

УДК 514.13/.132:514.7

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/2.10>

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р фіз.-мат. наук, Проф.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ПРАВИЛЬНІ ВОСЬМИКУТНИКИ В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. При побудові гіперболічних структур на замкнених поверхнях можна використати гіперболічну геометрію (геометрію Лобачевського) на площині. Для цього потрібно подати поверхню у вигляді $2n$ -кутника на гіперболічній площині і задати дію дискретної групи, що є підгрупою рухів гіперболічної площини, для якої $2n$ -кутник є фундаментальною областю. Якщо такою поверхнею є подвійний тор (орієнтована поверхня роду 2), то її можна отримати, склеївши протилежні сторони восьмикутника. Фактично площина Лобачевського розбивається на восьмикутники. Наявність симетрій спрощує обчислення. Тому природно виникає задача про розбиття на правильні восьмикутники. Крім того, важливо навести приклади таких восьмикутників, задавши координати їх вершин в одній з моделей гіперболічної геометрії.

Використовуються моделі верхньої півплощини та модель Пуанкаре на одиничному диску, для яких задана ріманова метрика (формула для знаходження довжин дуг кривих). Ми описуємо основні властивості гіперболічних прямих та групи рухів (групи ізометричних відображень) гіперболічної геометрії на площині за допомогою дробово-лінійних відображень комплексної площини з дійсними коефіцієнтами.

Отримано формулу для координат вершин та довжин діагоналей правильного восьмикутника з центром в початку координат у моделі Пуанкаре. Побудовано такі правильні восьмикутники, якими можна замінити гіперболічну площину, для чотирьох найбільших можливих кутів.

Ключові слова: геометрія Лобачевського; гіперболічна пряма; неевклідова геометрія; гіперболічна тригонометрія; ріманова метрика.

1. Вступ

Актуальність. У диференціальній геометрії, в залежності від знаку гаусової кривини K , точки поверхні поділяються на три типи: 1) еліптичні ($K > 0$), 2) параболічні ($K = 0$) та 3) гіперболічні ($K < 0$). Відповідно до цього в розмірності два існує три геометрії: 1) еліптична (або проєктивна), 2) евклідова, 3) гіперболічна (або геометрія Лобачевського). Геометричні та топологічні властивості проєктивної площини вивчалися у статті Пришляка та Білун (Пришляк, 2024). Евклідова геометрія детально вивчається у шкільному курсі математики. Робота присвячена вивченню геометричних властивостей гіперболічної площини.

Нагадаємо, що гаусова кривина в точці може бути визначена формулою

$$K = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta + \gamma - \pi}{S},$$

де α, β, γ – кути, а S – площа криволінійного трикутника, що містить дану точку і сторони якого – геодезичні лінії (найкоротші на поверхні криві між двома точками) (Пришляк, 2004).

Отже, в проєктивній геометрії сума кутів довільного трикутника більша за π , в евклідовій – дорівнює π , а в гіперболічній геометрії менша за π .

Для задання геометричних властивостей просторів (поверхонь, многовидів) часто використовується Ріманова метрика. Вона задає скалярний добуток дотичних векторів у кожній точці і може бути виражена за допомогою квадрата диференціала дуги:

$$ds^2 = g_{11}du^2 + 2g_{12}du dv + g_{22}dv^2,$$

де u, v – локальні координати на поверхні. Прикладом ріманової метрики є перша квадратична форма поверхні, яка індуквана евклідовою метрикою тривимірного простору, в який вкладена поверхня. Зауважимо, що гаусова кривина, геодезичні довжини дуг, кути між кривими та площі областей можуть бути знайдені за допомогою ріманової метрики.

За глобальною теоремою Гауса-Боне для замкненої поверхні Φ

$$\int_{\Phi} K dS = 2\pi\chi(\Phi),$$

де $\chi(\Phi) = |V| - |E| + |F|$ – ейлерова характеристика поверхні Φ , $|V|$ – число вершин, $|E|$ – число ребер, $|F|$ – число граней довільної триангуляції або кліткового розбиття поверхні Φ .

Серед замкнених поверхонь в тривимірному просторі тільки сфера та поверхні, їй гомеоморфні, мають додатну ейлерову характеристику ($\chi(S^2) = 2$) (Пришляк, 2023). Тому тільки на таких поверхнях можливо задати еліптичну геометрію (ріманову метрику з гаусовою кривиною $K = 1$).

Ейлерова характеристика тора і гомеоморфних йому поверхонь дорівнює 0. Ріманова метрика $ds^2 = du^2 + dv^2$ має нульову гаусову кривину на торі в кожній точці, де u, v – локальні координати тора як поверхні обертання. Ця метрика є евклідовою метрикою на площині, а тору відповідає квадрат на площині зі склеєними за осьовими симетріями протилежними сторонами. Також тор можна розглядати як множину орбіт дії групи $Z \oplus Z$ на площині. Це означає, що площину можна розбити на квадрати. Також тор можна отримати з правильного шестикутника, склеївши протилежні сторони. Це відповідає розбиттю площини на правильні (рівні між собою) шестикутники.

