Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Міністерство освіти і науки України

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Маринич Олександр Віталійович

УДК 519.21

ДИСЕРТАЦІЯ

Граничні теореми для випадкових процесів з регенерацією

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика
11 — Математика та статистика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

____

Науковий консультант: д. ф.-м. н., професор **Іксанов Олександр Маратович**

Київ – 2017

АНОТАЦІЯ

Маринич О. В. Граничні теореми для випадкових процесів з регенерацією. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 – «Теорія ймовірностей і математична статистика» (111 — Математика). – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2017.

Дисертація присвячена аналізу випадкових регенеративних структур та випадкових процесів з регенерацією. Під випадковою регенеративною структурою ми розуміємо випадковий об'єкт або їх родину, з підхожим чином визначеним поняттям розміру, такий що ймовірнісні характеристики об'єктів різного розміру узгоджені, а їх розподіли є інваріантними відносно фіксованої операції видалення частини. Випадковий процес з регенерацією – це стохастичний процес, що визначений на такій структурі та індексований неперервною або дискретною змінною, що задає її розмір.

Поняття регенерації у випадкових комбінаторних структурах вперше виникло в контексті робіт О. Гнєдіна, Дж. Пітмена та М. Йора по регенеративним композиціям та розбиттям. Запропонована згаданими авторами модель композицій та поняття регенеративності, що лежить в її основі, виявились надзвичайно вдалими, а відповідні ідеї знайшли застосування в багатьох інших областях прикладної ймовірності, включаючи теорію коалесцентів, теорію випадкових перестановок, в задачах випадкового розміщення, аналізі процедур вибору лідера тощо. Подальший розвиток відповідних теорій вимагав розробки асимптотичного апарату процесів дробового ефекту, а також розробки теорії збурених випадкових блукань. В даному дисертаційному дослідженні згадані моделі та внесок автора до відповідних теорій представлені з єдиної точки зору за допомогою поняття випадкової регенеративної структури. У роботі докладно досліджено такі моделі:

- випадкові процеси з іммiграцією в моменти відновлення та, зокрема, процеси дробового ефекту, побудовані за процесом відновлення;
- випадкові регенеративні композиції;

- випадкові регенеративні перестановки;
- переставні коалесценти;
- випадкові блукання з бар'єром та збурені випадкові блукання;
- процедури випадкового просіювання та процедури вибору лідера.

В роботі вперше введено поняття випадкового процесу з імміграцією в моменти відновлення та побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності цих процесів. Отримано умови збіжності до стаціонарних процесів з імміграцією; доведено граничні теореми для процесів дробового ефекту з функціями відповіді, що не зростають, у випадках правильної зміни та повільної зміни нормування; отримано граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією у випадку правильної зміни нормування. Доведено граничні теореми для низки функціоналів, що діють на збурених випадкових блуканнях, зокрема доведено функціональну граничну теорему для числа візитів збуреного випадкового блукання в інтервал.

Для випадкових регенеративних композицій встановлено ряд граничних теорем, зокрема отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона. Введено поняття регенеративної випадкової перестановки та отримано граничні теореми для порядку таких перестановок. Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями та отримано ряд граничних теорем для коалесцентів з пиловою компонентою. Для переставних коалесцентів без пилової компоненти аналогічні результати отримано з використанням техніки ймовірнісних метрик. Доведено центральну граничну теорему для числа нульових декрементів у випадкових блуканнях з бар'єром. Останні два результати отримані з доведених в роботі загальних теорем про слабку збіжність часу поглинання у ланцюгах Маркова, що не спадають.

Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання. Встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами. В роботі вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями. Досліджено узагальнені процедури вибору лідера та встановлено граничні теореми для деяких характеристик таких процедур. Побудовано каплінг випадкових просіювань процесом рекордів та коалесцента Пуассона-Діріхле, що дозволив отримати граничну теорему для числа зіткнень у цьому коалесценті.

В роботі введено декілька нових класів стохастичних процесів, що виникають як слабкі границі випадкових процесів з регенерацією: дробового інтегровані стійкі процеси Леві та дробово інтегровані обернені стійкі субординатори. Досліджено властивості розподілів та траєкторій таких процесів, зокрема, стохастична неперервність, неперервність та гельдеровість траєкторій, самоподібність, локальні закони повторного логарифма тощо. Показано, що для деяких значень параметрів цих процесів їх траєкторії є майже напевно небмеженими на довільних інтервалах.

Доведено локальну універсальність дійсних коренів випадкових тригонометричних поліномів у випадку коефіцієнтів зі скінченними другими моментами, а також для коефіцієнтів, що лежать в області притягання стійких розподілів. Показано збіжність степеневих та показникових моментів нормованого та центрованого числа відновлень у випадку, коли розподіл кроку відповідного випадкового блукання лежить в області притягання стійкого розподілу. З використанням симетрій планарного процесу Пуассона, отримано несподівані рівності розподілів для випадкових матриць, породжених рекордами.

Результати дисертаційної роботи носять в основному теоретичний характер і є внеском до теорії дискретних випадкових структур з регенерацією. Основні результати, а також ідеї та методи, що використовуються в роботі, можуть бути корисними у різних розділах теорії ймовірностей та математичної статистики. Поняття регенерації, самоподібності та рекурсивності у стохастичних системах, притаманні об’єктам даного дослідження, виникають у багатьох прикладних задачах, а тому запропонована у роботі методологія аналізу таких систем має вагоме прикладне значення. Зокрема, випадкові процеси з іммiграцією та процеси дробового ефекту є математичною моделлю електричного струму у вакуумних трубках, дробового ефекту в іонних каналах, затримок у врегулюванні страхових претензій, сейсмічної активності регіону та багатьох інших процесів у різних областях науки. Фактично, будь-який процес, який описує кумулятивний ефект однотипних імпульсів, що поступають у систему у випадкові, але регулярно розподілені моменти часу, є випадковим процесом з імміграцією. Теорія переставних коалесцентів та регенеративних композицій є складовою математичного апарату генетики популяцій. Випадкові дерева та процедури вибору лідера (випадкові просіювання) повсякчас застосовуються в комп'ютерних науках, зокрема у аналізі алгоритмів.

Ключові слова: випадкові композиції, випадкові перестановки, випадкові процеси з імміграцією, випадкові регенеративні структури, гратки Бернуллі, дробово інтегровні обернені стійкі субординатори, дробово інтегровні процеси Леві, збурене випадкове блукання, ймовірнісні метрики, коалесценти, процедри вибору лідера, процедури випадкового просіювання, процеси дробового ефекту, тетрація.

SUMMARY

Marynych O. V. Limit theorems for random processes with regeneration. — Manuscript.

Doctor's thesis in Physics and Mathematics, specialty 01.01.05 – probability theory and mathematical statistics (111 — Mathematics). – Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2017.

The thesis is devoted to the analysis of random regenerative structures and random processes with regeneration. A regenerative random structure is a random structure or a family of random structures with an appropriately defined notion of «size», such that distributional properties of structures of different sizes are consistent and invariant under a fixed operation that deletes a part of the structure. A random process with regeneration is a stochastic process defined on such a structure and indexed by a discrete or continuous variable representing its size.

The notion of regeneration in random combinatorial structures was introduced in the series of papers by A. Gnedin, J. Pitman and M. Yor on random composi-

tions and partitions. The model of random compositions proposed by these authors and its intrinsic regenerative structure turned out to be extremely fruitful and the corresponding ideas found their applications in various fields of theoretical and applied probability, including exchangeable coalescents, random permutations, allocation models, random trees and, more generally, in the theory of exchangeable partition-valued processes. On the other hand, further progress in these fields demanded the development of the asymptotic theory of renewal shot noise processes and their generalizations, called random processes with immigration. In this thesis the aforementioned models and author's contribution to the corresponding theories is presented in a unified way using the notion of a regenerative random structure. The following models are studied in details:

- random processes with immigration at renewal epochs and, in particular, renewal shot noise processes;
- regenerative random compositions;
- regenerative random permutations;
- exchangeable coalescents with multiple collisions;
- random walks with the barrier and perturbed random walks;
- random sieves and generalized leader election procedures.

The notion of random process with immigration at the epochs of a renewal process is proposed and a classification of the modes of weak convergence of such processes is constructed. We obtain conditions for the weak convergence to a stationary process with immigration; prove limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions in the cases of regular and slow variation of the normalization; derive limit theorems for random processes with immigration in case of the regularly varying normalization. As a byproduct, limit theorems for several functionals on perturbed random walks are proved. In particular, a functional limit theorem for the number of visits of a perturbed random walk to an interval is obtained.

For regenerative random compositions we derive a number of limit theorems for different functionals. In particular, a functional limit theorem for the number of blocks in regenerative compositions derived from a compound Poisson processes (the Bernoulli sieve) is proved. The notion of regenerative random permutation is proposed and limit theorems for the order of such permutations are proved. We introduce a coupling of regenerative random compositions and coalescents with multiple collisions and apply it to prove several asymptotic results for coalescents with dust component, including limit theorems for the number of collisions and the absorption time. For exchangeable coalescents without dust component analogous results are proved using the technique of probability distances. The latter method is also applied to derive a central limit theorem for the number of zero increments in a random walk with a barrier. The last two results are derived from our general limit theorems for the absorption time in non-increasing Markov chains.

We propose and analyze a new stochastic operation of a random sieving. A connection of this operation with classical Galton-Watson processes and exchangeable coalescents is established. The notion of stability of point processes with respect to sieving is proposed, and a characterization of point processes which are stable with respect to sieving by random walks is derived. Generalized leader-election procedures are discussed and a number of limit theorems for different characteristics of these procedures are proved. A limit theorem for the number of collisions in the Poisson-Dirichlet coalescent is established.

We introduce a few new classes of stochastic processes, including fractionally integrated stable processes and fractionally integrated inverse stable subordinators. We discuss their distributional and pathwise properties such as stochastic continuity, sample continuity, self-similarity, Hölder continuity and local laws of iterated logarithm. It is shown that for some values of their parameters the aforementioned processes have almost surely locally unbounded paths.

Local universality of real roots of random trigonometric polynomials is proved in the case where the coefficients have finite second moments, as well as for the coefficients from the domain of attraction of a stable law. We show convergence of the power and exponential moments of the number of renewals, suitably shifted and scaled, when the step of the underlying random walk belongs to the domain of attraction of a stable law. Using symmetries of a Poisson process in the positive quadrant we derive some surprising distributional identities for random matrices generated by the records.

The results of the thesis are of theoretical natural and constitute an essential contribution to the theory of discrete random structures with regeneration. The main results, as well as the ideas and methods used in the work, can be applied in various fields of probability theory and mathematical statistics. The concept of regeneration, self-similarity and recursiveness in stochastic systems, intrinsic for the objects of this study, arise in many applied problems. The methodology of analysis of such systems proposed in the present work has a significant value for applications. In particular, random processes with immigration and renewal shot noise processes are used as mathematical models of electric current in vacuum tubes, a shot noise effect in ion channels, delays in the settlement of insurance claims, seismic activity of the region, and many other processes in various fields of science. In fact, any process that describes the cumulative effect of the homogeneous flow of random impulses entering the system is a random process with immigration. The theory of exchangeable coalescents and regenerative compositions is an integral part of the mathematical apparatus of genetics of populations. Random trees and leader selection procedures (random sieves) are ubiquitous in computer science, in particular in the analysis of algorithms.

Keywords: coalescents, fractionally integrated inverse stable subordinators, fractionally integrated Lévy processes, leader-election procedures, perturbed random walk, probability metrics, random compositions, random permutations, random processes with immigration, random sieves, regenerative random structures, renewal shot noise processes, the Bernoulli sieve, tetration.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Публікаці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Alsmeyer G. Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / G. Alsmeyer, A. Iksanov, A. Marynych // Stochastic Processes and their Applications. – 2017. – **127**, №3. – p. 995–1017.

2. Alsmeyer G. Leader election using random walks [Electronic resource] / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // ALEA – Latin American Journal of Probability and Statistics. – 2016. – **13**. – p. 1095–1122. – Режим доступу: `http://alea.impa.br/articles/v13/13-39.pdf`

3. Alsmeyer G. Renewal approximation for the absorption time of a decreasing Markov chain / G. Alsmeyer, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2016. – **53**, №3. – p. 765–782.

4. Fractionally integrated inverse stable subordinators / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, G. Shevchenko // Stochastic Processes and their Applications. – 2016. – **127**, №1. – p. 80-106.

5. Gnedin A. Λ-coalescents with dust component / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2011. –**48**, №4. – p. 1133–1151.

6. Gnedin A. A generalization of the Erdös-Turán law for the order of random permutation / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Combinatorics, Probability and Computing. – 2012. –**21**, №5. – p. 715-733.

7. Gnedin A. Λ-coalescents: a survey / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2014. – **51A**. – p. 23–40.

8. Gnedin A. Exponential-uniform identities related to records [Electronic resource] / A. Gnedin, A. Marynych // Electronic Communications in Probability. – 2012. – **17**. – p. 1–5. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465263159`

9. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials [Electronic resource] / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Electronic Journal of Probability. – 2016. – **21**. – p. 1–19. – Режим доступу: `http://projecteuclid.org/euclid.ejp/1476706888`

10. Iksanov A. Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **114**. – p. 67–77.

11. Iksanov A. A note on non-regular martingales / A. Iksanov, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2008. – **78**. – p. 3014–3017.

12. Iksanov A. Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – **124**, №6. – p. 2132–2170.

13. Iksanov A. Moment convergence of first-passage times in renewal theory / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **119**. – p. 134–143.

14. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration I: scaling limits / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1233–1278.

15. Iksanov A. Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych, V. Vatutin // Theory of Probability and its Applications. – 2015. – **59**, №1. – p. 87–113.

16. Kabluchko Z. Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails / Z. Kabluchko, A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – **21(37)**, №2. – p. 14–21.

17. Marynych A. A note on convergence to stationarity of random processes with immigration / A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2015. –

20(36), №1. – p. 84–100.

18. Marynych A. Weak convergence of the number of zero increments in the random walk with barrier [Electronic resource] / A. Marynych, G. Verovkin // Electronic Communications in Probability. – 2014. – **19**. – p. 1–11. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465316776`

19. Marynych O. Stochastic recurrences and their applications to the analysis of partition-valued processes / O. Marynych // Utrecht University. – 2011. – p. 134.

20. On asymptotic of beta-coalescents / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Maryncyh, M. Möhle // Journal of Applied Probability. – 2014. – **46**, №2. – p. 496–515.

21. Маринич О. В. Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з іммiграцією / О. В. Маринич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки – 2016. – №2. – С. 103-113.

Публікації, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

22. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 50.

23. Iksanov A. Asymptotics of beta-coalescents / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «Modern Stochastics : Theory and Applications III». – Kyiv. – 2012. –p. 41.

24. Iksanov A. Finite-dimensional convergence of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 52.

25. Iksanov A. Limit theorems for random processes with immigration at the epochs of a renewal process / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners //

International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 61–62.

26. Iksanov A. A functional limit theorem for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 198-199.

27. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials / A. Iksanov, A. Marynych // International workshop «Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics». – Kyiv. – 2016. – p. 23-24.

28. Marynych A. The Bernoulli sieve: allocation scheme in a random environment / A. Marynych // Winter school «Spatial Models in Statistical Mechanics». – Darmstadt, Germany. – 2014. – p. 16–17.

29. Marynych A. On perpetuities arising in population genetics / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2014. – p. 21–22.

30. Marynych A. Renewal approximation for the absorption time in nonincreasing Markov chains / A. Marynych // International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». – Kyiv. – 2015. – p. 77.

31. Marynych A. Scaling limits for random processes with immigration / A. Marynych // International conference «Stochastic Processes in Abstract Spaces». – Kyiv. – 2015. – p. 36.

32. Marynych A. A leader-election procedure using records / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2016. – p. 24–25.

33. Іксанов О. Про асимптотику бета-коалесцентів / О. Іксанов, О. Маринич // Конференція «Problems of decision making under uncertainties». – Мукачево. – 2012. – с. 116.

Публікаці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

34. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration II: convergence to stationarity / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1279-1298.

35. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // Annals of Probability. – 2017. – У друці, препринт доступний за посиланням `http://www.imstat.org/aop/future_papers.htm`

ЗМІСТ

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ

$\square$ – завершення доведення

$\mathbb{R}_+$ – невід'ємна півпряма $[0, \infty)$

$\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \bigcup \{0\}$

в.в. – випадкова величина

х.ф. – характеристична функція випадкової величини

м.н. – майже напевно

$\stackrel{\mathrm{d}}{\to}$ – слабка збіжність в.в. та випадкових векторів

$\stackrel{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow}$ – збіжність скінченновимірних розподілів випадкових процесів (область зміни аргументу процесів завжди вказується явно)

$\Rightarrow$ – слабка збіжність випадкових елементів у функціональних просторах (простір та топологія завжди вказуються явно)

$\stackrel{\mathrm{d}}{=}$ – рівність розподілів випадкових елементів

$\stackrel{\mathrm{d}}{\leq}$ – стохастичний порядок, $X \stackrel{\mathrm{d}}{\leq} Y$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{P}\{X \leq x\} \geq \mathbb{P}\{Y \leq x\}$ для всіх $x \in \mathbb{R}$

$\stackrel{\mathrm{f.d.}}{=}$ – рівність скінченновимірних розподілів випадкових процесів

$f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in [-\infty, \infty]$, означає $\varlimsup\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} < \infty$

$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, де $x_0 \in [-\infty, \infty]$, означає $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

L, ℓ, $\hat{\ell}$ – функції, що повільно змінюються на ∞

$\mathbb{1}_A$ – індикатор події A, що дорівнює 1, якщо подія A відбувається, та $= 0$, інакше

$\Gamma(z)$ – гамма-функція: $\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} \mathrm{d}x$ при $\mathrm{Re}\, z > 0$

$\mathrm{B}(u, v)$ – бета-функція: $\mathrm{B}(u, v) := \int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1} \mathrm{d}x$ при $\mathrm{Re}\, u > 0$, $\mathrm{Re}\, v > 0$

$\zeta(s,q)$ – дзета-функція Гурвіца: $\zeta(s,q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+q)^s}$ при $\operatorname{Re} s > 1$, $\operatorname{Re} q > 0$

$x \wedge y = \min(x, y)$

$x \vee y = \max(x, y)$

$x_+ := \max(x, 0)$

$x_- := -\min(x, 0)$

$\circ$ – композиція функцій, $f \circ g(\cdot) = f(g(\cdot))$

Id – тотожне відображення

$\varphi^{(k\uparrow n)} := \varphi^{(k)} \circ \ldots \circ \varphi^{(n)}$ при $k \le n$; $\varphi^{(k\uparrow n)} := \mathrm{Id}$ при $k > n$

$\varphi^{(n\downarrow k)} := \varphi^{(n)} \circ \ldots \circ \varphi^{(k)}$ при $n \le k$; $\varphi^{(n\uparrow k)} := \mathrm{Id}$ при $n > k$

$[x]$ або $\lfloor x \rfloor$ – ціла частина x, тобто $[x] = \lfloor x \rfloor = \sup\{n \in \mathbb{Z} : n \le x\}$

$\lceil x \rceil$ – «стеля» x, тобто $\lceil x \rceil = \inf\{n \in \mathbb{Z} : x \le n\}$

δ_x – ймовірнісний розподіл, зосереджений в точці x

«груба топологія» – переклад *англ.* vague topology, що є стандартною топологією на просторі локально скінченних мір

$(\mathcal{S}_\alpha(t))_{t\ge 0}$ – стандартний броунівський рух при $\alpha = 2$ та спектрально негативний α-стійкий процес Леві такий, що $\mathcal{S}_\alpha(1)$ має характеристичну функцію, яка задається формулою (2.67) при $\alpha \in (1,2)$; зокрема, в.в. зі стандартним нормальним розподілом всюди позначається через $\mathcal{S}_2(1)$

$(W_\alpha(t))_{t\ge 0}$ – α-стійкий субординатор (процес Леві, що зростає) з експонентою Лапласа $-\ln \mathbb{E}[e^{-zW_\alpha(t)}] = \Gamma(1-\alpha)tz^\alpha$ при $\alpha \in (0,1)$ та $z \ge 0$

const – константи, значення яких неістотні; два такі символи навіть в одному рядку можуть позначати різні константи

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Основним об'єктом досліджень дисертаційної роботи є *випадкові процеси з регенерацією* або, більш загально, *випадкові регенеративні структури*. Під випадковою регенеративною структурою ми розуміємо випадковий об'єкт або їх родину, з підхожим чином визначеним поняттям «розміру», такий що ймовірнісні характеристики об'єктів різного розміру узгоджені, а їх розподіли є інваріантними відносно фіксованої операції видалення частини. Випадковий процес з регенерацією – це стохастичний процес, що визначений на такій структурі та індексований неперервною або дискретною змінною, що задає її розмір.

Класичним прикладом випадкової регенеративної структури є *випадкова рівномірна перестановка*. Нехай $\mathfrak{S}_n$ – симетрична група множини $\{1, 2, \ldots, n\}$, а σ_n – елемент $\mathfrak{S}_n$, вибраний навмання. Випадкова рівномірна перестановка σ_n, або більш точно сім'я перестановок $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ задовольняє такі дві властивості[1]:

- за умови, що цикл, який містить 1, має довжину $m \in \{1, \ldots, n\}$, його видалення з перестановки σ_n та перенумерація решти елементів дає рівномірну перестановку множини $\{1, 2, \ldots, n-m\}$, тобто випадковий елемент множини $\mathfrak{S}_{n-m}$ з тим же розподілом, що й σ_{n-m};

- видалення елемента $n+1$ з σ_{n+1} дає випадкову перестановку з тим же розподілом, що й σ_n.

Перша властивість відповідає регенеративності як рисі збереження розподілу відносно операції «видалення частини» – в даному випадку видалення першого циклу. Друга властивість демонструє, що рівномірні перестановки $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ узгоджені для різних розмірів n. Випадковим процесом з регенерацією на випадковій рівномірній перестановці може бути, наприклад, число

[1] Нагадаємо, що кожна перестановка може бути записана у вигляді диз'юнктного об'єднання циклів.

циклів, число нерухомих точок, порядок перестановки, довжина найдовшого циклу тощо. Аргументом таких процесів виступає, зазвичай, дискретний параметр n – кількість елементів множини, на якій розглядається симетрична група. Строгі визначення випадкової регенеративної структури та випадкового процесу з регенерацією наводяться на с. 34.

Поняття регенерації у випадкових комбінаторних структурах вперше виникло в контексті робіт О. Гнєдіна, Дж. Пітмена та М. Йора [90, 105, 106, 107] по регенеративним композиціям та розбиттям. Запропонована згаданими авторами модель композицій та поняття регенеративності, що лежить в її основі, виявились надзвичайно вдалими, а відповідні ідеї знайшли застосування в багатьох інших областях прикладної ймовірності, включаючи теорію коалесцентів, теорію випадкових перестановок, в задачах випадкового розміщення, аналізі процедур вибору лідера тощо. Подальший розвиток відповідних теорій вимагав розробки асимптотичного апарату процесів дробового ефекту, а також розробки теорії збурених випадкових блукань. В даному дисертаційному дослідженні згадані моделі та внесок автора до відповідних теорій представлені з єдиної точки зору за допомогою поняття випадкової регенеративної структури. У роботі докладно досліджено такі моделі:

- випадкові процеси з імміграцією в моменти відновлення (поняття було вперше введено у статті автора [138]) та, зокрема, процеси дробового ефекту, побудовані за процесом відновлення;
- випадкові регенеративні композиції;
- випадкові регенеративні перестановки (поняття було вперше введено у статті автора [97], як узагальнення згаданих вище рівномірних перестановок);
- переставні коалесценти;
- випадкові блукання з бар'єром та збурені випадкові блукання;
- процедури випадкового просіювання (поняття було вперше введено у статтях автора [9, 10]) та процедури вибору лідера.

Як вже зазначалось, існує тісний взаємозв'язок між наведеними класами регенеративних структур, при цьому дослідженню таких взаємозв'язків в роботі приділяється особлива увага. Наприклад, теореми про асимптотику збурених випадкових блукань та процесів дробового ефекту (розділ 2) використовуються для доведення результатів для регенеративних композицій (підрозділ 3.1) та випадкових перестановок (підрозділ 3.2). В свою чергу, випадкові композиції застосовуються для вивчення асимптотики переставних коалесцентів з множинними злиттями (підрозділ 3.3). Процедури випадкового просіювання, введені в розділі 5, виявляються корисними при дослідженні коалесцентів з одночасними множинними злиттями (підрозділ 5.2.2).

Крім аналізу вищезгаданих головних об'єктів дослідження роботи, запропоновані підходи можуть бути застосовані для вивчення схем випадкового розташування, семплінгу видів, процесів фрагментації, моделей розкладних структур таких, як розбиття та відображення, а також вивчення їх компонентних спектрів. Перелічені класи випадкових структур повсякчас виникають у прикладних задачах та застосовуються для моделювання найрізноманітніших явищ природи. Більш детально про можливі застосування буде сказано нижче, окремо для кожної зі згаданих структур.

Широкий клас прикладних та теоретичних проблем, в яких виникають випадкові регенеративні структури та випадкові процеси з регенерацією, сприяв появі помітної кількості публікацій, присвячених їх дослідженню, що свідчить про високу актуальність та популярність цієї проблематики. Серед найважливіших робіт згадаємо серію статей К. Клюппельберг, Т. Мікоша та співавторів про процеси дробового ефекту, побудовані за процесом Пуассона; низку робіт А. Барбура, О. Гнєдіна, М. Йора, О. Іксанова, Дж. Пітмена та інших про регенеративні композиції та розбиття; статті Ж. Берестикі, Н. Берестикі, О. Гнєдіна, О. Іксанова, В. Лімік, М. Мьолє, С. Сагітова, Дж. Пітмена та Дж. Швайнсберга по коалесцентам з множинними злиттями; дослідження Л. Девроє, М. Дрмоти, О. Іксанова, Х. Махмуда, М. Мьолє, Х. Хвана пов'язані з випадковими деревами; статті Т. Брюсса, Р. Грюбеля, Х. Продінгера, В. Шпанковскі про процедури вибору лідера; публікації Р. Арратія, А. Вершика, П. Ердеша, С. Керова, В. Колчіна, С. Таваре, П. Турана, А. Якиміва по випадковим перестановкам.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відповідності до плану наукових досліджень кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в межах науково-дослідної теми «Проблеми теорії прийняття рішень та системного аналізу стохастичних мереж» (2011-2015 рр.), НДР №11БФ015-06, номер держреєстрації O116U002529.

Підготовка дисертаційної роботи була частково підтримана грантом Free Competition Grant of NWO (організація наукових досліджень Нідерландів), грантом Президента України Ф47/012, грантом Фонду Олександра фон Гумбольдта (проект UKR/1159481).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова асимптотичної теорії випадкових регенеративних структур, зокрема, побудова класифікації режимів слабкої збіжності випадкових процесів з регенерацією, що описують такі структури, коли їх розмір стає великим. Умовно, завдання цього дослідження можна поділити на два класи. Перший клас задач – отримання функціональних граничних теорем у просторі неперервних функцій або просторі Скорохода, або доведення збіжності скінченновимірних розподілів для випадкових процесів з регенерацією. Другий клас задач – вивчення властивостей траєкторій граничних процесів (локальна обмеженість; неперервність та, зокрема, гельдеровість; локальні закони повторного логарифму тощо) та аналіз їх розподілів (незалежність приростів; стаціонарність; самоподібність; моменти; великі та малі відхилення). *Об'єкт дослідження* – випадкові регенеративні структури та випадкові процеси з регенерацією, *предмет дослідження* – асимптотика випадкових регенеративних структур та випадкових процесів з регенерацією.

Методи дослідження. У дисертаційній роботі використовується як стандартний апарат теорії ймовірностей, так і більш специфічні методи

1) теорії відновлення та теорії випадкових блукань (усі розділи);

2) теорії правильної зміни (усі розділи);

3) теорії точкових процесів (розділи 2, 5);

4) теорії мартингалів з дискретним часом (усі розділи);

5) теорії екстремальних процесів (розділи 2 та 5);

6) теорії ймовірнісних метрик (розділ 4);

7) теорії функцій комплексної змінної (підрозділ 6.4);

8) метод неперервного відображення (усі розділи).

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати дисертаційної роботи є новими. Зокрема,

- побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності деяких випадкових процесів з імміграцією у моменти стрибків процесу відновлення, зокрема, процесів дробового ефекту з функціями відповіді, що не зростають.

- Вперше отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона.

- Описано режими слабкої збіжності числа нульових блоків регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона.

- Введено поняття регенеративних випадкових перестановок та отримано граничні теореми для порядку таких перестановок.

- Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями, що дозволило встановити низку граничних теорем для функціоналів, заданих на коалесцентах з пиловою компонентою.

- Отримано достатні умови слабкої збіжності часу поглинання спадних ланцюгів Маркова до стійких розподілів.

- Встановлено граничну теорему для числа нульових декрементів у випадкових блуканнях з бар'єром.

- Доведено низку граничних теорем для числа злиттів та повної довжини дерева переставних коалесцентів без пилової компоненти.

- Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання; встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами.

- Вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями.

- Досліджено узагальнені процедури вибору лідера та встановлено граничні теореми для числа раундів, початкових позицій гравців та числа гравців після n раундів.

- Досліджено властивості розподілів та властивості траєкторій процесів, що є граничними для випадкових процесів з регенерацією. Зокрема, перевірено гельдеровість та встановлено локальні закони повторного логарифма для дробово інтегровних обернених стійких субординаторів.

- Доведено локальну універсальність для дійсних коренів тригонометричних поліномів.

- Встановлено збіжність степеневих та показникових моментів у граничних теоремах для процесу відновлення.

Теоретичне і практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи носять в основному теоретичний характер і є внеском до теорії дискретних випадкових структур з регенерацією. Основні результати, а також ідеї та методи, що використовуються в роботі, можуть бути корисними у різних розділах теорії ймовірностей та математичної статистики. З іншого боку, поняття регенерації, самоподібності та рекурсивності у стохастичних системах, притаманні об'єктам даного дослідження, виникають у багатьох прикладних задачах. Запропонована у роботі методологія аналізу таких систем має вагоме прикладне значення. Наведемо короткий перелік можливих застосувань. Більш повний опис може бути знайдений в огляді літератури.

Випадкові процеси з імміграцією та процеси дробового ефекту є математичною моделлю електричного струму у вакуумних трубках [244], дробового ефекту в іонних каналах [177], затримок у врегулюванні страхових претензій [168], сейсмічної активності регіону [261] та багатьох інших процесів у різних областях науки. Фактично, будь-який процес, який описує кумулятивний ефект однотипних імпульсів, що поступають у систему у випадкові, але регулярно розподілені моменти часу, є випадковим процесом з імміграцією. Теорія переставних коалесцентів та регенеративних композицій є складовою математичного апарату генетики популяцій [32]. Випадкові дерева та процедури вибору лідера (випадкові просіювання) повсякчас застосовуються в комп'ютерних науках, зокрема у аналізі алгоритмів [66, 78].

Матеріали, подані у дисертаційному дослідженні, частково увійшли до спеціальних курсів, які читалися автором на кафедрі дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, представлені у дисертації, отримані автором особисто. З статей, написаних у співавторстві, до дисертації включені лише результати автора.

В статті [7] О. М. Іксанову (науковому консультанту автора) належить доведення теореми 3.2. Оформлення робіт [7], [9], [10] та [11] було виконано Г. Альсмаєром. Представлені в дисертації результати цих статей отримані автором особисто. З. Каблучко належать твердження 2.6, 2.13, 2.22 та розділ 2.5 роботи [10] та моделювання в статті [9], що представлені на рисунках 1.2 та 5.1. Розділ 1 роботи [96] написаний О. В. Гнєдіним, О. М. Іксанову належить доведення теореми 5.1. В статті [97] автором було отримано першу версію доведення теорем 3.1 та 3.2. В оглядовій статті [98] автором написані підрозділи 2.4, 4.1, 4.2 та розділ 8. Теорема 3.2 та твердження 3.1 роботи [99] належать М. Мьолє, О. М. Іксанову належать наслідки 3.1 та 3.2, оформлення роботи виконано О. В. Гнєдіним. Теорема 1.1 роботи [132] вперше доведена

О. М. Іксановим та З. Каблучко для окремого випадку, загальне формулювання та доведення належать автору. В роботі [131] О. М. Іксановим та З. Каблучко доведено основний результат у випадку скінченної дисперсії, решта результатів отримана автором. В роботі [133] О. М. Іксанову належить доведення теореми 2.6, З. Каблучко проведені моделювання, представлені на рисунку 6.1, розділ 3 написаний Г. М. Шевченко. В роботах [136], [137], [138] та [139] М. Майнерсом написані вступні частини, перші доведення теореми 2.9 у [136] та теореми 2.4 у [138], а також розділ 4 в [139] належать О. М. Іксанову. Наслідок 1.6 в [137] сформульовано і доведено О. М. Іксановим. Зауваження 2.2 та приклад 2.5 роботи [155] належать З. Каблучко. В роботі [134] О. М. Іксановим написано розділ 2. Вступ статті [103] написано О. В. Гнєдіним.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідалися на міжнародній конференції «Modern Stochastics: Theory and Applications III» (м. Київ, Україна, 2012 р.), міжнародній конференції «German Open Conference on Probability and Statistics 2014» (м. Ульм, Німеччина, 2014 р.), міжнародній конференції «German Probability and Statistics Days 2016» (м. Бохум, Німеччина, 2016 р.), міжнародній конференції «Probability, Reliability and Stochastic Optimization» (м. Київ, Україна, 2015 р.), серії міжнародних конференцій «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis» (м. Бендлєво, Польща, 2014 та 2016 рр.), міжнародній конференції «Stochastic Processes in Abstract Spaces» (м. Київ, Україна, 2015 р.) та серії конференцій «Problems of Decision Making under Uncertainties» (Україна, 2011 та 2012 рр.); на воркшопах «Spatial Models in Statistical Mechanics» та «Geometric Models in Probability» (м. Дармштадт, Німеччина, 2014 та 2016 рр.); на воркшопі «International Workshop on Limit Theorems in Probability Theory, Number Theory, and Mathematical Statistics» (м. Київ, Україна, 2016 р.);

Також матеріали дисертаційного дослідження доповідалися та обговорювалися на наукових семінарах:

- відділу випадкових процесів Інституту математики НАН України;
- кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ «КПІ»;

- кафедри дослідження операцій Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
- кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
- Інституту математики університету міста Утрехт (Нідерланди);
- кафедри стохастики факультету математики та комп'ютерних наук технічного університету міста Ейндховен (Нідерланди);
- Інституту математичної статистики Університету м. Мюнстер (Німеччина);
- при відділі теорії ймовірностей Інституту математики університету міста Кіль (Німеччина);
- з прикладної ймовірності при Інституті математики м. Вроцлав (Польща);
- відділення стохастики Інституту математики університету м. Тюбінген (Німеччина);
- відділення стохастики технічного університету м. Дармштадт (Німеччина);
- кафедри стохастики університету королеви Марії м. Лондон (Великобританія).

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, 6-ти розділів, висновків, списку використаних джерел та трьох додатків. Кожен розділ розбито на підрозділи, які, в свою чергу, поділяються на пункти. Розділи мають власну нумерацію формул. Теореми, леми, твердження, зауваження мають наскрізну нумерацію. Робота містить 11 рисунків та 4 таблиці, список використаних джерел містить 276 позицій. В додатку А зібрано ряд допоміжних лем, а також менш важливі результати, що не увійшли в основний текст дисертації внаслідок обмежень на його розмір. В короткому додатку

В стисло викладено найбільш важливі для розуміння основного тексту поняття: конструкція топологій на просторах Скорохода, основи теорії маркованих точкових процесів, властивості мінімальних L_p метрик та результати про сильну апроксимацію процесів відновлення. В додатку C зібрано декілька суто технічних результатів. Загальний обсяг дисертації становить 451 сторінку, основний текст займає 312 сторінок.

Наведемо формальне визначення випадкової регенеративної структури. Нехай $(\mathfrak{A}, \preceq)$ – довільна направлена множина (частково впорядкована множина в якій довільна пара елементів має верхню межу), елементи якої будемо ототожнювати з розмірами регенеративної структури. Найчастіше, $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{N}_0, \leq)$ або $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{R}_+, \leq)$. Далі, для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$, нехай $\mathfrak{B}_\alpha$ – гаусдорфовий топологічний простір, елементи якого називатимемо структурами розміру α, $\mathcal{F}_\alpha$ – деяка σ-алгебра в $\mathfrak{B}_\alpha$, $\mathbb{P}_\alpha$ – ймовірнісна міра на $\mathcal{F}_\alpha$. Елемент $\mathfrak{F}_\alpha \in \mathfrak{B}_\alpha$, вибраний відповідно до міри $\mathbb{P}_\alpha$, називатимемо *випадковою структурою* розміру α з розподілом $\mathbb{P}_\alpha$.

Припустимо, що для довільних $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, $\alpha \preceq \beta$, задані відображення (операції проектування) $\pi_{\alpha,\beta} : \mathfrak{B}_\beta \mapsto \mathfrak{B}_\alpha$, що є неперервними, $(\mathcal{F}_\beta, \mathcal{F}_\alpha)$-вимірними та задовольняють умови:

- $\pi_{\alpha,\alpha} = \mathrm{Id}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$;
- $\pi_{\alpha,\gamma} = \pi_{\alpha,\beta} \circ \pi_{\beta,\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{A}$, $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$.

Узгоджена випадкова структура – це родина $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ така, що $\mathfrak{F}_\alpha$ має розподіл $\mathbb{P}_\alpha$ та для довільних $\alpha \preceq \beta$

$$\mathfrak{F}_\alpha \overset{\mathrm{d}}{=} \pi_{\alpha,\beta}(\mathfrak{F}_\beta). \tag{1}$$

Зауважимо, що за досить загальних умов на родину $(\mathfrak{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ з теореми Колмогорова про продовження міри випливає існування проективної границі $(\mathfrak{B}_\infty, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}_\infty)$ послідовності $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathcal{F}_\alpha, \mathbb{P}_\alpha)_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ та існування відповідних операцій проектування $\pi_{\alpha,\infty} : \mathfrak{B}_\infty \mapsto \mathfrak{B}_\alpha$. В такій ситуації елемент $\mathfrak{F}_\infty \in \mathfrak{B}_\infty$ з розподілом $\mathbb{P}_\infty$ можна вважати випадковою структурою нескінченного розміру для якої має місце $\pi_{\alpha,\infty}(\mathfrak{F}_\infty) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathfrak{F}_\alpha$. Деталі можна знайти в розділі 5.1 книги [43].

