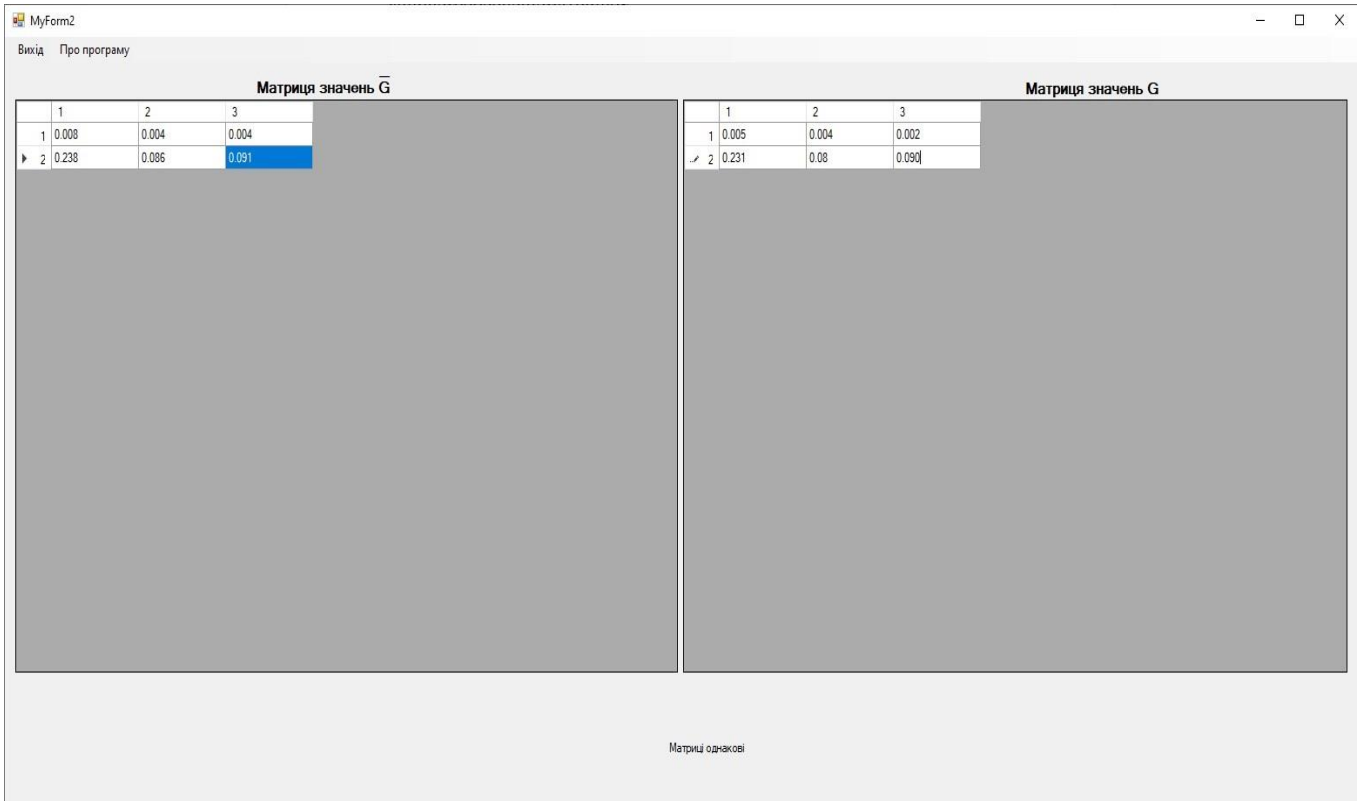

Рис. 2 – Матриці значень G та $\bar{G}$, розраховані програмою.

3.5. Оцінка результатів дослідження.

На об’єкт розташуємо 2 дачки виходу та 3 датчики входу проводим

експеримент 1:

Задаємо точки розташування датчиків

$$s_1 = (1,2,7), \qquad s'_1 = (3,5,2),$$

$$s_2 = (2,2,8), \qquad s'_2 = (4,8,2),$$

$$s'_3 = (7,3,2),$$

знайдемо $y^{(1)}$ (s) за (3.20)

$$y^{(1)}(s_1) = -0.004,$$

$$y^{(1)}(s_2) = 0.257,$$

знаходимо $u^{(1)}\left(s'\right)$ за формулою (3.23),

$$u^{(1)}\left(s_1'\right) = 4.817,$$

$$u^{(1)}\left(s_2'\right) = -19.956,$$

$$u^{(1)}\left(s_3'\right) = 9.076.$$

З (3.15), (3.16) знаходимо вектори $\vec{y}^{(1)}$, $\vec{u}^{(1)}$ для першого експерименту

$$\vec{y}^{(1)} = \begin{Bmatrix} -0.004 \\ 0.257 \end{Bmatrix},$$

$$\vec{u}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 4.817 \\ -19.956 \\ 9.076 \end{Bmatrix}.$$

Експеримент 2:

знаходимо $y^{(2)}$ (s) за (3.21)

$y^{(2)}(s_1) = 0.006,$

$y^{(2)}(s_2) = 0.293,$

знаходимо $u^{(2)}\left(s\ '\right)$ за (3.24)