Ейлерова характеристика решти замкнених поверхонь від'ємна. Тому на них може існувати тільки гіперболічна геометрія. Основна ідея побудови такої геометрії полягає в поданні поверхні як правильного $2n$ -кутника зі склеєними сторонами і задання на цьому $2n$ -кутнику гіперболічної геометрії. Для того, аби при склеюванні сторін не виникло особливостей на сторонах та у вершинах, повинна виконуватися властивість,

що $2n$ -кутником можна замінити всю гіперболічну площину (розбити площину на області, кожна з яких ізометрична заданому $2n$ -кутнику).

Об'єктом дослідження є гіперболічна площина. Ми описуємо дві моделі гіперболічної площини – модель верхньої півплощини та модель Пуанкаре на одиничному крузі. Кожна з них визначається за допомогою ріманової метрики, заданої на відповідній області.

Метою роботи є опис геометричних властивостей гіперболічної площини та побудова правильних восьмикутників (за координатними їх вершин та середин сторін у моделі Пуанкаре), якими можна замостити всю гіперболічну площину. Це дозволяє побудувати гіперболічну метрику на подвійному торі.

Ми доводимо геометричні властивості для моделі верхньої півплощини, потім показуємо, що модель Пуанкаре ізометрична моделі верхньої півплощини. З цього випливає, що доведені геометричні властивості також виконуються в моделі Пуанкаре.

В усіх виразах типу dx^2 спочатку відбувається операція диференціювання, а потім піднесення до квадрату.

2. Основні твердження

2.1 Модель верхньої площини геометрії Лобачевського

Гіперболічна метрика на півплощині $y > 0$ (модель верхньої півплощини геометрії Лобачевського) має вигляд

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Гранична пряма $y = 0$ називається *абсолютом*.

Гіперболічними прямими називаються перетин прямих або кіл, перпендикулярних абсолюту з верхньою півплощиною відповідно. Відстань між точками знаходиться як довжина відрізка гіперболічної прямої з кінцями в цих точках у гіперболічній метриці.

Ізометрія (ізометричне перетворення) – це такий гомеоморфізм, який зберігає довжини дуг кривих. При такому відображенні ріманові метрики у відповідних точках будуть еквівалентні, а, отже, зберігаються і кути між кривими.

Дробово-лінійне відображення – це відображення комплексної площини виду

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

де a, b, c, d – комплексні числа і $ad - bc \neq 0$.

Теорема 1. Кожне дробово-лінійне відображення є композицією таких відображень:

- 1) $f(z) = az$ – розтягнення (гомотетія) та поворот,
- 2) $f(z) = z + b$ – паралельне перенесення,
- 3) $f(z) = \frac{1}{z}$ – інверсія з симетрією відносно осі.

Теорема 2. Дробово-лінійні перетворення переводять кола та прямі в кола та прямі.

Теорема 3. Композиція двох дробово-лінійних перетворень є дробово-лінійним перетворенням, а матриця композиції є добутком матриць цих перетворень.

Теорема 4. Група ізометрій площини Лобачевського, що зберігають орієнтацію, ізоморфна групі дійсних дробово-лінійних перетворень площини з $\det A = 1$ та ізоморфна $PSL(2, \mathbb{R})$.

Теорема 5. Гіперболічна пряма є найкоротшою між двома точками на площині Лобачевського.

Теорема 6. Якщо точки верхньої півплощини задавати за допомогою комплексних чисел, то відстань між ними може бути обчислена за формулами

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}, \quad \text{th} \frac{d(z, w)}{2} = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

Теорема 7. Сума кутів трикутника на площині Лобачевського дорівнює $\pi - S$, де S – площа трикутника.

2.2 Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського була розроблена французьким математиком Анрі Пуанкаре в 1880-х роках. Він був зацікавлений в дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь та проблемах топології, які виникали в контексті геометрії Лобачевського.

У своїх дослідженнях Пуанкаре застосовував ідеї проєктивної геометрії, яка дозволяла вивчати властивості геометричних об'єктів, зберігаючи при цьому їх взаємне розташування. Він запропонував модель геометрії Лобачевського, яка використовувала властивості проєктивної геометрії для зображення гіперболічної площини в тривимірному просторі.

Згідно з моделлю Пуанкаре, гіперболічна площина може бути зображена у вигляді круга, що розташований всередині сфери, яка називається сферою Пуанкаре. Ця сфера має ряд специфічних властивостей, які дозволяють зображати геометричні об'єкти в гіперболічній площині та виконувати різноманітні геометричні операції.

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського є однією з найбільш відомих та поширених моделей геометрії Лобачевського, яка знаходить застосування в різних галузях математики, фізики та комп'ютерних наук.

Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського на одиничному крузі $x^2 + y^2 < 1$ задається рімановою метрикою

$$ds^2 = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Граничне коло $x^2 + y^2 = 1$ називається абсолютном для моделі Пуанкаре.

Гіперболічними прямими називаються перетин прямих або кіл, перпендикулярних абсолюту з кругом Пуанкаре, відповідно. Відстань між точками знаходиться як довжина відрізка гіперболічної прямої з кінцями в цих точках у відповідній рімановій метриці.