Розглянемо довільне відображення

$$\pi_\alpha = (\pi_\alpha^{(1)}, \pi_\alpha^{(2)}) : \mathfrak{B}_\alpha \mapsto \{(\beta, \mathfrak{B}_\beta) : \beta \preceq \alpha\},$$

яке будемо інтерпретувати як операцію видалення частини зі структури розміру $\alpha \in \mathfrak{A}$. Таким чином, якщо $\mathfrak{F}_\alpha$ є випадковою структурою розміру $\alpha \in \mathfrak{A}$, то $\pi_\alpha^{(2)}(\mathfrak{F}_\alpha)$ є випадковою структурою розміру $\pi_\alpha^{(1)}(\mathfrak{F}_\alpha) \preceq \alpha$.

Означення 1. *Випадковою регенеративною структурою* називається узгоджена випадкова структура $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ така, що виконується умова

$$\pi_\alpha^{(2)}(\mathfrak{F}_\alpha) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \widehat{\mathfrak{F}}_{\pi_\alpha^{(1)}(\mathfrak{F}_\alpha)}, \quad \alpha \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

де $\widehat{\mathfrak{F}}_\beta$ є копією $\mathfrak{F}_\beta$, яка не залежить від $\mathfrak{F}_\alpha$ для кожного $\beta \preceq \alpha$.

Означення 2. *Випадковим процесом з регенерацією*, що визначений на випадковій регенеративній структурі $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, називається довільна родина випадкових величин $(\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{F}_\alpha))_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ таких, що $\mathfrak{R}_\alpha : \mathfrak{B}_\alpha \to \mathbb{R}$ є $(\mathcal{F}_\alpha, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-вимірним відображенням для кожного $\alpha \in \mathfrak{A}$.

У наведеному на початку роботи прикладі випадкових рівномірних перестановок: $(\mathfrak{A}, \preceq) = (\mathbb{N}_0, \leq)$, $\mathfrak{B}_n = \mathfrak{S}_n$ з дискретною топологією, $\mathcal{F}_n = \mathrm{bool}(\mathfrak{S}_n)$ та $\mathbb{P}_n$ – рівномірна міра на $\mathfrak{S}_n$. При $0 \leq m \leq n$ проектування $\pi_{m,n} : \mathfrak{S}_n \mapsto \mathfrak{S}_m$ є видаленням елементів $\{m+1, m+2, \ldots, n\}$ з циклів, в які ці елементи потрапили, з подальшим видаленням порожніх циклів, якщо такі з'явились. В якості операції π_n ми взяли видалення циклу, що містить 1 з подальшою перенумерацією решти елементів зі збереженням порядку. В якості відображення $\mathfrak{R}_n$ можна взяти довільну функцію, що визначена на $\mathfrak{S}_n$, наприклад: число циклів, кількість циклів довжини 1, найменше спільне кратне довжин циклів і т. д.

Наведемо тепер скорочену вибірку основних результатів роботи. Точне формулювання деяких з них потребує введення значної кількості позначень та визначення нових об'єктів, тому ряд результатів у вступі сформульовано не в повній загальності (кожне з таких місць вказується явно). Також ми не наводимо деякі, менш важливі для розуміння результатів, означення, а у відповідних місцях будемо робити посилання на ці означення в основному тексті роботи.

Випадкові процеси з імміграцією. Позначимо через $D[0,\infty)$, $D(0,\infty)$ та $D(\mathbb{R})$ простори Скорохода неперервних справа дійснозначних функцій, що визначені на $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ та $\mathbb{R}$ відповідно та мають скінченні границі зліва в кожній внутрішній точці області визначення. Нехай $X := (X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є випадковим процесом з траєкторіями у $D(\mathbb{R})$, який задовольняє умову $X(t) = 0$ для всіх $t < 0$, та нехай ξ є додатною випадковою величиною, яка може залежати від X.

Нехай $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2), \ldots$ є послідовністю незалежних копій пари (X, ξ), а $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ – стандартне випадкове блукання з кроками ξ_j, що стартує в нулі, тобто

$$S_0 := 0, \qquad S_k := \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, що визначений рівністю

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(t - S_k), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

назвемо *випадковим процесом з імміграцією*. Те, що такі процеси є випадковими процесами з регенерацією в сенсі означення 2, буде перевірено на початку Розділу 2.

Нехай $(Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ є стаціонарним процесом з імміграцією, що задається формулою (2.6) в Розділі 2.

Теорема 3. *Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний.*

(а) Якщо функція $G(t) := \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$, то для довільного $n \in \mathbb{N}$ та довільних точок $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$, в яких процес Y^* майже напевно неперервний, маємо

$$\big(Y(t+u_1), \ldots, Y(t+u_n)\big) \ \xrightarrow{\mathrm{d}}\ \big(Y^*(u_1), \ldots, Y^*(u_n)\big), \quad t \to \infty. \tag{4}$$

(б) Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ функція $H_\varepsilon(t) := \mathbb{E}[\sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]} |X(u)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$ та розподіл ξ неперервний (ця умова може бути послаблена, див. формулу (2.9)*), то*

$$Y(t+u) \ \Rightarrow\ Y^*(u), \quad t \to \infty, \tag{5}$$

у просторі Скорохода $D(\mathbb{R})$ з J_1-топологією.

У наступних теоремах покладемо $h(t) := \mathbb{E}[X(t)]$, $v(t) := \mathbb{D}[X(t)]$ та припустимо, що ці функції локально інтегровні за Ріманом на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$.

Теорема 29. *Припустимо, що*

- $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$*;*

- $f(u, w) = \operatorname{Cov}[X(u), X(w)]$ *рівномірно правильно змінюється в смугах в* $\mathbb{R}^2_+ := (0, \infty) \times (0, \infty)$ *(див. означення 22) або фіктивно правильно змінюється в* $\mathbb{R}^2_+$ *(див. означення 21), в обох випадках з індексом* $\beta \in (-1, \infty)$ *та граничною функцією* C*; якщо* $\beta = 0$*, також припустимо, що існує додатна монотонна функція* u *така, що* $v(t) = \mathbb{D}[X(t)] \sim u(t)$ *при* $t \to \infty$*;*

- *для всіх* $y > 0$
$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t) - h(t))^2 \mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{tv(t)}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t \to \infty. \qquad (6)$$

Тоді
$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{\sqrt{\mu^{-1} tv(t)}} \right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (V_\beta(u))_{u>0}\,, \quad t \to \infty, \qquad (7)$$
де процес V_β *є центрованим гауссівським процесом з коваріацією*
$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)] = \int_0^u C(u - y, w - y)\,\mathrm{d}y, \quad 0 < u \leq w.$$

Теорема 30. *Припустимо, що*

- X *не залежить від* ξ*;*

- *для деякого* $\alpha \in (0, 1)$ *та деякої* ℓ^**, що повільно змінюється на нескінченності*[2]
$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty; \qquad (8)$$

- $f(u, w) = \operatorname{Cov}[X(u), X(w)]$ *рівномірно правильно змінюється в смугах в* $\mathbb{R}^2_+$ *або фіктивно правильно змінюється в* $\mathbb{R}^2_+$*, в обох випадках з індексом* $\beta \in [-\alpha, \infty)$ *та граничною функцією* C*; якщо* $\beta = -\alpha$*, також припустимо, що існує додатна монотонна функція* u *така, що* $\lim_{t\to\infty} \frac{v(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}u(t)} = 1$*;*

[2] Нагадаємо, що ℓ, $\widehat{\ell}$, ℓ^* тощо завжди в цій роботі позначають функції повільної зміни, тому надалі в подібних місцях фраза «що повільно змінюється на нескінченності» не пишеться.

- *для всіх* $y > 0$

$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t)-h(t))^2\mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t\to\infty.$$

Тоді

$$\left(\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\Big(Y(ut)-\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}\Big)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}$$

при $t\to\infty$, *де* $Z_{\alpha,\beta}$ *є центрований умовно гауссівський процес з умовною коваріацією*

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u)Z_{\alpha,\beta}(w)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big] = \int_{[0,u]} C(u-y,w-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0<u\leq w,$$

де $W_\alpha^{\leftarrow}$ *– обернений* α*-стійкий субординатор (див. означення 26).*

Теорема 40. *Припустимо, що розподіл* ξ *належить області притягання* α*-стійкого закону,* $\alpha\in(1,2]$*, функція* c *визначена формулою* (2.76)*, функція* h *є монотонною для великих значень аргументу та не дорівнює нулю тотожно, а границя*

$$p := \lim_{t\to\infty}\frac{c^2(t)h^2(t)}{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)} \in [0,1],$$

існує. Припустимо також, що

- *якщо* $p<1$*, то виконуються умови теореми 29;*
- *якщо* $p>0$*, то* $h(t)\sim t^\rho\widehat{\ell}(t)$ *при* $t\to\infty$ *для деякого* $\rho>-1/\alpha$ *та деякої* $\widehat{\ell}$*;*
- *якщо* $p=1$*, то* $\lim_{t\to\infty}\int_0^t v(y)\mathrm{d}y=\infty$ *та існує додатна монотонна функція* u *така, що* $v(t)\sim u(t)$ *при* $t\to\infty$*, або* v *є безпосередньо інтегровною за Ріманом на* $[0,\infty)$*;*
- *якщо* $p\in(0,1)$*, то* X *не залежить від* ξ*.*

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut)-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}$$

$$\left(\sqrt{\frac{(1-p)(1+\beta)}{\mu}}V_\beta(u) + \sqrt{p}\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}\int_0^u (u-y)^\rho\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y)\right)_{u>0}, \ t\to\infty,$$

де процес V_β такий, як в теоремі 29, а $\mathcal{S}_\alpha$ не залежить від V_β і є спектрально негативним α-стійким процесом Леві з характеристичною функцією (2.67) *(при $\alpha < 2$) або стандартним броунівським рухом (при $\alpha = 2$).*

Теорема 41. *Припустимо, що умова* (8) *виконується з $\alpha \in (0,1)$, та h не дорівнює нулю тотожно. Припустимо, що границя*

$$q := \lim_{t\to\infty} \frac{h^2(t)}{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)} \in [0,1]$$

існує та

- *якщо $q < 1$, то виконуються умови теореми 30 (з тим же α);*
- *якщо $q = 1$, то $h(t) \sim t^\rho \widehat{\ell}(t)$, $t \to \infty$ для деякого $\rho \geq -\alpha$ та деякої $\widehat{\ell}$; якщо $\rho = -\alpha$, то припустимо також, що існує додатна зростаюча функція w така, що $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$ та $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}w(t)} = 1$.*

Покладемо $\rho := (\beta-\alpha)/2$, якщо $q \in (0,1)$. Тоді

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}Y(ut)}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}$$
$$\left(\sqrt{1-q}Z_{\alpha,\beta}(u) + \sqrt{q}\int_{[0,u]} (u-y)^\rho \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0}, \quad t \to \infty,$$

де процес $Z_{\alpha,\beta}$ такий же, як в теоремі 30, а обернений α-стійкий субординатор $W_\alpha^{\leftarrow}$ під знаком інтеграла той же, що й в означенні процесу $Z_{\alpha,\beta}$. Зокрема, доданки, що визначають граничний процес, залежні.

Випадкові регенеративні композиції та перестановки, ґратки Бернуллі. Ґратка Бернуллі – це схема випадкового розміщення «куль» по зліченному набору «комірок», в якій кулі представлені послідовністю незалежних в.в. $U_1, U_2, \ldots$ з рівномірним на $(0,1)$ розподілом, а комірки – це інтервали $(V_i, V_{i-1}]$, $i \in \mathbb{N}$, утворені послідовними точками мультиплікативного випадкового блукання $(V_j)_{j\geq 0}$, яке задається рівностями:

$$V_0 := 1, \quad V_n := \prod_{i=1}^n W_i, \quad n \in \mathbb{N},$$

для послідовності $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ незалежних копій в.в. W зі значеннями в інтервалі $(0,1)$. Послідовність $(W_i)_{i\in\mathbb{N}}$ припускається незалежною від послідовності $U_1, U_2, \ldots$. Вважається, що куля U_k потрапила в комірку $(V_i, V_{i-1}]$ тоді і тільки тоді, коли $V_i < U_k \le V_{i-1}$.

Введемо випадкові величини

$$Z^*_{n,i} \;:=\; \#\{1 \le j \le n : U_j \in (V_i,\, V_{i-1}]\}, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

тобто $Z^*_{n,i}$ є кількістю куль в комірці з номером i (комірки нумеруються справа наліво) за умови, що всього розміщується n куль. Також покладемо

$$K^*_{n,r} := \sum_{i\ge 1} \mathbb{1}_{\{Z^*_{n,i}=r\}}, \quad r = 1, \ldots, n,$$

та $K^*_n := \sum_{r=1}^n K^*_{n,r}$. Таким чином, $K^*_{n,r}$ є кількістю комірок в яких міститься рівно r куль за умови, що всього розміщується n куль, а K^*_n є кількістю зайнятих комірок.

В підрозділі 3.1 розділу 3 отримано граничні теореми для таких процесів:

- $(K^*_n(t))_{t\in[0,1]} = (\sum_{r=1}^{[n^t]} K^*_{n,r})_{t\in[0,1]}$ – кількість зайнятих комірок, що містять не більше n^t куль за умови, що всього розміщується n куль;

- $(L^*_{[e^{ut}]})_{u\ge 0}$ – кількість порожніх комірок з номерами, що не перевищують номер останньої зайнятої комірки за умови, що всього розміщується $[e^{ut}]$ куль;

- $(O^*_{[e^{ut}]})_{u\ge 0} = (\text{НСК}\{Z^*_{[e^{ut}],i} : i \in \mathbb{N}\})_{u\ge 0}$ – найменше спільне кратне[3] елементів послідовності $(Z^*_{[e^{ut}],i})_{i\in\mathbb{N}}$.

Теорема 71. *Припустимо, що* $\mathbb{E}|\ln(1-W)|^a < \infty$ *для деякого* $a > 0$*. Покладемо*

$$u_n(t) := \mu^{-1} \int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \le s\} \mathrm{d}s,$$
$$v_n(t) := \mu^{-1} \int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > s\} \mathrm{d}s = \mu^{-1} t \ln n - u_n(t)$$

при $t \in [0,1]$*, де* $\mu = \mathbb{E}|\ln W|$*.*

[3]Цей функціонал задає порядок регенеративної випадкової перестановки, породженої ґраткою Бернуллі, див. підрозділ 3.2, де описана побудова таких випадкових перестановок.

(D1) Якщо $\sigma^2 := \mathbb{D}|\ln W| < \infty$*, то*

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 \ln n}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\sqrt{\mu\sigma^{-2}\ln n}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t) - t\mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty,$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією.*

(D2) Якщо $\sigma^2 = \infty$ *та* $\mathbb{E}[(\ln W)^2 \mathbb{1}_{\{|\ln W| \le x\}}] \sim \ell(x)$, $x \to \infty$*, то*

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-3/2}c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\frac{\sqrt{\mu}\ln n}{c(\ln n)}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t) - t\mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією, де* c *є довільною додатною функцією такою, що* $\lim_{x\to\infty} c^{-2}(x)x\ell(c(x)) = 1$.

(D3) Якщо $\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$, $x \to \infty$ *для деякого* $\alpha \in (1,2)$*, то*

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\frac{\mu^{1/\alpha}\ln n}{c(\ln n)}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t) - t\mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty,$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* M_1*-топологією, де* c *є довільною додатною функцією такою, що* $\lim_{x\to\infty} c^{-\alpha}(x)x\ell(c(x)) = 1$.

Теорема 79. *Припустимо, що існують* $\alpha \in (0,1)$ *та* $\beta \ge -\alpha$*, а також функції* ℓ *та* $\widehat{\ell}$ *такі, що*

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x) \quad \text{та} \quad \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\} \sim x^{\beta}\widehat{\ell}(x), \quad x \to \infty.$$

У випадку $\alpha = -\beta$ *припустимо також, що*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 0$$

та існує неспадна функція u така, що

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{|\ln W|>x\}u(x)}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>x\}}=1.$$

Тоді

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{|\ln W|>t\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}}L^*_{[e^{ut}]}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_{[0,u]}(u-y)^\beta \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0},\quad t\to\infty.$$

Теорема 80. *Нехай $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}\sim t^\beta\widehat{\ell}(t)$ при $t\to\infty$ для деякого $\beta\in(-1,0]$, а розподіл $|\ln W|$ належить області притягання деякого стійкого розподілу з $\alpha\in(1,2]$. Нехай функція c така, як в* (2.76) *з $\xi:=|\ln W|$.*

(а) Якщо $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}=o(t/c^2(t))$ при $t\to\infty$, то

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{1}{\mu}\int_0^{t}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(V_\beta(u))_{u>0},\quad t\to\infty,$$

де V_β є центрованим гауссівським процесом з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)]=w^{1+\beta}-(w-u)^{1+\beta},\quad 0\le u\le w.$$

(б) Якщо $t/c^2(t)=o(\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\})$ при $t\to\infty$, то

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>t\}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_{[0,u]}(u-y)^\beta\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y)\right)_{u>0}.$$

Теорема 88. *Припустимо, що розподіл W є абсолютно неперервним з щільністю f.*

(i) якщо існують $\delta_1\ge 0$ та $\delta_2\ge 0$ такі, що f не зростає $(0,\delta_1)$, обмежена на $[\delta_1,1-\delta_2]$ та не спадає на $(1-\delta_2,1)$, а $|\ln W|$ належить області притягання деякого α-стійкого розподілу з $\alpha\in(1,2]$, то при $t\to\infty$ маємо

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y\mathbb{P}\{|\ln(1-W)\le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\ge0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\left(\int_0^u\mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge0},$$

де функція c така, як в (2.76) *з $\xi:=|\ln W|$.*

(ii) Якщо $\sup_{x\in[0,1]} x^\alpha(1-x)^\alpha f(x) < \infty$ *для деякого* $\alpha \in [0,1)$*, то* $\sigma^2 < \infty$ *та*

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W) \le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\sigma\mu^{-3/2}t^{3/2}}\right)_{u\ge0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_2(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge0}.$$

Переставні коалесценти з множинними злиттями та пилом. Переставний коалесцент з множинними злиттями є марковським процесом $\mathfrak{P}_n = (\mathfrak{P}_n(t))_{t\ge0}$ зі значеннями в множині розбиттів $\{1,2,3,\dots,n\}$, який стартує з тривіального розбиття $\{1\},\{2\},\dots,\{n\}$ та має динаміку, що описується правилом: якщо в деякий момент часу $t\ge0$ розбиття має $m\ge2$ блоків, то кожні k з них зливаються в один блок з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x), \quad 2\le k\le m, \quad m\ge2,$$

де Λ є деякою скінченною мірою на $[0,1]$. Нехай $N_n(t)$ є кількістю блоків в розбитті $\mathfrak{P}_n(t)$ в момент часу $t\ge0$ і нехай X_n є кількістю стрибків процесу $N_n(t)$ до моменту поглинання в стані 1, та $\tau_n := \inf\{t\ge0 : N_n(t)=1\}$. У підрозділі 3.3 розглянуто коалесценти, що задовольняють умову

$$\int_0^1 y^{-1}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty. \tag{10}$$

Такі коалесценти носять назву коалесцентів з пиловою компонентою, ця назва пояснена далі в огляді літератури.

У наведених нижче теоремах $(S_t)_{t\ge0}$ є субординатором без зсуву, без поглинання та з експонентою Лапласа

$$\Phi(z) = -\ln\mathbb{E}e^{-zS_1} = \int_0^1(1-(1-y)^z)y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y), \quad z\ge0,$$

а $T_t := \inf\{y\ge0 : S_y > t\}$, $t\ge0$ є моментом першого проходження рівня t субординатором $(S_t)_{t\ge0}$. Припускатимемо надалі, що $\Lambda(\{1\})=0$.

Теорема 96. *Припустимо, що виконується умова*

$$\int_0^1 y^{-1}|\ln y|\Lambda(dy) < \infty.$$

Якщо для деяких констант $a_n > 0$ *та* $b_n \in \mathbb{R}$*, одна з послідовностей випадкових величин* $(\tau_n - b_n)/a_n$ *або* $(T_{\ln n} - b_n)/a_n$ *слабко збігається при* $n\to\infty$ *до* *невиродженого власного розподілу, то інша також збігається до цього розподілу. Кожне з цих тверджень еквівалентне тому, що S_1 належить області притягання деякого стійкого розподілу.*

У наступній теоремі величина $K_n^*(1)$ є кількістю зайнятих комірок в ґратці Бернуллі, породженій мультиплікативним випадковим блуканням з кроком W таким, що

$$\mathbb{P}\{W \le x\} = \frac{\int_{1-x}^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y)}{\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y)}, \quad x \in [0,1],$$

де припускається, що $\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty$.

Теорема 99. *Припустимо, що $\int_0^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) < \infty$. Якщо для деяких констант $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ та $b_n \in \mathbb{R}$, одна з послідовностей випадкових величин $(K_n^*(1) - b_n)/a_n$ або $(X_n - b_n)/a_n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до деякого невиродженого власного розподілу, то інша також слабко збігається до цього розподілу. Зокрема, $\frac{K_n^*(1)-b_n}{a_n}$ слабко збігається, якщо розподіл $|\ln W|$ належить області притягання деякого стійкого розподілу.*

Теорема 100. *Припустимо, що*

$$\int_x^1 y^{-2}\Lambda(\mathrm{d}y) \sim x^{-\gamma}\ell_1(1/x), \quad x \downarrow 0,$$

для деякого $0 < \gamma < 1$. Тоді

$$\frac{X_n}{\Gamma(2-\gamma)n^\gamma \ell_1(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \int_0^\infty \exp(-\gamma S_t)\mathrm{d}t, \quad n \to \infty.$$

Ймовірнісні метрики та ланцюги Маркова, що не зростають. Нехай $(M_n)_{n\ge 0}$ є однорідним ланцюгом Маркова з фазовим простором $\mathbb{N}_0$, поглинаючим станом 0 та матрицею перехідних ймовірностей $P = (p_{i,j})_{i,j\ge 0}$ такою, що $p_{i,j} = 0$ при $1 \le i < j$ та $p_{i,i} < 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Ці умови означають, що ланцюг не зростає м.н., тобто

$$\mathbb{P}\{M_{n+1} \le M_n | M_n \ge 1\} = 1, \quad n \ge 0.$$

Для таких ланцюгів Маркова випадкові величини

$$T_n := \inf\{k \ge 0 : M_k = 0 \text{ за умови } M_0 = n\}$$

є майже напевно скінченним для всіх $n \geq 0$.

Найрізноманітніші функціонали на випадкових регенеративних структурах мають представлення у вигляді T_n з підхожою матрицею перехідних ймовірностей P. Зокрема, такі, або дуже близькі, представлення мають число $K_n^*(1)$ зайнятих комірок у ґратці Бернуллі та число X_n злиттів у коалесцентах з множинними злиттями, про які йшла мова вище.

У наступних теоремах $I_n := n - M_1$, тобто є величиною першого декременту $(M_n)_{n\geq 0}$, а d_p позначає мінімальну L_p-метрику, див. формулу (4.10) для визначення та твердження 206 для властивостей d_p.

Теорема 102. *Припустимо, що* $I_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \xi$ *при* $n \to \infty$, *та розподіл* ξ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha \in (1, 2]$ *та* $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, $\mu := \mathbb{E}\xi$. *Нехай функція* c *визначена так, як в формулі* (2.76)*, та*

$$d_p(I_n, \xi \wedge n) \;=\; o(n^{-1}c(n)), \quad n \to \infty, \tag{11}$$

де $p = 2$, *якщо* $\mathbb{D}\xi < \infty$ *та* $p = 1$ *інакше. Тоді*

$$d_p\left(\frac{T_n - \mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

з тим же p, *що й в* (11)*. Зокрема,*

$$\frac{T_n - \mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty.$$

Теорема 103. *Припустимо, що*

$$\frac{I_n}{n} \xrightarrow{\mathrm{d}} 1 - \eta, \quad n \to \infty,$$

та розподіл $|\ln \eta|$ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha \in (1, 2]$, $\mu_0 := \mathbb{E}|\ln \eta|$. *Нехай функція* c *визначена так, як в* (2.76) *з* $\xi := |\ln \eta|$, *та*

$$d_1(\ln^+(n - I_n), \ln^+(n\eta)) = o\left(\frac{c(\ln n)}{\ln n}\right), \quad n \to \infty.$$

Тоді

$$d_1\left(\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right) \to 0, \quad n \to \infty,$$

зокрема

$$\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty.$$

За допомогою цих теорем або їх модифікацій автору вдалось розв'язати ряд відкритих проблеми в теорії коалесцентів з множинними злиттями та теорії випадкових блукань з бар'єром.

Нехай міра Λ, яка фігурує в означенні коалесцентів з множинними злиттями є бета-мірою з параметрами $a, b > 0$, тобто

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{\mathrm{B}(a,b)}\mathrm{d}x\mathbb{1}_{\{x\in(0,1)\}}.$$

Такі коалесценти називаються бета-коалесцентами. Бета-коалесценти мають пилову компоненту тоді і тільки тоді, коли $a > 1$, див. с. 66.

Теорема 104. *Число X_n злиттів у бета-коалесцентах задовольняє:*

(i) *при* $0 < a < 1$ *та* $b > 0$

$$\frac{X_n - (1-a)n}{(1-a)n^{1/(2-a)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \left(\frac{1-a}{\Gamma(a)}\right)^{1/(2-a)} \mathcal{S}_{2-a}(1), \quad n \to \infty,$$

(ii) *при* $a = 1$ *та* $b > 0$*,*

$$\frac{\ln^2 n}{n} X_n - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_1(1), \quad n \to \infty,$$

де $\mathcal{S}_1(1)$ *є спектрально негативним* 1*-стійким розподілом з характеристичною функцією* (1.12)*.*

У наступному результаті $L_n := \int_0^{\tau_n} N_n(t)\mathrm{d}t$ є повною довжиною дерева коалесцента.

Теорема 105. *Для повної довжини L_n дерева в бета-коалесцентах з $a = 1$ та $b > 0$ маємо*

$$\frac{b\ln^2 n}{n} L_n - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_1(1), \quad n \to \infty.$$

Випадкові блукання з бар'єром. Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. $\xi \in \mathbb{N}$ з розподілом $p_k = \mathbb{P}\{\xi = k\}$, $k \in \mathbb{N}$, таким, що $p_1 > 0$. Випадкове блукання з бар'єром $n \in \mathbb{N}$ – це послідовність $(R_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначена рівністю

$$R_0^{(n)} := 0, \quad R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k \mathbb{1}_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Покладемо

$$T_n^{(0)} := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : R_k^{(n)} = n-1\} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)} < n-1\}} \tag{13}$$

та

$$V_n^{(0)} := \#\{i \le T_n^{(0)} : R_{i-1}^{(n)} = R_i^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{T_n^{(0)}-1} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)} + \xi_{l+1} \ge n\}}. \tag{14}$$

Теорема 106. *Припустимо, що* $\mathbb{P}\{\xi \ge n\} = cn^{-\alpha} + O(n^{-(\alpha+\varepsilon)})$ *при* $n \to \infty$, *для деяких* $c > 0$, $\alpha \in (0,1)$ *та* $\varepsilon > 0$. *Якщо* $\alpha \in (0, 1/2]$ *припустимо додатково, що* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *з деякого місця не зростає (ця умова може бути послаблена, див. формулу* (4.36)*). Тоді*

$$\frac{V_n^{(0)} - \mu_\alpha^{-1} \ln n}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3} \ln n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1) \quad n \to \infty,$$

де $\mu_\alpha = \Psi(1) - \Psi(1-\alpha)$ *та* $\sigma_\alpha^2 = \Psi'(1-\alpha) - \Psi'(1)$, *а* $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ *– логарифмічна похідна гамма-функції.*

Процедури випадкового просіювання. Нехай R є довільною випадковою нескінченною підмножиною $\mathbb{N}$. Процедура випадкового просіювання множини $\mathbb{N}$ за допомогою R визначається як нескінченна послідовність «раундів» $1, 2, \ldots$ така, що в раунді k:

- ще не просіяні точки $\mathbb{N}$ (в кожному раунді їх нескінченна кількість) перенумеровуються зі збереженням порядку;
- після перенумерації, визначається незалежна від всіх попередніх раундів копія R_k множини R і з непросіяних точок видаляються точки з номерами, що *не* лежать в R_k.

В розділі 5 досліджено два типи процедур випадкового просіювання. В першому типі множина R є областю значень деякого випадкового блукання на $\mathbb{N}$, в другому типі множина R є множиною індексів рекордів у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з неперервним розподілом.

Нехай ξ є довільною невиродженою в.в. зі значеннями в $\mathbb{N}$ та нехай $R = (R(n))_{n\in\mathbb{N}}$ є випадковим блуканням з кроком розподіленим, як ξ. Покладемо:

- $N_M^{(n)}$, число точок множини $\{1, 2, \dots, M\}$, що не були просіяні в перших n раундах, $M \in \mathbb{N}_0$ та $n \in \mathbb{N}$.

- $1 \le S_1^{(n)} < S_2^{(n)} < S_3^{(n)} < \cdots$, початкові номери точок, які після n раундів та перенумерації мають номери $1, 2, \ldots$, тобто $S_j^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} : N_i^{(n)} = j\}$ при $j \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}_0$.

- $T(M)$, число раундів, доки всі точки з (початковими) номерами $1, 2, \dots, M$ не будуть просіяні, тобто $T(M) := \inf\{n \in \mathbb{N} : N_M^{(n)} = 0\}$ при $M \in \mathbb{N}$.

Покладемо $\mu := \mathbb{E}\xi$ та нехай $(Z_n)_{n\ge0}$ є процесом Гальтона-Ватсона таким, що число нащадків одного індивіда розподілене як ξ. Припустимо, що $\mu < \infty$. Тоді нормований процес $(\mu^{-n} Z_n)_{n\ge0}$ є невід'ємним мартингалом і збігається м.н. до границі Z_∞, яка м.н. додатна, якщо $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$, або дорівнює нулю, інакше.

Теорема 108. *Припустимо, що $\mu \in (1, \infty)$. Тоді*

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_3^{(n)}}{\mu^n} \dots\right) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + Z_\infty^{(3)}, \dots), \quad n \to \infty, \tag{15}$$

де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, \dots$ є незалежними копіями Z_∞. Розподіл граничного вектора в (15) *задовольняє стохастичне рівняння нерухомої точки в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$*

$$\Big(\mu X_1, \mu X_2, \dots\Big) \overset{\text{d}}{=} \Big(X_{R(1)}, X_{R(2)}, \dots\Big), \tag{16}$$

де випадкове блукання $(R(j))_{j\ge0}$ у правій частині є незалежним від $(X_j)_{j\ge0}$.

Теорема 109. *Нехай $\mu \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$N_{\lfloor \mu^n t \rfloor}^{(n)} \Rightarrow N'(t), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0, \infty)$ з J_1-топологією, де $N'(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : Z_\infty^{(1)} + \cdots + Z_\infty^{(k)} \le t\}$ при $t \ge 0$.

Теорема 110. *Нехай $\mu \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. Для довільного фіксованого $x > 0$, маємо*

$$T(\lfloor \mu^n x \rfloor) - n \overset{\text{d}}{\to} T'(x), \quad n \to \infty,$$

де $T'(x)$ має розподіл $\mathbb{P}\{T'(x) \le k\} = \mathbb{P}\{Z_\infty > \mu^{-k} x\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 112. *Нехай* $(X_1, X_2, \ldots)$ *є випадковим елементом* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *таким, що* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ *та виконується рівність* (16) *з* $(R(j))_{j\geq 0}$, *що не залежить від* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *та* $\mu = \mathbb{E}R(1) = \mathbb{E}\xi$. *Припустимо також, що*

$$\mathbb{E}\xi \ln \xi \ < \ \infty,$$

тобто $\mathbb{P}\{Z_\infty > 0\} = 1$. *Нехай* $(Z_\infty^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *є незалежними копіями* Z_∞. *Тоді знайдеться випадковий процес* $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$, *що не залежить від* $(Z_\infty^{(j)})_{j\geq 1}$ *та задовольняє*

$$(G(\mu t))_{t\in\mathbb{R}_+} \stackrel{f.d.}{=} (\mu G(t))_{t\in\mathbb{R}_+},$$

такий, що

$$(X_j)_{j\geq 1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(G(Z_\infty^{(1)} + \cdots + Z_\infty^{(j)})\right)_{j\geq 1}.$$

Аналогічні результати у випадку нескінченного середнього наведено в розділі 5.1.2 і тут не формулюються.

Нехай тепер R є множиною індексів рекордів (тобто елементів, що більші за всі попередні елементи) у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з деяким неперервним розподілом, який, не зменшуючи загальності, можна вважати рівномірним на $[0, 1]$.

Нехай функціонали $N_M^{(n)}, S_k^{(n)}, T(M)$ визначені так само, як для просіювань випадковими блуканнями, з єдиною відмінністю, що у визначенні функціонала $T(M)$ під знаком інфімума стоїть подія $\{N_M^{(n)} = 1\}$ (при просіюванні рекордами елемент $1 \in \mathbb{N}$ завжди залишається непросіяним, оскільки перший елемент вибірки завжди є рекордом: $\mathbb{P}\{1 \in R\} = 1$).

Для формулювання результатів нам знадобиться поняття модифікованої *тетрації та повторного логарифма*. При $\rho \geq 1$ покладемо

$$E_0(\rho) := \rho, \quad E_n(\rho) := e^{E_{n-1}(\rho)-1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$L_0(\rho) := \rho, \quad L_n(\rho) := 1 + \ln L_{n-1}(\rho), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 119. *Має місце збіжність*

$$(T([E_n(\rho)]) - n)_{\rho>1} \stackrel{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow} (T^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n \to \infty,$$

де $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ *є неперервним за ймовірністю випадковим процесом з неспадними траєкторіями. Випадкові величини* $T^*(\rho)$, $\rho > 1$, *є цілозначними та* $\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} > 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема 121. *Знайдуться в.в.* $1 = S_1^* \le S_2^* \le \cdots$ *такі, що*

$$(L_n(S_1^{(n)}), L_n(S_2^{(n)}), L_n(S_3^{(n)}), \ldots) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (S_1^*, S_2^*, S_3^*, \ldots), \quad n \to \infty.$$

Теорема 123. *Послідовність* $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *в теоремі 121 задовольняє*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_k^*}{k} \;=\; 1 \quad \textit{м.н.}, \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}S_k^*}{k} = 1, \quad \frac{S_k^* - k}{\sqrt{k}} \overset{\text{d}}{\to} \mathcal{S}_2(1), \quad k \to \infty.$$

Нехай $N^*(\rho)$ позначає лічильний процес для послідовності $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ в теоремі 121:

$$N^*(\rho) := \#\{k \in \mathbb{N} \colon S_k^* \le \rho\}, \quad \rho \ge 1. \tag{17}$$

Теорема 126. *Процес* $(N^*(\rho))_{\rho\ge 1}$ *є неперервним за ймовірністю та*

$$(N^{(n)}_{[E_n(\rho)]})_{\rho\ge 1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (N^*(\rho))_{\rho\ge 1}, \quad n \to \infty.$$

Розглянемо при $m \in \mathbb{N}$ функціонал $T_0(M) := \sum_{j=0}^{T(M)-1} \mathbb{1}_{\{N_M^{(j)} \ne N_M^{(j+1)}\}}$, який характеризує кількість *результативних раундів*, у яких хоча б одна точка з $\{1, 2\ldots, M\}$ видаляється.

Теорема 130. *Має місце збіжність*

$$(T_0([E_n(\rho)]) - n)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (T_0^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n \to \infty,$$

де $(T_0^*(\rho))_{\rho>1}$ *є деяким невиродженим випадковим процесом (його конструкція та інтерпретація буде наведена в розділі 5.2).*

Результати, наведені вище для випадкового просіювання рекордами, дозволили розв'язати відкриту проблему теорії коалесцентів. Нехай X_n позначає число злиттів у коалесценті Пуассона-Діріхле, див. підрозділ 5.2.2.

Теорема 131. *Для довільного фіксованого* $\rho > 1$*,*

$$X_{[E_n(\rho)]} - n \overset{\text{d}}{\to} T_0^*(\rho), \quad n \to \infty,$$

де $T_0^*(\rho)$*,* $\rho > 1$ *є цілозначною невиродженою в.в., що визначена в теоремі 130.*

Властивості граничних процесів для випадкових процесів з імміграцією. В останньому розділі дисертації вивчаються властивості граничних процесів:

$$I_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho} \mathrm{d}\mathcal{S}_{\alpha}(y), \quad u>0, \quad \rho > -1/\alpha, \quad \alpha \in (1,2];$$
$$J_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho} \mathrm{d}W_{\alpha}^{\leftarrow}(y), \quad u>0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0,1);$$

$Z_{\alpha,\beta}(u)$ – центрованого умовно гауссівського процесу з умовною коваріацією

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u) Z_{\alpha,\beta}(w) \big| W_{\alpha}^{\leftarrow}\big] = \int_{[0,u]} C(u-y, w-y)\, \mathrm{d}W_{\alpha}^{\leftarrow}(y), \quad 0 < u \le w,$$

які фігурували в якості границь випадкових процесів з імміграцією.

В представленій нижче таблиці 1 підсумовано властивості трьох наведених процесів. Під стохастичною неперервністю ми розуміємо неперервність за ймовірністю к кожній точці $u > 0$. Необмеженість траєкторій означає, що для довільного інтервалу $(a,b) \subset (0,\infty)$ з додатною ймовірністю супремум процесу на інтервалі (a,b) дорівнює ∞.