$u^{(2)}\left(s_1\ '\right) = 3.791,$

$u^{(2)}\left(s_2\ '\right) = 4.217,$

$u^{(2)}\left(s_3\ '\right) = -10.640.$

Вектори $\vec{y}^{(1)}$, $\vec{u}^{(1)}$ другого експерименту

$\vec{y}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0.006 \\ 0.293 \end{Bmatrix},$

$\vec{u}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 3.791 \\ 4.217 \\ -10.640 \end{Bmatrix}.$

Експеримент 3:

знаходимо $y^{(3)}$ (s) за (3.22)

$y^{(3)}(s_1) = 0.008,$

$y^{(3)}(s_2) = 0.224,$

знаходимо $u^{(3)}\left(s\ '\right)$ за (3.25)

$u^{(3)}\left(s_1\ '\right) = 0.375,$

$u^{(3)}\left(s_2\ '\right) = 0.931,$

$$u^{(3)}\left(s_3\ '\right) = 0.597.$$

Вектори $\vec{y}^{(1)}, \vec{u}^{(1)}$ третього експерименту

$$\vec{y}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.008 \\ 0.224 \end{Bmatrix},$$

$$\vec{u}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0.376 \\ 0.931 \\ 0.597 \end{Bmatrix}.$$

За (3.12), (3.13) побудуємо матицю з векторів $\vec{y}^{(1)}, \vec{y}^{(2)}, \vec{y}^{(3)}$ та $\vec{u}^{(1)}, \vec{u}^{(2)}, \vec{u}^{(3)}$

$$Y = \begin{Bmatrix} -0.004 & 0.006 & 0.008 \\ 0.257 & 0.293 & 0.224 \end{Bmatrix},$$

$$U = \begin{Bmatrix} 4.817 & 3.791 & 0.376 \\ -19.956 & 4.217 & 0.931 \\ -19.956 & -10.640 & 0.597 \end{Bmatrix},$$

запишем обернену матрицю

$$U^{+} = \begin{Bmatrix} 0.061 & -0.030 & 0.009 \\ 0.100 & -0.002 & -0.059 \\ 0.857 & 0.422 & 0.474 \end{Bmatrix}.$$

З рівняння (3.14) знаходимо

$$\bar{G} = \begin{Bmatrix} 0.008 & 0.004 & 0.004 \\ 0.238 & 0.08 & 0.091 \end{Bmatrix}.$$

Для перевірки коректності результату побудуємо G за іншим алгоритмом

$$G = \begin{Bmatrix} 0.005 & 0.004 & 0.002 \\ 0.231 & 0.08 & 0.090 \end{Bmatrix}.$$

Таблиця результатів

$\bar{G}$	G	похибка
0.008	0.005	0.003
0.238	0.231	0.007
0.004	0.004	-
0.08	0.08	-
0.004	0.002	0.002
0.091	0.090	0.001

середня похибка становить 0.002.

ВИСНОВКИ

Запропонований алгоритм розв’язання задачі ідентифікації ядра інтегральної моделі лінійного хвильового процесу, реалізований програмно.

Оскільки експерименти проведено в лабораторних умовах для імітування даних з датчиків були задані функції $y^{(1)}(s),\ y^{(2)}(s),\ y^{(3)}(s)$ та відповідні їм $u^{(1)}(s'), u^{(2)}(s'), u^{(3)}(s')$.

Використовуючи запропонований нами алгоритм, та дані з датчиків, побудовано матриці значень ядра $\bar{G}$ та G інтегральної математичної моделі лінійного хвильового процесу.

Щоб оцінити коректність результату використовували два алгоритми, $\bar{G}$ побудована за першим алгоритмом, який запропонований нами та G знайденим в результаті аналітичного розв’язання задачі.

Отже, було побудовано матриці значень $\bar{G}$ та G, за запропонованим алгоритмом та аналітичним розв'язком, похибка між якими становить 0,002.

Перелік джерел посиланнь

1. Скопецький В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. Математичне моделювання динаміки розподілених просторово-часових процесів, 2008.
2. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних та нелінійних динамічних систем, Стоян В.А. 2011.
3. Стоян В. А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами. — К: ВПЦ «Київський університет», 2008.
4. https://people.maths.bris.ac.uk/~madjl/course_text.pdf . An Introduction to Mathematical Modelling Glenn Marion, Bioinformatics and Statistics Scotland Given 2008 by Daniel Lawson and Glenn Marion.
5. https://www.sfu.ca/~vdabbagh/Chap1-modeling.pdf . What Is Mathematical Modeling?
6. http://www.cyb.univ.kiev.ua/library/books/stoian-16.pdf Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами В. А. Стоян

ВІДГУК

на випускну кваліфікаційну роботу студента IV курсу Стояна О.О.

"ІДЕНТИФІКАЦІЙНО-ПСЕВДОІНВЕРСНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ"

Перед студентом Стояном О.О. була поставлена задача освоєння, модифікації та тестування методики побудови ядер інтегральних математичних моделей просторово розподілених динамічних систем за спостереженнями їх вхідного та вихідного стану. Планувалося зробити це в рамках лінійних та квазілінійних математичних моделей.