Теорема 8. *Між моделлю верхньої півплощини та моделлю Пуанкаре існує ізометричне відображення.*

З цієї теореми випливає, що всі властивості (крім відстані між двома точками), що виконуються в моделі верхньої півплощини, виконуються і в моделі Пуанкаре.

Теорема 9. *Якщо в моделі Пуанкаре точки задавати за допомогою комплексних чисел, то відстань між ними може бути обчислена за формулами*

$$d(z, w) = \ln \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}, \quad \text{th} \frac{d(z, w)}{2} = \frac{z - w}{1 - z\bar{w}}.$$

2.3 Гіперболічна тригонометрія

Гіперболічний трикутник – це трикутник, сторони якого є відрізками гіперболічних прямих.

Теорема 10. (Піфагора для гіперболічного трикутника). *Для прямокутного трикутника ABC з прямим кутом B та сторонами a, b, c має місце рівність:*

$$\cosh b = \cosh a \cosh c. \tag{1}$$

де \cosh є гіперболічним косинусом.

Теорема 11. (Синусів для гіперболічного трикутника). *Для будь-якого гіперболічного трикутника зі сторонами a, b та c та відповідними протилежними кутами α , β та γ :*

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma}, \tag{2}$$

де \sinh є гіперболічним синусом.

Теорема 12. (Косинусів для гіперболічного трикутника). *Для гіперболічного трикутника зі сторонами a, b та c та відповідними протилежними кутами α , β та γ :*

$$\cosh c = \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b \cos \gamma, \tag{3}$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cosh a, \tag{4}$$

де \cosh є гіперболічним косинусом, \sinh є гіперболічним синусом.

Формула (4) дозволяє знаходити сторони трикутника за їх кутами.

2.4 Правильні восьмикутники в моделі Пуанкаре

Якщо правильний восьмикутник розрізати за всіма осями симетрії (прямыми, що проходять через протилежні кути, та прямими, що проходять через центри протилежних сторін), то отримаємо 16 прямокутних трикутників, один з яких зображений на рис. 1.

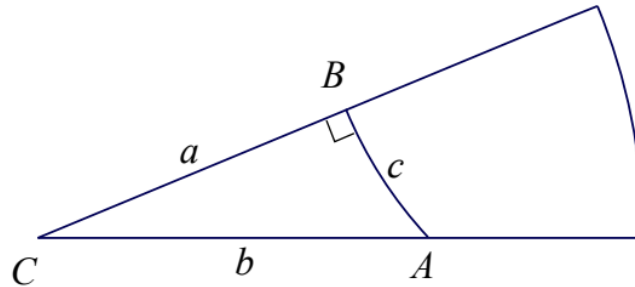


Рис. 1. Прямокутний трикутник у моделі Пуанкаре

В цьому трикутнику $\beta = \pi/2$, $\gamma = \pi/8$.

З теореми 12 маємо:

$$\cosh a = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\cos \alpha}{\sin \pi/8},$$

$$\cosh b = \frac{\cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma} = \frac{\cos \alpha \cos \pi/8}{\sin \alpha \sin \pi/8}.$$

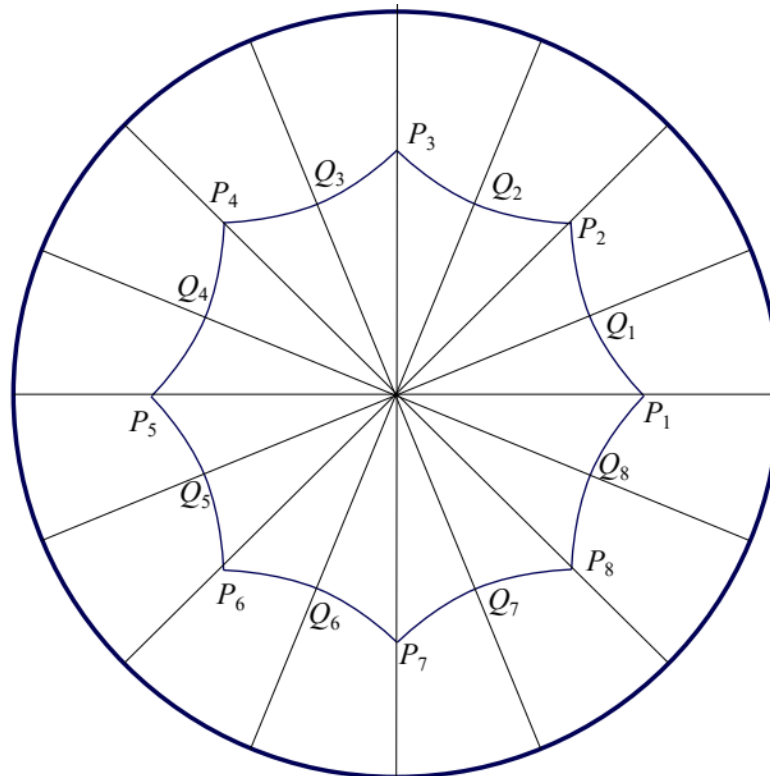


Рис. 2. Позначення точок на правильному восьмикутнику

Позначимо вершини правильного восьмикутника $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$, а центри сторін $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8$ (див. рис. 2).