Теорема 137. *Якщо $\rho > -\alpha$, то*

$$\overline{\lim} \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(\alpha+\rho)^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \textit{м.н.}$$

та

$$\underline{\lim} \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = 0 \quad \textit{м.н.}$$

при $u \downarrow 0$ або $u \to \infty$.

Табл. 1: Властивості процесів $I_{\alpha,\rho}$, $J_{\alpha,\rho}$ та $Z_{\alpha,\beta}$

Процес	Неперервність траєкторій	Стохастична неперервність	Необмеженість траєкторій	Одновимірні розподіли	Показник самоподібності
$I_{\alpha,\rho}$	$\rho > 0$ або $\alpha = 2$	Так	$\alpha \in (1,2)$ та $\rho \in (-1/\alpha, 0)$	α-стійкі	$\rho + 1/\alpha$
$J_{\alpha,\rho}$	$\rho > -\alpha$	Так	$\rho \le -\alpha$	Експ. функ. субординатора	$\rho + \alpha$
$Z_{\alpha,\beta}$	невідомо	$\beta > -\alpha$ $C \not\equiv 0$	$\beta \le -\alpha$ або $C \equiv 0$	Суміш нормальних	$(\beta - \alpha)/2$

Нулі тригонометричних поліномів. Наш останній результат – теорема про локальну універсальність дійсних коренів тригонометричних поліномів.

Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ є послідовністю незалежних копій пари в.в. (ξ, η). Покладемо

$$\mathcal{T}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \sin(kt) + \eta_k \cos(kt)\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Для дійсної аналітичної функції $f \not\equiv 0$ позначимо через $\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ локально скінченну точкову міру на $\mathbb{R}$, яка рахує дійсні нулі f з кратностями.

Теорема 144. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\eta = 0$, $\mathbb{E}\xi^2 = \mathbb{E}\eta^2 = 1$ *та* $\mathbb{E}[\xi\eta] = 0$, *а* s *є довільним дійсним числом. Тоді*

$$\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{T}_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Rightarrow \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(Z(\cdot)), \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p(\mathbb{R})$ *локально скінченних точкових мір на* $\mathbb{R}$ *з грубою топологією, де* $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *є центрованим стаціонарним гауссівським процесом з коваріацією* $\mathrm{Cov}[Z(s), Z(t)] = \sin(t-s)/(t-s)$ *та* $\mathbb{D}[Z(t)] = 1$.

Зв'язок цієї теореми та стохастичних інтегралів по стійким процесам буде розглянуто у підрозділі 6.4, де також будуть доведені аналогічні результати без припущень про скінченність других моментів або некорельованість ξ та η.

Автор дисертації висловлює щиру вдячність своєму науковому консультанту – доктору фізико-математичних наук, професору Олександру Маратовичу Іксанову – за жваві і плідні дискусії при обговоренні наукових проблем, розглянутих в дисертації, та за цінні поради і постійну увагу, без яких ця робота навряд чи була б написана. Також автор висловлює подяку своїм колегам та друзям з кафедри дослідження операцій факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Інституту математичної статистики Вестфальського університету імені Вільгельма (м. Мюнстер, Німеччина) та кафедри математики та комп'ютерних наук Технічного університету Ейндховена (Нідерланди), завдяки співпраці з якими було отримано більшість результатів, представлених у роботі. Окрему подяку за допомогу автор висловлює Якиміву Роману Ярославовичу, а особливу – Харіній Олені Олегівні, чия всебічна підтримка та увага сприяли якнайшвидшому завершенню цієї роботи.

Розділ 1

Огляд літератури

1.1 Огляд за розділом 2

Процеси дробового ефекту вперше були введені в роботі Шотке [244] для моделювання напруги, породженої потоком електронів, що прибувають на анод вакуумної трубки. З моменту першої появи в літературі процеси дробового ефекту та їх узагальнення, що ми називаємо випадковими процесами з імміграцією, застосовувалися у багатьох областях прикладної науки. Неповний перелік включає моделювання аномальної дифузії в фізиці [199], моделювання атмосферних опадів в метеорології [231, 264], дробовий ефект в іонних каналах [177], аналіз річкових потоків [178, 265], аналіз частоти появ землетрусів в геології [261], моделювання відмов у комп'ютерних мережах [180] та трафіку в комп'ютерних мережах [172, 201, 228, 229], моделювання шуму вуличного руху [187], аналіз затримок у врегулюванні збитків в страховій справі [168, 169] та вивчення декількох процесів у фінансовій справі [167, 239]. Подальші посилання, пов'язані переважно з процесами дробового ефекту, можна знайти в роботах [8, 122, 262].

У випадку, коли ξ має показниковий розподіл, процес Y називається *пуассонівським дробовим ефектом*. Слабкій збіжності пуассонівського дробового ефекту присвячено чимало робіт. У деяких статтях більш прикладного характеру слабка збіжність Y вивчалась для явно заданих процесів X або процесів X деякого явного функціонального вигляду. У наведеному нижче списку η позначає випадкову величину, що не залежить від ξ, а f є деякою невипадковою функцією, на яку накладаються певні припущення, що явно вказані у цитованих роботах:

- $X(t) = \mathbb{1}_{\{\eta>t\}}$ та $X(t) = t \wedge \eta$, функціональна збіжність, див. [228];
- $X(t) = \eta f(t)$, стаціонарна версія Y, функціональна збіжність, див. [167];
- $X(t) = f(t \wedge \eta)$, збіжність скінченновимірних розподілів, див. [172]; функціональна збіжність, див. [229];
- $X(t) = \eta_1/\eta_2 f(t\eta_2)$, стаціонарна версія, збіжність скінченновимірних розподілів, див. [83, 84].

Статті [151, 120, 169, 170, 176] є більш технічними. В них вивчається слабка збіжність Y для процесів X загального вигляду. Робота [151] містить подальші посилання на роботи схожої тематики, які могли б розширити наведений вище список окремих випадків.

Якщо ξ має показниковий розподіл, то в.в. $Y(u)$ має безмежно подільний розподіл з характеристичною функцією досить простого вигляду. Понад це, збіжність цих характеристичних функцій до характеристичної функції граничного безмежно подільного розподілу випливає з загальної теорії. Також в цьому випадку природним чином виникають пуассонівські випадкові міри, робота з якими значно спрощує аналіз. У випадку, коли розподіл ξ не є показниковим, згадані підходи незастосовні. Нам відомо лише декілька робіт, в яких вивчалась слабка збіжність Y, відповідним чином нормованих та масштабованих, для довільних ξ. Іглехарт [126] довів слабку збіжність при $n \to \infty$ процесів

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\bigg(\sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u - n^{-1}S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq nu\}} - \frac{n}{\mathbb{E}\xi}\int_0^u \mathbb{E}[X(y)]\mathrm{d}y\bigg)$$

в $D[0,1]$ до деякого гауссівського процесу за досить сильних припущень (зокрема, про існування моментів четвертого порядку). У випадку $X(t) = \mathbb{1}_{\{\eta>t\}}$ схожий результат, але в більш загальних умовах, можна знайти в теоремі 1 на с. 103 в [46]. Для процесів вигляду $X(t) = \int_0^t f(s,\eta)\mathrm{d}s$ слабка збіжність $(Y(u))_{0\leq u\leq 1}$ у $D[0,1]$ була встановлена в [127] у припущеннях, що

ξ та η незалежні, $\int_0^\infty |f(s,x)|\mathrm{d}s < \infty$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ та за деяких інших умов. У випадку $X(t) = \mathbb{1}_{\{\eta>t\}}$ слабка збіжність скінченновимірних розподілів вивчалась в [201] у припущенні про незалежність ξ та η та додаткових моментних умов.

Згадаємо також, що проблема слабкої збіжності $Y(1)$ отримала чималу увагу, особливо у випадку гіллястих процесів X, див. наприклад [12, 148, 216].

Наведемо посилання на відповідні публікації автора, за якими написано розділ 2. Підрозділ 2.1 написано за роботами [139] та [189]. Зокрема, теорема 3 є теоремою 1.1 в [189], яка є узагальненням теореми 2.2 в [139] на випадок залежних X та ξ. Основний результат підрозділу 2.2 – теорема 14 – це теорема 2.4 в [136]. Підрозділ 2.3 написаний на основі роботи [138] з використанням результатів робіт [136] та [133], де досліджувалися процеси дробового ефекту. Зокрема, теореми 29, 30, 40 та 41 – це результати розділу 2 в [138]. Теорема 32 є теоремою 2.7 в [136] у випадку незростаючої функції відповіді та теоремою 1.1 роботи Іксанова [129] у випадку неспадної функції відповіді. Збіжність скінченновимірних розподілів в теоремі 34 є результатом теореми 2.3 в [133], збіжність у просторі Скорохода – це теорема 2.1 в тій же роботі. Збіжність процесів дробового ефекту у випадку повільної зміни хвоста розподілу ξ (теорема 39) є основним результатом роботи [155]. Підрозділ 2.4 написаний за роботою [132]. Твердження 61 є теоремою 7 в [276]. Функціональна збіжність в теоремі 65 підрозділу 2.5.3 – це теорема 3.2 в [7].

1.2 Огляд за розділом 3

1.2.1 Регенеративні композиції та перестановки, ґратки Бернуллі. Для заданої послідовності $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ незалежних копій в.в. W, що набуває значень у інтервалі $(0,1)$, розглянемо випадкове розбиття інтервалу $(0,1]$ на підінтервали $(V_i, V_{i-1}]$, $i \in \mathbb{N}$, які називатимемо «комірками», де

$$V_0 := 1, \quad \text{та} \quad V_n := \prod_{i=1}^{n} W_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Далі, нехай $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з рівномірним розподілом на $(0,1)$, які не залежать від $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$. *Ґратка Бернуллі* – це схема випадкового розміщення, в якій «кулі» $1, 2, \ldots$ випадкової ваги (або у випадкових позиціях) $U_1, U_2, \ldots$ розміщуються по «комірках» у відповідності до їх ваги. А саме, куля ваги U потрапляє в комірку $(V_i, V_{i-1}]$ тоді і тільки тоді, коли $V_i < U \le V_{i-1}$. З моменту своєї появи у роботі [87] ця модель отримала чимало уваги [101, 94, 95, 97, 102, 128, 130, 141]. Термін «ґратка Бернуллі» з'явився у зв'язку з інтерпретацією наведеної схеми розміщення, як рандомізованої процедури вибору лідера, див. [87], а також с. 73 нижче. Надалі ми будемо використовувати також термін «інтервали» замість комірок та «точки» замість куль.

Випадкові величини

$$Z^*_{n,i} \;=\; \#\{1 \le j \le n : U_j \in (V_i,\, V_{i-1}]\}, \quad i \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

введені у вступі, задовольняють дві умови: $Z^*_{n,i} \ge 0$ при $i \in \mathbb{N}$ та $\sum_{i\ge 1} Z^*_{n,i} = n$. Отже, набір $\mathcal{Z}^*_n := (Z^*_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$ породжує слабку випадкову композицію цілого числа n. Прикметник «слабкий» використовується для того, щоб підкреслити, що нульові блоки (доданки) у композиціях дозволяються. Розміщуючи кулі послідовно, отримуємо узгоджений набір слабких випадкових композицій $(\mathcal{Z}^*_n)_{n\ge 0}$, який задовольняє двом визначальним властивостям.

- ВИБІРКОВА УЗГОДЖЕНІСТЬ: якщо одна з n точок, вибрана навмання, видаляється з інтервалу, який вона займає, то отримана композиція числа $n-1$ має той же розподіл, що й $\mathcal{Z}^*_{n-1}$.
- РЕГЕНЕРАТИВНІСТЬ: якщо перший інтервал $(V_1, 1]$ містить m точок та видаляється, то отримана випадкова композиція числа $n-m$ має той же розподіл, що й $\mathcal{Z}^*_{n-m}$.

Зазначимо, що клас випадкових композицій, породжених ґратками Бернуллі, не вичерпує весь клас регенеративних композицій (тобто, композицій, які задовольняють дві вищезгадані умови). Насправді, теорема 5.2 в роботі [105] стверджує, що кожна узгоджена родина регенеративних композицій може бути побудована розміщенням точок рівномірної вибірки $U_1, U_2, \ldots$ по зліченній кількості інтервалів, що утворюють відкрите доповнення до замкненої області значень незалежного від рівномірної вибірки мультиплікативного субординатора $(e^{-L_t})_{t\geq 0}$ без зсуву. В контексті цієї загальної теорії слабкі композиції у ґратках Бернуллі можна розглядати як такі, у яких відповідний субординатор $(L_t)_{t\geq 0}$ є узагальненим процесом Пуассона зі стрибками $|\ln W|$. Регенеративні композиції загального вигляду вивчались в роботах [25, 93, 105, 106, 107]. Безпосередньо з означення випливає, що випадкові регенеративні композиції $(\mathcal{Z}_n^*)_{n\geq 0}$ є випадковими регенеративними структурами в сенсі означення 1.

В класичній схемі розміщення Карліна [160] кулі розміщуються незалежно одна від одної по нескінченному набору комірок згідно з деяким ймовірнісним розподілом $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, де p_k є ймовірністю потрапляння в комірку k. Ґратка Бернуллі є схемою розміщення Карліна з випадковими ймовірностями

$$p_k^* \;=\; V_{k-1} - V_k \;=\; W_1 \cdots W_{k-1}(1 - W_k) \tag{1.2}$$

потрапляння в комірку $k \in \mathbb{N}$, при цьому вважається, що при заданих $(p_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ кулі розміщуються незалежно одна від одної. При такому підході ґратку Бернуллі можна розглядати як *схему розміщення Карліна у випадковому середовищі*, що задається послідовністю незалежних випадкових величин $W_1, W_2, \ldots$.

Схеми розміщення куль по зліченному набору комірок у невипадковому середовищі розглядалися в статтях [72, 92, 124, 160, 200, 202, 203]. Зауважимо, що схема розміщення куль по зліченному набору комірок суттєво відрізняється від більш відомої схеми розміщення куль по скінченному набору комірок, описаної, наприклад, в монографії [171].

Для $r = 1, \ldots, n$ позначимо $K_{n,r}^* := \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,i}^* = r\}}$ число комірок, що містять рівно r куль, та нехай $K_n^* := \sum_{r=1}^n K_{n,r}^* = \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,i}^* \geq 1\}}$ позначає число зайнятих комірок в ґратці Бернуллі. Визначимо випадковий процес

$$K_n^*(t) \;:=\; \sum_{r=1}^{[n^t]} K_{n,r}^* \;=\; \sum_{i\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,i}^* \in [1, n^t]\}}, \quad t \in [0,1].$$

Позначимо також через N_n^* максимальний номер зайнятої комірки (при нумерації справа наліво) та покладемо $L_n^* := N_n^* - K_n^*$. Таким чином, в.в. L_n^* дорівнює кількості порожніх комірок з номерами, що не перевищують N_n^*. В згаданих на початку підрозділу статтях досить повно вивчена збіжність одновимірних розподілів послідовностей K_n^* [101, 87, 95], N_n^* [101] та L_n^* [101, 128, 130, 141].

1.2.2 Випадкові перестановки з розподілом Юенса.

Нехай $\mathfrak{S}_n$ позначає симетричну групу на n елементах. Юенсівська родина випадкових перестановок – це параметричне сімейство $\Pi_n := (\Pi_n(\theta))_{\theta>0}$ випадкових елементів зі значеннями в $\mathfrak{S}_n$ та розподілами

$$\mathbb{P}\{\Pi_n = \sigma\} = \frac{\Gamma(\theta)\theta^{|\sigma|}}{\Gamma(n+\theta)}, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n,$$

де $|\sigma|$ позначає число циклів в перестановці σ. Зрозуміло, що $\Pi_n(1)$ є рівномірною перестановкою множини $\{1, \dots, n\}$, яка набуває кожне з $n!$ можливих значень з однаковою ймовірністю.

Для $r = 1, \dots, n$ позначимо через $C_{n,r}$ число циклів довжини r в Π_n. Має місце знаменита формула Юенса [15]:

$$\mathbb{P}\{C_{n,1} = c_1, \dots, C_{n,n} = c_n\} = \frac{n!\Gamma(\theta)}{\Gamma(\theta+n)} \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{c_i}}{i^{c_i} c_i!} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n} i c_i = n\}}.$$

Визначимо процес $(C_n(t))_{t\in[0,1]}$ так $C_n(t) := \sum_{r=1}^{[n^t]} C_{n,r}$. Цікавим є результат, вперше отриманий в роботі де Лаурентіса та Піттеля [62] для рівномірних перестановок ($\theta = 1$) та в статті Хансен [118] для довільного $\theta > 0$, що стверджує таке:

$$\frac{C_n(t) - \theta t \ln n}{\sqrt{\theta \ln n}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty, \tag{1.3}$$

у просторі Скорохода з J_1-топологією, де $(\mathcal{S}_2(t))_{t\in[0,1]}$ є стандартним броунівським рухом. Пізніше, значно простіші доведення цього факту були знайдені в роботах Доннеллі, Курца та Таваре [65] та Арратії та Таваре [17]. Перше з цих доведень ґрунтується на пуассонівському вкладенні, а друге – на каплінгу Феллера, див. с. 16 в [15].

Зв’язок між перестановками Юенса та ґратками Бернуллі встановлюється вибором в якості розподілу W бета-розподілу з параметрами $\theta > 0$ та 1, тобто $\mathbb{P}\{W \in \mathrm{d}x\} = \theta x^{\theta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x$. У цьому випадку, див. приклад 2 в [105] або розділ 5.4 в [15],

$$(K_{n,1}^*, \dots, K_{n,n}^*) \overset{\mathrm{d}}{=} (C_{n,1}, \dots, C_{n,n}), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.4}$$

звідки випливає, зокрема, що

$$(K_n^*(t))_{t\in[0,1]} \overset{f.d.}{=} (C_n(t))_{t\in[0,1]}. \tag{1.5}$$

В розділі 3.2 наведена конструкція нового класу випадкових перестановок, що ми називаємо випадкові регенеративні перестановки. Внаслідок (1.4) такі перестановки узагальнюють перестановки Юенса.

Порядком перестановки $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ називається найменше натуральне k таке, що k-кратна композиція σ з собою є тотожною перестановкою. Порядок перестановки можна визначити з її циклічного представлення як найменше спільне кратне (НСК) довжин циклів. Наприклад, перестановка $\sigma = (1\,9\,6\,2)(3\,7\,5)(4\,8)$ має порядок 12.

Для перестановок Юенса має місце формула $O_n :=$ НСК$\{r \in \mathbb{N} : C(n,r) > 0\}$. У відомій роботі 1967 року [76] Ердеш та Туран довели, що для рівномірної випадкової перестановки розподіл $\ln O_n$ є асимптотично нормальним. Арратія та Таваре [18] поширили цей результат на перестановки Юенса, показавши, що

$$\frac{\ln O_n - (\theta/2)\ln^2 n}{\sqrt{(\theta/3)\ln^3 n}} \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty. \tag{1.6}$$

Доведення в роботі [18], див. також теорему 5.15 в [15], що базується на каплінгу Феллера та асимптотичній незалежності $C_{n,r}$, найімовірніше є найкоротшим з існуючих. В підрозділі 3.2 ми доведемо узагальнення співвідношення (1.6) на клас випадкових регенеративних перестановок.

Зазначимо, що випадкові перестановки з розподілами, що є умовно рівномірними при фіксації деякої статистики (наприклад, у перестановках Юенса – при фіксації циклічного представлення) вивчались у ряді робіт, див. наприклад [37, 64, 91, 104].

Підрозділи 3.1.1 та 3.1.2 базуються на статтях [7] та [141] відповідно. Результати підрозділів 3.1.3 та 3.2 є узагальненням одновимірних граничних теорем роботи [97] на випадок збіжності скінченновимірних розподілів.

1.2.3 Переставні коалесценти з множинними злиттями. Девід Альдус у своєму огляді 1999 року [5] зазначив, що стохастичні моделі процесів злиття (кластеризації, коагуляції, агрегації, застигання), які використовуються в багатьох наукових дисциплінах, були лише частково висвітлені в літературі з прикладної ймовірності. У тому ж році в роботах Пітмена [219] та Сагітова [236] був введений клас процесів, який тепер носить назву коалесцентів з множинними злиттями і стає все більш популярним у ймовірнісній спільноті. Дві останні згадані роботи суттєво стимулювали дослідження в області переставних стохастичних процесів зі значеннями на множині розбиттів.

Математична теорія коалесцентів, що бере початок з робіт Дж. Кінгмана [164, 165], основана на ідеях вивчення генеалогічних взаємозв'язків в біології. З великої популяції гаплоїдних організмів, що еволюціонує впродовж багатьох поколінь, береться вибірка з нинішнього покоління та прослідковується її генеалогія в оберненому часі. Лінії родоводу зливаються у моменти часу, коли один або більше індивідів з вибірки знаходять спільного предка. В коалесценті, що досліджувався Кінгманом, кожна пара ліній родоводу зливається з інтенсивністю один, а кожне злиття є бінарним.

Такий тип процесів можна інтерпретувати також у прямому часі як еволюцію системи компонент (частинок, полімерів, пилових утворень, політичних коаліцій тощо), які поступово зливаються, утворюючи все більші й більші блоки. У моделях, що є складнішими за модель Кінгмана, інтенсивності злиття можуть залежати від розмірів блоків [5].

Коалесценти з множинними злиттями є іншим узагальненням, в яких злиття вже не обов'язково є бінарними. Інтенсивності переходів залежать лише від кількості блоків, що зливаються, а тому властивість переставності коалесценту Кінгмана зберігається і для коалесцентів з множинними злиттями. Чудовим прикладом процесу такого роду є коалесцент Больтгаузена-Шнітмана [45], який виник в контексті спінових стекол (spin glasses). Коалесценти з множинними злиттями та їх узагальнення – коалесценти з *одночасними* множинними злиттями [246] – виникають у якості граничних моделей генеалогій популяцій з великими родинами [123, 207, 248].

Сім'я коалесцентів демонструє широкий спектр можливих типів поведінки, особливо з асимптотичної точки зору, коли розмір вибірки стає великим. На одному кінці спектру знаходяться коалесценти типу Кінгмана, в яких міріади маленьких частинок майже одразу зливаються в скінченну кількість масивних блоків, хоча в типовому злитті бере участь лише скінченна кількість частинок. На іншому кінці спектру знаходяться процеси, в яких початкова «пилова компонента» зберігається з плином часу, а в моменти стрибків, регулярно розподілених в часі, деяка частина пилової компоненти та деякі масивні блоки зливаються. Проміжні режими додають картині барв і проявляють себе у фазових переходах в асимптотичних режимах, див. таблиці 1.1, 1.2 та 1.3 нижче.

Для наших цілей, а саме для опису асимптотики функціоналів, заданих на коалесцентах, що описують у той чи інший спосіб швидкість злиття частинок, нам знадобиться конструкція коалесцентів за допомогою пуассонівського процесу та їх базова класифікація, які ми наведемо нижче.

Пуассонівська конструкція та переставність

Коалесценти з множинними злиттями також носять ім'я Λ-коалесцентів. Ця назва походить від параметризації цих процесів додатною скінченною мірою Λ на $[0,1]$. Для коалесцента Кінгмана Λ є мірою Дірака в 0, а для коалесцента Больтгаузена-Шнітмана Λ є мірою Лебега. Динаміка Λ-коалесцентів описується правилом: якщо у деякий момент береться звуження процесу на розбиття, що містить m блоків, то злиття кожних k з цих блоків в один блок відбувається з інтенсивністю

$$\lambda_{m,k} = \int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(dx), \qquad 2 \le k \le m. \tag{1.7}$$

Повна інтенсивність переходів на m блоках є

$$\lambda_m = \sum_{k=2}^{m} C_m^k \lambda_{m,k} = \int_0^1 [1-(1-x)^m - mx(1-x)^{m-1}]x^{-2}\Lambda(dx). \tag{1.8}$$

Зауважимо, що атом в 0 міри Λ додає $C_m^2\Lambda(\{0\})$ до кумулятивної інтенсивності бінарних злиттів.

Той факт, що наведена формула включає суміші біноміальних розподілів, не є випадковим. Припустимо спочатку, що міра

$$\Lambda'(dx) = x^{-2}\Lambda(dx), \quad x \in (0,1],$$

яка є більш зручною та простішою для інтерпретації, ніж Λ, є скінченною. Розглянемо монету, ймовірність x появи герба для якої вибирається відповідно до (нормованої) міри Λ'. Для кожного блоку розбиття незалежним чином підкинемо монету, після чого ті блоки, для яких монета випала гербом, включимо у злиття. Цей простий опис можна зробити строгим, розглянувши процес Пуассона в смузі $[0,1]\times[0,\infty)$ з інтенсивністю $\Lambda'(\mathrm{d}x)\times\mathrm{d}t$. Скануючи смугу знизу догори і натикаючись на атоми пуассонівського процесу, ми задаємо динаміку коалесценту у такий спосіб. Якщо в точці (x,t) є атом, то кожнен блок, що наявний в момент часу $t-$, бере участь у злитті в момент часу t з ймовірністю x, незалежно від інших блоків. Якщо міра Λ' нескінченна, то проекція пуассонівського процесу на вісь ординат є всюди щільною множиною. Це не означає, що події злиття відбуватимуться миттєво, оскільки лише ті моменти t, в яких принаймні дві монети випали гербом, дають перехід. Такі події мають скінченну інтенсивність внаслідок припущення про скінченність Λ. Якщо міра Λ має атом в нулі, ця конструкція потребує модифікації. Наведена вище конструкція Λ-коалесцентів належить Дж. Пітмену [219].

До цього часу (крім короткої згадки у вступі) ми не використовували для опису коалесцентів слова «процес, що набуває значень у множині», оскільки правило є одним і тим самим для різних типів фазового простору Λ-коалесцентів. Λ-коалесцент на n блоках формально визначається, як марковський процес $\mathfrak{P}_n = (\mathfrak{P}_n(t))_{t\geq 0}$ в неперервному часі, що набуває значень в множині розбиттів $\{1,2,\ldots,n\}$. Процес стартує з тривіального розбиття на синглтони $\{1\},\{2\},\ldots,\{n\}$, які називаються первинними частинками, та еволюціонує до моменту, коли залишається єдиний блок $\{\{1,2,\ldots,n\}\}$. Процес $\mathfrak{P}_n$ є переставним, тобто його розподіл є інваріантним відносно дії симетричної групи $\mathfrak{S}_n$.

Зазвичай, вибіркові траєкторії $\mathfrak{P}_n$ зображуються у вигляді дерева з вертикальними ребрами, довжини яких представляють собою проміжки часу між злиттями, див. рисунок 1.1. При генеалогічній інтерпретації листки дерева представляють n індивідів нинішнього покоління, а блок розбиття $\mathfrak{P}_n(t)$ включає в себе тих індивідів, що мають спільного предка в момент t в оберненому

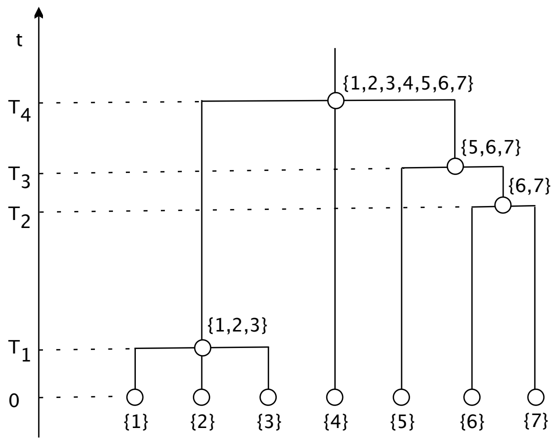


Рис. 1.1: Вибіркова траєкторія $\mathfrak{P}_7$ з чотирма злиттями.

часі.

Розбиття множини можна звузити на розбиття підмножини видаленням відповідних елементів з блоків та видаленням блоків, що стали порожніми. З пуассонівської конструкції коалесцентів зрозуміло, що звуження $\mathfrak{P}_n$ з $\{1, 2, \ldots, n\}$ на довільну підмножину з $m < n$ елементами має той самий розподіл, що й $\mathfrak{P}_m$ з точністю до перенумерації елементами $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Наведений факт, що марковський ланцюг проектується у марковський ланцюг є нетривіальним. З точки зору алгебри він означає, що інтенсивності переходів мають задовольняти обернене рекурентне співвідношення

$$\lambda_{n-1,k} = \lambda_{n,k} + \lambda_{n,k+1}. \tag{1.9}$$

Ця рекурсія є формою моментної проблеми Гаусдорфа і має розв'язки вигляду (1.7) з деякою скінченною мірою Λ на $[0, 1]$.

З вищесказаного випливає, що існує переставний процес $\mathfrak{P} = (\mathfrak{P}(t))_{t\geq 0}$, який називається нескінченним Λ-коалесцентом, для якого звуження на $\{1, 2, \ldots, n\}$ є $\mathfrak{P}_n$. Фазовим простором $\mathfrak{P}$ є множина розбиттів $\mathbb{N}$, а початковим станом – розбиття на синглтони, що відповідають нескінченній кількості первинних частинок, занумерованих натуральними числами.

Базова класифікація

З пуассонівської конструкції випливає, що кожнен блок $\mathfrak{P}$ є або первинним синглтоном, або нескінченним блоком з додатною частотою, яка є границею пропорції представників блоку в $\{1, 2, \ldots, n\}$ при $n \to \infty$. Така дихотомія є наслідком переставності та теореми де Фінетті, див. розділ VII.4 в [77]. Аналогічно, множина синглтонів в $\mathfrak{P}(t)$ є або порожньою, або має додатну частоту. Казатимемо, що блок додатної частоти є *масивним* та називатимемо множину синглтонів *пилом*. Для довільного переставного розбиття множини $\mathbb{N}$ існують чотири типи реалізацій, що можуть з'являтись з додатною ймовірністю:

(I) скінченна кількість масивних блоків та пил,

(II) нескінченна кількість масивних блоків та пил,

(III) нескінченна кількість масивних блоків, пил відсутній,

(IV) скінченна кількість масивних блоків.

Як випливає з роботи [219], розбиття $\mathfrak{P}(t)$ для всіх $t > 0$ мають однаковий тип, який є невипадковим і визначається мірою Λ. Це дає найбільш загальну структурну класифікацію Λ-коалесцентів.

Тип розбиття визначається поведінкою міри Λ поблизу 0. Оскільки множення Λ на мультиплікативну константу зводиться до лінійного перетворення часу, то воно не впливає на тип. Перші два типи можна легко ідентифікувати в термінах моментів

$$\mathtt{m}_r = \int_0^1 x^r \Lambda(dx),$$

які можуть бути нескінченними при $r < 0$

Тип (I) з'являється тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{m}_{-2} < \infty$. У цьому разі міра Λ' скінченна, переходи $\mathfrak{P}$ відбуваються в моменти стрибків процесу Пуассона з інтенсивністю $\mathtt{m}_{-2}$, а кожен блок бере участь у злитті з ймовірністю x, де x вибирається з розподілу $\Lambda'(dx)/\mathtt{m}_{-2}$.

Тип (II) з'являється тоді і тільки тоді, коли $\mathtt{m}_{-2} = \infty$ та $\mathtt{m}_{-1} < \infty$. Переходи $\mathfrak{P}$ відбуваються в моменти стрибків субординатора з нескінченною мірою Леві.

Якщо $\mathtt{m}_{-1} = \infty$ то пилова компонента відсутня, але для розділення випадків (III) та (IV) потрібен більш тонкий критерій. Коалесценти типу (IV) називаються такими, що спускаються з нескінченності, в сенсі, що синглтони початкового розбиття за довільний, як завгодно малий, проміжок часу зливаються у скінченну кількість массивних блоків. Еквівалентно, $\mathfrak{P}$ має скінченний час поглинання $\tau = \inf\{t > 0 : \mathfrak{P}(t) = \{\mathbb{N}\}\}$. Виявляється, що $\tau < \infty$ м.н. тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}\tau < \infty$, що лежить в основі критерія, що був знайдений в [247]: коалесцент має тип (IV) тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{m=2}^{\infty} 1/\gamma_m < \infty, \tag{1.10}$$

де $\gamma_m = \sum_{k=2}^{m}(k-1)C_m^k \lambda_{m,k} = \int_0^1((1-x)^m - 1 + mx)x^{-2}\Lambda(dx)$.

Функціонали на коалесцентах

Процес, що рахує, $N_n = (N_n(t))_{t\geq 0}$, де $N_n(t)$ є числом блоків $\mathfrak{P}_n(t)$, є марковським процесом з інтенсивностями переходів $C_n^k\lambda_{n,k}$ для переходу зі стану n в стан $n-k+1$ при $2 \leq k \leq n$. Вкладений марковський ланцюг має перехідні ймовірності

$$q(n,k) = C_n^k \frac{\lambda_{n,k}}{\lambda_n}, \quad 2 \leq k \leq n \tag{1.11}$$

для переходу $n \to n-k+1$. Аналогом (1.9) є нелінійна рекурсія, що дозволяє знаходити $q(n', \cdot)$, знаючи $q(n, \cdot)$ при $n' < n$. Понад це, кожнен з трьох об'єктів однозначно визначає два інші: стохастична матриця $q(\cdot, \cdot)$, послідовність інтенсивностей $(\lambda_n)_{n\geq 2}$, нормована умовою $\lambda_2 = 1$, та ймовірнісна міра Λ на $[0, 1]$.

Представляє інтерес дослідження таких функціоналів на N_n, що у той чи інший спосіб характеризують структуру дерева коалесцентів.

- X_n – число злиттів, яке дорівнює числу стрибків процесу N_n до поглинання в стані 1;

- $\tau_n = \inf\{t > 0 : N_n(t) = 1\}$ – час поглинання $\mathfrak{P}_n$;

- $L_n = \int_0^{\tau_n} N_n(t)\mathrm{d}t$ – повна довжина дерева коалесцента, що дорівнює сумарній тривалості життя всіх блоків до моменту поглинання.

Огляд асимптотики бета-коалесцентів

Бета-коалесцент є Λ-коалесцентом, для якого міра Λ має щільність бета розподілу

$$\Lambda(\mathrm{d}x) = A\, x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x, \quad x \in [0,1],$$

де $A, a, b > 0$. Інтенсивності переходів в цьому випадку виражаються в термінах бета-функції $\lambda_{m,k} = A\,\mathrm{B}(a+k-2, b+m-k)$. Нормування $A = 1/\mathrm{B}(a,b)$ вибирається, зазвичай, так, щоб Λ була ймовірнісною мірою. Бета-коалесценти мають тип (I) при $a > 2$, тип (II) при $1 < a \le 2$, тип (III) при $a = 1$ та тип (IV) при $0 < a < 1$. Коалесцент Больтгаузена-Шнітмана відповідає випадку $a = b = 1$, а коалесцент Кінгмана є граничним випадком, коли $a \to 0$.

Ми підсумуємо асимптотику бета-коалесцентів у наведених нижче таблицях, в яких вказані режими слабкої збіжності X_n, τ_n та L_n і які демонструють калейдоскоп можливих типів граничних теорем.

У наведених таблицях субординатор $(S(t))_{t\ge 0}$ без зсуву та поглинання має експоненту Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} \int_0^1 (1-(1-x)^z) x^{a-3}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x, \quad z \ge 0,$$

а характеристична функція 1-стійкого розподілу $\mathcal{S}_1(1)$ дається формулою

$$z \mapsto \exp\left\{-|z|\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{i}\ln|z|\mathrm{sgn}(z)\right)\right\}, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{1.12}$$

Константи $\mathtt{m}$ та $\mathtt{s}^2$ у таблиці 1.2 визначені формулами

$$\begin{aligned}
\mathtt{m} &= \frac{a+b-1}{(a-1)(2-a)}\Big(1-(a+b-2)\big(\Psi(a+b-1)-\Psi(b)\big)\Big),\\
\mathtt{s}^2 &= \frac{a+b-1}{(a-1)(2-a)} \times \Big(2\big(\Psi(a+b-1)-\Psi(b)\big)\\
&- (a+b-2)\big((\Psi(a+b-1)-\Psi(b))^2 + \Psi'(b) - \Psi'(a+b-1)\big)\Big),
\end{aligned}$$

де $\Psi(\cdot)$ є логарифмічної похідною гамма-функції.

Граничний розподіл для X_n у коалесценті Больтгаузена-Шнітмана було знайдено в роботі [68] методом сингулярного аналізу твірних функцій, а трохи згодом, з використанням каплінгу з випадковими блуканнями з бар'єром, в

Табл. 1.1: Граничні теореми для $(X_n - a_n)/b_n$ для бета(a, b)-коалесцентів. В таблиці: $\alpha = 2 - a$, $r_1 = \zeta(2, b)$, $r_2 = 2\zeta(3, b)$, де $\zeta(\cdot, \cdot)$ є дзета-функцією Гурвіца; $m_1 = \Psi(a-2+b) - \Psi(b)$, $m_2 = \Psi'(b) - \Psi'(a-2+b)$, де $c_1 = b(b+1)\zeta(2, b)$, $c_2 = 2b(b+1)\zeta(3, b)$, $\kappa = (1-a)^{1+1/\alpha}/\Gamma^{1/\alpha}(a)$.

a	b	c_n	d_n	Граничний розподіл	Джерело
$a = 0$	$b > 0$	$n - 1$	1	δ_0	очевидно
$0 < a < 1$	$b > 0$	$n(\alpha - 1)$	$\kappa n^{1/\alpha}$	$\mathcal{S}_\alpha(1)$	[63, 108], Розділ 4.2
$a = 1$	$b > 0$	$n(\ln n)^{-1} +$ $n \ln\ln n (\ln n)^{-2}$	$\frac{n}{(\ln n)^2}$	$\mathcal{S}_1(1)$	[68, 142]$(b = 1)$ Розділ 4.2
$1 < a < 2$	$b > 0$	0	$\alpha^{-1}\Gamma(\alpha)n^\alpha$	$\int_0^\infty e^{-\alpha S(t)} \mathrm{d}t$	Розділ 3.3, [116]
$a = 2$	$b > 0$	$(2r_1)^{-1}(\ln n)^2$	$(3^{-1} r_1^{-3} r_2 \ln^3 n)^{1/2}$	$\mathcal{S}_2(1)$	Розділ 3.3, [140]
$a > 2$	$b > 0$	$m_1^{-1} \ln n$	$(m_1^{-3} m_2 \ln n)^{1/2}$	$\mathcal{S}_2(1)$	Розділ 3.3, [100]

[142]. Пізніше цей метод був застосований в [143] для вивчення бета$(a, 1)$-коалесцентів з $0 < a < 2$. Всі рядки таблиці 1.1 (крім $a = 1$) є окремими випадками більш загальних результатів для Λ-коалесцентів, взятих з статей [100, 108, 116] та розділу 3.3 цієї роботи. Значення $a = 0$ відповідає коалесценту Кінгмана.