В своїй бакалаврській роботі Стоян О.О. зробив детальний огляд математичних результатів по розв'язанню сформульованих задач для просторово розподілених динамічних систем довільної фізико-технічної природи на основі дискретної та дискретно-неперевної інформації про їх стан і зовнішньодинамічні збурення, якими він викликаний.

На превеликий жаль програмно реалізований тільки лінійний випадок ідентифікації дискретно спостережуваних просторово розподілених динамічних систем. Зрозуміло, що це важливо, але хотілося б більшого. Не склалося. Не вистачило бажання, терпіння та настирливості виконавцю даної бакалаврської роботи.

Слід зауважити, що в процесі написання своєї бакалаврської роботи студент Стоян О.О. працював епізодично добре. При більш добросовісному відношенні до справи можна було б зробити більше і краще. Але?

Незважаючи на сказане вважаю, що робота зроблена. Об'єму та отриманих у ній результатів достатньо для рівня випускної бакалаврської роботи з "Прикладної математики".

Вважаю, що представлена до захисту робота Стояна О.О. **"ІДЕНТИФІКАЦІЙНО-ПСЕВДОІНВЕРСНИЙ ПІДХІД ДО ПОБУДОВИ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ"** після її успішного захисту може бути оцінена на "добре".

Науковий керівник роботи
доктор фіз.-мат. наук, професор Стоян В.А.

РЕЦЕНЗІЯ

на випускну кваліфікаційну роботу **Стояна О.О.**

“Ідентифікаційно-псевдоінверсійний підхід до побудови математичних моделей просторово розподілених динамічних систем”

Випускна кваліфікаційна робота Стояна О. О. “Ідентифікаційно-псевдоінверсійний підхід до побудови математичних моделей просторово розподілених динамічних систем” структурно складається з трьох розділів, висновків та списку використаної літератури.

Два перші розділи роботи оглядові і спрямовані на реферат наукових розробок керівника роботи професора Стояна В.А. Викладені в них результати стосуються опису предмету дослідження – неповно спостережуваних просторово розподілених дискретних систем. Наведені загальні постановки початково-крайових задач та методи математичного моделювання наявних зовнішньо-динамічних збурень, які їх супроводжують. Акцентується увага на інтегральному представленні математичних моделей динаміки досліджуваних систем. Даються математичні результати по ідентифікації ядер таких моделей. Об’єм наведених задач та їх розв’язків завеликий і виходить за межі лінійного випадку, реалізованого в третьому – практично орієнтованому розділі роботи. Думаю, що це мало б бути більш узгоджено.

Більш цікавим і корисним мав би бути очевидно третій розділ роботи. Написаний він однак сумбурно без чіткого викладу задачі та алгоритму її розв’язання, який, як нам здається, не зовсім узгоджений з алгоритмом прореферованим у другому розділі роботи. Є питання і до практичної реалізації розв’язку задачі та узгодженості інтерфейсної та математичної частин програми. Бажає кращого і синтаксично-граматичне оформлення роботи.

Але, незважаючи на зауваження, можна зробити висновок, що робота **Стояна О.О.** відповідає рівню випускної бакалаврської роботи по спеціальності «Прикладна математика» і може бути оцінені оцінкою «добре».

Доктор фіз.-мат. наук,

Професор кафедри ДО Ігор Самойленко

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

СИСТЕМА ЗАПОБІГАННЯ ТА ВИЯВЛЕННЯ АКАДЕМІЧНОГО ПЛАГІАТУ

Довідка про оригінальність кваліфікаційної роботи за освітнім рівнем бакалавр

UNICHECK

Ім'я користувача:
Шатирко Андрій ФКомпНаук
ID перевірки:
1011544783
Дата перевірки:
11.06.2022 09:40:30 EEST
Тип перевірки:
Doc vs Internet + Library
Дата звіту:
11.06.2022 14:12:18 EEST
ID користувача:
100007163

Назва документа: Стоян О Диплом Prepare

Кількість сторінок: 51 Кількість слів: 7580 Кількість символів: 50843 Розмір файлу: 1.24 MB ID файлу: 1011417001

Виявлено модифікації тексту (можуть впливати на відсоток схожості)

15.8%
Схожість

Найбільша схожість: 7.08% з джерелом з Бібліотеки (ID файлу: 1011417003)

Сторінка 53

Сторінка 54

0% Цитат

Вилучення цитат вимкнене

Вилучення списку бібліографічних посилань вимкнене

0%
Вилучень

Немає вилучених джерел

Модифікації

Виявлено модифікації тексту. Детальна інформація доступна в онлайн-звіті.

Замінені символи 5

Підозріле форматування 20 сторінок

Експертна оцінка роботи науковим керівником : Кваліфікаційна робота виконана самостійно і повністю відповідає вимогам доброчесності, на використані джерела зроблені посилання. Робота рекомендована до захисту на ДЕК.

Науковий керівник: _____ Стоян В. А.
(підпис) (ПІБ)

Оператор: _____ А.В.Шатирко
(підпис) (ПІБ)