Координати вершин. Будемо розглядати модель Пуанкаре в одиничному крузі $x^2 + y^2 < 1$. $O(0,0)$ – початок координат.

Нехай вершини мають координати $P_i(x_i, y_i)$, а середини сторін $Q_i(u_i, v_i)$.

Нехай α дорівнює половині внутрішнього кута восьмикутника.

Знайдемо координати першої вершини P_1 . Трикутник P_1Q_1O збігається з прямокутним трикутником ABC , що розглядався вище. Тому

$$\cosh b = \cosh|OP_1| = \frac{\cos \alpha \cos \pi/8}{\sin \alpha \sin \pi/8} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \pi/8.$$

З іншого боку OP_1 дорівнює довжині відрізка прямої $x = t, y = 0, t \in [0, x_1]$. За формулою довжини дуги в моделі Пуанкаре маємо

$$b = |OP_1| = \int_0^{x_1} \frac{2dx}{1-x^2} = \log \frac{1+x_1}{1-x_1}.$$

Звідси отримаємо

$$x_1 = \frac{e^b - 1}{e^b + 1}.$$

Підставляючи одну формулу у іншу, маємо

$$x_1 = \frac{e^{\cosh^{-1}(\cot \frac{\pi}{8} \cot \alpha)} - 1}{e^{\cosh^{-1}(\cot \frac{\pi}{8} \cot \alpha)} + 1}.$$

Оскільки $OP_2 = OP_1$, а кут P_1OP_2 дорівнює $\pi/4$, то

$$x_2 = y_2 = \frac{x_1}{\sqrt{2}}.$$

Зважаючи на симетрії правильного восьмикутника, знаходимо координати решти вершин:

$$P_3(0, x_1), P_4(-x_2, x_2), P_5(-x_1, 0), P_6(-x_2, -x_2), P_7(0, -x_1), P_8(x_2, -x_2).$$

Проведемо аналогічні обчислення для координат середин сторін (позначимо $u = u_1, v = v_1$):

$$\cosh a |OQ_1| = \frac{\cos \alpha}{\sin \pi/8}.$$

Тоді

$$u = \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \cos \frac{\pi}{8}, \quad v = \frac{e^a - 1}{e^a + 1} \sin \frac{\pi}{8}.$$

Решта координат середин сторін знаходяться із симетрій:

$$Q_2(v, u), \quad Q_3(-v, u), \quad Q_4(-u, v), \quad Q_5(-u, -v), \\ Q_6(-v, -u), \quad Q_7(v, -u), \quad Q_8(u, -v).$$

3. Доведення

3.1 Розклад дробово-лінійних відображень в композицію простих

Покажемо, що кожне дробово-лінійне перетворення є композицією розтягнень з поворотом, паралельних перенесень та інверсій з симетріями.

Якщо в дробово-лінійному відображенні

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

коефіцієнт $c = 0$, то $d \neq 0$ (оскільки $ad - bc \neq 0$) і

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d},$$

що є композицією розтягнення із поворотом з коефіцієнтом a/d та паралельного перенесення на b/d .

Якщо $c \neq 0$, то

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{\frac{a}{c}z + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(z + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c}}{z + \frac{d}{c}} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c^2}}{z + \frac{d}{c}}.$$

Отже, $f(z)$ є композицією паралельного перенесення на d/c , інверсії із симетрією, розтягненням з поворотом на коефіцієнт $\frac{bc-ad}{c^2}$ та паралельного перенесення на a/c .

3.2 Інваріантність кіл та прямих при дробово-лінійних відображеннях

Для доведення того, що дробово-лінійні відображення відображають кола та прямі в кола та прямі, подамо їх як композиції розтягнень з поворотом, паралельних

перенесень та інверсій з симетріями. Оскільки кожне з цих відображень відображає кола та прямі на кола та прямі, то це робить і їх композиція.

3.3 Композиція дробово-лінійних відображень

Знайдемо композицію відображення $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ та $g(z) = \frac{kz+l}{mz+n}$:

$$g(f(z)) = \frac{k(f(z)) + l}{m(f(z)) + n} = \frac{k \frac{az+b}{cz+d} + l}{m \frac{az+b}{cz+d} + n} = \frac{k(az+b) + l(cz+d)}{m(az+b) + n(cz+d)} = \frac{(ak+cl)z + (bk+dl)}{(am+cn)z + (bm+dn)}.$$

Отже, композиція є дробово-лінійним відображенням з матрицею

$$\begin{pmatrix} ak+cl & bk+dl \\ am+cn & bm+dn \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

3.4 Група ізометрій гіперболічної площини

Розглянемо ті дробово-лінійні перетворення, що переводять верхню півплощину на верхню півплощину.

Якщо $c = 0$, то після ділення всіх коефіцієнтів на d , дробово-лінійне перетворення набуде вигляду $f(z) = az + b$. Підставивши дві точки з прямої $y = 0$, отримаємо, що $a, b \in \mathbb{R}$, а умова, що образ i лежить у верхній півплощині, рівносильна тому, що $a > 0$.