Дещо інші асимптотичні характеристики коалесцентів, наприклад, асимптотична поведінка $N_n(t)$ при $t \downarrow 0$ в коалесцентах, що спускаються з нескінченності вивчались в [28, 31]. В статтях [1, 2, 111, 142, 68] було помічено зв'язки з випадковими деревами. Чимало робіт було присвячено коалесцентам з мутаціями [27, 29, 30, 163] та ін. Ми не будемо докладно зупинятись на цих питаннях, оскільки вони не мають безпосереднього зв'язку з дисертаційною роботою. Наведений вище огляд теорії коалесцентів написаний за роботою автора та його співавторів [98], до якого ми і рекомендуємо звернутись за подальшими деталями. Інші чудові огляди теорії та зв'язки з іншими моделями в прикладній ймовірності можна знайти в двох курсах лекцій [32, 34].

Коалесцентам присвячено дві частини даної роботи: підрозділи 3.3 та 4.2. Вони написані за роботами [96] та [99] відповідно. Результати статті [96] також викладені в розділі 3.1 монографії [191].

Табл. 1.2: Граничні теореми для $(\tau_n - c_n)/d_n$ для бета(a,b)-коалесцентів. В таблиці: Exp_k незалежні стандартні показникові величини; константи m_1 та m_2 такі ж, як в таблиці 1.1; $\gamma = \frac{a-1+b}{a-1}\frac{a-2+b}{a-2}$.

a	b	c_n	d_n	Граничний розподіл	Джерело
$a=0$		0	1	$\sum \mathrm{Exp}_k/C_k^2$	[256]
$0<a<1$	$b>0$	0	1	невідомо	
$a=1$	$b=1$	$\ln\ln n$	1	Гумбель	[111]
$a=1$	$b\neq 1$			невідомо	
$1<a<2$	$b>0$	$\mathtt{m}^{-1}\ln n$	$(\mathtt{m}^{-3}\mathtt{s}^2\ln n)^{1/2}$	$\mathcal{S}_2(1)$	Розділ 3.3
$a=2$	$b>0$	$c_1^{-1}\ln n$	$(c_1^{-3}c_2\ln n)^{1/2}$	$\mathcal{S}_2(1)$	Розділ 3.3
$a>2$	$b>0$	$(\gamma m_1)^{-1}\ln n$	$\gamma^{-1}(m_1^{-3}(m_2+m_1^2)\ln n)^{1/2}$	$\mathcal{S}_2(1)$	Розділ 3.3, [100]

Табл. 1.3: Граничні теореми для $(L_n - e_n)/f_n$ для бета(a,b)-коалесцентів. В таблиці: $\alpha = 2-a$, $\beta = 1+\alpha-\alpha^2$, $c_1 = \frac{\Gamma(\alpha+1)(\alpha-1)}{2-\alpha}$, $c_2 = \frac{\Gamma(\alpha+1)(\alpha-1)}{\cos(\pi\alpha/2)}$, η є деякою невиродженою в.в. з абсолютно неперервним розподілом

a	b	e_n	f_n	Граничний розподіл	Джерело
$a=0$		$2\ln$	2	Гумбель	[67, 256]
$0<a<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$b=2-a$	c_1n^a	1	η	[163]
$a=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$b=2-a$	c_1n^a	$c_2(\ln n)^{\alpha^{-1}}$	$\mathcal{S}_\alpha(1)$	[163]
$\frac{3-\sqrt{5}}{2}<a<1$	$b=2-a$	c_1n^a	$c_2(\beta^{-1}n^\beta)^{\alpha^{-1}}$	$\mathcal{S}_\alpha(1)$	[163]
$a=1$	$b>0$	$n(b\ln n)^{-1}+$ $b^{-1}n\ln\ln n(\ln n)^{-2}$	$\frac{n}{b(\ln n)^2}$	$\mathcal{S}_1(1)$	[67]$(b=1)$, Розділ 4.2
$0<a<1$	$b\neq 2-a$			невідомо	
$a>1$	$b>0$	0	n	$\int_0^\infty e^{-S_t}\mathrm{d}t$	[205]

1.3 Огляд за розділом 4

В кожній теорії, що вивчає асимптотичні властивості тих чи інших об'єктів, природнім є питання про якість наближення (швидкість збіжності) у граничних теоремах. Для відповіді на питання такого роду в теорії ймовірностей зазвичай використовують поняття ймовірнісних метрик, які у той чи інший спосіб задають топологію на множинах випадкових елементів або їх розподілів. Класичними прикладами є метрика Колмогорова, метрика Леві-Прохорова та її окремий випадок – метрика Леві, метрика Кі Фан, L_p-метрики, мінімальні L_p-метрики, метрики Золотарьова та інші. Чудовими введеннями до теорії ймовірнісних метрик є книги В. Золотарьова [275] та С. Рачова [222].

Техніка ймовірнісних метрик знайшла широке застосування в аналізі випадкових рекурсивних структур та, зокрема, випадкових процесів з регенерацією, особливо в контексті асимптотичного аналізу випадкових рекурентних послідовностей. Лінійною випадковою рекурентною послідовністю називається послідовність випадкових величин $(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}$ така, що її одновимірні розподіли задовольняють рівність

$$\mathcal{W}_0 = 0, \quad \mathcal{W}_n \overset{\mathrm{d}}{=} V_n + \sum_{r=1}^{K} A_r(n)\mathcal{W}^{(r)}_{I^n_{(r)}}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

де $\mathcal{W}_n$ є деякою характеристикою структури розміру n, яка за певну «плату» V_n розбивається на K незалежних підструктур випадкових розмірів $I^n_{(r)} \in \{0, \ldots, n\}$, зважених параметрами $A_r(n) > 0$. Для кожного $r = 1, \ldots, K$ випадкова величина $\mathcal{W}^{(r)}_k$, що відповідає r-ій підструктурі, вважається незалежною від $((I^n_{(1)}, \ldots, I^n_{(K)}, A_1(n), \ldots, A_K(n), V_n))_{n\in\mathbb{N}}$ та розподіленою як $\mathcal{W}_k$ для кожного $k \geq 0$. Також припускається, що послідовності $(\mathcal{W}^{(1)}_n)_{n\geq 0}, \ldots, (\mathcal{W}^{(K)}_n)_{n\geq 0}$ незалежні в сукупності.

Популярним методом асимптотичного аналізу лінійних випадкових рекурентних послідовностей є «метод стискаючих відображень». Цей метод був вперше запропонований У. Рьослером у статті [232] для аналізу алгоритму швидкого сортування і в подальшому знайшов численні застосування в аналізі алгоритмів типу «поділяй-та-володарюй» та відповідних структур даних [212, 223, 233, 234, 235]. Найвживанішими метриками, які застосовувались у згаданих статтях, є мінімальні L_p-метрики (також відомі під назвою метрик Вассерштейна або метрик Маллоуза) та метрики Золотарьова, що пояснюється, по-перше, відносною простотою роботи з ними та, по-друге, тим, що зі збіжності в цих метриках випливає слабка збіжність відповідних розподілів.

Найпростішим прикладом лінійного випадкового рекурентного співвідношення є

$$T_0 = 0, \quad T_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{T}_{n-I_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

де $\widehat{T}_k \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_k$ для кожного фіксованого $k \geq 0$ та $(\widehat{T}_k)_{k\geq 0}$ не залежить від випадкового індекса $I_n \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Послідовність $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можна інтерпретувати як кількість стрибків у деякому ланцюгу Маркова $(M_k)_{k\geq 0}$, що стартує в n, не зростає та має єдиний поглинаючий стан 0. Послідовності такого вигляду з'являються у багатьох розділах прикладної теорії ймовірностей. Серед іншого, вони (або дуже близькі до них) описують число K_n^* блоків регенеративних композицій [87, 95, 105], число X_n злиттів в коалесцентах з множинними злиттями [98, 116, 219, 236], число стрибків у випадкових блуканнях з бар'єром [143, 190] та число відтинів у випадкових рекурсивних деревах [142, 68].

За припущення, що розподіл I_n має вигляд

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = \frac{p_k}{p_1 + \ldots + p_n}, \quad k = 1, \ldots, n, \quad n \in \mathbb{N}$$

для деякого ймовірнісного розподілу $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ з $p_1 > 0$, або

$$I_n = [n\eta] + 1, \tag{1.15}$$

для деякої в.в. $\eta \in (0, 1)$ такої, що розподіл $|\ln \eta|$ неарифметичний, у [143] та [145] відповідно було отримано повний опис можливих граничних розподілів для підхожим чином нормованої та центрованої послідовності (T_n).

Окрім згаданих статей, де асимптотика T_n досліджукадась в окремих моделях, існує ряд робіт, де вивчалась поведінка T_n в загальному контексті. За умови, що ймовірність великих стрибків ланцюга Маркова $(M_n)_{n\geq 0}$ має степеневу поведінку, граничні теореми для $(M_n)_{n\geq 0}$ було отримано в [116]. Як наслідок з цих теорем можна вивести слабку збіжність T_n з підхожим нормуванням до розподілу $\int_0^\infty e^{-U_t}\, dt$, де $(U_t)_{t\geq 0}$ є деяким субординатором. Цей результат був нещодавно узагальнений на випадок довільного ланцюга Маркова (не обов'язково монотонного) з від'ємним зсувом [35]. З іншого боку, маємо ситуації, в яких розподіли стрибків ланцюга $(M_n)_{n\geq 0}$ майже однакові, якщо ланцюг перебуває досить далеко від 0. В такому випадку природньо очікувати, що траєкторія $(M_k)_{k\geq 0}$ є досить близькою до траєкторії $(n-S_k)_{k\geq 0}$ для підхожого випадкового блукання $(S_k)_{k\geq 0}$ з додатними однаково розподіленими кроками. З цього випливає, що розподіл T_n має бути близьким до розподілу числа відновлень $\inf\{k \geq 0 : S_k > n\}$, а значить до деякого стійкого розподілу після нормування. У найпростішому вигляді така «апроксимація процесами відновлення» була використана в [259], де було отримано деякі достатні умови для збіжності центрованого та нормованого T_n до стандартного нормального розподілу.

В розділі 4 техніку ймовірнісних метрик застосовано для аналізу асимптотики послідовності (T_n) за умов описаної апроксимації процесами відновлення.

1.3.1 Випадкове блукання з бар'єром. Окремий тип випадкового блукання з бар'єром та кроком, що має розподіл $\mathbb{P}\{\xi = k\} = 1/(k(k+1))$, $k \in \mathbb{N}$, вперше з'явився в роботі [142] як допоміжний інструмент для аналізу числа розрізів у випадкових рекурсивних деревах. Загальне означення $(R_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}_0}$, що дається формулою (12), було введено в роботі [143], в якій автори отримали класифікацію режимів слабкої збіжності числа стрибків

$$M_n^{(0)} := \#\{k \in \mathbb{N} : R_{k-1}^{(n)} \neq R_k^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)}+\xi_{l+1}<n\}}$$

при $n \to \infty$. Більш точно, в [143], див. також [116], було показано: якщо ξ належить області притягання деякого стійкого розподілу, то підхожим чином центрована та нормована послідовність $(M_n^{(0)})$ слабко збігається при $n \to \infty$. Клас граничних розподілів включає стійкі розподіли та розподіли експоненційних функціоналів від субординаторів. В роботі [211] показано, що ці результати без змін переносяться на час поглинання $T_n^{(0)}$, означений формулою (13).

Число нульових декрементів $V_n^{(0)}$, яке можна подати у вигляді $T_n^{(0)} - M_n^{(0)}$, вивчалося в роботі [144], де було показано:

(а) якщо $\mathbb{E}\xi < \infty$, то $V_n^{(0)}$ слабко збігається без нормування;

(б) якщо ξ належить області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha \in (0,1]$ (при $\alpha = 1$ припускається, що $\mathbb{E}\xi = \infty$), то $V_n^{(0)}/\mathbb{E}V_n^{(0)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ при $n \to \infty$.

Теорема 106 нашої роботи доповнює (б) та, наскільки автору відомо, є єдиним опублікованим результатом про слабку збіжність $V_n^{(0)}$ у випадку $\mathbb{E}\xi = \infty$.

Підрозділ 4.1 базується на статті [11], підрозділи 4.2 та 4.3 написані за статтями [190] та [99] відповідно.

1.4 Огляд за розділом 5

Для неформального опису класичної процедури вибору лідера розглянемо гру, у якій беруть участь n осіб. У першому раунді кожен з гравців підкидає монету з ймовірністю p випадання герба. Ті з гравців, у кого випала решітка вибувають, а ті, у кого випав герб, переходять у другий раунд. Цей процес повторюється, поки не залишиться жодного гравця. Якщо в деякому раунді у всіх гравців випадає герб, то раунд оголошується нічийним та повторюється доти, доки хоча б один гравець не вийде з гри. Ця модель отримала чималу увагу внаслідок своєї простоти та ряду аналітичних властивостей, які роблять можливим застосування апарату сингулярного аналізу твірних функцій [79], а також завдяки зв'язкам з рекордами у вибірках з геометричного розподілу. Неповний список основних робіт включає [48, 49, 78, 113, 149, 150, 158, 166, 220]. Ряд узагальнень було запропоновано та досліджено в нещодавній роботі [81].

Класичну процедуру вибору лідера, коли вона застосовується до зліченної кількості гравців, можна розглядати як процедуру випадкового просіювання множини натуральних чисел $\mathbb{N}$ за схемою, описаною у вступі, з множиною $R = \{R(k) : k \geq 1\}$, що визначена формулами

$$R(0) := 0, \quad R(k) := \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad k \geq 1,$$

де незалежні кроки $\xi_1, \xi_2, \ldots$ мають геометричний розподіл на $\mathbb{N}$ з ймовірністю успіху p. Класична процедура вибору лідера зі скінченною кількістю гравців

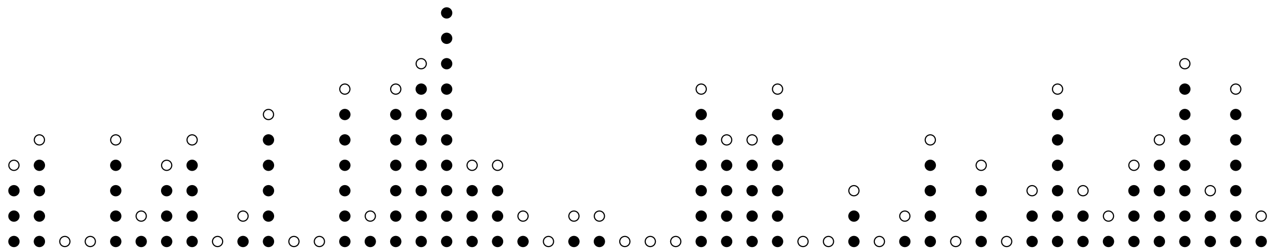


Рис. 1.2: Реалізація класичної процедури вибору лідера. Гравці розташовані вздовж горизонтальної осі, на вертикальній осі позначено номери раундів. Гравцям, що вибувають з гри (залишаються в грі), відповідають порожні (заповнені) круги.

n отримується звуженням, описаної вище процедури, на скінченну множину $\{1, 2, \dots, n\}$.

Класична процедура вибору лідера зі скінченною кількістю гравців n тісно пов'язана з ґратками Бернуллі, див. означення на с. 38. Якщо розподіл кроку W мультиплікативного випадкового блукання є виродженим в точці p, то відповідна послідовність чисел зайнятості $(Z^*_{n,i})_{i\geq 1}$ в ґратці Бернуллі має той самий розподіл, що й послідовність $(A_{n,i})_{i\geq 1}$ в процедурі вибору лідера, де $A_{n,i}$ є кількістю гравців, що вибувають з гри в раунді i. Таким чином, ґратку Бернуллі можна розглядати як рандомізовану процедуру вибору лідера, в якій параметр p в кожному раунді вибирається випадковим та незалежним від результатів попередніх раундів.

Стійкі точкові процеси на $\mathbb{R}_+$

В контексті задач, пов'язаних з процедурами випадкового просіювання, природним чином виникає поняття стійких точкових процесів, див. [58, 59, 274]. Для означення поняття стійкого процесу зазвичай вводяться дві операції: *розрідження* та *масштабування*. Для заданого точкового процесу $\mathcal{X} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{X_k}$ на $[0, \infty)$ з $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ та заданої зліченної випадкової множини $R = (R(k))_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ визначимо розрідження $\mathcal{X}$ за допомогою R формулою

$$\mathcal{X} \bullet R \ := \ \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{X_{R(k)}}.$$

Ця випадкова операція перетворює процес $\mathcal{X}$ у розріджений процес $\mathcal{X} \bullet R$ шляхом видалення точок $\mathcal{X}$ з номерами, що не лежать в R. Для компенсації такого розрідження використовується друга операція – масштабування, яку можна взяти, наприклад, звичайним множенням: $a \cdot \mathcal{X} := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{aX_k}$, $a \in (0,1)$. Називатимемо точковий процес $\mathcal{X}$ *a-стійким відносно просіювання (або розрідження) за допомогою* R, якщо

$$\mathcal{X} \overset{\mathrm{d}}{=} a \cdot (\mathcal{X} \bullet R). \tag{1.16}$$

Підкреслимо, що $\mathcal{X}$ є a-стійким тоді і тільки тоді, коли $\mathcal{X}^\beta$ є a^β-стійким, де $\mathcal{X}^\beta := \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{X_k^\beta}$ та $\beta > 0$. З цього випливає, що для заданої випадкової множини R достатньо вивчати a-стійкі процеси для одного довільного значення $a \in (0,1)$.

При такому підході основні результати розділу 5 – теореми 112 та 118 – можна розглядати як характеризації a-стійких точкових процесів відносно просіювання випадковими блуканнями.

Процедура вибору лідера за допомогою рекордів була запропонована в роботі [10] для розв'язання задачі з, на перший погляд, непов'язаної області теорії коалесцентів – доведення граничної теореми для числа злиттів в коалесценті Пуассона-Діріхле. Коалесцент Пуассона-Діріхле є яскравим (і, фактично, єдиним вивченим) представником класу коалесцентів з *одночасними множинними злиттями*. В моменти переходів в таких коалесцентах дозволяються одночасні злиття різних груп блоків [207, 246] і, на відміну від Λ-коалесцентів, які характеризуються скінченними мірами на $[0,1]$, вони характеризуються скінченними мірами на симплексі[1]

$$\Delta := \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots) : x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0, \sum_{i=1}^{\infty} x_i \leq 1 \right\}.$$

Свою назву коалесцент Пуассона-Діріхле отримав з очевидної причини: його керуюча міра є мірою Пуассона-Діріхле на Δ. Цей процес був введений в роботі [237], а його асимптотика вивчалась в статтях [188, 206].

Розділ 5 написаний за двома статтями [9] та [10]. Перша стала основою підрозділу 5.1, а результати другої викладені в підрозділі 5.2.

[1]Більш докладно ми опишемо їх в підрозділі 5.2.2.

1.5 Огляд за розділом 6

Стохастичні інтеграли, що виникають в якості границь випадкових процесів з регенерацією мають специфічний вигляд, в якому інтегранд є детермінованою функцією. Для означення таких стохастичних інтегралів можна користуватись як загальним означенням стохастичного інтегрування за семімартингалам, див., наприклад [157], так і еквівалентним йому, але значно простішим, потраєкторним означенням за допомогою інтегрування частинами. В контексті випадкових процесів з імміграцією такий підхід було запропоновано у роботі [129]. Нехай функція $f \in D[a,b]$ має обмежену варіацію, а $(X(t))_{t\in[a,b]}$ є довільним стохастичним процесом, траєкторії якого лежать в $D[a,b]$ м.н. Тоді стохастичний інтеграл від функції f за процесом X визначається формулою інтегрування за частинами

$$\int_{(a,b]} f(y)\mathrm{d}X(y) := X(b)f(b) - X(a)f(a) - \int_{(a,b]} X(y-)\mathrm{d}f(y),$$

де інтеграл в правій частині розуміється як потраєкторний інтеграл Лебега-Стілтьєса. Підкреслимо, що таке означення можна поширити на довільні диференційовні на (a,b) функції f що можуть бути необмеженими в околі точки a або b, але для яких невласний інтеграл Рімана $\int_a^b X(y-)f'(y)\mathrm{d}y$ існує м.н.

Ми використовуємо саме такий підхід для означення стохастичних інтегралів, які виникають в цій роботі. Зокрема, у такий спосіб ми визначаємо дробово інтегровні α-стійкі процеси Леві

$$I_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho}\mathrm{d}\mathcal{S}_{\alpha}(y), \quad u > 0$$

при $\alpha \in (1,2]$ та $\rho > 1/\alpha$ та дробово інтегровні обернені α-стійкі субординатори

$$J_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho}\mathrm{d}W_{\alpha}^{\leftarrow}(y), \quad u > 0$$

при $\alpha \in (0,1)$ та $\rho \in \mathbb{R}$.

Процес $I_{2,H-1/2}$, $H \in (0,1)$ з точністю до невипадкової мультиплікативної константи збігається з процесом, запропонованим П. Леві в [179], який став прототипом *дробового броунівського руху* – популярного об'єкту сучасної теорії ймовірностей, що був введений в роботі [185] і якому з моменту появи було присвячено тисячі робіт. Аналогічно, процес $I_{\alpha,\rho}$ $(1 < \alpha < 2)$ є близьким родичем дробового стійкого руху, див. розділ 7 в [240]. Підкреслимо, що незважаючи на цю схожість, процеси $I_{\alpha,\rho}$ мають суттєві відмінності, так, зокрема, прирости $I_{\alpha,\rho}$ нестаціонарні при $\rho \neq 0$.

В останні роки обернені стійкі субординатори, що фігурують в означенні $J_{\alpha,\rho}$ і які також відомі під назвою процесів Міттаг-Леффлера, стали досить популярними об'єктами досліджень як з прикладної, так і з теоретичної точок зору. Ці процеси часто виникають як випадкова заміна часу при субординації. Найвідомішим прикладом такого роду є границі випадкових блукань у неперервному часі, у яких розподіл часу очікування між стрибками має важкі хвости [196, 198]. У найпростішій ситуації граничний процес має форму $S(W_\alpha^{\leftarrow}(\cdot))$, де $S(\cdot)$ є γ-стійким процесом з $0 < \gamma \leq 2$. Окремий випадкок $\gamma = 2$ що з'являється в контексті *аномальної (або дробової) дифузії*, отримав чималу увагу як з боку фізиків [184, 255], так і в математичній літературі [24, 183, 210]. Субординовані процеси більш загального вигляду $X(W_\alpha(\cdot))$, де X є марковським процесом, використовуються для побудови розв'язків дробових диференціальних рівнянь в частинних похідних [195, 194]. Також обернені стійкі субординатори відіграють важливу роль в аналізі (а) стаціонарних безмежно подільних процесів, породжених консервативними потоками [214] та (б) асимптотик згорток функцій та перешкальованих випадкових блукань у неперервному часі [243]. У випадках (а) та (б), граничні процеси мають вигляд згорток з оберненими стійкими субординаторами, а тому безпосередньо пов'язані з процесами $J_{\alpha,\rho}$.

Розділ 2

Граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією в моменти відновлення

Позначимо через $D[0,\infty)$, $D(0,\infty)$ та $D(\mathbb{R})$ простори Скорохода неперервних справа дійснозначних функцій, що визначені на $[0,\infty)$, $(0,\infty)$ та $\mathbb{R}$ відповідно та мають скінченні границі зліва в кожній внутрішній точці області визначення. Означення та властивості топологій Скорохода на цих просторах, які ми використовуємо в роботі, наведено в Додатку В.1.

Нехай $X := (X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є випадковим процесом з траєкторіями у $D(\mathbb{R})$, який задовольняє умову $X(t) = 0$ для всіх $t < 0$, та нехай ξ є додатною випадковою величиною. Незалежність X та в.в. ξ не припускається. Випадок $X = h$ м.н. для деякої невипадкової функції h не виключається.

Нехай $(X_1, \xi_1), (X_2, \xi_2), \dots$ є послідовністю незалежних копій пари (X, ξ), а $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ – стандартне випадкове блукання з кроками ξ_j, що стартує в нулі, тобто

$$S_0 := 0, \qquad S_k := \xi_1 + \dots + \xi_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Позначимо через $(\nu(t))_{t\in\mathbb{R}}$ момент першого потрапляння в (t,∞):

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k > t\} = \#\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k \le t\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Випадковий процес $Y := (Y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, що визначений рівністю

$$Y(t) := \sum_{k\ge 0} X_{k+1}(t - S_k) = \sum_{k=0}^{\nu(t)-1} X_{k+1}(t - S_k), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

назвемо *випадковим процесом з імміграцією у моменти відновлення* або просто *випадковим процесом з імміграцією*. Якщо $X = h$ м.н. для деякої невипадкової функції h, то відповідний процес Y називається *процесом дробового ефекту*.

Введені процеси мають таку інтерпретацію: в момент часу $S_0 = 0$ перший «іммігрант» прибуває в систему та породжує випадковий процес X_1; далі, для $k \in \mathbb{N}$, в момент часу S_k «іммігрант» $k+1$ прибуває в систему та породжує процес X_{k+1}; випадковий процес з імміграцією $Y(t)$ є сумою всіх процесів, породжених прибулими «іммігрантами» до моменту часу t включно, що описує їх кумулятивний ефект. Запропонована термінологія – «випадковий процес з імміграцією» – має дві переваги. По-перше, цей термін більш інформативний у порівнянні з «процес дробового ефекту з випадковою функцією відповіді X». Зокрема, випадковий процес (2.1) має мало спільного з класичним процесом дробового ефекту, введеним в [244] для моделювання струму у вакуумній трубці і побудованим за пуассонівським вхідним потоком та детермінованою (невипадковою) функцією відповіді. По-друге, якщо процес X є гіллястим процесом у неперервному часі, то відповідний процес Y відомий в літературі під назвою *гіллястий процес з імміграцією*.

Випадковий процес з імміграцією є випадковим процесом з регенерацією в сенсі означення 2. Це випливає з такої конструкції. Нехай $M_D([0,t])$ є простором маркованих точкових процесів[1] на інтервалі $[0,t]$ з мітками в просторі Скорохода $D(\mathbb{R})$. Відповідні точкові процеси називатимемо структурами розміру $t \geq 0$. Тоді набір маркованих точкових випадкових процесів $(\sum_{i\geq 0} \delta_{(S_i, X_{i+1})} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}})_{t\geq 0}$ є узгодженою родиною випадкових структур відносно операцій проектування-звуження:

$$\pi_{s,t}\left(\sum_{i\geq 0} \delta_{(t_i,m_i)}\right) := \sum_{i\geq 0} \delta_{(t_i,m_i)} \mathbb{1}_{\{t_i \leq s\}}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

де $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t$. В якості операції π_α, що фігурує в означенні 1,

[1] Базові означення та факти з теорії маркованих точкових процесів та топологій на просторах таких процесів можна знайти в Додатку В.2.

візьмемо таку:

$$\pi_t\left(\sum_{i\geq 0}\delta_{(t_i,m_i)}\right) := \begin{cases}\sum_{i\geq 0}\delta_{(t_i,m_i)}, & \text{якщо } t_1\notin(0,t],\\ \sum_{i\geq 1}\delta_{(t_i-t_1,m_i)}, & \text{інакше.}\end{cases}$$

Ця операція зсуває точковий процес так, що перша додатна точка (якщо вона існує) переходить в початок координат, або не змінює точковий процес, якщо він не має атомів в $(0,t]$. З представлення $Y(t)=\mathfrak{R}_t(\sum_{i\geq 0}\delta_{(S_i,X_{i+1})}\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}})$, де

$$\mathfrak{R}_t\left(\sum_{i\geq 0}\delta_{(t_i,m_i)}\right)=\sum_{i\geq 0}m_i(t-t_i),\quad t\geq 0,$$

випливає, що випадковий процес з імміграцією є випадковим процесом з регенерацією в сенсі означення 2.

Підкреслимо, що випадкові процеси з регенерацією не обов'язково є регенеративними процесами в класичному сенсі, див. наприклад розділ 3.12 в [226]. В той же час будь-який випадковий процес з імміграцією є інтегралом від деякого регенеративного процесу.

Основне питання, якому присвячено даний розділ, це дослідження слабкої збіжності випадкових процесів з імміграцією при $t\to\infty$. Така збіжність регулюється двома факторами: асимптотикою хвоста розподілу ξ та асимптотикою скінченновимірних розподілів $X(t)$ при великих t. Як демонструють результати цього розділу, комбінація цих двох факторів дає широкий спектр можливих режимів слабкої збіжності Y. Розпочнемо з дослідження випадку збіжності до стаціонарних процесів.

2.1 Збіжність до стаціонарного процесу з імміграцією

Збіжність до стаціонарного процесу з імміграцією має місце у випадку, коли $\mu:=\mathbb{E}\xi<\infty$ та $\mathbb{E}[|X(t)|]$ скінченне та прямує до нуля досить швидко при $t\to\infty$. У цьому разі Y є суперпозицією регулярного потоку незалежних процесів з швидко затухаючою післядією, що може породжувати стаціонарність у границі.

2.1.1 Стаціонарий процес з імміграцією. Припустимо, що $\mu < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний, тобто не зосереджений на ґратці вигляду $d\mathbb{Z}$ для деякого $d > 0$. Припустимо, що на просторі, де задана послідовність $(X_k, \xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, визначені такі об'єкти:

- незалежна копія $(X_{-k}, \xi_{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ послідовності $(X_k, \xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$;
- пара (X_0, ξ_0), яка не залежить від $(X_k, \xi_k)_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}$ та має спільний розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi_0 \le x, X_0 \in \cdot\} = \frac{1}{\mu}\int_{[0,\,x]} y\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}y, X \in \cdot\}, \quad x \ge 0; \tag{2.2}$$

- в.в. U, яка не залежить від $(X_k, \xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ та має рівномірний розподіл на $[0, 1]$.

Покладемо

$$S_{-k} := -(\xi_{-1} + \cdots + \xi_{-k}), \quad k \in \mathbb{N}$$

та

$$S_0^* := U\xi_0, \quad S_{-1}^* := -(1-U)\xi_0, \quad S_k^* := S_0^* + S_k, \quad S_{-k-1}^* := S_{-1}^* + S_{-k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Точковий процес $\mathcal{R} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{S_n^*}$ називається *стаціонарним точковим процесом відновлення*. Зауважимо, див. розділ 3.10 в [226], що випадкові величини S_0^* та $-S_{-1}^*$ мають однаковий самий розподіл, що є граничним для перестрибу $S_{\nu(t)} - t$ (або недострибу $t - S_{\nu(t)-1}$) при $t \to \infty$:

$$\mathbb{P}\{S_0^* \in \mathrm{d}x\} = \mathbb{P}\{-S_{-1}^* \in \mathrm{d}x\} = \mu^{-1}\mathbb{P}\{\xi > x\}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathrm{d}x.$$

Відомо, див. теорему 4.1 в розділі 8 книги [257], що точковий процес $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}$ є інваріантним відносно зсувів, тобто $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}$ має той самий розподіл, що й $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*+t}$ для кожного $t \in \mathbb{R}$. Зокрема, міра інтенсивності цього процесу з точністю до мультиплікативної константи є мірою Лебега, а сама мультиплікативна константа μ^{-1} визначається з елементарної теореми відновлення. Таким чином,

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}(\mathrm{d}x)\Big] = \frac{\mathrm{d}x}{\mu}. \tag{2.3}$$

Будемо розглядати процес X_k як мітку точки S_k^*, $k \in \mathbb{Z}$, а (маркований) точковий процес

$$\mathcal{R}^{\mathcal{M}} := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(S_n^*,\, X_n)} \tag{2.4}$$

називатимемо *двостороннім маркованим стаціонарним точковим процесом відновлення*[2]. Зазначимо, що цей маркований точковий процес є простим з ймовірністю один внаслідок припущення $\mathbb{P}\{\xi > 0\} = 1$. Процес $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ є стаціонарним, див. приклад 1 на сс. 27-29 в [253], у такому сенсі:

$$\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\{A+t\} \times B) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{R}^{\mathcal{M}}(A \times B)$$

для $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}(D(\mathbb{R}))$ та $t \in \mathbb{R}$, де $\{A+t\} := \{a+t : a \in A\}$, а $\mathcal{B}(X)$ позначає борелевську σ-алгебру метричного простору X. Еквівалентно,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*-t, X_k)} \overset{\mathrm{d}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.5}$$

Цей факт є простим наслідком леми 8 нижче, див. зауваження 9 після леми. Також його можна вивести з теорії Палма стаціонарних точкових процесів, див. розділ 4.8 в [257].

Зафіксуємо $u \in \mathbb{R}$. Оскільки $\lim_{k\to-\infty} S_k^* = -\infty$ м.н., сума

$$\sum_{k\le -1} X_k(u+S_k^*) \mathbb{1}_{\{S_k^* \ge -u\}}$$

є майже напевно скінченною, так як містить лише скінченне число доданків. Покладемо

$$Y^*(u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(u+S_k^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(u+S_k^*) \mathbb{1}_{\{S_k^* \ge -u\}}, \tag{2.6}$$

вважаючи, що ряд $\sum_{k\ge 0} X_k(u+S_k^*) \mathbb{1}_{\{S_k \ge -u\}}$ збігається за ймовірністю, що серед іншого, забезпечує м.н. скінченність $Y^*(u)$. Випадковий процес $Y^* := (Y^*(u))_{u\in\mathbb{R}}$ назвемо *стаціонарним процесом з імміграцією*. З огляду на (2.5), процес Y^* є стаціонарним у вузькому сенсі.

[2] Базові означення та факти з теорії маркованих точкових процесів та топологій на просторах таких процесів можна знайти в Додатку В.2. Зокрема, ми будемо використовувати той факт, що на просторі маркованих точкових процесів можна задати структуру повного сепарабельного метричного простору, а також характеризацію збіжності в цьому просторі, що дається в твердженні 204.

Позначимо через $\mathfrak{A}$ носій дискретної компоненти ξ, тобто $\mathfrak{A} := \{t > 0 : \mathbb{P}\{\xi = t\} > 0\}$ та покладемо $< \mathfrak{A} > := \Big\{ \sum_i n_i a_i : a_i \in \mathfrak{A}, n_i \in \mathbb{N}_0 \Big\}$. Визначимо множини точок, в яких процеси $X(\cdot)$ та $X(\xi + \cdot)$ мають розриви з додатною ймовірністю:

$$\mathcal{D} := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X(t) \neq X(t-)\} > 0\},$$
$$\mathcal{D}_\xi := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{X(\xi + t) \neq X(\xi + t-)\} > 0\} \quad (2.7)$$

та покладемо

$$\Delta_X := \mathcal{D}_\xi \ominus \mathcal{D} := \{a - b : a \in \mathcal{D}_\xi, b \in \mathcal{D}\}.$$

У теоремі, наведеній нижче, запропоновано достатні умови слабкої збіжності випадкових процесів з імміграцією до стаціонарних процесів з імміграцією.

Теорема 3. *Припустимо, що $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний.*

(а) Якщо функція $G(t) := \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$, то для кожного $u \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k \geq 0} X_k(u + S_k^*) \mathbb{1}_{\{S_k^* \geq -u\}}$ є абсолютно збіжним з ймовірністю один. Крім того, для довільного $n \in \mathbb{N}$ та довільних точок $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$, в яких процес Y^* майже напевно неперервний, маємо

$$\big(Y(t + u_1), \ldots, Y(t + u_n)\big) \ \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \ \big(Y^*(u_1), \ldots, Y^*(u_n)\big), \quad t \to \infty. \quad (2.8)$$

(б) Якщо для деякого $\varepsilon > 0$ функція $H_\varepsilon(t) := \mathbb{E}[\sup_{u \in [t, t+\varepsilon]} |X(u)| \wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$, та

$$< \mathfrak{A} > \cap \, \Delta_X = \varnothing, \quad (2.9)$$

то

$$Y(t + u) \ \Rightarrow \ Y^*(u), \quad t \to \infty \quad (2.10)$$

у просторі Скорохода $D(\mathbb{R})$ з J_1-топологією.

Зауваження 4. Умова (2.9) виконується автоматично, якщо розподіл ξ неперервний. Якщо ξ та X незалежні, то умову (2.9) можна замінити простішою:

$$< \mathfrak{A} > \cap \, \Delta'_X = \{0\}, \quad (2.11)$$

де $\Delta'_X := \mathcal{D} \ominus \mathcal{D}$. Для незалежних ξ та X, процес Y^* є майже напевно неперервним в кожній точці $u \in \mathbb{R}$, тому співвідношення (2.8) виконується для довільних $u_1 < u_2 < \cdots < u_n$.

Зауваження 5. Наведене вище означення стаціонарного процесу з імміграцією було запропоновано в роботі [189]. У випадку незалежних ξ та X збіжність до стаціонарних процесів з імміграцією досліджувалась також в [139], де стаціонарний процес з імміграцією визначався дещо інакше:

$$Y^{**}(u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{k+1}(u + S_k^*) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{k+1}(u + S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^* \geq -u\}}, \quad u \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Зрозуміло, що два означення еквівалентні, якщо ξ та X незалежні. Проте, як демонструє приклад $X(t) := \mathbb{1}_{\{\xi > t\}}$ у випадку залежних ξ та X, означення (2.6) є більш коректним. Дійсно, в цьому випадку

$$Y(u) := \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{\xi_{k+1} > u - S_k \geq 0\}} = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_{k+1} > u \geq S_k\}} = \mathbb{1}_{\{u\geq 0\}}.$$

Далі, згідно з означенням формулою (2.6):

$$Y^*(u) := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{\xi_k > u + S_k^* \geq 0\}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{-S_k^* \leq u < -S_k^* + \xi_k\}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{-S_k^* \leq u < -S_{k-1}^*\}} = 1,$$

що узгоджується з фактом $Y(u+t) \to 1$ при $t \to \infty$. В той же час, розподіл в.в. $Y^{**}(0)$, визначеної формулою (2.12), є невиродженим.

2.1.2 Обговорення умов теореми 3. Сформулюємо еквівалентні умови безпосередньої інтегровності за Ріманом функцій $G(t) = \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ та $H_\varepsilon(t) = \mathbb{E}[\sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]} |X(u)| \wedge 1]$, що є більш зручними для застосувань.

З ймовірністю один траєкторії X лежать в $D(\mathbb{R})$, а тому є майже скрізь неперервними м.н. Те ж саме вірно й для процесу $t \mapsto |X(t)| \wedge 1$. Помітимо, що з неперервності $t \mapsto |X(t)| \wedge 1$ в точках t_0 та $t_0 + \varepsilon$ випливає неперервність $t \mapsto \sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]}(|X(u)| \wedge 1)$ в t_0. Отже, з ймовірністю один процес $t \mapsto \sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]}(|X(u)|\wedge 1)$ є майже скрізь неперервним, а тому множина точок, в яких процес $t \mapsto \sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]}(|X(u)| \wedge 1)$ розривний з додатною ймовірністю, має Лебегову міру нуль. Згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність маємо, що G та H_ε є майже скрізь неперервними. Оскільки вони також обмежені, то вони є локально інтегровними за Ріманом. Звідси робимо висновок, що безпосередня інтегровність за Ріманом функції G еквівалентна

$$\sum_{k\geq 0}\sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}[|X(t)|\wedge 1]<\infty, \tag{2.13}$$

а безпосередня інтегровність за Ріманом функції H_ε еквівалентна

$$\sum_{k\geq 0}\sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]}(|X(u)|\wedge 1)\Big]<\infty. \tag{2.14}$$

Більше того, умова (2.14) еквівалентна нерівності

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[k,\,k+1)}(|X(u)|\wedge 1)\Big]<\infty, \tag{2.15}$$

що демонструє, що H_ε є безпосередньо інтегровною за Ріманом для кожного $\varepsilon>0$, якщо вона є такою для деякого $\varepsilon>0$. Те, що з (2.14) випливає (2.15), доводиться так

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[k,\,k+1)}(|X(u)|\wedge 1)\Big] \ &\leq\ \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\Big[\sum_{j=0}^{\lfloor\varepsilon^{-1}\rfloor}\sup_{u\in[k+j\varepsilon,\,k+(j+1)\varepsilon)}(|X(u)|\wedge 1)\Big]\\ =\sum_{j=0}^{\lfloor\varepsilon^{-1}\rfloor}\sum_{k\geq 0}H_\varepsilon(k+j\varepsilon)\ &\leq\ \sum_{j=0}^{\lfloor\varepsilon^{-1}\rfloor}\sum_{k\geq 0}\sup_{t\in[k,\,k+1)}H_\varepsilon(t).\end{aligned}$$

Щоб переконатись у тому, що з (2.15) випливає (2.14) достатньо скористатися формулою (2.28) нижче з $a=0$, $b=\varepsilon$ та $X(u)$ замість $X(\xi+u)$.

Наведемо декілька ситуацій, коли умови (2.13) та (2.15) еквівалентні:

(i) $X(t)\equiv h(t)$ м.н. для деякої невипадкової функції h;

(ii) існує $t_0>0$ таке, що з ймовірністю один $|X(t)|$ не зростає на $[t_0,\infty)$;

(iii) $\mathbb{P}\{|X(t)|\in(0,1)\}=0$ для всіх $t\geq 0$, $\tau:=\inf\{t\geq 0: X(t)=0\}<\infty$ м.н. та $X(t)=0$ для всіх $t\geq\tau$ м.н.; в цьому разі

$$(2.13)\Leftrightarrow(2.15)\Leftrightarrow\mathbb{E}\tau<\infty. \tag{2.16}$$

Дійсно, у випадку (i) математичні сподівання в (2.13) та (2.15) можна не писати, оскільки процес X невипадковий, а тому ці формули збігаються. У випадку (ii) для всіх $k\geq t_0$ маємо $\sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}[|X(t)|\wedge 1]=\mathbb{E}[|X(k)|\wedge 1]$ та

$\mathbb{E}[\sup_{u\in[k,\,k+1)}|X(u)|\wedge 1] = \mathbb{E}[|X(k)|\wedge 1]$, а тому ряди в (2.13) та (2.15) однакові з точністю до перших $[t_0]+1$ доданків. Припустимо, що X задовольняє умови випадку (iii). Покажемо, що (2.16) виконується.

«(2.13) $\Rightarrow \mathbb{E}\tau<\infty$»: З рівності

$$\mathbb{E}[|X(t)|\wedge 1] = \mathbb{P}\{|X(t)|\geq 1\} = \mathbb{P}\{\tau > t\}$$

випливає

$$\infty > \sum_{k\geq 0}\sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}\big[|X(t)|\wedge 1\big] \geq \sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{\tau>k\}\geq \mathbb{E}\tau.$$

«$\mathbb{E}\tau<\infty \Rightarrow$ (2.15)»: Ця імплікація є наслідком

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[k,\,k+1)}(|X(t)|\wedge 1)\Big] = \mathbb{E}\Bigg[\sum_{k=0}^{\lfloor\tau\rfloor}\sup_{t\in[k,\,k+1)}(|X(t)|\wedge 1)\Bigg]\leq \mathbb{E}(\tau+1).$$

Нарешті, твердження «(2.15) $\Rightarrow$ (2.13)» є очевидним.

Наведемо приклад процесу X, який задовольняє (2.13), але не задовольняє (2.15).

Приклад 6. Нехай η має рівномірний розподіл на $[0,1]$. Покладемо

$$X(t) := \sum_{k\geq 1}\mathbb{1}_{\left\{k+\frac{k^2}{k^2+1}\eta\leq t<k+\eta\right\}},\quad t\geq 0.$$

Як бачимо з формули $\sup_{t\in[k,\,k+1)}(|X(t)|\wedge 1) = \sup_{t\in[k,\,k+1)}X(t) = 1$ м.н., умова (2.15) не виконується. З іншого боку, умова (2.13) виконується внаслідок рівності $\sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}[|X(t)|\wedge 1] = \sup_{t\in[k,\,k+1)}\mathbb{E}[X(t)] = (k^2+1)^{-1}$ для $k\in\mathbb{N}$.

Зауважимо, що відмінність між (2.13) та (2.15) стає більш прозорою, якщо помітити, що умова (2.15) гарантує безпосередню інтегровність за Ріманом X з ймовірністю один і, як наслідок, $\lim_{t\to\infty}X(t)=0$ м.н. Проте, як демонструє наведений щойно приклад, умова (2.13) гарантує лише збіжність $\lim_{t\to\infty}X(t)=0$ за ймовірністю.

На завершення цього підрозділу ми наведемо приклад, в якому показано, що умова безпосередньої інтегровності за Ріманом не може бути послаблена до інтегровності за Лебегом.

Приклад 7. Нехай $X(t) = h(t) := (1 \wedge 1/t^2)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t)$, $t \geq 0$, де $\mathbb{Q}$ є множиною раціональних чисел. Функція $G(t) = \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1] = h(t)$ інтегровна за Лебегом, але не є інтегровною за Ріманом. Нехай розподіл ξ такий, що $\mathbb{P}\{\xi \in \mathbb{Q} \cap (0,1]\} = 1$ та $\mathbb{P}\{\xi = r\} > 0$ для всіх $r \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$, що гарантує, що розподіл ξ неарифметичний. Очевидно, що $Y(t) = 0$ для $t \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. З іншого боку, згідно з теоремою 3

$$Y(t) \overset{\mathrm{d}}{\to} \sum_{k \geq 0} f(S_k^*),$$

коли t прямує до ∞ вздовж раціональних чисел, де $f(t) = 1 \wedge 1/t^2$ при $t \geq 0$. Випадкова величина в правій частині є м.н. додатною.

2.1.3 Доведення теореми 3. Доведення розбито на послідовність лем та базується на використанні теореми про неперервне відображення до збіжності маркованих процесів в лемі 8. Ми позначимо через $M := M_{D(\mathbb{R})}$ простір маркованих точкових процесів на $\mathbb{R}$ з мітками в просторі $D(\mathbb{R})$, а через ρ_M – відповідну метрику, що наділяє $(M_{D(\mathbb{R})}, \rho_m)$ структурою повного сепарабельного метричного простору, див. Додаток B.2.

Лема 8. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний. Тоді має місце слабка збіжність*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(t-S_k, X_{k+1})} \Rightarrow \mathcal{R}^{\mathcal{M}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)}, \quad t \to \infty, \tag{2.17}$$

у просторі (M, ρ_M).

Зауваження 9. Зафіксуємо $u \in \mathbb{R}$. Оператор зсуву $\theta_u : M \to M$, що визначений рівністю $\theta_u(m(A \times B)) = m(\{A + u\} \times B)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{B}(D(\mathbb{R}))$, є неперервним відносно ρ_M для кожного $u \in \mathbb{R}$. Тому, при $t \to \infty$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)} \Leftarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(t-u-S_k, X_{k+1})} &= \theta_u\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(t-S_k, X_{k+1})}\Big) \\ &\Rightarrow \theta_u\Big(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)}\Big) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*-u, X_k)} \end{aligned}$$

у просторі (M, ρ_M), що доводить стаціонарність $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$.

Доведення леми 8. Помітимо, що для кожного $t \geq 0$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(t-S_k, X_{k+1})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(t-S_{\nu(t)-k-1}, X_{\nu(t)-k})}.$$

Згідно з твердженням 204 у додатку достатньо показати, що для всіх $p, q \in \mathbb{N}$

$$\Big((t - S_{\nu(t)+p-1}, X_{\nu(t)+p}), \dots, (t - S_{\nu(t)-q-1}, X_{\nu(t)-q})\Big) \overset{\mathrm{d}}{\to} \Big((S^*_{-p}, X_{-p}), \dots, (S^*_q, X_q)\Big) \quad (2.18)$$

при $t \to \infty$. Нехай $y, z, y_1, \dots, y_{p-1}, z_1, \dots, z_q$ є довільними невід'ємними цілими числами, а $A_{-p}, \dots, A_q$ – довільними множинами в $\mathcal{B}(D(\mathbb{R}))$. Визначимо події

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1(t) := \{t - S_{\nu(t)-1} < z, t - S_{\nu(t)} \geq -y, X_{\nu(t)} \in A_0\},\\
&\mathcal{E}_2(t) := \{\xi_{\nu(t)+1} \leq y_1, X_{\nu(t)+1} \in A_{-1}, \dots, \xi_{\nu(t)+p-1} \leq y_{p-1}, X_{\nu(t)+p-1} \in A_{1-p}\},\\
&\mathcal{E}_3(t) := \{\xi_{\nu(t)-1} \leq z_1, X_{\nu(t)-1} \in A_1, \dots, \xi_{\nu(t)-q} \leq z_q, X_{\nu(t)-q} \in A_q\},\\
&\mathcal{E}_4(t) := \{X_{\nu(t)+p} \in A_{-p}\}.
\end{aligned}$$

Тоді співвідношення (2.18) еквівалентне

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t) \cap \mathcal{E}_2(t) \cap \mathcal{E}_3(t) \cap \mathcal{E}_4(t)\} \;&=\; \mathbb{P}\{S^*_{-1} \geq -y, S^*_0 < z, X_0 \in A_0\}\\
&\times \mathbb{P}\{\xi_{-1} \leq y_1, X_{-1} \in A_{-1}, \dots, \xi_{-p+1} \leq y_{p-1}, X_{-p+1} \in A_{-p+1}\}\\
&\times \mathbb{P}\{\xi_1 \leq z_1, X_1 \in A_1, \dots, \xi_q \leq z_q, X_q \in A_q\} \mathbb{P}\{X_{-p} \in A_{-p}\}\\
&= \mathbb{P}\{S^*_{-1} \geq -y, S^*_0 < z, X_0 \in A_0\} \mathbb{P}\{X \in A_{-p}\}\\
&\times \prod_{i=1}^{p-1} \mathbb{P}\{\xi \leq y_i, X \in A_{-i}\} \prod_{i=1}^{q} \mathbb{P}\{\xi \leq z_i, X \in A_i\}.
\end{aligned}$$

Ймовірність у лівій частині можна замінити на $p(t) := \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t) \cap \mathcal{E}_2(t) \cap \mathcal{E}_3(t) \cap \mathcal{E}_4(t), \nu(t) > q\}$, оскільки $\mathbb{P}\{\nu(t) \leq q\} \to 0$ при $t \to \infty$. За формулою повної ймовірності

$$
\begin{aligned}
p(t) &= \sum_{k\geq q+1} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_2(t)\cap\mathcal{E}_3(t)\cap\mathcal{E}_4(t), \nu(t)=k\} \\
&= \sum_{k\geq q+1} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_2(t)\cap\mathcal{E}_3(t)\cap\mathcal{E}_4(t), S_{k-1}\leq t, S_k>t\} \\
&= \sum_{k\geq q+1} \mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_3(t), S_{k-1}\leq t, S_k>t\} \\
&\qquad\qquad \times\mathbb{P}\{X_{k+p}\in A_{-p}\}\prod_{i=1}^{p-1}\mathbb{P}\{\xi_{k+i}\leq y_i, X_{k+i}\in A_{-i}\}.
\end{aligned}
$$

Залишається показати, що

$$
\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\sum_{k\geq q+1}\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_3(t), S_{k-1}\leq t, S_k>t\} \\
&\qquad = \mathbb{P}\{-S^*_{-1}\leq y, S^*_0<z, X_0\in A_0\}\prod_{i=1}^{q}\mathbb{P}\{\xi\leq z_i, X\in A_i\}. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Для цього запишемо

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_3(t), S_{k-1}\leq t, S_k>t\} \\
&\quad = \mathbb{P}\{t-z<S_{k-1}\leq t, t<S_k\leq t+y, X_k\in A_0, \\
&\qquad \xi_{k-1}\leq z_1, X_{k-1}\in A_1,\dots,\xi_{k-q}\leq z_q, X_{k-q}\in A_q\} \\
&\quad = \int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-z-v<\xi_{k-1}+\dots+\xi_{k-q}\leq t-v, \\
&\qquad t-v<\xi_k+\dots+\xi_{k-q}\leq t+y-v, X_k\in A_0, \xi_{k-1}\leq z_1, \\
&\qquad X_{k-1}\in A_1,\dots,\xi_{k-q}\leq z_q, X_{k-q}\in A_q\}\mathbb{P}\{S_{k-q-1}\in \mathrm{d}v\} \\
&\quad = \int_{[0,\,t]}\mathbb{P}\{t-z-v<\xi_1+\dots+\xi_q\leq t-v, \\
&\qquad t-v<\xi_1+\dots+\xi_q+\hat{\xi}\leq t+y-v, \hat{X}\in A_0, \xi_1\leq z_1, \\
&\qquad X_1\in A_1,\dots,\xi_q\leq z_q, X_q\in A_q\}\mathbb{P}\{S_{k-q-1}\in \mathrm{d}v\}, \\
&\quad =: \int_{[0,\,t]}\hat{p}(t-v)\mathbb{P}\{S_{k-q-1}\in \mathrm{d}v\},
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
\hat{p}(u) := \mathbb{P}\{&u-z<S_q\leq u, u<S_q+\hat{\xi}\leq u+y, \hat{X}\in A_0, \\
&\xi_1\leq z_1, X_1\in A_1,\dots,\xi_q\leq z_q, X_q\in A_q\},
\end{aligned}
$$

а пара $(\hat{X},\hat{\xi})$ має той самий розподіл, що й (X,ξ), та не залежить від всіх інших випадкових величин, що фігурують в останній ймовірності.

Невід'ємна функція $\hat{p}$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$, оскільки вона локально інтегровна за Ріманом та обмежена зверху незростаючою інтегровною функцією $u\mapsto \mathbb{P}\{S_q+\hat{\xi}>u\}$. За ключовою теоремою відновлення

$$\begin{aligned}\sum_{k>q}\mathbb{P}\{\mathcal{E}_1(t)\cap\mathcal{E}_3(t), S_{k-1}\le t, S_k>t\} &= \sum_{k>q}\int_{[0,\,t]}\hat{p}(t-v)\mathbb{P}\{S_{k-q-1}\in \mathrm{d}v\}\\ &\to \frac{1}{\mu}\int_0^\infty \hat{p}(u)\mathrm{d}u,\quad t\to\infty.\end{aligned}$$

Отже, доведення (2.19) звелось до перевірки рівності

$$\mathbb{P}\{-S_{-1}^*\le y, S_0^*<z, X_0\in A_0\}\prod_{i=1}^{q}\mathbb{P}\{\xi\le z_i, X\in A_i\}=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty \hat{p}(u)\mathrm{d}u. \quad (2.20)$$

Покладемо $\mathcal{E}:=\{\xi_1\le z_1, X_1\in A_1,\ldots,\xi_q\le z_q, X_q\in A_q\}$ та перепишемо $\hat{p}(u)$ так:

$$\begin{aligned}\hat{p}(u) &= \mathbb{P}\{u-z\wedge\hat{\xi}<S_q\le u-(\hat{\xi}-y)_+, z\wedge\hat{\xi}\ge(\hat{\xi}-y)_+, \hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}\\ &= \mathbb{P}\{S_q+z\wedge\hat{\xi}>u, z\wedge\hat{\xi}\ge(\hat{\xi}-y)_+, \hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}\\ &- \mathbb{P}\{S_q+(\hat{\xi}-y)_+>u, z\wedge\hat{\xi}\ge(\hat{\xi}-y)_+, \hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}.\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\int_0^\infty\hat{p}(u)\mathrm{d}u &= \frac{1}{\mu}\mathbb{E}\Big[\Big((S_q+z\wedge\hat{\xi})\mathbb{1}_{\{z\wedge\hat{\xi}\ge(\hat{\xi}-y)_+,\hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}}\\ &\qquad -(S_q+(\hat{\xi}-y)_+)\mathbb{1}_{\{z\wedge\hat{\xi}\ge(\hat{\xi}-y)_+,\hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}}\Big)\Big]\\ &=\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\Big[\Big(z\wedge\hat{\xi}-(\hat{\xi}-y)_+\Big)_+\mathbb{1}_{\{\hat{X}\in A_0,\mathcal{E}\}}\Big]\\ &=\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\Big[\Big(z\wedge\hat{\xi}-(\hat{\xi}-y)_+\Big)_+\mathbb{1}_{\{\hat{X}\in A_0\}}\Big]\mathbb{P}\{\mathcal{E}\}\\ &=\frac{1}{\mu}\mathbb{E}\Big[\Big(z\wedge\hat{\xi}-(\hat{\xi}-y)_+\Big)_+\mathbb{1}_{\{\hat{X}\in A_0\}}\Big]\prod_{i=1}^{q}\mathbb{P}\{\xi\le z_i, X\in A_i\},\end{aligned}$$

де ми використали незалежність $\mathcal{E}$ та $(\hat{X},\hat{\xi})$. Застосовуючи формулу (2.2) та зображення вектору $(-S^*_{-1}, S^*_0,)$ зі стор. 80, отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\mu\mathbb{P}\{-S^*_{-1} \le y, S^*_0 < z, X_0 \in A_0\} = \mu\mathbb{P}\{(1-U)\xi_0 \le y, U\xi_0 < z, X_0 \in A_0\} \\
&= \mu\int_0^1 \mathbb{P}\{\xi_0 \le y(1-s)^{-1}, \xi_0 < zs^{-1}, X_0 \in A_0\}\mathrm{d}s \\
&\overset{(2.2)}{=} \int_0^1 \int_{[0,\, y(1-s)^{-1}\wedge zs^{-1}]} t\mathbb{P}\{\hat{\xi} \in \mathrm{d}t, \hat{X} \in A_0\}\mathrm{d}s \\
&= \int_{[0,\,\infty)} \Big(\int_{(1-y/t)_+}^{z/t\wedge 1} t\mathrm{d}s\Big)\mathbb{P}\{\hat{\xi} \in \mathrm{d}t, \hat{X} \in A_0\} \\
&= \int_{[0,\,\infty)} \Big(z\wedge t - (t-y)_+\Big)_+\mathbb{P}\{\hat{\xi} \in \mathrm{d}t, \hat{X} \in A_0\} \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(z\wedge\hat{\xi} - (\hat{\xi}-y)_+\Big)_+ \mathbb{1}_{\{\hat{X}\in A_0\}}\Big],
\end{aligned}
$$

звідки випливає (2.20). Лема 8 доведена. □

Зауваження 10. Для незалежних X та ξ твердження леми 8 еквівалентне збіжності звичайних точкових процесів на $\mathbb{R}$:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}0} \delta_{t-S_k} \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S^*_k}, \quad t\to\infty.$$

Доведення такої збіжності з використанням техніки каплінгу можна знайти в [136] та [139], див. теорему 2.1 та лему 5.1 відповідно.

Для фіксованих $c>0$, $l\in\mathbb{N}$ та $(u_1,\ldots,u_l)\in\mathbb{R}^l$ визначимо відображення $\phi_c^{(l)}: M\to\mathbb{R}^l$ рівністю

$$\phi_c^{(l)}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{(t_n, f_n(\cdot))}\Big) := \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(t_n+u_j)\mathbb{1}_{\{|t_n|\le c\}}\Big)_{j=1,\ldots,l},$$

а відображення $\phi_c: M\to D(\mathbb{R})$ рівністю

$$\phi_c\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{(t_n, f_n(\cdot))}\Big) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(t_n+\cdot)\mathbb{1}_{\{|t_n|\le c\}}.$$

Для $f\in D(\mathbb{R})$ позначимо через $\mathrm{Disc}(f)$ множину точок розриву f на $\mathbb{R}$. Обидва відображення $\phi_c^{(l)}$ та ϕ_c є вимірними як скінченні суми вимірних відображень. Їх неперервність доводиться у лемі 11.

Лема 11. *Відображення* $\phi_c^{(l)}$ *є неперервним у точках* $m=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta_{(t_n, f_n(\cdot))}$ *таких, що* $u_1,\ldots,u_l$ *є точками неперервності* $f_k(t_k+\cdot)$ *для всіх* $k\in\mathbb{Z}$*, а маркований точковий процес* m *є простим та задовольняє* $m(\{-c,c\}\times D(\mathbb{R}))=0$.

Відображення ϕ_c *є неперервним в усіх точках* $m = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{(t_n, f_n(\cdot))}$ *таких, що* $\mathrm{Disc}(f_k(t_k+\cdot)) \cap \mathrm{Disc}(f_j(t_j+\cdot)) = \varnothing$ *при* $k \neq j$*, а маркований точковий процес* m *є простим та задовольняє* $m(\{-c, c\} \times D(\mathbb{R})) = 0$.

Доведення. Припустимо, що

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{(t_j^{(n)}, f_j^{(n)})} =: m_n \to m =: \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{(t_j, f_j)}, \quad n \to \infty \tag{2.21}$$

у просторі (M, ρ_M), де $m(\{-c, c\} \times D(\mathbb{R})) = 0$ для деякого $c > 0$. Нехай $p, q \in \mathbb{N}_0$ є такими, що

$$t_{-p-1} < -c < t_{-p}, \qquad t_q < c < t_{q+1}. \tag{2.22}$$

Зі збіжності (2.21), використовуючи твердження 204, робимо висновок, що для $-p \leq k \leq q$

$$(t_k^{(n)}, f_k^{(n)}) \to (t_k, f_k), \quad n \to \infty \tag{2.23}$$

у просторі $\mathbb{R} \times D(\mathbb{R})$, та що для великих n

$$t_{-p-1}^{(n)} < -c < t_{-p}^{(n)}, \qquad t_q^{(n)} < c < t_{q+1}^{(n)}. \tag{2.24}$$

Згідно з лемою 172 збіжність (2.23) дає

$$f_k^{(n)}(t_k^{(n)} + \cdot) \to f_k(t_k + \cdot), \quad n \to \infty \tag{2.25}$$

на $D(\mathbb{R})$.

Тепер припустимо, що $u_1, \ldots, u_l$ є точками неперервності $f_k(t_k + \cdot)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Тоді з (2.25) випливає, що

$$\big(f_k^{(n)}(t_k^{(n)} + u_1), \ldots, f_k^{(n)}(t_k^{(n)} + u_l)\big) \;\to\; \big(f_k(t_k + u_1), \ldots, f_k(t_k + u_l)\big), \;\; n \to \infty$$

для $-p \leq k \leq q$. Сумуючи ці співвідноешнння по $k = -p, \ldots, q$, отримуємо неперервність $\phi_c^{(l)}$ з огляду на (2.22) та (2.24).

Згідно з теоремою 4.1 в [267] додавання на $D(\mathbb{R}) \times D(\mathbb{R})$ є неперервним в точках (x, y), для яких $\mathrm{Disc}(x) \cap \mathrm{Disc}(y) = \varnothing$. Оскільки це твердження поширюється на довільне скінченне число доданків, то зі співвідношення (2.25) випливає

$$\phi_c(m_n) = \sum_{k=-p}^{q} f_k^{(n)}(t_k^{(n)} + \cdot) \;\to\; \sum_{k=-p}^{q} f_k(t_k + \cdot) = \phi_c(m), \;\; n \to \infty$$

у просторі $D(\mathbb{R})$ кожен раз, коли $\mathrm{Disc}(f_k(t_k+\cdot))\cap\mathrm{Disc}(f_j(t_j+\cdot))=\varnothing$ для $k\neq j$. Лема 11 доведена. $\square$

Наступна лема пов'язує інтегровність X з властивостями стаціонарного процесу з імміграцією Y^*.

Лема 12. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi<\infty$, та що розподіл ξ неарифметичний.*

(i) Якщо функція $G(t)=\mathbb{E}[|X(t)|\wedge 1]$ є інтегровною за Лебегом на $[0,\infty)$, то $|Y^*(u)|<\infty$ м.н. для кожного $u\in\mathbb{R}$.

(ii) Якщо для деякого (для всіх) $\varepsilon>0$ функція $H_\varepsilon(t)=\mathbb{E}[\sup_{u\in[t,t+\varepsilon]}|X(u)|\wedge 1]$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$, то траєкторії $Y^*(u)$ лежать в $D(\mathbb{R})$ м.н.

Доведення (i). Покладемо $\widehat{G}(t):=\mathbb{E}[|X(\xi+t)|\wedge 1]$ та помітимо, що інтегровність за Лебегом G на $[0,\infty)$ еквівалентна інтегровності за Лебегом $\widehat{G}$ на $\mathbb{R}$. Зафіксуємо $u\in\mathbb{R}$ та покладемо $\mathcal{Z}_k:=X_k(u+S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\geq -u\}}$, $k\in\mathbb{N}$. Маємо

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[|\mathcal{Z}_k|\wedge 1] &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[(|X_k(\xi_k+u+S_{k-1}^*)|\wedge 1)\mathbb{1}_{\{S_k^*\geq -u\}}]\\ &= \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[(|X_k(\xi_k+u+S_{k-1}^*)|\wedge 1)\mathbb{1}_{\{S_{k-1}^*\geq -u\}}]\\ &+ \sum_{k\geq 1}\mathbb{E}[(|X_k(\xi_k+u+S_{k-1}^*)|\wedge 1)\mathbb{1}_{\{S_k^*\geq -u>S_{k-1}^*\}}]\\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}[\widehat{G}(u+S_{k-1}^*)\mathbb{1}_{\{S_{k-1}^*\geq -u\}}]+\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{S_k^*\geq -u>S_{k-1}^*\}\\ &= \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}}\widehat{G}(s)\mathrm{d}s+\mathbb{P}\{-u>S_0^*\},\end{aligned}$$

використавши (2.3) в останній рівності та незалежність X_k й S_{k-1}^* для $k\in\mathbb{N}$. Отже, такі два ряди

$$\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{|\mathcal{Z}_k|\geq 1\}\quad\text{та}\quad\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}(|\mathcal{Z}_k|\mathbb{1}_{\{|\mathcal{Z}_k|\leq 1\}})$$

збігаються. Збіжність першого ряду та лема Бореля-Кантеллі гарантують, що $|\mathcal{Z}_k|\geq 1$ лише для скінченної кількості k м.н. Збіжність другого ряду дає $\sum_{k\in\mathbb{N}}|\mathcal{Z}_k|\mathbb{1}_{\{|\mathcal{Z}_k|\leq 1\}}<\infty$ м.н. Отже, $\sum_{k\in\mathbb{N}}|\mathcal{Z}_k|<\infty$ м.н., та $|Y^*(u)|<\infty$

м.н., оскільки $\sum_{k\le 0}\mathcal{Z}_k$ містить лише скінченне число доданків для кожного фіксованого $u\in\mathbb{R}$.

Доведення (ii). Ми доведемо, що безпосередня інтегровність за Ріманом функції H_ε еквівалентна безпосередній інтегровності за Ріманом функції $\widehat{H}_\varepsilon(t) := \mathbb{E}[\sup_{u\in[t,t+\varepsilon]}|X(\xi+u)|\wedge 1]$. Оскільки траєкторії $X(\xi+\cdot)$ з ймовірністю один лежать в $D(\mathbb{R})$, то, міркуючи як на початку підрозділу 2.1.2, робимо висновок, що безпосередня інтегровність за Ріманом $\widehat{H}_\varepsilon$ еквівалентна

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[k,k+1]}(|X(\xi+t)|\wedge 1)\Big]<\infty. \tag{2.26}$$

Маємо

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[k,k+1]}(|X(\xi+t)|\wedge 1)\Big] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[\xi+k,\xi+k+1]}(|X(t)|\wedge 1)\Big]\\ &\le \sum_{k\in\mathbb{Z}}\mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[\lfloor\xi\rfloor+k,\lfloor\xi\rfloor+k+2]}(|X(t)|\wedge 1)\Big] = \mathbb{E}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\Big[\sup_{t\in[k,k+2]}(|X(t)|\wedge 1)\Big]\\ &= \mathbb{E}\sum_{k\ge 0}\Big[\sup_{t\in[k,k+2]}(|X(t)|\wedge 1)\Big].\end{aligned}$$

Звідси робимо висновок, що (2.26) випливає з

$$\mathbb{E}\sum_{k\ge 0}\Big[\sup_{t\in[k,k+2]}(|X(t)|\wedge 1)\Big]<\infty,$$

що, в свою чергу, еквівалентне безпосередній інтегровності за Ріманом H_ε, див. (2.14) та (2.15). Отже, (2.26) виконується.

Для того щоб показати, що траєкторії Y^* лежать в $D(\mathbb{R})$ з ймовірністю один, використаємо факт, що локально рівномірні границі послідовностей функцій з $D(\mathbb{R})$ лежать в $D(\mathbb{R})$. Отже, достатньо перевірити, що ряд $Y^*(u)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}X_k(u+S_k^*)$ збігається локально рівномірно м.н., що випливатиме з м.н. збіжності ряду

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{u\in[a,b]}|X_k(u+S_k^*)| \tag{2.27}$$

для довільних фіксованих $a<b$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Міркуючи так, як в доведенні частини (i) вище, бачимо, що достатньо показати

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sup_{u\in[a,b]}(|X_k(\xi_k+u+S_{k-1}^*)|\wedge 1)\Big]<\infty.$$

Враховуючи незалежність X_k та S^*_{k-1} при $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{u\in[a,b]} (|X_k(\xi_k + u + S^*_{k-1})| \wedge 1)\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a,b]} (|X(\xi + u + S^*_{k-1})| \wedge 1) \,\Big|\, S^*_{k-1}\Big]\Big] \\
&\le \mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a,b]} (|X(\xi + u + S^*_{k-1})| \wedge 1) \,\Big|\, S^*_{k-1}\Big]\Big] \\
&= \frac{1}{\mu}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a,b]} (|X(\xi + u + t)| \wedge 1)\Big]\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{1}{\mu}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[k,\,k+1)} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a+t,\,b+t]} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big] \\
&\le \frac{b-a+1}{\mu}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[k,\,k+1)} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big],
\end{aligned}$$

де остання рівність є наслідком (2.3), а остання нерівність випливає з оцінок

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[k,\,k+1)} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a+t,\,b+t]} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big] \\
&\qquad \le \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a+k,\,b+k+1)} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big] \\
&\qquad \le \sum_{j=0}^{b-a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[a+k+j,\,a+k+j+1)} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big] \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{b-a}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[k,\,k+1)} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big] \\
&\qquad = (b-a+1)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[k,\,k+1)} |X(\xi + u)| \wedge 1\Big]. \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Останній ряд збігається з огляду на (2.26). Залишається помітити, що

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\le 0} \sup_{u\in[a,b]} (|X_k(\xi_k + u + S^*_{k-1})| \wedge 1)\Big] \le \sum_{k\le 0} \mathbb{P}\{b + S^*_k \ge 0\} < \infty.$$

Таким чином, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(u + S^*_k)$ м.н. збігається рівномірно на $[a,b]$ для довільних $a < b$, а тому його траєкторії лежать в $D(\mathbb{R})$ м.н. □

Лема 13. *Якщо виконується умова* (2.9)*, то*

$$\mathbb{P}\{\mathrm{Disc}(X_i(S^*_i + \cdot)) \cap \mathrm{Disc}(X_j(S^*_j + \cdot)) \ne \varnothing\} = 0, \quad i,j \in \mathbb{Z}, \quad i > j.$$

Доведення. Визначимо випадкові множини

$$D_\xi^{(i)} := \mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot)),\ D^{(j)} := \mathrm{Disc}(X_j(\cdot)),\ D^{(i,j)} := D_\xi^{(i)} \ominus D^{(j)}, \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

та помітимо, що для $t \in \mathbb{R}$ події $\{t \in D_\xi^{(i)}\}$, $\{t \in D^{(j)}\}$ та $\{t \in D^{(i,j)}\}$ є вимірними. Покладемо

$$\mathcal{D}_\xi^{(i)} := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{t \in D_\xi^{(i)}\} > 0\}, \quad \mathcal{D}^{(j)} := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{t \in D^{(j)}\} > 0\},$$
$$\mathcal{D}^{(i,j)} := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}\{t \in D^{(i,j)}\} > 0\}, \quad i, j \in \mathbb{Z}.$$

За означенням

$$\mathbb{P}\{t \in D_\xi^{(i)} \backslash \mathcal{D}_i\} = \mathbb{P}\{t \in D^{(j)} \backslash \mathcal{D}_j\} = \mathbb{P}\{t \in D^{(i,j)} \backslash \mathcal{D}^{(i,j)}\} = 0, \quad i, j \in \mathbb{Z} \tag{2.29}$$

для кожного фіксованого $t \in \mathbb{R}$. Для $i > j$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\mathrm{Disc}(X_i(S_i^* + \cdot)) \cap \mathrm{Disc}(X_j(S_j^* + \cdot)) \neq \varnothing\}\\
&= \mathbb{P}\{\text{існує } u = u(\omega) \text{ таке, що } S_i^* + u \in \mathrm{Disc}(X_i(\cdot)), S_j^* + u \in \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}\\
&\leq \mathbb{P}\{S_i^* - S_j^* \in \mathrm{Disc}(X_i(\cdot)) \ominus \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}\\
&= \mathbb{P}\{\xi_{j+1} + \cdots + \xi_i \in \mathrm{Disc}(X_i(\cdot)) \ominus \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}\\
&= \mathbb{P}\{\xi_{j+1} + \cdots + \xi_{i-1} \in \mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot) \ominus \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}\\
&= \mathbb{P}\{\xi_{j+1} + \cdots + \xi_{i-1} \in D^{(i,j)}\}\\
&\leq \mathbb{P}\{\xi_{j+1} + \cdots + \xi_{i-1} \in \mathcal{D}^{(i,j)}\} + \mathbb{P}\{\xi_{j+1} + \cdots + \xi_{i-1} \in D^{(i,j)} \setminus \mathcal{D}^{(i,j)}\}.
\end{aligned}$$

Оскільки $\xi_{i-1}, \ldots, \xi_{j+1}$ не залежать від $D^{(i,j)}$, другий член дорівнює нулю згідно з (2.29).