Якщо $c \neq 0$, то після ділення всіх коефіцієнтів на c , дробово-лінійне перетворення набуде вигляду $f(z) = \frac{az+b}{z+d}$. Воно відображає дійсну пряму в себе, якщо всі коефіцієнти дійсні: $a, b, d \in \mathbb{R}$. Крім того, умова, що $\Im f(i) > 0$ рівносильна нерівності $ad - bc > 0$.

Розділивши всі коефіцієнти на деяке число, можна досягти умови $ad - bc = 1$.

Отже, дробово-лінійні перетворення, що зберігають верхню півплощину, задаються матрицями з $SL(2, \mathbb{R})$. Оскільки, якщо всі коефіцієнти помножити на -1 (матрицю перетворення помножити на $-I$), то вийде те саме перетворення, тобто множина перетворень задається групою проєктивних спеціальних матриць

$$PSL(2, \mathbb{R}) = SL(2, \mathbb{R}) / \{I, -I\}.$$

Те, що композиція перетворень відповідає множенню матриць, було доведено раніше.

Покажемо, що дробово-лінійні перетворення з матрицями з $SL(2, \mathbb{R})$ є ізометричними відображеннями. Як і в загальному випадку розкладемо їх на відображення розтягнення (з додатнім коефіцієнтом), паралельне перенесення (на дійсне число) та інверсію з симетрією ($f(z) = -1/z$). Тому досить довести ізометричність цих трьох типів відображень.

1) $f(x + iy) = kx + icy, k > 0$:

$$ds^2(f(z)) = \frac{d(kx)^2 + d(ky)^2}{(ky)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = ds^2(z).$$

2) $f(x + iy) = x + b + iy, b \in \mathbb{R}$:

$$ds^2(f(z)) = \frac{d(x + b)^2 + dy^2}{(y)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = ds^2(z).$$

3) $f(x + iy) = \frac{-1}{x+iy} = \frac{-x+iy}{x^2+y^2}$:

$$\begin{aligned} ds^2(f(z)) &= \frac{d\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)^2 + d\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2}{\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{-(x^2+y^2)dx + 2x^2dx + 2xydy}{(x^2+y^2)^2}\right)^2 + \left(\frac{(x^2+y^2)dx - 2y^2dy - 2xydx}{(x^2+y^2)^2}\right)^2}{\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2} = \\ &= \frac{((x^2 - y^2)dx + 2xydy)^2 + ((x^2 - y^2)dy - 2xydx)^2}{y^2(x^2 + y^2)^2} = \\ &= \frac{((x^2 - y^2) + 4x^2y^2)(dx^2 + dy^2)}{y^2(x^2 + y^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = ds^2(z). \end{aligned}$$

Те, що крім дробово-лінійних відображень немає інших ізометричних відображень, впливає з того факту, що будь-яку гіперболічну пряму можна відобразити в будь-яку іншу дробово-лінійним відображенням (будь-яке півколо відображається на півколо за допомогою паралельних перенесень та розтягнень, а півколо відображається на півпряму інверсією з симетрією). Отже, група ізометрій, що зберігають орієнтацію гіперболічної площини, ізоморфна групі $PSL(2, \mathbb{R})$.

3.5 Мінімальність довжин гіперболічних прямих

Досить довести мінімальність довжини дуги у однієї гіперболічної прямої. Після застосування ізометрії, яка переводить цю пряму в будь-яку іншу гіперболічну пряму, отримаємо цю властивість для довільної прямої. Нехай гіперболічна пряма має рівняння $x = 0, y = t, t \in [y_1, y_2]$. Тоді $x' = 0, y' = 1$:

$$s_1 = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}} dt = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = \ln y_2 - \ln y_1 = \ln \frac{y_2}{y_1}. \quad (5)$$

Розглянемо іншу криву між точками $(0, y_1)$ та $(0, y_2)$. Нехай параметричне рівняння цієї кривої буде $x = f(t)$, $y = t$, $t \in [y_1, y_2]$. Тоді її довжина

$$s_1 = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2}} dt = \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{((f')^2) + 1}{t^2}} dt > \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt = s_1.$$

3.6 Відстань між точками в моделі верхньої півплощини

Формула (5) задає відстань між довільними двома точками вертикальної прямої. Перевіримо, чи узгоджується вона з формулою

$$d(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (6)$$

Отже, $z = iy_1$, $w = iy_2$, $(y_2 > y_1)$,

$$d(z, w) = \ln \frac{|y_1 + y_2| + |y_1 - y_2|}{|y_1 + y_2| - |y_1 - y_2|} = \ln \frac{y_1 + y_2 - y_1 + y_2}{y_1 + y_2 - y_2 + y_1} = \ln \frac{2y_2}{2y_1} = \ln \frac{y_2}{y_1}.$$

Легко бачити, що формула (6) не змінюється, якщо до обох точок застосувати розтягнення, паралельні перенесення та інверсію з симетрією. Оскільки гіперболічну криву можна ізометрією відобразити у вертикальну пряму, то ця формула справедлива для довільної пари точок гіперболічної площини. Аналогічно доводиться виконання другої формули для тангенса гіперболічного половини відстані між точками.

По-іншому, формулу для відстані між двома точками, що мають різні абсциси, можна вивести, склавши рівняння гіперболічної прямої, що проходить через них, і скориставшись формулою для довжини дуги кривої. Ця гіперболічна крива є півколом з центром у точці перетину серединного перпендикуляра до точок з віссю абсцис ($y = 0$), а радіус дорівнює евклідовій відстані від центру до однієї з точок.

3.7 Сума кутів гіперболічного трикутника

За формулою Гауса, гаусова (повна) кривина K в гіперболічній геометрії дорівнює -1 в кожній точці. Оскільки гіперболічні криві найкоротші між двома точками, то їх геодезична кривина k_g дорівнює 0 . Для знаходження суми кутів α, β, γ трикутника скористаємося формулою Гауса-Боне з диференціальної геометрії:

$$\int_U K DS + \sum \int k_g ds + \pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma = 2\pi.$$

Звідси, $-S + 3\pi - \alpha - \beta - \gamma = \pi$, що рівносильне рівності

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - S.$$

Отже, сума кутів гіперболічного трикутника менше за π .

3.8 Ізометрія моделі верхньої півплощини на модель Пуанкаре

Ізометричне відображення моделі Пуанкаре на модель верхньої півплощини будемо шукати у вигляді дробово-лінійного відображення $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ комплексної площини. З комплексного аналізу відомо, що таке відображення задається образами трьох точок. Виберемо одну внутрішню точку (0) і дві точки на абсолюті ($-i$ та i). Нехай $f(0) = i$, $f(-i) = 0$, $f(i) = \infty$. Покладемо $d = 1$. Тоді $f(0) = b/d = b = i$. $f(-i) = 0$ рівносильно $a(-i) + b = -ai + i = 0$, тобто $a = 1$. З рівності $f(i) = \infty$ випливає $ci + d = ci + 1 = 0$, $c = i$. Отже,

$$f(x + iy) = \frac{(x + iy) + i}{i(x + iy) + 1} = \frac{2x + i(1 - x^2 - y^2)}{(1 - y)^2 + x^2}. \quad (7)$$

Підставимо точки образу в рівняння гіперболічної метрики верхньої півплощини:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{\left(d \frac{2x}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2 + \left(d \frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2}{\left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(d \frac{2x}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2 + \left(d \frac{2y}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2}{\left(\frac{1-x^2-y^2}{(1-y)^2 + x^2}\right)^2} = 4 \frac{dx^2 + dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}. \end{aligned}$$

Це значить, що побудована дробово-лінійна функція є ізометрією між моделлю Пуанкаре та моделлю верхньої півплощини.

3.9 Відстань між точками в моделі Пуанкаре

Для доведення формули відстані між точками в моделі Пуанкаре

$$d(z, w) = \ln \frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \quad (8)$$

можна скористатися формулою (6), в яку слід підставити значення перетворення (7), як це ми робили в попередньому підрозділі.

3.10 Співвідношення між сторонами та кутами гіперболічного трикутника

Для доведення гіперболічних теорем Піфагора, синусів та косинусів можна вибрати трикутник, у якого дві вершини лежать на координатній осі y і одна з них i в моделі верхньої півплощини або 0 в моделі Пуанкаре. Далі скористатися формулами для відстані між вершинами трикутника у відповідній моделі.

Так, для доведення гіперболічної теореми Піфагора виберемо такий прямокутний трикутник у моделі Пуанкаре: $A(x, 0) = x$, $B(0,0) = 0$, $C(0, y) = iy$.

Скористаємось формулою (8) для знаходження відстаней:

$$c = |AB| = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad a = |BC| = \ln \frac{1+y}{1-y},$$

$$b = |AC| = \ln \frac{\sqrt{1+x^2y^2} + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}$$

Тоді для гіперболічних косинусів:

$$\cosh c = \frac{\frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x}}{2} = \frac{1+x^2}{1-x^2}, \quad \cosh a = \frac{1+y^2}{1-y^2},$$

$$\cosh b = \frac{\frac{\sqrt{1+x^2y^2} + \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2} - \sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sqrt{1+x^2y^2} - \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2y^2} + \sqrt{x^2+y^2}}}{2} = \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Отже, $\cosh b = \cosh a \cosh c$.

Оскільки кожний прямокутний трикутник ізометрично відображається на прямокутний трикутник з катетами на координатних осях, то ця формула справедлива для кожного прямокутного трикутника.

4. Приклади візуалізації восьмикутників

Для візуалізації восьмикутників проведемо їх сторони – це кола, що проходять через 3 точки: $P_1Q_1P_2$, $P_2Q_2P_3$ тощо.