Виберемо $t_0 \in \mathcal{D}^{(i,j)}$. За означенням

$$\begin{aligned}
0 &< \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot)) \ominus \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}\\
&\leq \mathbb{1}_{\{t_0 \in \mathcal{D}_\xi^{(i)} \ominus \mathcal{D}^{(j)}\}} + \mathbb{P}\{t_0 \in (\mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot)) \setminus \mathcal{D}_\xi^{(i)}) \ominus (\mathrm{Disc}(X_j(\cdot)) \setminus \mathcal{D}^{(j)})\}\\
&+ \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot)) \ominus (\mathrm{Disc}(X_j(\cdot)) \setminus \mathcal{D}^{(j)})\}\\
&+ \mathbb{P}\{t_0 \in (\mathrm{Disc}(X_i(\xi_i + \cdot)) \setminus \mathcal{D}_\xi^{(i)}) \ominus \mathrm{Disc}(X_j(\cdot))\}.
\end{aligned}$$

Останні три ймовірності дорівнюють нулю згідно з першими двома рівностями в (2.29), незалежністю $X_i(\xi_i + \cdot)$ та $X_j(\cdot)$ та тим фактом, що обидві множини

$D^{(j)}$ та $D^{(i)}_\xi$ є м.н. не більш, ніж зліченними. Отже, $0 < \mathbb{1}_{\{t_0 \in \mathcal{D}^{(i)}_\xi \ominus \mathcal{D}^{(j)}\}}$, звідки випливає, що $t_0 \in \mathcal{D}^{(i)}_\xi \ominus \mathcal{D}^{(j)}$, а тому

$$\mathcal{D}^{(i,j)} \subset \mathcal{D}^{(i)}_\xi \ominus \mathcal{D}^{(j)}.$$

Таким чином, ми показали, що

$$\mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \mathcal{D}^{(i,j)}\} \leq \mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \mathcal{D}^{(i)}_\xi \ominus \mathcal{D}^{(j)}\}.$$

Якщо $i, j \neq 0$, то $\mathcal{D}^{(i)}_\xi = \mathcal{D}_\xi$ та $\mathcal{D}^{(j)} = \mathcal{D}$, див. (2.7). Тому ймовірність в правій частині останньої центрованої формули дорівнює $\mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \Delta_X\}$. Випадки, коли $i = 0$ або $j = 0$ потребують окремого вивчення, оскільки спільний розподіл (X_0, ξ_0) відрізняється від спільного розподілу (X, ξ). Розглянемо випадок $i = 0$ та покажемо, що $\mathcal{D}^{(0)}_\xi \subset \mathcal{D}_\xi$. Інші випадки можуть бути перевірені аналогічно. Припустимо, що $t_0 \notin \mathcal{D}_\xi$, та розглянемо множину $A_{t_0} := \{f(\cdot) \in D(\mathbb{R}) : f(t_0) \neq f(t_0-)\}$. Використовуючи (2.2), маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{X_0(\xi_0 + \cdot) \in A_{t_0}\} &= \int_0^\infty \mathbb{P}\{X_0(\cdot) \in A_{t_0} \ominus \{y\}, \xi_0 \in \mathrm{d}y\} \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty y\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}y, X(\cdot) \in A_{t_0} \ominus \{y\}\} \\ &= \frac{1}{\mu}\int_0^\infty y\mathbb{P}\{\xi \in \mathrm{d}y, X(\xi + \cdot) \in A_{t_0}\}. \end{aligned}$$

Ймовірність під знаком інтеграла дорівнює нулю тотожно, оскільки $t_0 \notin \mathcal{D}_\xi$. Тому $\mathbb{P}\{X_0(\xi_0 + \cdot) \in A_{t_0}\} = 0$, що еквівалентне $t_0 \notin \mathcal{D}^{(0)}_\xi$. Це демонструє, що $\mathcal{D}^{(0)}_\xi \subset \mathcal{D}_\xi$. З тих же міркувань $\mathcal{D}^{(0)} \subset \mathcal{D}$, а тому

$$\mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \mathcal{D}^{(i)}_\xi \ominus \mathcal{D}^{(j)}\} \leq \mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \mathcal{D}_\xi \ominus \mathcal{D}\}$$

у випадку $i = 0$ або $j = 0$. Поєднуючи наведені факти, отримуємо

$$\mathbb{P}\{\mathrm{Disc}(X_i(S^*_i + \cdot)) \cap \mathrm{Disc}(X_j(S^*_j + \cdot)) \neq \varnothing\} \leq \mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \Delta_X\}.$$

Якщо $j \geq 0$ або $i \leq 0$, то $\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} S_{i-j-1}$, тому $\mathbb{P}\{\xi_{i-1} + \cdots + \xi_{j+1} \in \Delta_X\} = 0$ згідно з (2.9). Якщо $j < 0 < i$, то ця рівність також виконується, оскільки носій дискретної компоненти ξ_0 такий же, як у ξ, внаслідок (2.2). Лема 13 доведена. $\square$

Маючи в арсеналі вищенаведені леми, можемо перейти до доведення основної теореми 3.

Доведення збіжності (2.10). Ми скористаємось лемою 11. Оскільки розподіл S_j^* є абсолютно неперервним для кожного $j \in \mathbb{Z}$, то маркований точковий процес $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}$ є простим, та $\mathcal{R}^{\mathcal{M}}(\{-c, c\} \times D(\mathbb{R})) = 0$ м.н. для кожного $c > 0$. Згідно з лемою 11, враховуючи лему 13, відображення ϕ_c є м.н. неперервним в $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)}$, а, отже, зі збіжності (2.17) випливає

$$\begin{aligned} Y_c(t, \cdot) \ &:= \ \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{k+1}(t - S_k + \cdot)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|\le c\}} = \phi_c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(t-S_k, X_{k+1})}\Big) \\ &\Rightarrow \ \phi_c\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{(S_k^*, X_k)}\Big) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} X_k(S_k^* + \cdot)\mathbb{1}_{\{|S_k^*|\le c\}} =: Y_c^*(\cdot) \end{aligned} \tag{2.30}$$

у просторі $D(\mathbb{R})$.

Згідно з твердженням 203 для доведення (2.10) достатньо перевірити, що

$$Y(t+u) \Rightarrow Y^*(u), \quad t \to \infty \tag{2.31}$$

у просторі $D[a, b]$ з J_1-топологією для довільних a та b, $a < b$, в яких процес Y^* є неперервним м.н. Для цього помітимо, що з (2.30) випливає

$$Y_c(t, \cdot) \Rightarrow Y_c^*(\cdot), \quad t \to \infty \tag{2.32}$$

у просторі $D[a, b]$ з J_1-топологією для довільних a та b, $a < b$, в яких Y_c^* є неперервним м.н.

З доведення леми 12 ми знаємо, що ряд, що визначає $Y^*(u)$, збігається локально рівномірно по $u \in \mathbb{R}$. Тому для довільного $t_0 \in \mathbb{R}$ маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(Y^*(\cdot))\} &= \mathbb{P}\{\text{існує } k \in \mathbb{Z} \text{ таке, що } t_0 \in \mathrm{Disc}(X_k(S_k^* + \cdot))\} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(X_k(S_k^* + \cdot))\} \\ &\ge \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(X_k(S_k^* + \cdot)), |S_k^*| \le c\} \\ &= \mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(Y_c^*(\cdot))\}, \end{aligned}$$

де друга та остання рівності випливають з леми 13. Процес $Y^*(\cdot)$ є стаціонарним та м.н. має траєкторії в $D(\mathbb{R})$, тому $\mathbb{P}\{t_0 \in \mathrm{Disc}(Y_c^*(\cdot))\} = \mathbb{P}\{t_0 \in$

$\mathrm{Disc}(Y^*(\cdot))\} = 0$, див., наприклад наслідок A2.3 в [19], звідки отримуємо, що (2.32) виконується для всіх $a < b$.

Співвідношення (2.31) випливатиме з теореми 4.2 в [39], якщо ми зможемо показати, що

$$Y_c^* \Rightarrow Y^*, \quad c \to \infty \tag{2.33}$$

у просторі $D[a,b]$ з J_1-топологією, та що[3]

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathbb{P}\Big\{ d^{a,b}(Y_c(t,\cdot), Y(t+\cdot)) > \varepsilon \Big\} = 0 \tag{2.34}$$

для всіх $\varepsilon > 0$ та довільних $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Оскільки J_1-метрика $d^{a,b}$ на $D[a,b]$ домінується рівномірною метрикою, то умова (2.34) випливатиме з умови

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[a,b]} \Big| \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} + \sum_{k<0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|\leq c\}} \Big| > \varepsilon \Big\} = 0,$$

що виконується для всіх $\varepsilon > 0$ та довільних $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Останнє співвідношення, в свою чергу, є наслідком

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[a,b]} \Big| \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} \Big| > \varepsilon \Big\} = 0 \tag{2.35}$$

та

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[a,b]} \Big| \sum_{k<0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|\leq c\}} \Big| > \varepsilon \Big\} = 0. \tag{2.36}$$

Для доведення (2.35) покладемо $M_k(t) := \sup_{u\in[a,b]} |X_k(u+t)|$, $k \in \mathbb{Z}$ та

[3]Означення метрики $d^{a,b}$ наведено в додатку B.1.

$K(t) := \mathbb{E}[M_1(t) \wedge 1]$ і запишемо

$$\mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[a,\,b]} \Big| \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} \Big| > \varepsilon \Big\}$$
$$\leq \mathbb{P}\Big\{ \sum_{k\geq 0} M_{k+1}(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} > \varepsilon \Big\}$$
$$\leq \mathbb{P}\Big\{ \sum_{k\geq 0} M_{k+1}(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c,\, M_{k+1}(t-S_k)\leq 1\}} > \varepsilon/2 \Big\}$$
$$+\,\mathbb{P}\Big\{ \sum_{k\geq 0} M_{k+1}(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c,\, M_{k+1}(t-S_k)> 1\}} > \varepsilon/2 \Big\}$$
$$\leq \frac{2}{\varepsilon}\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 0} K(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} \Big] + \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\big\{ |t-S_k|>c,\ M_{k+1}(t-S_k)>1 \big\}$$
$$\leq \Big(\frac{2}{\varepsilon}+1\Big)\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 0} K(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} \Big],$$

де передостання нерівність випливає з нерівності Маркова. Аналогічно до формули (2.28) маємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{t\in[k,\,k+1)} K(t) \ < \ \infty.$$

Разом з локальною інтегровністю за Ріманом K це забезпечує безпосередню інтегровність за Ріманом K на $\mathbb{R}$, а тому

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\Big[\sum_{k\geq 0} K(t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} \Big] = \mu^{-1} \int_{\{|t|>c\}} K(t)\,\mathrm{d}t$$

за ключовою теоремою відновлення. Останній вираз збігається до нуля при $c\to\infty$.

Співвідношення (2.36) є тривіальним, оскільки

$$\sum_{k<0} X_{k+1}(u+t-S_k)\mathbb{1}_{\{|t-S_k|\leq c\}} = 0 \tag{2.37}$$

при $t>c>0$.

Для перевірки (2.33) ми доведемо більш сильне твердження

$$\sup_{u\in[a,b]} |Y^*_c(u)-Y^*(u)| \to 0, \quad c\to\infty \tag{2.38}$$

м.н. для довільних фіксованих a, b. Дійсно,

$$\sup_{u\in[a,b]} |Y^*_c(u)-Y^*(u)| \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{u\in[a,b]} |X_k(u+S^*_k)|\mathbb{1}_{\{|S^*_k|>c\}}.$$

Застосовуючи теорему про монотонну збіжність, робимо висновок, що права частина збігається до нуля при $c \to \infty$ згідно зі збіжністю ряду (2.27) м.н. $\square$

Доведення збіжності (2.8). Зафіксуємо $l \in \mathbb{N}$ та набори дійсних чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ і $u_1, \ldots, u_l$. Згідно з лемою 11 для довільного $c > 0$ відображення $\phi_c^{(l)}$ є неперервним в точці $\big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}, (X_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ м.н. Застосовуючи теорему про неперервне відображення до збіжності (8) двічі (спочатку до відображення $\phi_c^{(l)}$, а потім до відображення $(x_1, \ldots, x_l) \mapsto \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_l x_l$), маємо

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i Y_c(t, u_i) \overset{\mathrm{d}}{\to} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i Y_c^*(u_i), \quad t \to \infty.$$

Збіжність (2.8) буде доведена, якщо ми покажемо, що

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i Y_c^*(u_i) \overset{\mathrm{d}}{\to} \sum_{i=1}^{l} \alpha_i Y^*(u_i), \quad c \to \infty \tag{2.39}$$

та

$$\lim_{c\to\infty} \overline{\lim_{t\to\infty}} \mathbb{P}\Big\{ \Big| \sum_{i=1}^{l} \Big(\alpha_i \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u_i + t - S_k) \mathbb{1}_{\{|t-S_k|>c\}} + \sum_{k<0} X_{k+1}(u_i + t - S_k) \mathbb{1}_{\{|t-S_k|\leq c\}} \Big) \Big| > \varepsilon \Big\} = 0 \tag{2.40}$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Що стосується (2.39), то виконується навіть сильніше твердження $Y_c^*(u) \to Y^*(u)$ при $c \to \infty$ м.н. для всіх $u \in \mathbb{R}$. Це можна перевірити так само, як формулу (2.38), використавши те, що

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k\in\mathbb{Z}} |X_k(u + S_k^*)| \wedge 1 \Big] < \infty,$$

див. лему 12(i). Співвідношення (2.40) перевіряється так само, як (2.35), але з використанням безпосередньої інтегровності за Ріманом функції $t \mapsto G(t)$. Деталі можна знайти на с. 1296 в [139]. Доведення теореми 3 завершено. $\square$

2.2 Збіжність з центруванням та без нормування

2.2.1 Основний результат та обговорення. У випадку, коли функція $t \mapsto \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ неінтегровна на $[0, \infty)$, але все ще збігається до нуля досить швидко, може мати місце слабка збіжність процесів $(Y(u+t)-b(u+t))_{u\in\mathbb{R}}$ для деякого підхожого центрування $b(t)$, що задовольняє $\lim_{t\to\infty} b(t) = \infty$. Основна теорема цього підрозділу дає одновимірний результат для процесів дробового ефекту, тобто випадкових процесів з імміграцією з $X = h$ м.н. Питання про збіжність скінченновимірних розподілів, а також функціональна гранична теорема залишаються відкритими.

Припустимо, що $\mu < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний. Нехай $(S_k^*)_{k\ge 0}$ є випадковим блуканням з затримкою S_0^*, що було визначене на стор. 80. Покладемо

$$Y_\circ^* \;:=\; \lim_{t\to\infty}\bigg(\sum_{k\ge 0} h(S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y\bigg), \tag{2.41}$$

де тип граничного переходу визначається окремо у кожній з ситуацій теореми 14.

Теорема 14. *Припустимо, що розподіл ξ неарифметичний. Нехай $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є локально обмеженою, майже скрізь неперервною, з деякого місця незростаючою та неінтегровною на $[0,\infty)$ функцією.*

(A1) Припустимо, що $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty$, та що

$$\int_0^\infty h^2(y)\mathrm{d}y \;<\; \infty. \tag{2.42}$$

Тоді

$$Y_\circ(t) := Y(t) - \mu^{-1}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y \xrightarrow{\mathrm{d}} Y_\circ^*, \quad t\to\infty, \tag{2.43}$$

де в.в. $Y_\circ^*$ визначається рівністю (2.41) *як границя в L_2. Співвідношення* (2.43) *також виконується, якщо замінити $\mu^{-1}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y$ на $\mathbb{E}[Y(t)]$.*

До кінця формулювання теореми припускаємо, що h є двічі диференційовною з невід'ємною другою похідною h'' для всіх досить великих значень аргументу.

(A2) Припустимо, що $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ для деякого $1 < r < 2$. Якщо існує $a > 0$ таке, що $h(y) > 0$ при $y \ge a$,

$$\int_a^\infty h^r(y)\mathrm{d}y < \infty, \tag{2.44}$$

та[4]

$$h''(t) = O(t^{-2-1/r}), \quad t \to \infty, \tag{2.45}$$

то має місце збіжність (2.43)*, при цьому в.в.* $Y_\circ^*$ *визначається формулою* (2.41) *як границя м.н.*

(A3) Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi > x\} \sim x^{-\alpha}\ell(x)$ *при* $x \to \infty$ *для деякого* $1 < \alpha < 2$ *та деякої* ℓ*, що повільно змінюється на нескінченності. Якщо знайдеться* $a > 0$ *таке, що* $h(y) > 0$ *при* $y \geq a$*,*

$$\int_a^\infty h^\alpha(y)\ell(1/h(y))\mathrm{d}y \ < \ \infty \tag{2.46}$$

та

$$h''(t) = O(t^{-2}/c(t)), \quad t \to \infty, \tag{2.47}$$

де $c(t)$ *є довільною додатною функцією такою, що*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t\ell(c(t))}{c^\alpha(t)} = 1, \tag{2.48}$$

то має місце збіжність (2.43)*, при цьому в.в.* $Y_\circ^*$ *визначається формулою* (2.41) *як границя за ймовірністю.*

Зауваження 15. У випадку (A3) розподіл в.в. ξ належить області притягання α-стійкого розподілу, див. підрозділ 2.3.4.

Зауваження 16. У випадках (A2) та (A3) теореми 14 окрім припущень на розподіл ξ, ми накладаємо також певні обмеження на гладкість та інтегровність h. Вимоги на гладкість виглядають надлишковими, проте є необхідним інгредієнтом нашого доведення, яке базується на ідеях роботи [163]. Ми переконані, що в кожній з ситуацій (A1)–(A3) при заданій умові на розподіл ξ відповідна умова інтегровності h є близькою до необхідної і достатньої. Однак, ми не стверджуємо, що умови гладкості дійсно необхідні. Для порівняння наведемо такий факт. Не вимагаючи від h нічого, окрім основних припущень теореми (локальна обмеженість, неперервність майже скрізь, монотонність з деякого

[4]Якщо h'' є монотонною для великих значень аргументу, то (2.45) та (2.47) є наслідками (2.44) та (2.46) відповідно.

місця та неінтегровність), можна довести, що співвідношення (2.43) виконується за більш сильного припущення інтегровності:

$$\mathbb{E}\xi^r \;<\; \infty \quad \text{та} \quad \int_{[b,\,\infty)} y^{1/r}\,\mathrm{d}(-h(y)) \;<\; \infty$$

для деякого $1 < r < 2$ або

$$\mathbb{P}\{\xi > x\} \;\sim\; x^{-\alpha}\ell(x), \quad x \to \infty \quad \text{та} \quad \int_{[b,\,\infty)} c(y)\mathrm{d}(-h(y)) \;<\; \infty$$

для деякого $1 < \alpha < 2$ та деякої ℓ, що повільно змінюється на нескінченності, де $b \geq 0$ вибрано так, що h не зростає на $[b, \infty)$. Не вдаючись в деталі, скажемо, що умови $\int_{[b,\,\infty)} y^{1/r}\mathrm{d}(-h(y)) < \infty$ та $\int_{[b,\,\infty)} c(y)\mathrm{d}(-h(y)) < \infty$ є достатніми для м.н. *абсолютної* збіжності невласного інтеграла $\int_{[b,\,\infty)}(\nu^*(y) - y/\mu)\mathrm{d}(-h(y))$, в той час як (2.44) та (2.46) є достатніми для м.н. *умовної* збіжності цього інтеграла Тут $\nu^*(t) := \inf\{k \geq 0 : S_k^* > t\}$, $t \geq 0$, тобто $(\nu^*(t))_{t\geq 0}$ є стаціонарним процесом відновлення.

2.2.2 Доведення теореми 14. Для доведення теореми 14 нам знадобиться інваріантність стаціонарного процесу відновлення відносно обернення часу.

Твердження 17. *Нехай $\mu < \infty$, та розподіл ξ неарифметичний. Тоді для кожного $t > 0$*

$$(\nu^*(t) - \nu^*((t-s)-))_{0\leq s\leq t} \;\overset{\mathrm{d}}{=}\; (\nu^*(s))_{0\leq s\leq t}.$$

Доведення. За визначенням $\nu^*(u) = \mathcal{R}([0,\,u])$, де $\mathcal{R} := \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta_{S_k^*}$ є стаціонарним точковим процесом відновлення. Як вже було згадано, точковий процес $\mathcal{R}$ є інваріантним відносно зсувів та симетричним відносно початку координат. Тому

$$\begin{aligned}(\nu^*(t) - \nu^*((t-s)-))_{0\leq s\leq t} \;&=\; (\mathcal{R}([t-s,\,t]))_{0\leq s\leq t} \overset{\mathrm{d}}{=} (\mathcal{R}([-s,\,0])))_{0\leq s\leq t} \\ &\overset{\mathrm{d}}{=}\; (\mathcal{R}([0,\,s])))_{0\leq s\leq t} = (\nu^*(s)))_{0\leq s\leq t},\end{aligned}$$

що завершує доведення. □

Зауваження 18. Твердження 17 залишається вірним і для арифметичних випадкових блукань. Для d-арифметичних випадкових блукань в.в. S_0^* береться незалежною від $(S_k)_{k\geq 0}$ з розподілом

$$\mathbb{P}\{S_0^* = kd\} = \frac{d}{\mu}\mathbb{P}\{\xi \geq kd\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Спочатку ми покажемо, що в умовах теореми 14 гранична випадкова величина $Y^*_\circ$ є коректно визначеною.

Твердження 19. *Припустимо, що $\mu < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний. Нехай $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є локально обмеженою, майже скрізь неперервною, незростаючою з деякого місця та неінтегровною функцією. Нагадаємо, що*

$$Y^*_\circ \;=\; \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{S^*_k\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y\right).$$

В умовах теореми 14 $Y^*_\circ$ існує як границя у L_2 у випадку (A1), як границя м.н. у випадку (A2) та як границя за ймовірністю у випадку (A3). У всіх трьох випадках $Y^*_\circ$ є м.н. скінченною.

Доведення. Покладемо

$$Y^*_t := \sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{S^*_k\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y, \quad t\ge 0.$$

Наша мета – показати, що Y^*_t збігається при $t\to\infty$ у наведених вище сенсах.

Розглянемо випадок (A1) та доведемо спочатку результат у припущенні, що h є незростаючою на $\mathbb{R}_+$. Достатньо перевірити, що

$$\lim_{s\to\infty}\sup_{t>s}\mathbb{E}(Y^*_t - Y^*_s)^2 \;=\; 0.$$

Оскільки,

$$Y^*_t - Y^*_s \;=\; \sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{s<S^*_k\le t\}} - \mathbb{E}\sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{s<S^*_k\le t\}}$$

при $t>s$, робимо висновок, що

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y^*_t - Y^*_s)^2 \;&=\; \mathbb{E}\bigg(\sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{s<S^*_k\le t\}}\bigg)^2 - \bigg(\mathbb{E}\Big[\sum_{k\ge 0} h(S^*_k)\mathbb{1}_{\{s<S^*_k\le t\}}\Big]\bigg)^2 \\
&=\; \mathbb{E}\bigg(\sum_{k\ge 0} h(t-S^*_k)\mathbb{1}_{\{S^*_k<t-s\}}\bigg)^2 - \bigg(\frac{1}{\mu}\int_s^t h(y)\mathrm{d}y\bigg)^2,
\end{aligned}$$

де остання рівність випливає з твердження 17. Перший член у правій частині дорівнює

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\Big[\sum_{k\ge 0} h^2(t-S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*<t-s\}}\Big] + 2\mathbb{E}\Big[\sum_{0\le i<j} h(t-S_i^*)\mathbb{1}_{\{S_i^*<t-s\}} h(t-S_j^*)\mathbb{1}_{\{S_j^*<t-s\}}\Big]\\
&\quad= \ \frac{1}{\mu}\int_0^{t-s} h^2(t-y)\mathrm{d}y + \frac{2}{\mu}\int_0^{t-s} h(t-y)\int_{(0,\,t-s-y)} h(t-y-x)\,\widehat{U}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}y\\
&\quad= \ \frac{1}{\mu}\int_s^{t} h^2(y)\mathrm{d}y + \frac{2}{\mu}\int_s^{t} h(y)\int_{(0,\,y-s)} h(y-x)\,\widehat{U}(\mathrm{d}x)\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

де $\widehat{U}(x) := \sum_{k\ge 1}\mathbb{P}\{S_k \le x\} = U(x) - 1$, $x \ge 0$ є модифікованою функцією відновлення. Отже,

$$\mathbb{E}(Y_t^* - Y_s^*)^2 = \frac{1}{\mu}\int_s^t h^2(y)\mathrm{d}y + \frac{2}{\mu}\int_s^t h(y)\int_{(0,\,y-s)} h(y-x)\,\mathrm{d}(\widehat{U}(x) - \mu^{-1}x)\mathrm{d}y.$$

Оскільки h^2 припускається інтегровною, то $\lim_{s\to\infty}\sup_{t>s}\int_s^t h^2(y)\mathrm{d}y = 0$. Отже, залишається перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty}\ \sup_{t>s}\int_s^t h(y)\int_{(0,\,y-s)} h(y-x)\,\mathrm{d}(\widehat{U}(x) - \mu^{-1}x)\mathrm{d}y \ = \ 0. \tag{2.49}$$

Покладемо $H_{s,t}(x) := \int_s^{t-x} h(x+y)h(y)\mathrm{d}y$ для $x \in [0, t-s)$ та $H_{s,t}(x) := 0$ для всіх інших x. Функція $H_{s,t}(x)$ є неперервною та незростаючою на $[0,\infty)$. Змінюючи порядок сумування, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\int_s^t h(y)\int_{(0,\,y-s)} h(y-x)\,\mathrm{d}\big(\widehat{U}(x) - \mu^{-1}x\big)\mathrm{d}y\\
&= \int_{(0,t-s)}\int_s^{t-x} h(x+y)h(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}\big(\widehat{U}(x) - \mu^{-1}x\big)\\
&\le \int_{(0,\,t-s)} (\widehat{U}(x) - \mu^{-1}x)\,\mathrm{d}(-H_{s,t}(x))\\
&\le \sup_{x\ge 0}\,\big(U(x) - \mu^{-1}x\big)\,H_{s,t}(0) = \sup_{x\ge 0}\,\big(U(x) - \mu^{-1}x\big)\int_s^t h^2(y)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

З теореми XI.3.1 в [77] відомо, що $\lim_{t\to\infty}(U(t) - \mu^{-1}t) = \mu^{-2}(\sigma^2 + \mu^2) < \infty$, а тому $\sup_{x\ge 0}(U(x) - \mu^{-1}x) < \infty$, що доводить (2.49).

Тепер припустимо, що h не зростає лише з деякого місця, а не всюди на $[0,\infty)$. Отже, можна вибрати $t_0 > 0$ таке, що h не зростає на $[t_0,\infty)$. Покладемо $\overline{h}(t) := h(t_0 + t)$, $t \ge 0$, тоді $\overline{h}$ не зростає на $[0,\infty)$. Випадкове блукання

$(\overline{S}_k^*)_{k\ge 0} := (S^*_{\nu^*(t_0)+k} - t_0)_{k\ge 0}$ є копією $(S_k^*)_{k\ge 0}$. Ми вже показали, що

$$\overline{Y}_\circ^* \;:=\; \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k\ge 0}\overline{h}(\overline{S}_k^*)\mathbb{1}_{\{\overline{S}_k^*\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t \overline{h}(y)\mathrm{d}y\right)$$

існує в сенсі L_2. Значить також

$$\begin{aligned} Y_\circ^* \;&=\; \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k\ge 0} h(S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\le t_0+t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^{t_0+t} h(y)\mathrm{d}y\right) \\ &=\; Y_{t_0}^* + \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k\ge 0}\overline{h}(\overline{S}_k^*)\mathbb{1}_{\{\overline{S}_k^*\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t \overline{h}(y)\mathrm{d}y\right)\end{aligned}$$

існує в сенсі L_2.

Тепер розглянемо випадок (A2). Припустимо, що h задовольняє умовам теореми, не зростає та є двічі неперервно диференційовною на $[0,\infty)$ з $h''\ge 0$. Розіб'ємо доведення на три кроки:

1) Доведемо, що зі збіжності при $n\to\infty$ суми $U_n := \sum_{k=0}^n (h(S_k^*) - h(\mu k))$ м.н. випливає збіжність при $t\to\infty$ виразу $\sum_{k\ge 0} h(S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\le t\}} - \mu^{-1}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y$ м.н.

2) Доведемо, що зі збіжності ряду $\sum_{j\ge 1}(\xi_j-\mu)\sum_{k\ge j} h'(\mu k)$ м.н. випливає збіжність U_n при $n\to\infty$ м.н.

3) Скористаємось теоремою про три ряди, щоб довести збіжність ряду $\sum_{j\ge 1}(\xi_j-\mu)\sum_{k\ge j} h'(\mu k)$ м.н.

Крок 1. Припустимо, що U_n збігається м.н. Згідно з лемою 207 послідовність $\sum_{k=0}^n h(S_k^*) - \mu^{-1}\int_0^{\mu n} h(y)\mathrm{d}y$ також збігається м.н. Оскільки $\lim_{t\to\infty}\nu^*(t)=\infty$ м.н., то $\sum_{k=0}^{\nu^*(t)-1} h(S_k^*) - \mu^{-1}\int_0^{\mu(\nu^*(t)-1)} h(y)\mathrm{d}y$ збігається м.н. при $t\to\infty$. Для завершення кроку 1 залишається показати, що

$$\lim_{t\to\infty}\left|\int_0^{\mu(\nu^*(t)-1)} h(y)\mathrm{d}y - \int_0^t h(y)\mathrm{d}y\right| = 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.50}$$

Для цього запишемо

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^{\mu(\nu^*(t)-1)} h(y)\mathrm{d}y - \int_0^t h(y)\mathrm{d}y\right| \qquad (2.51)\\ &\quad= \int_{\mu(\nu^*(t)-1)\wedge t}^{\mu(\nu^*(t)-1)\vee t} h(y)\mathrm{d}y \le |\mu(\nu^*(t)-1)-t|\, h(\mu(\nu^*(t)-1)\wedge t),\end{aligned}$$

де ми використали монотонність h. Згідно з теоремою 3.4.4 в [115] з припущення $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ випливає

$$\nu(t) - \mu^{-1}t \ = \ o(t^{1/r}) \quad \text{м.н. при } t \to \infty, \tag{2.52}$$

де, нагадаємо,

$$\nu(t) \ := \ \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\} \ = \ \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k^* - S_0^* > t\}.$$

Оскільки

$$\nu^*(t) \ = \ \mathbb{1}_{\{S_0^* \le t\}} + \nu(t - S_0^*)\mathbb{1}_{\{S_0^* \le t\}} \quad \text{м.н.},$$

та S_0^* є м.н. скінченною, то

$$\nu^*(t) - \mu^{-1}t \ = \ o(t^{1/r}) \quad \text{м.н. при } t \to \infty.$$

Це співвідношення гарантує, що перший множник в (2.51) є $o(t^{1/r})$. Перевіримо, що другий множник є $o(t^{-1/r})$. По-перше, з огляду на (2.44) та монотонність h, маємо

$$h(t) \ = \ o(t^{-1/r}), \quad t \to \infty. \tag{2.53}$$

По-друге, згідно з посиленим законом великих чисел для $\nu^*(t)$, маємо

$$[\mu(\nu^*(t) - 1)] \wedge t \ \sim \ t \quad \text{м.н. при } t \to \infty.$$

Таким чином, співвідношення (2.50) доведено.

Крок 2. Для кожного $k \in \mathbb{N}$ згідно з формулою Тейлора існує θ_k, що лежить між S_k^* та μk і є таким, що

$$h(S_k^*) - h(\mu k) \ = \ h'(\mu k)(S_k^* - \mu k) + \frac{1}{2}h''(\theta_k)(S_k^* - \mu k)^2.$$

Покладемо

$$I_n \ := \ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} h''(\theta_k)(S_k^* - \mu k)^2$$

та запишемо

$$\begin{aligned}
&U_n - h\big(S_0^*\big) + h(0) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{n} h'(\mu k)(S_k^* - \mu k) + I_n = S_0^* \sum_{k=1}^{n} h'(\mu k) + \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)\sum_{j=k}^{n} h'(\mu j) + I_n \\
&\quad = S_0^* \sum_{k=1}^{n} h'(\mu k) + \sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mu)\sum_{j \ge k} h'(\mu j) - (S_n - \mu n)\sum_{k \ge n+1} h'(\mu k) + I_n.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Оскільки $-h'$ не зростає та є невід'ємною, маємо

$$\sum_{k\geq n+1} -h'(\mu k) \ \leq \ \int_n^\infty -h'(\mu y)\mathrm{d}y \ = \ \mu^{-1}h(\mu n) \ \leq \ \sum_{k\geq n} -h'(\mu k). \qquad (2.55)$$

для всіх n. Використавши першу нерівність в (2.55) та те, що $\lim_{y\to\infty} h(y) = 0$, одразу отримаємо збіжність першого доданка в останньому рядку (2.54) при $n\to\infty$. Збіжність м.н. другого (головного) члена має місце за припущенням. Згідно з законом великих чисел Марцинкевича-Зігмунда, див. теорему 2 на с.125 в [51],

$$S_n - \mu n \ = \ o(n^{1/r}) \quad \text{при } n\to\infty \text{ м.н.} \qquad (2.56)$$

Таким чином, з огляду на (2.53) та (2.55), третій член збігається до нуля м.н. Далі, $\lim_{k\to\infty} k^{-1}\theta_k = \mu$ м.н. за посиленим законом великих чисел. Тому, враховуючи (2.45),

$$h''(\theta_k) \ = \ O(\theta_k^{-2-1/r}) \ = \ O(k^{-2-1/r}) \quad \text{при } k\to\infty.$$

З рівності (2.56) отримуємо

$$h''(\theta_k)(S_k^* - \mu k)^2 \ = \ o(k^{-(2-1/r)}) \quad \text{м.н. при } k\to\infty,$$

звідки маємо збіжність м.н. I_n при $n\to\infty$ внаслідок нерівності $2-1/r > 1$. Отже, збіжність $\sum_{k\geq 1}(\xi_k-\mu)\sum_{j\geq k} h'(\mu j)$ м.н. гарантує збіжність U_n м.н. при $n\to\infty$.

КРОК 3. Покладемо

$$c_k := \sum_{j\geq k} -h'(\mu j) \quad \text{та} \quad \zeta_k := -c_k(\xi_k-\mu), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Умова (2.44) забезпечує $\sum_{k\geq 1} h^r(\mu k) < \infty$. Внаслідок (2.55)

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1}\mathbb{E}|\zeta_k|^r = \mathbb{E}|\xi-\mu|^r \sum_{k\geq 1}\left(\sum_{j\geq k}(-h'(\mu j))\right)^r \\ \leq \mu^{-r}\mathbb{E}|\xi-\mu|^r\sum_{k\geq 1} h(\mu(k-1))^r \ < \ \infty.\end{aligned}$$

Отже, ряд $\sum_{k\geq 1}\zeta_k$ збігається м.н. згідно з наслідком 3 на с. 117 в [51]. Доведення того, що твердження виконується лише у припущеннях, що h є монотонною та двічі диференційовною з деякого місця, є аналогічним до випадку (A1) і не наводиться. Доведення у випадку (A3) є аналогічним до випадку (A2) і може бути знайдено на с. 29 в [135]. □

Тепер перейдемо безпосередньо до доведення теореми 14.

Доведення теореми 14. Ми доведемо теорему у припущенні, що функція h всюди не зростає, повне доведення можна знайти в твердженні 4.6 в [136]. Доведення буде базуватися на класичному каплінгу випадкового блукання $(S_k)_{k\geq 0}$ та випадкового блукання з затримкою $(S_k^*)_{k\geq 0}$, що ми наводимо нижче. Дана конструкція працює у припущенні, що $\mu < \infty$, та що розподіл ξ неарифметичний.

Нехай $(\hat{\xi}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежною копією послідовності $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, а в. в. $\hat{S}_0^*$ є незалежною від всіх інших задіяних в. в. копією S_0^*. Визначимо

$$\hat{S}_0 := 0 \quad \text{та} \quad \hat{S}_k := \hat{\xi}_1 + \ldots + \hat{\xi}_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Нехай $\hat{\nu}(t)$ є моментом першого потрапляння в (t,∞) блуканням $(\hat{S}_k)_{k\geq 0}$, тобто $\hat{\nu}(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \hat{S}_k > t\}$, $t \geq 0$. Покладемо $\hat{S}_k^* := \hat{S}_0^* + \hat{S}_k$, $k \geq 0$ та нехай $\hat{\nu}^*(t) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : \hat{S}_k^* > t\}$ є відповідним стаціонарним процесом відновлення.

Відомо, див. с. 210 в [70], що для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ існують м. н. скінченні τ_1 та τ_2 такі, що

$$\hat{S}_{\tau_1}^* - S_{\tau_2} \in [0,\, \varepsilon]$$

м.н. Визначимо спарене (coupled) випадкове блукання

$$\tilde{S}_k^* \ := \ \begin{cases} \hat{S}_k^*, & \text{якщо } k \leq \tau_1, \\ \hat{S}_{\tau_1}^* + \sum_{j=\tau_2+1}^{\tau_2+k-\tau_1} \xi_j, & \text{якщо } k \geq \tau_1 + 1, \end{cases}$$

$k \geq 0$. Тоді $(\tilde{S}_k^*)_{k\geq 0} \overset{\mathrm{d}}{=} (\hat{S}_k^*)_{k\geq 0} \overset{\mathrm{d}}{=} (S_k^*)_{k\in\mathbb{N}_0}$. Зокрема, випадковий процес $(\tilde{\nu}^*(t))_{t\geq 0}$, визначений рівністю

$$\tilde{\nu}^*(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \tilde{S}_k^* > t\},$$

є стаціонарним процесом відновлення. З конструкції процесу $(\tilde{S}_k^*)_{k\geq 0}$ випливає, що

$$\tilde{S}_{\tau_1+k}^* - \varepsilon \leq S_{\tau_2+k} \leq \tilde{S}_{\tau_1+k}^* \tag{2.57}$$

для всіх $k \geq 0$.

Маючи на озброєнні наведений каплінг, перейдемо до доведення теореми. Покажемо, що

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\{Y_\circ(t) > x\} \leq \mathbb{P}\{Y_\circ^* > x\} \tag{2.58}$$

для кожної точки x, в якій функція розподілу $Y_\circ^*$ неперервна. Протилежна нерівність для нижньої границі доводиться аналогічно. Оскільки h не зростає за припущенням, то з (2.57) випливає

$$h(t - S_{\tau_2+k}) \ \leq \ h(t - \tilde{S}^*_{\tau_1+k}) \quad \text{для всіх } k \geq 0. \tag{2.59}$$

Запишемо таке представлення $Y(t)$:

$$Y(t) \ = \ \sum_{k=0}^{\tau_2-1} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} + \sum_{k\geq\tau_2} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}. \tag{2.60}$$

Використовуючи (2.59) та монотонність h, маємо

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq\tau_2} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} &\leq \sum_{k\geq\tau_1} h(t-\tilde{S}^*_k)\mathbb{1}_{\{\tilde{S}^*_k\leq t\}} + h(0)\sum_{k\geq\tau_1}\mathbb{1}_{\{t<\tilde{S}^*_k\leq t+\varepsilon\}}\\ &\leq \sum_{k\geq0} h(t-\tilde{S}^*_k)\mathbb{1}_{\{\tilde{S}^*_k\leq t\}} + h(0)(\tilde{\nu}^*(t+\varepsilon)-\tilde{\nu}^*(t)).\end{aligned} \tag{2.61}$$

Зафіксуємо $x \in \mathbb{R}$ та $\delta > 0$. Поєднуючи (2.60) та (2.61), отримуємо

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\{Y_\circ(t)>x\} \leq \varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\sum_{k\geq0} h(t-\tilde{S}^*_k)\mathbb{1}_{\{\tilde{S}^*_k\leq t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y > x-\delta\Big\}\\ &+\varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=0}^{\tau_2-1} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} > \delta/2\Big\} + \varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\big\{h(0)(\tilde{\nu}^*(t+\varepsilon)-\tilde{\nu}^*(t)) > \delta/2\big\}.\end{aligned} \tag{2.62}$$

Оскільки $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=0}^{\tau_2-1} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} = 0 \quad \text{м.н.}$$

З цього випливає, що другий доданок в правій частині (2.62) дорівнює нулю. Останній доданок в правій частині (2.62) дорівнює

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\big\{h(0)(\tilde{\nu}^*(t+\varepsilon)-\tilde{\nu}^*(t)) > \delta/2\big\} = \mathbb{P}\big\{h(0)\tilde{\nu}^*(\varepsilon) > \delta/2\big\}$$

і прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$. Залишається оцінити головний член – перший доданок в правій частині (2.62). Згідно з твердженням 17

$$\sum_{k\geq 0} h(t-\tilde{S}_k^*)\mathbb{1}_{\{\tilde{S}_k^*\leq t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y \stackrel{\mathrm{d}}{=} \sum_{k\geq 0} h(S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y.$$

Внаслідок твердження 19 при $t \to \infty$ права частина останньої рівності збігається (у підхожому сенсі) до $Y_\circ^*$, тому

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\bigg\{\sum_{k\geq 0} h(t-\tilde{S}_k^*)\mathbb{1}_{\{\tilde{S}_k^*\leq t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y > x-\delta\bigg\} = \mathbb{P}\{Y_\circ^* > x-\delta\},$$

якщо $x-\delta$ є точкою неперервності функції розподілу $Y_\circ^*$. Спрямовуючи $\delta \downarrow 0$ вздовж підхожої послідовності отримуємо (2.58).