Для цього скористаємось формулою для знаходження центру кола, що проходить через три точки $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ та $C(x_3, y_3)$

$$x_0 = \frac{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2) + x_1(y_2 - y_3)^2 + x_2(y_3 - y_1)^2 + x_3(y_1 - y_2)^2}{2(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - 2(x_3 - x_1)(y_2 - y_1)},$$

$$y_0 = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) + y_1(x_3 - x_2)^2 + y_2(x_1 - x_3)^2 + y_3(x_2 - x_1)^2}{2(y_2 - y_1)(x_3 - x_1) - 2(y_3 - y_1)(x_2 - x_1)}.$$

Радіус кола рівний відстані від центру до довільної з трьох точок.

Отже, треба знати координати перших трьох точок (решта кіл та точок знаходяться за допомогою симетрій відносно осей координат чи бісектрис між ними).

Результати обчислень за наведеними вище формулами:

Випадок $\alpha = \pi/3$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,405616; & y_1 &= 0; \\ u &= 0,336816; & v &= 0,139514; \\ x_2 &= 0,286814; & y_2 &= 0,286814. \end{aligned}$$

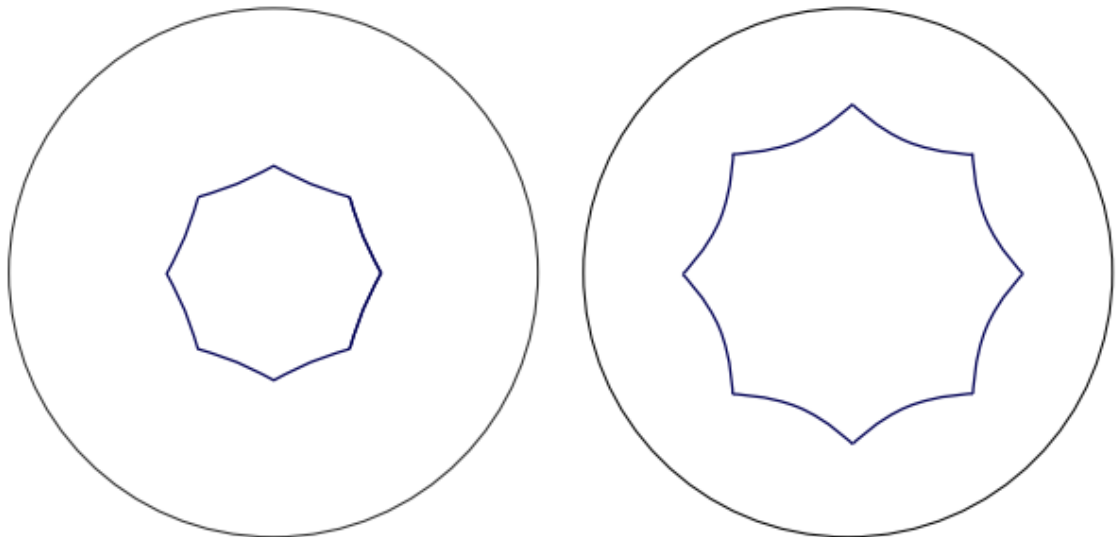


Рис.3. Правильні восьмикутники з внутрішніми кутами $2\alpha = 2\pi/3$ і $2\alpha = \pi/2$

Випадок $\alpha = \pi/4$.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0,643594; & y_1 &= 0; \\ u &= 0,504081; & v &= 0,208797; \\ x_2 &= 0,45509; & y_2 &= 0,45509. \end{aligned}$$

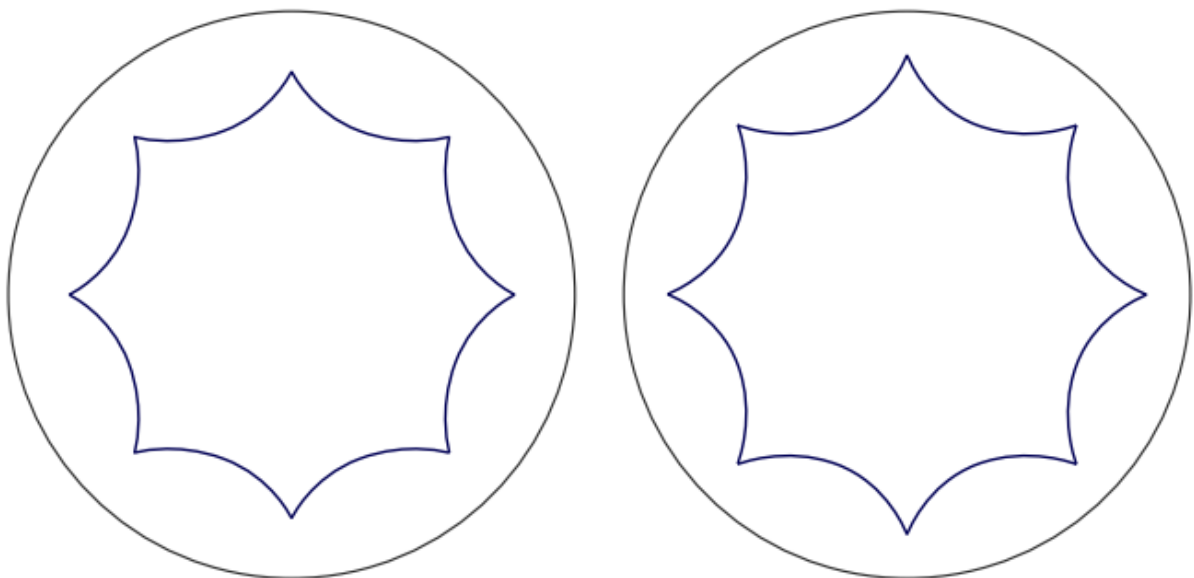


Рис. 4. Правильні восьмикутники з внутрішніми кутами $2\alpha = \pi/3$ і $2\alpha = \pi/4$

Випадок $\alpha = \pi/6$.

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,783591; & y_1 &= 0; \\u &= 0,574794; & v &= 0,238087; \\x_2 &= ,554082; & y_2 &= 0,554082.\end{aligned}$$

Випадок $\alpha = \pi/8$.

$$\begin{aligned}x_1 &= 0,840896; & y_1 &= 0, \\u &= 0,594604; & v &= 0,246293; \\x_2 &= 0,594604; & y_2 &= 0,246293.\end{aligned}$$

Наведені приклади показують, що чим менший кут при вершині правильного восьмикутника, тим візуально ближче до абсолюту розташовані вершини восьмикутника.

4. Висновки

У моделі Пуанкаре геометрії Лобачевського були побудовані правильні восьмикутники з різними внутрішніми кутами. Знайдені довжини їх діагоналей та координати вершин, за умови, що центр восьмикутника знаходиться у початку координат, а одна з вершин на осі абсцис. Зроблено візуалізацію таких восьмикутників для внутрішніх кутів $2\pi/3, \pi/3, \pi/3, \pi/4$.

Отримані восьмикутники можуть бути використані для моделювання системи координат і ріманової метрики на подвійному торі, яка має постійну гаусову кривину, рівну -1 . Методи, якими були знайдені правильні восьмикутники, можуть бути використані також для побудови правильних $2n$ -кутників у гіперболічній геометрії.

Список використаних джерел

- Погорелов А.В.(2008). *Вибрані праці:Т.2. Основи геометрії, механіка, фізика*. Київ: Наукова думка. 393 с.
- Пришляк О.О.(2004). *Диференціальна геометрія*. Київський університет. 66 с.
- Пришляк О.О. (2015). *Топологія многовидів*. Київський університет. 83 с. <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2018/03/topolog-pryshljak.pdf>
- Пришляк О. (2023). *Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем*. Навчальний посібник. 212 с. <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/12/algkom.pdf>
- Пришляк О., Білун С. (2024). Геометрія та топологія проєктивної площини. *У світі математики*, 1: 70-76. DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2024/1.8>
- Anderson, J. W.(2005). *Hyperbolic Geometry*. Springer. 276 p. <https://www.academia.edu/25421476>
- Ratcliffe, J. (2006). *Foundations of Hyperbolic Manifolds. Second Edition*. Springer. 794 p.
- Ryan, P. J. (1986). *Euclidean and Non-Euclidean Geometry: An Analytic Approach*. Cambridge University Press. 234 p. <https://www.scribd.com/document/439040367>
- Wolfe, H. E. (2013). *Non-Euclidean Geometry: A Primer*. CRC Press. 272 p. <https://www.perlego.com/book/112293/introduction-to-noneuclidean-geometry-pdf>

Отримано редакцією журналу: 10.11.2024

Прорецензовано: 25.11.2024

Схвалено до друку: 19.12.2024

Aleksandr PRISHLYAK, Dr. Sci. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

REGULAR OCTAGONS IN HYPERBOLIC GEOMETRY

Abstract. *When constructing hyperbolic structures on closed surfaces, one can use hyperbolic geometry (Lobachevsky geometry) on the plane. To do this, the surface must be represented as a $2n$ -gon on the hyperbolic plane, and a discrete group action, which is a subgroup of the movements of the hyperbolic plane, must be defined, for which the $2n$ -gon serves as a fundamental domain. If such a surface is a double torus (an oriented surface of genus 2), it can be obtained by gluing opposite sides of an octagon. In fact, the Lobachevsky plane is divided into octagons. The presence of symmetries simplifies calculations. Therefore, a natural problem arises regarding the partitioning into regular octagons. Additionally, it is important to provide examples of such octagons by specifying the coordinates of their vertices in one of the models of hyperbolic geometry.*

The models of the upper half-plane and the Poincaré model on the unit disk are used, for which the Riemannian metric is defined (the formula for finding the lengths of arcs of curves). We describe the main properties of hyperbolic lines and the group of movements (the group of isometric transformations) of hyperbolic geometry on the plane using fractional-linear transformations of the complex plane with real coefficients.

A formula has been obtained for the coordinates of the vertices and the lengths of the diagonals of a regular octagon centered at the origin in the Poincaré model. Such regular octagons with four largest angles have been constructed. We can replace the hyperbolic plane by them.

Keywords: *Lobachevsky geometry; hyperbolic line; non-Euclidean geometry; hyperbolic trigonometry; Riemannian metric.*