Залишається помітити, що у випадку (A1) теореми 14 $\lim_{t\to\infty}|\mathbb{E}[Y(t)] - \mu^{-1}\int_0^t h(y)\mathrm{d}y| = 0$ згідно з наслідком 3.1 в [159]. Отже, граничний розподіл для $Y(t) - \mathbb{E}[Y(t)]$ при $t \to \infty$ збігається з граничним розподілом для $Y_\circ(t)$. Доведення теореми 14 завершено. $\square$

2.3 Збіжність з нормуванням, що правильно змінюється

В цьому підрозділі ми повертаємось до вивчення загальних випадкових процесів з імміграцією. Зокрема, надалі процес X не припускається детермінованим.

Граничні теореми з нормуванням для випадкових процесів з іммiграцією можна отримати за припущення, що розподіл ξ лежить в області притягання деякого α-стійкого розподілу з $\alpha \in (0,1)\cup(1,2]$ та, у випадку $\mu < \infty$ (еквівалентно, $\alpha > 1$), що принаймні одна з величин $\mathbb{E}[X(t)]$ або $\mathbb{D}[X(t)]$ є завеликою для збіжності до стаціонарного процесу. Для того щоб отримати власні граничні теореми, розглянемо процес $Y_t(u) := a(t)^{-1}(Y(ut) - b(ut))$ з деякими підхожими нормуванням $a(t) > 0$ та центруванням $b(t) \in \mathbb{R}$. Припускаючи, що середнє $h(t) := \mathbb{E}[X(t)]$ є скінченним для кожного $t \geq 0$, запишемо розклад

$$Y(t)-b(t) = \Big(Y(t)-\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\Big)+\Big(\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}-b(t)\Big). \quad (2.63)$$

Надалі ми працюватимемо в умовах, коли принаймні один з доданків у наведеному розкладі слабко збігається після нормування.

Асимптотична поведінка другого доданка, відповідним чином нормованого, регулюється функціональними граничними теоремами для процесу $(\nu(t))_{t\geq 0}$ та поведінкою функції h на нескінченності. Асимптотика першого доданка, відповідним чином нормованого, може бути отримана за допомогою мартингальних граничних теорем або граничних теорем для схем серій.

Якщо середнє $\mu = \mathbb{E}\xi$ є скінченним, нормуючі послідовності та граничний процес для першого доданка повністю визначаються властивостями X, при цьому роль розподілу ξ не є важливою. Неформально цей факт пояснюється тим, що випадковість, породжена кроками ξ_k, втрачається в границі внаслідок посиленого закону великих чисел для $(\nu(t))_{t\geq 0}$. Це спостереження підтверджується в наведеній далі теоремі 29. Якщо ж середнє $\mathbb{E}\xi$ є нескінченним, та $t \mapsto \mathbb{P}\{\xi > t\}$ правильно змінюється з індексом більшим за -1, то процес $(\nu(t))_{t\geq 0}$, підхожим чином нормований, слабко збігається до невиродженого процесу, див. формулу (2.75). Цим пояснюється те, що випадковість, породжена кроками ξ, зберігається у границі, див. теорему 30.

Можуть мати місце такі ситуації: один з доданків в розкладі (2.63) домінує (випадки $p = 0$ та $p = 1$ в теоремі 40; випадки $q = 0$ та $q = 1$ в теоремі 41; випадок $h \equiv 0$), доданки асимптотично порівнювані (випадок $p \in (0, 1)$ в теоремі 40 та випадок $q \in (0, 1)$ в теоремі 41). Характерною рисою першої ситуації є те, що можлива залежність між X та ξ нейтралізується нормуванням (за умови, що $\lim_{t\to\infty} a(t) = +\infty$), а тому граничні результати регулюються лише маргінальними розподілами X та ξ. Припустимо, що у другій ситуації, тобто у випадку, коли два доданки в (2.63) є асимптотично порівнюваними, X не залежить від ξ. З вищесказаного випливає, що за припущення $\mathbb{E}\xi < \infty$, граничні процеси, що відповідають двом доданкам в (2.63), є незалежними. Проте вони можуть бути залежними у протилежному випадку $\mathbb{E}\xi = \infty$. Незважаючи на це, вдається показати, що доданки в (2.63) збігаються спільно. Якщо ж X та ξ залежні, то довести таку спільну збіжність в загальному випадку не вдається.

Надалі припускатимемо, що середнє $h(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ є скінченним для кожного $t \geq 0$, а коваріація

$$f(s,t) := \mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = \mathbb{E}[X(s)X(t)] - \mathbb{E}[X(s)]\mathbb{E}[X(t)]$$

є скінченною для всіх $s, t \geq 0$. Дисперсію X позначатимемо через v, тобто $v(t) := f(t,t) = \mathbb{D}[X(t)]$. Припускатимемо також, що $h, v \in D[0,\infty)$[5]. З того, що $h, v \in D[0,\infty)$ випливає, що h та v є майже скрізь неперервними та локально обмеженими, а тому $\int_0^t h(y)\mathrm{d}y$ та $\int_0^t v(y)\mathrm{d}y$ є коректно визначеними інтегралами Рімана.

Для формулювання результатів нам знадобляться додаткові означення, які наведено в наступних двох підрозділах.

2.3.1 Правильна зміна в $\mathbb{R}^2$. Нагадаємо, що додатна вимірна функція ℓ, яка визначена в деякому околі ∞, *повільно змінюється* на ∞, якщо $\lim_{t\to\infty} \frac{\ell(ut)}{\ell(t)} = 1$ для всіх $u > 0$, див. [42, с. 6].

Означення 20. Функція $r : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *правильно змінюється*[6] в $\mathbb{R}^2_+ := (0,\infty) \times (0,\infty)$, якщо існує функція $C : \mathbb{R}^2_+ \to (0,\infty)$, яка називається *граничною функцією*, така, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(ut, wt)}{r(t,t)} = C(u,w), \quad u, w > 0.$$

З означення випливає, що функція $r(t,t)$ правильно змінюється на нескінченності, тобто, $r(t,t) \sim t^\beta \ell(t)$ при $t \to \infty$ для деякої функції ℓ та деякого $\beta \in \mathbb{R}$, яке називається індексом правильної зміни. Зокрема, $C(a,a) = a^\beta$ для деякого $a > 0$ та

$$C(au, aw) = C(a,a)C(u,w) = a^\beta C(u,w)$$

для всіх $a, u, w > 0$.

Означення 21. Функція $r : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$ з індексом β*, якщо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{r(ut, wt)}{r(t,t)} = C(u,w), \quad u, w > 0,$$

[5] Згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність, локальна рівномірна інтегровність X^2 є достатньою для цього, оскільки траєкторії X лежать в $D[0,\infty)$.

[6] У канонічному означенні правильної зміни у $\mathbb{R}^2_+$, див., наприклад, [61], вимагається щоб функція r була додатною.

де $C(u,u)=u^\beta$ для $u>0$ та $C(u,w)=0$ при $u,w>0$, $u\neq w$. Функція r *правильно змінюється в* $\mathbb{R}^2_+$ *з індексом* β *у широкому сенсі*, якщо вона правильно змінюється або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$ з індексом β.

Функція C, що фігурує в означенні функцій, які фіктивно правильно змінюються, також називається *граничною функцією*.

Означення 22. Функція $r:[0,\infty)\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ *рівномірно правильно змінюється з індексом* β *в смугах в* $\mathbb{R}^2_+$ якщо вона правильно змінюється в $\mathbb{R}^2_+$ з індексом β та

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{a\le u\le b}\left|\frac{r\big(ut,(u+w)t\big)}{r(t,t)}-C(u,u+w)\right| \;=\; 0 \tag{2.64}$$

для кожного $w>0$ та всіх $0<a<b<\infty$.

2.3.2 Граничні процеси для $Y_t(u)$. Процес, введений в наступному означенні виникає як граничний для першого доданка в (2.63) у випадку $\mathbb{E}\xi<\infty$.

Означення 23. Нехай C є граничною функцією для функції, що рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}^2_+$ або фіктивно правильно змінюється з індексом $\beta\in(-1,\infty)$, див. означення 21. Випадковий процес $V_\beta:=(V_\beta(u))_{u>0}$ – це центрований гауссівський процес з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)]=\int_0^u C(u-y,w-y)\,\mathrm{d}y\quad 0<u\le w,$$

у випадку $C(s,t)\neq 0$ для деяких $s,t>0$, $s\neq t$ або центрований гауссівський процес з незалежними значеннями та дисперсією $\mathbb{E}[V^2_\beta(u)]=(1+\beta)^{-1}u^{1+\beta}$ у протилежному випадку.

Твердження 24. *Процес* V_β*, введений в означенні 23, є коректно визначеним при* $\beta>-1$.

Доведення. Якщо $f(u,w)$ фіктивно правильно змінюється, то V_β є гауссівським процесом з незалежними значеннями. Припустимо, що $f(u,w)$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}^2_+$. Умова (2.64) гарантує неперервність функції $u\mapsto C(u,u+w)$ на $(0,\infty)$ для кожного $w>0$, див. сс. 2–3 в [270]. З нерівності Коші-Буняковського-Шварца, маємо

$$|f(u,w)|\le 2^{-1}(v(u)+v(w)),\quad u,w\ge 0, \tag{2.65}$$

а тому

$$C(u-y,w-y) \le 2^{-1}((u-y)^\beta + (w-y)^\beta). \tag{2.66}$$

Оскільки $\beta > -1$, то

$$\int_0^u C(u-y,w-y)\,\mathrm{d}y < \infty, \quad 0 < u \le w.$$

Внаслідок того, що $(u,w) \mapsto C(u,w)$ є невід'ємно-визначеною, цю ж властивість має і $(u,w) \mapsto \int_0^u C(u-y,w-y)\mathrm{d}y$, $0 < u \le w$. Отже, остання функція є коваріацією деякого гауссівського процесу. Таким чином, гауссівський процес V_β існує. $\square$

Нехай $\mathcal{S}_2 := (\mathcal{S}_2(t))_{t\ge 0}$ – це стандартний броунівський рух, а при $\alpha \in (1,2)$ $\mathcal{S}_\alpha := (\mathcal{S}_\alpha(t))_{t\ge 0}$ – це спектрально негативний α-стійкий процес Леві такий, що $\mathcal{S}_\alpha(1)$ має характеристичну функцію

$$\mathbb{E}[\exp(\mathrm{i}z\mathcal{S}_\alpha(1))] = \exp\{-|z|^\alpha \Gamma(1-\alpha)(\cos(\pi\alpha/2) + \mathrm{i}\,\mathrm{sign}(z)\sin(\pi\alpha/2))\} \tag{2.67}$$

при $z \in \mathbb{R}$.

Процес, введений в наступному означенні виникає як граничний для другого доданка в (2.63) у випадку $\mathbb{E}\xi < \infty$.

Означення 25. Для $\alpha \in (1,2]$ та $\rho > -1/\alpha$, $\rho \neq 0$ покладемо

$$I_{\alpha,\rho}(0) := 0, \quad I_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y), \quad u > 0.$$

Також покладемо $I_{\alpha,0}(u) := \mathcal{S}_\alpha(u)$ для $u \ge 0$. Стохастичний інтеграл визначається інтегруванням частинами: при $\rho > 0$ маємо

$$I_{\alpha,\rho}(u) = \rho \int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u > 0,$$

а при $\rho \in (-1/\alpha, 0)$ маємо

$$I_{\alpha,\rho}(u) = u^\rho \mathcal{S}_\alpha(u) + |\rho| \int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

Зазначимо, що таке означення узгоджене зі стандартним визначенням стохастичного інтеграла з невипадковим інтеграндом та інтегратором, що є семімартингалом. У подальшому ми називатимемо процес $I_{\alpha,\rho} := (I_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}$

дробово інтегровним α-стійким процесом Леві. Коректність цього означення та властивості процесу $I_{\alpha,\rho}$ доведено в підрозділі 6.1 розділу 6.

Нагадаємо означення оберненого стійкого субординатора.

Означення 26. Для $\alpha \in (0,1)$ нехай $W_\alpha := (W_\alpha(t))_{t\geq 0}$ є α-стійким субординатором (процесом Леві, що не спадає) з експонентою Лапласа $-\ln \mathbb{E}[\exp(-zW_\alpha(t))] = \Gamma(1-\alpha)tz^\alpha$, $z \geq 0$. *Обернений α-стійкий субординатор* $W_\alpha^{\leftarrow} := (W_\alpha^{\leftarrow}(s))_{s\geq 0}$ визначається рівністю

$$W_\alpha^{\leftarrow}(s) := \inf\{t \geq 0 : W_\alpha(t) > s\}, \quad s \geq 0.$$

Процеси, що вводяться в означеннях 27 та 28, виникають як границі першого та другого доданків в (2.63) відповідно у випадку правильної зміни хвоста $\mathbb{P}\{\xi > t\}$ з індексом $-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Означення 27. Для $\rho \in \mathbb{R}$ покладемо

$$J_{\alpha,\rho}(0) := 0, \quad J_{\alpha,\rho}(u) := \int_{[0,\,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad u > 0.$$

Оскільки інтегратор $W_\alpha^{\leftarrow}$ має майже напевно неспадні траєкторії, то цей інтеграл існує як потраєкторний інтеграл Лебега-Стілтьєса. У подальшому ми називатимемо процес $J_{\alpha,\rho} := (J_{\alpha,\rho}(u))_{u\geq 0}$ *дробово інтегровним оберненим α-стійким субординатором*.

Означення 28. Нехай $W_\alpha^{\leftarrow}$ – це обернений α-стійкий субординатор, а C є граничною функцією для функції, що правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ у широкому сенсі з індексом $\beta \in \mathbb{R}$, див. означення 21. Випадковий процес $Z_{\alpha,\beta} := (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}$ – це центрований умовно гауссівський процес (при фіксованій траєкторії $W_\alpha^{\leftarrow}$) з умовною коваріацією

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u)Z_{\alpha,\beta}(w)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big] = \int_{[0,u]} C(u-y, w-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \quad 0 < u \leq w,$$

у випадку $C(s,t) \neq 0$ для деяких $s,t > 0$, $s \neq t$ або центрований умовно гауссівський процес з умовно незалежними значеннями та умовною дисперсією $\mathbb{E}[Z_{\alpha,\beta}^2(u)|W_\alpha^{\leftarrow}] = \int_{[0,u]}(u-y)^\beta\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)$ у протилежному випадку.

Коректність визначень $J_{\alpha,\rho}$ та $Z_{\alpha,\beta}$, а також властивості цих процесів розглянуто в підрозділах 6.2 та 6.3

2.3.3 Збіжність першого доданка в (2.63). У теоремах 29 (випадок $\mathbb{E}\xi < \infty$) та 30 (випадок $\mathbb{E}\xi = \infty$) встановлено асимптотику першого доданка в (2.63).

Теорема 29. *Припустимо, що*

- $\mu = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$*;*
- $f(u, w) = \mathrm{Cov}[X(u), X(w)]$ *рівномірно правильно змінюється в смугах в* $\mathbb{R}_+^2$ *або фіктивно правильно змінюється в* $\mathbb{R}_+^2$*, в обох випадках з індексом* $\beta \in (-1, \infty)$ *та граничною функцією* C*; якщо* $\beta = 0$*, також припустимо, що існує додатна монотонна функція* u *така, що* $v(t) = \mathbb{D}[X(t)] \sim u(t)$ *при* $t \to \infty$*;*
- *для всіх* $y > 0$

$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t) - h(t))^2 \mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{tv(t)}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t \to \infty. \tag{2.68}$$

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{\sqrt{\mu^{-1}tv(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(V_\beta(u)\right)_{u>0}, \quad t \to \infty, \tag{2.69}$$

де процес V_β *був введений в означенні 23.*

Теорема 30. *Припустимо, що*

- X *не залежить від* ξ*;*
- *для деякого* $\alpha \in (0, 1)$ *та деякої* ℓ^*

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty; \tag{2.70}$$

- $f(u, w) = \mathrm{Cov}[X(u), X(w)]$ *рівномірно правильно змінюється в смугах в* $\mathbb{R}_+^2$ *або фіктивно правильно змінюється в* $\mathbb{R}_+^2$*, в обох випадках з індексом* $\beta \in [-\alpha, \infty)$ *та граничною функцією* C*; якщо* $\beta = -\alpha$*, також припустимо, що існує додатна монотонна функція* u *така, що* $\lim_{t\to\infty} \frac{v(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}u(t)} = 1$*;*

• *для всіх* $y > 0$

$$v_y(t) := \mathbb{E}\Big[(X(t) - h(t))^2 \mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}\}}\Big] = o(v(t)), \quad t \to \infty. \tag{2.71}$$

Тоді

$$\left(\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}}\Big(Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}\Big)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}$$

при $t \to \infty$*, де умовно гауссівський процес* $Z_{\alpha,\beta}$ *був введений в означенні 28.*

Зауваження 31. Існує цікавий окремий випадок теореми 30, в якому скінченновимірні розподіли Y слабко збігаються без нормування та центрування. А саме, якщо $h(t) \equiv 0$, $\lim_{t\to\infty} v(t)/\mathbb{P}\{\xi > t\} = c$ для деякого $c > 0$ та виконуються умови теореми 30 (помітимо, що $\beta = -\alpha$ та можна взяти $u(t) \equiv c$), то

$$(Y(ut))_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (\sqrt{c}Z_{\alpha,-\alpha}(u))_{u>0}, \quad t \to \infty.$$

Якщо $h(t) = \mathbb{E}[X(t)]$ не дорівнює нулю тотожно, то центрування в теоремах 29 та 30 є випадковим, що є вкрай небажаним. Теореми 40 (випадок $\mathbb{E}\xi < \infty$) та 41 (випадок $\mathbb{E}\xi = \infty$), що наведені нижче, є граничними теоремами з невипадковим центруванням. Ці теореми будуть отримані поєднанням граничних результатів для другого доданка в (2.63) з вже наведеними теоремами 29 та 30 відповідно.

2.3.4 Збіжність другого доданка в (2.63)**.** Граничні теореми для другого доданка в (2.63) встановлено за припущення про правильну зміну h:

$$h(t) \sim t^{\rho}\widehat{\ell}(t), \quad t \to \infty, \tag{2.72}$$

для деякого $\rho \in \mathbb{R}$.

Нагадаємо, що розподіл ξ належить області притягання 2-стійкого (нормального) розподілу тоді і тільки тоді, коли $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi < \infty$ або $\mathbb{D}\xi = \infty$ та

$$\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi\leq t\}}] \sim \ell^*(t), \quad t \to \infty. \tag{2.73}$$

Розподіл ξ належить області притягання α-стійкого розподілу, $\alpha \in (0, 2)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty. \tag{2.74}$$

Якщо $\mu = \mathbb{E}\xi = \infty$, то $\alpha \in (0, 1)$ (оскільки випадок $\alpha = 1$ не розглядається) і згідно з наслідком 3.4 в [196] маємо

$$\mathbb{P}\{\xi > t\}\nu(ut) \Rightarrow W_\alpha^{\leftarrow}(u), \quad t \to \infty \tag{2.75}$$

у просторі $D[0, \infty)$ з J_1-топологією.

Якщо $\mu < \infty$, то $\alpha \in (1, 2]$ (де $\alpha = 2$ відповідає притяганню до нормального закону) та згідно з теоремами 5.3.1 та 5.3.2 в [115] або результатами розділу 7.3.1 в [268] маємо

$$\frac{\nu(ut) - \mu^{-1}ut}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(u), \quad t \to \infty, \tag{2.76}$$

де процес $(\mathcal{S}_\alpha(u))_{u\geq 0}$, $\alpha \in (1, 2]$ був означений вище, та:

(R1) якщо $\sigma^2 < \infty$, то $c(t) = \sigma\sqrt{t}$, та збіжність має місце в J_1-топології на $D[0, \infty)$;

(R2) якщо $\sigma^2 = \infty$ та виконується умова (2.73), то $c(t)$ вибирається довільною додатною функцією такою, що

$$\lim_{t\to\infty} t\ell^*(c(t))/c^2(t) = 1,$$

та збіжність має місце у J_1-топології на $D[0, \infty)$;

(R3) якщо виконується умова (2.74) з $\alpha \in (1, 2)$, то $c(t)$ вибирається довільною додатною функцією такою, що

$$\lim_{t\to\infty} t\ell^*(c(t))/c^\alpha(t) = 1,$$

та збіжність має місце в M_1-топології на $D[0, \infty)$.

У всіх випадках $c(t)$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $1/\alpha$, див. лему 160.

Покладемо

$$Z(t) := \sum_{k\geq 0} h(t - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}, \quad t \geq 0. \tag{2.77}$$

Процес $Z = (Z(t))_{t\geq 0}$ називається *процесом дробового ефекту*. Таким чином, наведені нижче твердження є граничними теоремами для процесів дробового ефекту.

Теорема 32. *Нехай функція $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є локально обмеженою, вимірною та монотонною для великих значень аргументу.*

(B1) Припустимо, що $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi < \infty$. Якщо умова (2.72) виконується для деякого $\rho > -1/2$, то

$$\left(\frac{Z(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}h(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{2,\rho}(u))_{u\ge 0}, \quad t\to\infty.$$

(B2) Припустимо, що $\sigma^2 = \infty$ та $\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi\le t\}}] \sim \ell^*(t)$, $t \to \infty$. Нехай $c(t)$ є довільною додатною функцією такою, що $\lim_{t\to\infty} \frac{t\ell^*(c(t))}{c^2(t)} = 1$. Якщо умова (2.72) виконується з $\rho > -1/2$, то

$$\left(\frac{Z(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\mu^{-3/2}c(t)h(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{2,\rho}(u))_{u\ge 0}, \quad t\to\infty.$$

(B3) Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t)$, $t \to \infty$ для деякого $1 < \alpha < 2$. Нехай $c(t)$ є довільною додатною функцією такою, що $\lim_{t\to\infty} \frac{t\ell^*(c(t))}{c^\alpha(t)} = 1$. Якщо умова (2.72) виконується з $\rho > -1/\alpha$, то

$$\left(\frac{Z(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)h(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}, \quad t\to\infty.$$

Зауваження 33. При $\alpha < 2$ та $\rho < 0$ траєкторії $I_{\alpha,\rho}$ не лежать в $D(0,\infty)$ м.н., див. теорему 132 нижче. Для неспадних h, зокрема при $\rho > 0$, збіжність скінченновимірних розподілів можна посилити до збіжності в $D[0,\infty)$ з J_1-топологією у випадках (B1) та (B2) та з M_1-топологією у випадку (B3), див. теорему 1.1 в [129].

У випадку $\mu = \infty$ монотонність h не припускається.

Теорема 34. *Нехай $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ є локально обмеженою та вимірною. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t)$ при $t \to \infty$ для деякого $0 < \alpha < 1$, а h задовольняє (2.72) для деякого $\rho \in \mathbb{R}$. Тоді*

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)} Z(ut)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (J_{\alpha,\rho}(u))_{u>0}, \quad t\to\infty.$$

За додаткового припущення, що $h \in D[0,\infty)$ та $\rho > -\alpha$, має місце слабка збіжність в J_1-топології $D(0,\infty)$.

Зауваження 35. Якщо $\rho \leq -\alpha$ то траєкторії $J_{\alpha,\rho}$ не лежать в $D(0,\infty)$ з додатною ймовірністю, див. твердження 134 нижче. З іншого боку, при $\rho > -\alpha$ граничний процес $J_{\alpha,\rho}$ майже напевно неперервний, тому збіжність в J_1-топології на $D(0,\infty)$ еквівалентна збіжності в J_1-топології на $D[a,b]$ для всіх $0 < a < b$.

Гранична теорема у випадку повільної зміни $\mathbb{P}\{\xi > t\}$

Завершимо серію результатів щодо асимптотики процесів дробового ефекту з нормуванням, що правильно змінюється, твердженням про збіжність у випадку повільної зміни хвоста розподілу ξ. Припустимо, що

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim \frac{1}{L(t)}, \quad t \to \infty \tag{2.78}$$

для деякої $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, що повільно змінюється на нескінченності та, не зменшуючи загальності, є строго зростаючою неперервною функцією з $L(0) = 0$[7].

Перед формулюванням основного результату цього підрозділу нагадаємо деякі факти про асимптотику випадкових блукань з кроками, що задовольняють умову (2.78). Класична теорема Дарлінга, див. [55], говорить, що довільне лінійне нормування $a_n S_n + b_n$ дає вироджену границю і для отримання власної граничної теореми необхідно застосувати нелінійне нормування. Більш точно, має місце такий результат

$$n^{-1} L(S_n) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{X}, \quad n \to \infty, \tag{2.79}$$

де $\mathcal{X}$ має стандартний розподіл Фреше $\mathbb{P}\{\mathcal{X} \leq x\} = e^{-1/x}$, $x > 0$. Функціональний аналог (2.79), встановлений в роботі [162], виглядає так:

$$n^{-1} L(S_{[nu]}) \Rightarrow m(u), \quad n \to \infty, \tag{2.80}$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з J_1-топологією. Тут $(m(u))_{u \geq 0}$ є екстремальним процесом для процесу Пуассона $\mathcal{P} := \sum_k \delta_{(t_k, y_k)}$ на $[0,\infty) \times (0,\infty]$ з інтенсивністю $\mathrm{d}t \times y^{-2}\mathrm{d}y$, тобто

$$m(u) := \max_{k:\, t_k \leq u} y_k, \quad u \geq 0.$$

[7]Це гарантує, що обернена функція $L^{\leftarrow}$ існує в звичайному сенсі і визначена для всіх невід'ємних аргументів. Те, що такі припущення дійсно не зменшують загальності, перевірено в лемі 4.1 роботи [155].

Позначимо через $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$ обернений до $(m(u))_{u\geq 0}$ процес:

$$m^{\leftarrow}(u) := \inf\{y \geq 0 : m(y) > u\}, \quad u \geq 0.$$

Властивості процесів $(m(u))_{u\geq 0}$ та $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$, добре вивчені, див. [74], [224] та [227]. Зокрема, одновимірні розподіли $m^{\leftarrow}$ показникові:

$$\mathbb{P}\{m^{\leftarrow}(u) > v\} = e^{-v/u}, \quad u, v \geq 0, \tag{2.81}$$

та $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$ має незалежні (але не стаціонарні) прирости. Двовимірні розподіли $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$, а також розподіли приростів відомі явно, див. твердження 2.2 та 2.3 в [197]. Нагадаємо, що обидва процеси $(m(u))_{u\geq 0}$ та його обернений не спадають по $u \geq 0$ та є м.н. неперервними в довільній фіксованій точці $u \geq 0$, див. твердження 4.7 в [227].

Використовуючи те, що узагальнене обернення є неперервним відображенням у M_1-топології на $D[0,\infty)$, див. [266], безпосередньо з (2.80) отримуємо функціональну граничну теорему для процесу $(\nu(t))_{t\geq 0}$.

Теорема 36. *За умови* (2.78) *маємо*

$$t^{-1}\nu(L^{\leftarrow}(tu)) \Rightarrow m^{\leftarrow}(u), \quad t \to \infty,$$

у просторі $D[0,\infty)$ *з* M_1*-топологією.*

Зауваження 37. Збіжність двовимірних розподілів була доведена безпосередніми обчисленнями у теоремі 2.1 [197]. Як було зазначено вище, процес $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$ є неперервним за ймовірністю, та для довільного $t > 0$ процес $u \mapsto t^{-1}\nu(L^{\leftarrow}(tu))$ не спадає м.н., тому застосувавши «теорему 3» роботи [41] ми могли б отримати сильнішу версію теореми 36 зі збіжністю в J_1-топології. На жаль, як зазначено в [271], «теорема 3» роботи Бінгхема невірна. Дійсно, як ми покажемо нижче, збіжність у M_1-топології в теоремі 36 не можна покращити до збіжності в J_1-топології, що дає ще один контрприклад до «теореми 3» в [41]. Для того щоб переконатися, що збіжність в J_1-топології відсутня, розглянемо функціонал

$$J(f(\cdot)) := \sup_{u\in[0,1]} |f(u) - f(u-)|, \quad f \in D[0,\infty).$$

Він неперервний в J_1-топології в усіх точках $f \in D[0,\infty)$, які не мають стрибка в 1, див. теорему 4.5.5 в [268], а тому неперервний з ймовірністю один в $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$. Якби мала місце збіжність в J_1-топології, теорема про неперервне відображення дала б нам збіжність

$$J(t^{-1}\nu(L^{\leftarrow}(t\cdot))) \xrightarrow{\mathrm{d}} J(m^{\leftarrow}(\cdot)), \quad t \to \infty,$$

проте $J(t^{-1}\nu(L^{\leftarrow}(t\cdot))) \leq 1/t \to 0$ при $t \to \infty$, в той час як $\mathbb{P}\{J(m^{\leftarrow}(\cdot)) > \varepsilon\} > 0$ для кожного $\varepsilon > 0$, що дає суперечність. Неформально, відсутність збіжності в J_1-топології пояснюється тим, що стрибки граничного процесу $(m^{\leftarrow}(u))_{u\geq 0}$ породжуються накопиченням великої кількості маленьких стрибків розміру $1/t$ у дограничному процесі $u \mapsto t^{-1}\nu(L^{\leftarrow}(tu))$.

Приклад 38. Розглянемо просте випадкове блукання в $\mathbb{Z}^2$, що стартує в нулі. Позначимо моменти повернення в початок координат через $\xi_1 + \cdots + \xi_k$, $k \in \mathbb{N}$, тобто ξ_k є довжиною k-ої екскурсії до повернення в початок координат. Тоді $\xi_1, \xi_2, \ldots$ є незалежними однаково розподіленими в.в., для яких відомо, див.[73], що $\mathbb{P}\{\xi_1 > n\} \sim \pi/\ln n$ при $n \to \infty$. Позначивши через $\nu(u)$ число повернень в початок координат до моменту часу $u > 0$, отримуємо з теореми 36

$$t^{-1}\nu(\exp(tu)) \Rightarrow \pi^{-1}m^{\leftarrow}(u), \quad t \to \infty$$

у просторі $D[0,\infty)$ з M_1-топологією. Вперше цей результат був отриманий в [162].

Має місце така теорема для процесів дробового ефекту $Z(u) := \sum_{k\geq 0} h(u - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq u\}}$ у випадку повільної зміни $\mathbb{P}\{\xi > t\}$.

Теорема 39. *Нехай $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є локально обмеженою вимірною функцією такою, що $h \circ L^{\leftarrow}$ правильно змінюється з індексом $\alpha \in \mathbb{R}$. Якщо виконується умова* (2.78)*, то*

$$\left(\frac{Z(L^{\leftarrow}(tu))}{th(L^{\leftarrow}(t))}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (u^{\alpha}m^{\leftarrow}(u))_{u>0}, \quad t \to \infty. \tag{2.82}$$

Доведення теореми 39 буде наведено в підрозділі 2.3.8.

2.3.5 Граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією.

Теорема 40. *Припустимо, що розподіл ξ належить області притягання α-стійкого закону, $\alpha \in (1,2]$, функція c визначена формулою* (2.76)*, функція h є монотонною для великих значень аргументу та не дорівнює нулю тотожно, а границя*

$$p := \lim_{t\to\infty} \frac{c^2(t)h^2(t)}{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)} \in [0,1],$$

існує. Припустимо також, що

- *якщо $p<1$, то виконуються умови теореми 29;*
- *якщо $p>0$, то $h(t)\sim t^\rho \widehat{\ell}(t)$ при $t\to\infty$ для деякого $\rho > -1/\alpha$ та деякої $\widehat{\ell}$;*
- *якщо $p=1$, то $\lim_{t\to\infty}\int_0^t v(y)\mathrm{d}y = \infty$ та існує додатна монотонна функція u така, що $v(t)\sim u(t)$ при $t\to\infty$, або v є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$;*
- *якщо $p\in(0,1)$, то X не залежить від ξ.*

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut) - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}$$
$$\left(\sqrt{\frac{(1-p)(1+\beta)}{\mu}}V_\beta(u) + \sqrt{p}\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}\int_0^u (u-y)^\rho\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y)\right)_{u>0}, \ t\to\infty,$$

де процес V_β був введений в означенні 23, а $\mathcal{S}_\alpha$ не залежить від V_β.

Теорема 41. *Припустимо, що умова* (2.74) *виконується з $\alpha\in(0,1)$ та h не дорівнює нулю тотожно. Припустимо, що границя*

$$q := \lim_{t\to\infty}\frac{h^2(t)}{v(t)\mathbb{P}\{\xi>t\} + h^2(t)} \in [0,1]$$

існує та

- *якщо $q<1$, то виконуються умови теореми 30 (з тим же α);*

- *якщо $q = 1$, то $h(t) \sim t^\rho \widehat{\ell}(t)$, $t \to \infty$ для деякого $\rho \geq -\alpha$ та деякої $\widehat{\ell}$; якщо $\rho = -\alpha$, то припустимо, що існує додатна зростаюча функція w така, що $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$ та $\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}w(t)} = 1$.*

Покладемо $\rho := (\beta - \alpha)/2$, якщо $q \in (0, 1)$. Тоді

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}Y(ut)}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\sqrt{1-q}Z_{\alpha,\beta}(u) + \sqrt{q}\int_{[0,u]} (u-y)^\rho \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\right)_{u>0}, \quad t \to \infty,$$

де процес $Z_{\alpha,\beta}$ був введений в означенні 28, а процес $W_\alpha^{\leftarrow}$ під знаком інтеграла той же, що й в означенні процесу $Z_{\alpha,\beta}$. Зокрема, доданки, що визначають граничний процес залежні.

Має місце проста ситуація, в якій слабка збіжність скінченновимірних розподілів, отримана в теоремі 41, може бути посилена до функціональної граничної теореми в $D[0,\infty)$. Зрозуміло, що випадок, коли граничний процес в теоремі 30 є умовним білим шумом (тобто $C(u, w) = 0$ при $u \neq w$), має бути виключено, оскільки тоді граничний процес не має версії в $D[0, \infty)$.

Наслідок 42. Припустимо, що $X(t)$ є майже непевно зростаючим, та $\lim_{t\to\infty} X(t) \in (0, \infty]$ м.н. Нехай виконані умови теореми 41 з $q = 1$, а у випадку $q < 1$ умову на функцію $f(u, w)$ замінено на умову, що $(u, w) \mapsto \mathbb{E}[X(u)X(w)]$ правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β та граничною функцією C. Тоді збіжність в теоремі 41 виконується в сенсі M_1-топології на $D[0,\infty)$, де $Z_{\alpha,\beta}(0) = 0$ визначається за неперервністю як границя за ймовірністю $Z_{\alpha,\beta}(u)$ при $u \downarrow 0$. Якщо граничний процес м.н. має неперервні траєкторії, то збіжність в теоремі 41 виконується в сенсі J_1-топології на $D[0, \infty)$.

Зауваження 43. Оскільки будь-яка версія процесу $Z_{\alpha,\beta}$ при $\beta \leq -\alpha$ має траєкторії, що лежать в $D(0, \infty)$ з ймовірністю строго менше 1, див. розділ 6.3, то збіжність скінченновимірних розподілів в теоремі 41 не може бути посилена до збіжності в $D(0, \infty)$ при $\beta = -\alpha$.

2.3.6 Доведення теорем 29 та 30. Для фіксованої σ-алгебри $\mathcal{G}$ ми позначатимемо $\mathbb{E}_\mathcal{G}[\cdot]$ умовне математичне сподівання $\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{G}]$. Нагадаємо, що $\nu(t) =$

$\inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}$, $t \geq 0$ позначає момент першого потрапляння в (t, ∞), а $U(t) := \mathbb{E}[\nu(t)] = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k \leq t\}$, $t \geq 0$ – відповідну функцію відновлення.

Доведення теореми 29. Ми розглянемо випадок, коли $C(u,w) > 0$ для деяких $u, w > 0$, $u \neq w$. Модифікації, потрібні у випадку $C(u,w) = 0$ для всіх $u, w > 0$, $u \neq w$, мають бути зрозумілі з контексту.

Не зменшуючи загальності, припустимо, що процес X є центрованим, у протилежному випадку можемо працювати з процесом $X(t) - h(t)$. Згідно з прийомом Крамера-Уолда, див. теорему 29.4 в [40], достатньо показати, що

$$\frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j \sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u_j t - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq u_j t\}}}{\sqrt{\mu^{-1} t v(t)}} \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_{j=1}^m \alpha_j V_\beta(u_j), \quad t \to \infty, \tag{2.83}$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$, всіх $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ та довільних $0 < u_1 < \cdots < u_m < \infty$. Зауважимо, що в.в. $\sum_{j=1}^m \alpha_j V_\beta(u_j)$ має нормальний розподіл з середнім 0 та дисперсією

$$(1+\beta)^{-1} \sum_{j=1}^m \alpha_j^2 u_j^{1+\beta} + 2 \sum_{1\leq i<j\leq m} \alpha_i \alpha_j \int_0^{u_i} C(u_i - y, u_j - y)\,\mathrm{d}y \ =:\ D(u_1, \ldots, u_m). \tag{2.84}$$

Визначимо σ-алгебри $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$ та $\mathcal{F}_k := \sigma((X_1, \xi_1), \ldots, (X_k, \xi_k))$, $k \in \mathbb{N}$ та помітимо, що

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k}\left[\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{\{S_k \leq u_j t\}} X_{k+1}(u_j t - S_k)\right] = 0.$$

Отже, для доведення (2.83) можна скористатись мартингальною граничною теоремою, сформульованою в наслідку 3.1 в [117]. Достатньо перевірити, що

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_k}[Z_{k+1,t}^2] \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ D(u_1, \ldots, u_m), \quad t \to \infty, \tag{2.85}$$

та

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}_k}\big[Z_{k+1,t}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}| > y\}}\big] \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \quad t \to \infty \tag{2.86}$$

для всіх $y > 0$, де

$$Z_{k+1,t} := \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{1}_{\{S_k \leq u_j t\}} X_{k+1}(u_j t - S_k)}{\sqrt{\mu^{-1} t v(t)}}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad t > 0.$$

Доведення (2.86). З огляду на нерівність

$$\begin{aligned}(a_1+\cdots+a_m)^2\mathbb{1}_{\{|a_1+\cdots+a_m|>y\}} &\le (|a_1|+\cdots+|a_m|)^2\mathbb{1}_{\{|a_1|+\cdots+|a_m|>y\}}\\ &\le m^2(|a_1|\vee\ldots\vee|a_m|)^2\mathbb{1}_{\{m(|a_1|\vee\ldots\vee|a_m|)>y\}}\\ &\le m^2\big(a_1^2\mathbb{1}_{\{|a_1|>y/m\}}+\cdots+a_m^2\mathbb{1}_{\{|a_m|>y/m\}}\big),\end{aligned} \tag{2.87}$$

яка виконується для $a_1,\ldots,a_m\in\mathbb{R}$, достатньо показати, що

$$\sum_{k\ge0}\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k}\Big[\frac{X_{k+1}^2(t-S_k)}{\mu^{-1}tv(t)}\mathbb{1}_{\{|X_{k+1}(t-S_k)|>y\sqrt{\mu^{-1}tv(t)}\}}\Big]\ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0,\quad t\to\infty \tag{2.88}$$

для всіх $y>0$. Ми писатимемо t замість u_jt, що допустимо внаслідок правильної зміни v та довільності $y>0$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $t\mapsto tv(t)$ зростає, оскільки в протилежному випадку ми могли б працювати з асимптотично еквівалентною їй функцією $(\beta+1)\int_0^t v(y)\mathrm{d}y$, див. лему 159(в). Згідно з нерівністю Маркова та згаданою монотонністю співвідношення (2.88) випливатиме з

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{tv(t)}\int_{[0,t]}v_y(t-x)\,\mathrm{d}U(x)=0 \tag{2.89}$$

для всіх $y>0$, де v_y задається формулою (2.68). Використовуючи те, що $\mu<\infty$, v є локально обмеженою, вимірною та правильно змінюється на нескінченності з індексом $\beta\in(-1,\infty)$, застосування леми 168 з $r_1=0$ та $r_2=1$ дає

$$\int_{[0,t]}v(t-x)\,\mathrm{d}U(x)\ \sim\ \mathrm{const}\,tv(t),\quad t\to\infty.$$

Оскільки згідно з (2.68) маємо $v_y(t)=o(v(t))$, (2.89) випливає з леми 167(б).

Доведення (2.85). Можна перевірити, що

$$\begin{aligned}\sum_{k\ge0}\mathbb{E}_{\mathcal{F}_k}[Z_{k+1,t}^2] &= \frac{\sum_{j=1}^m\alpha_j^2\sum_{k\ge0}\mathbb{1}_{\{S_k\le u_jt\}}v(u_jt-S_k)}{\mu^{-1}tv(t)}\\ &+\frac{2\sum_{1\le i<j\le m}\alpha_i\alpha_j\sum_{k\ge0}\mathbb{1}_{\{S_k\le u_it\}}f(u_it-S_k,u_jt-S_k)}{\mu^{-1}tv(t)}.\end{aligned}$$

Доведемо, що при $t\to\infty$

$$\frac{\sum_{k\ge0}\mathbb{1}_{\{S_k\le u_it\}}v(u_it-S_k)}{\mu^{-1}tv(t)}=\frac{\int_{[0,u_i]}v((u_i-y)t)\,\mathrm{d}\nu(ty)}{\mu^{-1}tv(t)}\ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ \frac{u_i^{1+\beta}}{1+\beta} \tag{2.90}$$

та

$$\frac{\sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq u_it\}}f(u_it-S_k,u_jt-S_k)}{\mu^{-1}tv(t)} = \frac{\int_{[0,u_i]}f((u_i-y)t,(u_j-y)t)\,\mathrm{d}\nu(ty)}{\mu^{-1}tv(t)}$$

$$\overset{\mathbb{P}}{\to} \int_0^{u_i}C(u_i-y,u_j-y)\mathrm{d}y \qquad (2.91)$$

для всіх $1\leq i<j\leq m$.

Зафіксуємо довільні $u_i<u_j$ та $\varepsilon\in(0,u_i)$. Згідно з функціональним законом великих чисел, див. теорему 4 в [86],

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{y\in[0,u_i]}\left|\frac{\nu(ty)}{\mu^{-1}t}-y\right|=0 \quad \text{м.н.}$$

Також

$$\lim_{t\to\infty}\frac{v((u_i-y)t)}{v(t)}=(u_i-y)^\beta$$

рівномірно по $y\in[0,u_i-\varepsilon]$ за лемою 159(a), та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{f((u_i-y)t,(u_j-y)t)}{v(t)}=C(u_i-y,u_j-y)$$

рівномірно по $y\in[0,u_i-\varepsilon]$ згідно з (2.64). Застосовуючи лему 171(a) двічі (з $\mathcal{V}_t(y)=\nu(ty)/(\mu^{-1}t)$), отримуємо

$$\int_{[0,u_i-\varepsilon]}\frac{v((u_i-y)t)}{v(t)}\,\mathrm{d}\frac{\nu(ty)}{\mu^{-1}t} \overset{\mathbb{P}}{\to} \int_0^{u_i-\varepsilon}(u_i-y)^\beta\,\mathrm{d}y = \frac{u_i^{1+\beta}-\varepsilon^{1+\beta}}{1+\beta}$$

та

$$\int_{[0,u_i-\varepsilon]}\frac{f((u_i-y)t,(u_j-y)t)}{v(t)}\,\mathrm{d}\frac{\nu(ty)}{\mu^{-1}t} \overset{\mathbb{P}}{\to} \int_0^{u_i-\varepsilon}C(u_i-y,u_j-y)\,\mathrm{d}y.$$

При $\varepsilon\downarrow 0$ праві частини останніх двох співвідношень збігаються до $(1+\beta)^{-1}u_i^{1+\beta}$ та $\int_0^{u_i}C(u_i-y,u_j-y)\mathrm{d}y$ відповідно. Тому для доведення (2.90) та (2.91) достатньо перевірити, що

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\left\{\frac{\int_{(u_i-\varepsilon,\,u_i]}v(t(u_i-y))\,\mathrm{d}\nu(ty)}{tv(t)}>\delta\right\}=0$$

та

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\left\{\frac{\left|\int_{(u_i-\varepsilon,\,u_i]}f(t(u_i-y),t(u_j-y))\,\mathrm{d}\nu(ty)\right|}{tv(t)}>\delta\right\}=0$$

для всіх $\delta > 0$, див. теорему 4.2 в [39]. За нерівністю Маркова достатньо показати, що

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\int_{(u_i-\varepsilon,\, u_i]} v((u_i-y)t)\, \mathrm{d}U(ty)}{tv(t)} \; = \; 0 \tag{2.92}$$

та

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\int_{(u_i-\varepsilon,\, u_i]} |f((u_i-y)t, (u_j-y)t)|\, \mathrm{d}U(ty)}{tv(t)} \; = \; 0 \tag{2.93}$$

відповідно. Зробивши заміну змінної $s = u_i t$ та згадавши, що v правильно змінюється з індексом $\beta \in (-1, \infty)$, можна застосувати лему 168 з $r_1 = 1 - \varepsilon u_i^{-1}$ та $r_2 = 1$, щоб отримати

$$\begin{aligned} \int_{((u_i-\varepsilon)t,\, u_i t]} v(u_i t - y)\, \mathrm{d}U(y) \; &= \; \int_{((1-\varepsilon u_i^{-1})s, s]} v(s-y)\, \mathrm{d}U(y) \\ &\sim \; \left(\frac{\varepsilon}{u_i}\right)^{1+\beta} \frac{sv(s)}{(1+\beta)\mu} \; \sim \; \frac{\varepsilon^{1+\beta} tv(t)}{(1+\beta)\mu}, \quad t \to \infty. \end{aligned}$$

Використавши (2.65), отримуємо

$$\begin{aligned} &\int_{((u_i-\varepsilon)t,\, u_i t]} |f(u_i t - y, u_j t - y)|\, \mathrm{d}U(y) \\ &\qquad \le \; \frac{1}{2} \int_{((u_i-\varepsilon)t,\, u_i t]} v(u_i t - y)\, \mathrm{d}U(y) + \frac{1}{2} \int_{((u_i-\varepsilon)t,\, u_i t]} v(u_j t - y)\, \mathrm{d}U(y) \\ &\qquad \sim \; \frac{1}{2\mu(1+\beta)} \big(\varepsilon^{1+\beta} + (u_j - u_i + \varepsilon)^{1+\beta} - (u_j - u_i)^{1+\beta}\big) tv(t), \end{aligned}$$

де в другому інтегралі ми зробили заміну змінної $s = u_j t$, застосували лему 168 з $r_1 = (u_i - \varepsilon) u_j^{-1}$ та $r_2 = u_i u_j^{-1}$, а потім повернулись до початкової змінної t. З цих співвідношень випливають (2.92) та (2.93). Доведення теореми 29 завершено. □

Для доведення теореми 30 нам знадобляться дві допоміжні леми. Їх доведення можна знайти в додатку C.

Лема 44. *Нехай $(Z_{k,t})_{k\in\mathbb{N},\, t>0}$ є родиною випадкових величин, заданих на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$, а $\mathcal{G}$ є під-σ-алгеброю $\mathfrak{S}$. Припустимо, що при фіксованій σ-алгебрі $\mathcal{G}$ випадкові величини $Z_{k,t}$, $k \in \mathbb{N}$ незалежні для кожного фіксованого $t > 0$. Якщо*

$$\sum_{k\ge 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2] \; \xrightarrow{\mathrm{d}} \; D, \quad t \to \infty \tag{2.94}$$

для деякої в.в. D та

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>y\}}] \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty \tag{2.95}$$

для всіх $y>0$, то для кожного $z\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] \overset{\mathrm{d}}{\to} \exp(-Dz^2/2), \quad t\to\infty, \tag{2.96}$$

$$\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] \to \mathbb{E}\Big[\exp\big(-Dz^2/2\big)\Big], \quad t\to\infty \tag{2.97}$$

та

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] - \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} \widehat{Z}_{k+1,t}\bigg)\bigg] \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \ \ t\to\infty, \tag{2.98}$$

де при фіксованій σ-алгебрі $\mathcal{G}$ $\widehat{Z}_{1,t}, \widehat{Z}_{2,t}, \ldots$ є умовно незалежними нормальними в.в. з середнім 0 та дисперсіями $\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{1,t}^2], \mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{2,t}^2], \ldots$, тобто

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[\exp(\mathrm{i}z\widehat{Z}_{k+1,t})] = \exp(-\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2]z^2/2), \ k\in\mathbb{N}_0.$$

Лема 45. *Припустимо, що умова* (2.70) *виконується для деякого $\alpha\in(0,1)$, та $f(u,w)=\mathrm{Cov}[X(u)X(w)]$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}_+^2$ або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом $\beta\geq-\alpha$ та граничною функцією C. Якщо*

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}\int_{(\rho z,z]} v(t(z-y))\,\mathrm{d}U(ty) \ = \ 0 \tag{2.99}$$

для всіх $z>0$, то

$$\begin{aligned}
&\lambda_1\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\int_{[0,u_m]}\sum_{j=1}^m \gamma_j h((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_j]}(y)\,\mathrm{d}\nu(ty)\\
&\quad+\lambda_2\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}\int_{[0,u_m]}\bigg(\sum_{j=1}^m\gamma_j^2 v((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_j]}(y)\\
&\quad+2\sum_{i<j}\gamma_i\gamma_j f((u_i-y)t,(u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_i]}(y)\bigg)\mathrm{d}\nu(ty)\\
&\quad\overset{\mathrm{d}}{\to}\lambda_1 b^{-1/2}\sum_{j=1}^m\gamma_j\int_{[0,u_j]}(u_j-y)^{(\beta-\alpha)/2}\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)+\lambda_2\times \qquad (2.100)\\
&\bigg(\sum_{j=1}^m\gamma_j^2\int_{[0,u_j]}(u_j-y)^{\beta}\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)+2\sum_{i<j}\gamma_i\gamma_j\int_{[0,u_i]}C(u_i-y,u_j-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\bigg)
\end{aligned}$$

для довільного $m \in \mathbb{N}$, *довільних* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, *довільних* $0 < u_1 < \cdots < u_m < \infty$ *та довільних* λ_1 *і* λ_2 *за додаткового припущення, що у випадку* $\lambda_1 > 0$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h^2(t)} = b \in (0, \infty) \tag{2.101}$$

та

$$\lim_{\rho \uparrow 1} \overline{\lim_{t \to \infty}} \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}} \int_{(\rho z, z]} h((z-y)t) \, \mathrm{d}U(ty) \; = \; 0 \tag{2.102}$$

для всіх $z > 0$.

Можемо перейти до доведення теореми 30. В подальшому $\mathcal{F}$ позначатиме σ-алгебру, породжену $(S_n)_{n \geq 0}$.

Доведення теореми 30. Як і в попередньому доведенні ми припускаємо, що процес X центрований. Покладемо $r(t) := v(t)/\mathbb{P}\{\xi > t\}$. Використавши прийом Крамера-Уолда, бачимо, що достатньо перевірити

$$\frac{1}{\sqrt{r(t)}} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j Y(u_j t) \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; \sum_{j=1}^{m} \gamma_j Z_{\alpha,\beta}(u_j), \quad t \to \infty \tag{2.103}$$

для всіх $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$. Оскільки $C(y, y) = y^\beta$, то при заданому $W_\alpha^{\leftarrow}$ випадкова величина $\sum_{j=1}^m \gamma_j Z_{\alpha,\beta}(u_j)$ має центрований нормальний розподіл з дисперсією

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m) \;:=\; & \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2 \int_{[0,u_j]} (u_j - y)^\beta \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \\ & +2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \gamma_i \gamma_j \int_{[0,u_i]} C(u_i - y, u_j - y) \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y). \end{aligned} \tag{2.104}$$

Еквівалентно

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^{m} \gamma_j Z_{\alpha,\beta}(u_j)\Big)\Big] = \mathbb{E}\big[\exp(-D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m) z^2/2)\big], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Отже, згідно з лемою 44 (2.103) є наслідком

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[Z_{k+1,t}^2] \;\overset{\mathrm{d}}{\to}\; D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m), \tag{2.105}$$

де $Z_{k+1,t} := (r(t))^{-1/2} \sum_{j=1}^m \gamma_j X_{k+1}(u_j t - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \leq u_j t\}}$, та

$$\sum_{k \geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[Z_{k+1,t}^2 \mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}| > y\}}] \;\overset{\mathbb{P}}{\to}\; 0 \tag{2.106}$$

для всіх $y > 0$. Оскільки $r(t)$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $\beta + \alpha$, маємо

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{r(t)} \int_{(\rho z, z]} v(t(z-y))\,\mathrm{d}U(ty) \le \lim_{t\to\infty} \frac{r(tz)}{r(t)} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{r(tz)} \int_{(\rho tz, tz]} v(tz-y)\,\mathrm{d}U(y)$$
$$= z^{\beta+\alpha} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{r(t)} \int_{(\rho t, t]} v(t-y)\,\mathrm{d}U(y)$$

для всіх $z > 0$. Отже, співвідношення

$$\lim_{\rho\uparrow 1} \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{r(t)} \int_{(\rho z, z]} v(t(z-y))\,\mathrm{d}U(ty) \;=\; 0 \tag{2.107}$$

для всіх $z > 0$ випливає з леми 170(а). Використовуючи зображення

$$\sum_{k\ge 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[Z_{k+1,t}^2] = \frac{1}{r(t)} \int_{[0,u_m]} \Bigg(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2 v((u_j-y)t) \mathbb{1}_{[0,u_j]}(y)$$
$$+ 2 \sum_{1\le i<j\le m} \gamma_i\gamma_j f((u_i-y)t, (u_j-y)t) \mathbb{1}_{[0,u_i]}(y) \Bigg) \mathrm{d}\nu(ty),$$

робимо висновок, що (2.105) випливає з леми 45 з $\lambda_1 = 0$ (зауважимо, що умови (2.101) та (2.102) не потрібні, та (2.99) збігається з (2.107)). З огляду на (2.87), (2.106) є наслідком

$$\frac{1}{r(t)} \sum_{k\ge 0} \mathbb{1}_{\{S_k\le t\}} \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \Big[X_{k+1}^2(t-S_k) \mathbb{1}_{\{|X_{k+1}(t-S_k)| > y\sqrt{r(t)}\}} \Big] \;\overset{\mathbb{P}}{\to}\; 0, \quad t\to\infty \tag{2.108}$$

для всіх $y > 0$. Для доведення (2.108) припустимо, не зменшуючи загальності, що функція r зростає (у випадку $\beta = -\alpha$ вона асимптотично еквівалентна зростаючій функції u за припущенням, у випадку $\beta > -\alpha$ існування такої функції гарантується лемою 159(б)). Використовуючи цю монотонність та наше припущення $h \equiv 0$, з якого випливає $v_y(t) = \mathbb{E}[X^2(t)\mathbb{1}_{\{|X(t)|>y\sqrt{r(t)}\}}]$, робимо висновок, що згідно з нерівністю Маркова достатньо перевірити

$$\mathbb{E}\Bigg[\sum_{k\ge 0} \mathbb{1}_{\{S_k\le t\}} \mathbb{E}_{\mathcal{F}} \Big[X_{k+1}^2(t-S_k) \mathbb{1}_{\{|X_{k+1}(t-S_k)| > y\sqrt{r(t-S_k)}\}} \Big] \Bigg]$$
$$= \int_{[0,t]} v_y(t-x)\,\mathrm{d}U(x) \;=\; o(r(t))$$

для всіх $y > 0$. З огляду на (2.71) останнє співвідношення є наслідком леми 170(б) з $\phi_1(t) = v_y(t)$, $\phi(t) = v(t)$, $q(t) = u(t)$ та $\gamma = \beta$. Доведення теореми 30 завершено. $\square$

2.3.7 Доведення теорем 32 та 34.

Доведення теореми 32. Ми дамо доведення у більш складному випадку, коли функція h не зростає з деякого місця, тобто $\rho \in (-1/\alpha, 0]$[8]. Доведення у випадку, коли h не спадає є схожим і може бути знайдено в [129], див. також зауваження 46 нижче.

Ми розглядатимемо випадки (B1)-(B3) одночасно. Нехай $g(t) := \mu^{-1-1/\alpha}c(t)$, де функція c була визначена в (2.76), та

$$Z_t(u) \ := \ \frac{Z(ut) - \int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{g(t)h(t)}, \quad t > 0, \quad u \geq 0.$$

Спершу ми покажемо, що h можна замінити на незростаючу, неперервну функцією h^* таку, що $h^*(t) \sim h(t)$ при $t \to \infty$. Таким чином, нам потрібно побудувати функцію h^* та довести, що

$$(Z_t^*(u))_{u\geq 0} \ := \ \left(\frac{\int_{[0,\,ut]} h^*(ut-y)\,\mathrm{d}\nu(y) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h^*(y)\,\mathrm{d}y}{g(t)h^*(t)}\right)_{u\geq 0}$$
$$\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \ (I_{\alpha,\rho}(u))_{u\geq 0}. \tag{2.109}$$

де, нагадаємо, $I_{\alpha,0} = \mathcal{S}_\alpha$ та

$$I_{\alpha,\rho}(u) \ := \ \mathcal{S}_\alpha(u)u^\rho + |\rho|\int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u \geq 0$$

при $\rho < 0$. Після чого, для перевірки збіжності $(Z_t(u))_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{\alpha,\rho}(u))_{u\geq 0}$ при $t \to \infty$, достатньо показати, що для кожного $u > 0$,

$$\frac{\int_{[0,\,ut]}(h(ut-y) - h^*(ut-y))\,\mathrm{d}\nu(y)}{g(t)h(t)} \ \overset{\mathbb{P}}{\to} \ 0, \quad t \to \infty, \tag{2.110}$$

та

$$\frac{\int_0^{ut}(h(y) - h^*(y))\,\mathrm{d}y}{g(t)h(t)} \ \to \ 0, \quad t \to \infty. \tag{2.111}$$

Розпочнемо з побудови h^*. За припущенням h не зростає з деякого місця, отже існує $a > 0$ таке, що h не зростає на $[a, \infty)$. Нехай $\widehat{h}$ є локально обмеженою, незростаючою функцією такою, що $\widehat{h}(t) = h(t)$ при $t \geq a$. Помітимо, що така $\widehat{h}$ є невід'ємною. Покажемо, що заміна h на $\widehat{h}$ в означенні $Z(t)$ не впливає на

[8] Якщо $\rho < -1/\alpha$, то ми знаходимось в умовах теореми 14. Випадок $\rho = -1/\alpha$ є цікавим, див. теорему 51 нижче для аналізу в ситуації $\alpha = 2$ та $\sigma^2 < \infty$.

асимптотику. Дійсно, якщо позначити через $\widehat{Z}$ процес дробового ефекту, побудований за тим же випадковим блуканням, що й Z, але з функцією відповіді $\widehat{h}$ замість h, то для кожного $u > 0$ та великих t,

$$
\begin{aligned}
&|Z(ut) - \widehat{Z}(ut)| \\
&= \int_{[0,\, tu]} (h(t-y) - \widehat{h}(t-y))\mathrm{d}\nu(y) = \int_{[u-a,\, u]} (h(t(u-y)) - \widehat{h}(t(u-y)))\mathrm{d}\nu(ty) \\
&\leq \sup_{y\in[0,\, a]} |h(y) - \widehat{h}(y)|(\nu(ut) - \nu(ut-a)) \overset{\mathrm{d}}{\leq} \sup_{y\in[0,\, a]} |h(y) - \widehat{h}(y)|\nu(a),
\end{aligned}
$$

де ми використали субадитивність ν за розподілом. Локальна обмеженість h та $\widehat{h}$ гарантує, що останній супремум скінченний. Оскільки $\rho \in (-1/\alpha, 0]$ у всіх випадках, то $t \mapsto g(t)h(t)$ правильно змінюється з додатним індексом, а, отже, прямує до нескінченності при $t \to \infty$. Таким чином,

$$
\frac{Z(ut) - \widehat{Z}(ut)}{g(t)h(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t \to \infty. \tag{2.112}
$$

Далі, при $ut \geq a$ та $t \to \infty$, маємо

$$
\left| \frac{\int_0^{ut} (h(y) - \widehat{h}(y))\mathrm{d}y}{g(t)h(t)} \right| \leq \frac{\int_0^{ut} |h(y) - \widehat{h}(y)|\mathrm{d}y}{g(t)h(t)} = \frac{\int_{[0,\, a]} \big|h(y) - \widehat{h}(y)\big|\mathrm{d}y}{g(t)h(t)} \to 0. \tag{2.113}
$$

Отже, далі ми можемо працювати з $\widehat{h}$ замість h. Побудуємо функцію h^* з $\widehat{h}$. Нехай θ є випадковою величиною зі стандартним показниковим розподілом. Покладемо

$$
h^*(t) \ := \ \mathbb{E}\widehat{h}\big((t-\theta)^+\big) \ = \ e^{-t}\bigg(\widehat{h}(0) + \int_0^t \widehat{h}(y)e^y \mathrm{d}y\bigg), \quad t \geq 0. \tag{2.114}
$$

Очевидно, що $\widehat{h}(t) \leq h^*(t)$, $t \geq 0$, а функція h^* є неперервною, незростаючою на $\mathbb{R}_+$ та $h^*(0) = \widehat{h}(0) < \infty$. Понад це, $h^*(t) \sim \widehat{h}(t) \sim h(t)$, $t \to \infty$. Це тривіально у випадку $\lim_{t\to\infty} h(t) \neq 0$, який може мати місце при $\rho = 0$, але потребує перевірки в протилежному випадку. Використаємо другу рівність в (2.114). Оскільки $1/\widehat{h}$ правильно змінюється, то вона зростає субекспоненційно. Використавши цей факт та правильну зміну $\widehat{h}$, отримуємо, що для довільного $\varepsilon \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}\frac{h^*(t)}{\widehat{h}(t)} &= \mathbb{E}\left[\frac{\widehat{h}\big((t-\theta)^+\big)}{\widehat{h}(t)}\mathbb{1}_{\{\theta>\varepsilon t\}}\right]+\mathbb{E}\left[\frac{\widehat{h}\big((t-\theta)^+\big)}{\widehat{h}(t)}\mathbb{1}_{\{\theta\le\varepsilon t\}}\right]\\ &\le \frac{\widehat{h}(0)}{\widehat{h}(t)}e^{-\varepsilon t}+\frac{\widehat{h}((1-\varepsilon)t)}{\widehat{h}(t)}(1-e^{-\varepsilon t}) \underset{t\to\infty}{\to} (1-\varepsilon)^\rho \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1.\end{aligned}$$

Оскільки $\widehat{h}(t)\le h^*(t)$ для всіх $t\ge 0$, це доводить $h^*(t)\sim\widehat{h}(t)$ при $t\to\infty$. Покажемо, що

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t (h^*(y)-\widehat{h}(y))\,\mathrm{d}y \;=\; \widehat{h}(0). \tag{2.115}$$

Використаємо представлення

$$\int_0^t(h^*(y)-\widehat{h}(y))\mathrm{d}y=\widehat{h}(0)(1-e^{-t})-\mathbb{E}\int_{t-\theta}^t\widehat{h}(y)\mathrm{d}y\mathbb{1}_{\{\theta\le t\}}-\int_0^t\widehat{h}(y)\mathrm{d}ye^{-t},$$

де останній член, очевидно, прямує до нуля при $t\to\infty$. Використовуючи монотонність $\widehat{h}$ та теорему про мажоровану збіжність, отримуємо

$$\mathbb{E}\left(\int_{t-\theta}^t\widehat{h}(y)\mathrm{d}y\mathbb{1}_{\{\theta\le t\}}\right)\;\le\;\mathbb{E}(\theta\widehat{h}(t-\theta)\mathbb{1}_{\{\theta\le t\}})\;\to\;0,\quad t\to\infty,$$

що доводить (2.115). Зокрема,

$$\left|\frac{\int_0^{ut}(\widehat{h}(y)-h^*(y))\mathrm{d}y}{g(t)h(t)}\right| \;=\; \frac{\int_0^{ut}(h^*(y)-\widehat{h}(y))\mathrm{d}y}{g(t)h(t)}\;\to\;0,\quad t\to\infty,$$

так як $\lim_{t\to\infty}g(t)h(t)=\infty$. У поєднанні з (2.113) це доводить (2.111). Згадуючи (2.115) та використовуючи лему 169 (з $f_1=h^*$ та $f_2=\widehat{h}$) і той факт, що у всіх випадках $\lim_{t\to\infty}g(t)h(t)=\infty$, робимо висновок

$$\begin{aligned}\left|\frac{\int_{[0,\,ut]}(\widehat{h}(ut-y)-h^*(ut-y))\,\mathrm{d}\nu(y)}{g(t)h(t)}\right| &= \frac{\int_{[0,\,ut]}(h^*(ut-y)-\widehat{h}(ut-y))\,\mathrm{d}\nu(y)}{g(t)h(t)}\\ &\overset{L_1}{\to} 0,\end{aligned}$$

при $t\to\infty$. Разом з (2.112) це дає (2.110).

Залишається довести (2.109). Враховуючи прийом Крамера-Уолда та вищесказане, для доведення збіжності скінченновимірних розподілів $Z_t(u)$, достатньо перевірити, що для довільного $n\in\mathbb{N}$, довільних $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in\mathbb{R}$ та $0\le u_1<\dots<u_n$ маємо

$$\sum_{k=1}^n\gamma_k Z_t^*(u_k)\;\overset{\mathrm{d}}{\to}\;\sum_{k=1}^n\gamma_k I_{\alpha,\rho}(u_k),\quad t\to\infty.$$

Оскільки $Z_t^*(0) = I_{\alpha,\rho}(0) = 0$ можемо вважати $u_1 > 0$. Позначивши $W_t(u) := (\nu(ut) - \mu^{-1}ut)/g(t)$ та інтегруючи частинами, маємо

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^n \gamma_k Z_t^*(u_k)\\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{g(t)h^*(t)} \left(h^*(u_k t) + \int_{(0,u_k t]} h^*(u_k t - y)\,\mathrm{d}\Big(\nu(y) - \frac{y}{\mu}\Big)\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{g(t)h^*(t)} \left(h^*(0)\Big(\nu(u_k t) - \frac{u_k t}{\mu}\Big) - \int_{(0,u_k t]} (\nu(y) - \mu^{-1}y)\,\mathrm{d}(h^*(u_k t - y))\right)\\
&= \sum_{k=1}^n \gamma_k W_t(u_k) \frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma_k}{g(t)h^*(t)} \Bigg((h^*(0) - h^*(u_k t))\Big(\nu(u_k t) - \frac{u_k t}{\mu}\Big)\\
&\qquad\qquad - \int_{[0,u_k t)} \Big(\nu(u_k t - y) - \frac{u_k t - y}{\mu}\Big)\,\mathrm{d}(-h^*(y))\Bigg)\\
&= \sum_{k=1}^n \gamma_k W_t(u_k) \frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{\int_{[0,\,u_k t)} (\nu(u_k t) - \nu(u_k t - y) - \mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)}.
\end{aligned} \tag{2.116}$$

ВИПАДОК $\rho = 0$. Наша мета – показати, що кожен доданок в другій сумі в правій частині (2.116) збігається до нуля за ймовірністю. В цьому разі збіжність

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k Z_t^*(u_k) \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_{k=1}^n \gamma_k I_{\alpha,0}(u_k) \ = \ \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathcal{S}_\alpha(u_k)$$

випливає з повільної зміни h^*, співвідношення (2.76) та леми Слуцького. Для k-го доданка в (2.116) маємо

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\int_{[0,\,u_k t)} (\nu(u_k t) - \nu(u_k t - y) - \mu^{-1}y)\,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \right|\\
&\le \ \frac{\int_{[0,\,u_k t)} |\nu^*(u_k t) - \nu^*(u_k t - y) - \mu^{-1}y|\,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)}\\
&+ \frac{\int_{[0,\,u_k t)} |\nu(u_k t) - \nu^*(u_k t)|\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)}\\
&+ \frac{\int_{[0,\,u_k t)} |\nu(u_k t - y) - \nu^*(u_k t - y)|\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)},
\end{aligned} \tag{2.117}$$

де ν^* є стаціонарним процесом відновлення. Внаслідок твердження 17, маємо

$$\frac{\mathbb{E}\Big[\int_{[0,\,u_k t)} |\nu^*(u_k t) - \nu^*(u_k t - y) - \mu^{-1} y| \,\mathrm{d}(-h^*(y))\Big]}{g(t)h^*(t)}$$
$$= \frac{\int_{[0,\,u_k t)} \mathbb{E}[|\nu^*(y) - \mu^{-1} y|] \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)}.$$

Другий і третій доданки в правій частині (2.117) збігаються до нуля за ймовірністю при $t \to \infty$ за нерівністю Маркова внаслідок співвідношення

$$\mathbb{E}[|\nu(t) - \nu^*(t)|] = \mathbb{E}(\nu(t) - \nu^*(t)) = \mu^{-1}(\mathbb{E}S_{\nu(t)} - t) = o(g(t)), \qquad (2.118)$$

при $t \to \infty$, де остання рівність – це четверта центрована формула на с. 140 в [137]. Залишається довести

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,u_k t)} \mathbb{E}|\nu^*(y) - \mu^{-1} y| \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} = 0,$$

що з огляду на (2.118) та[9]

$$\mathbb{E}[|\nu(t) - \mu^{-1} t|] = O(g(t)), \quad t \to \infty,$$

зводиться до перевірки граничного співвідношення

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,ut]} g(y) \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;=\; 0.$$

Оскільки функція $g(t)h^*(t)$ правильно змінюється, остання рівність еквівалента

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t]} g(y) \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;=\; 0. \qquad (2.119)$$

Використовуючи границю Поттера, див. формулу (A.1) в лемі 160, маємо

$$\frac{\int_{[t_0,\,t]} g(y) \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;\le\; A \frac{\int_{[t_0,\,t]} y^{1/\alpha - \delta} \,\mathrm{d}(-h^*(y))}{t^{1/\alpha - \delta} h^*(t)}$$

при $t \ge t_0$. Спрямовуючи $t \to \infty$ та використовуючи теорему 1.6.4 книги [42], отримуємо (2.119).

Випадок $\rho \in (-1/\alpha, 0)$. Для кожного $\varepsilon \in (0,1)$, запишемо

$$\begin{aligned} Z_t^*(u_k) \;&=\; W_t(u_k) \frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \int_{(0,\,u_k]} (W_t(u_k) - W_t(v))\, \rho_{t,\,k}^*(\mathrm{d}v) \\ &=\; W_t(u_k) \frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \int_{(0,\,\varepsilon u_k]} \ldots + \int_{(\varepsilon u_k,\,u_k]} \ldots, \end{aligned}$$

[9] Це співвідношення випливає з теорем 178 та 181, частини про збіжність степеневих моментів для $p = 1$.

де $\rho^*_{t,k}$ є скінченною мірою на $[0, u_k]$, що визначена

$$\rho^*_{t,k}(a,b] \;:=\; \frac{h^*(t(u_k - b)) - h^*(t(u_k - a))}{h^*(t)}, \quad 0 \le a < b \le u_k.$$

З огляду на (2.76) та теорему про неперервне відображення

$$W_t(u_k) - W_t(v) \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v), \quad t \to \infty,$$

у просторі $D[0, u_k]$ з M_1-топологією. Оскільки h^* правильно змінюється, скінченні міри $\rho^*_{t,k}$ збігаються слабко на $[0, \varepsilon u_k]$ до скінченної міри ρ^*_k на $[0, \varepsilon u_k]$, що визначається рівністю $\rho^*_k(a,b] = (u_k - b)^\rho - (u_k - a)^\rho$. Очевидно, що гранична міра є абсолютно неперервною з щільністю $x \mapsto |\rho|(u_k - x)^{\rho-1}$, $x \in [0, \varepsilon u_k]$. Отже, згідно з лемою 171(a),

$$\begin{aligned} W_t(u_k)\frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \int_{(0,\,\varepsilon u_k]} (W_t(u_k) - W_t(v))\,\rho^*_{t,k}(\mathrm{d}v) \\ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\; \mathcal{S}_\alpha(u_k)u_k^\rho + |\rho| \int_0^{\varepsilon u_k} (\mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v))(u_k - v)^{\rho-1}\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Аналогічними міркуваннями отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_k W_t(u_k)\frac{h^*(u_k t)}{h^*(t)} + \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{(0,\,\varepsilon u_k]} (W_t(u_k) - W_t(v))\,\rho^*_{t,k}(\mathrm{d}v) \\ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\; \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathcal{S}_\alpha(u_k)u_k^\rho + \sum_{k=1}^n \gamma_k |\rho| \int_0^{\varepsilon u_k} (\mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v))(u_k - v)^{\rho-1}\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Використовуючи теорему 4.2 в [39], бачимо, що залишається перевірити

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathcal{S}_\alpha(u_k)u_k^\rho + \sum_{k=1}^n \gamma_k |\rho| \int_0^{\varepsilon u_k} (\mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v))(u_k - v)^{\rho-1}\,\mathrm{d}v \\ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\; \sum_{k=1}^n \gamma_k \mathcal{S}_\alpha(u_k)u_k^\rho + \sum_{k=1}^n \gamma_k |\rho| \int_0^{u_k} (\mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v))(u_k - v)^{\rho-1}\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

при $\varepsilon \uparrow 1$, та

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1} \varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{ \Big| \sum_{k=1}^n \gamma_k \int_{[\varepsilon u_k,\, u_k]} (W_t(u_k) - W_t(v))\,\rho^*_{t,k}(\mathrm{d}v) \Big| > c \Big\} \;=\; 0 \qquad (2.120)$$

для довільного $c > 0$. Перше співвідношення еквівалентне

$$\int_{\varepsilon u_k}^{u_k} (\mathcal{S}_\alpha(u_k) - \mathcal{S}_\alpha(v))(u_k - v)^{\rho-1}\mathrm{d}v \;\stackrel{\mathbb{P}}{\to}\; 0, \quad \varepsilon \uparrow 1 \qquad (2.121)$$

і виконується навіть м. н., оскільки інтеграл $\int_0^{u_k}(\mathcal{S}_\alpha(u_k)-\mathcal{S}_\alpha(v))(u_k-v)^{\rho-1}\mathrm{d}v$ існує м.н. Для доведення (2.120) помітимо, що сума під знаком ймовірності дорівнює

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \frac{\int_{[0,\,(1-\varepsilon)u_k t]}(\nu(u_k t)-\nu(u_k t-y)-\mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)}.$$

Міркуючи так само як у випадку $\rho=0$, бачимо, що достатньо перевірити

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\int_{[0,\,(1-\rho)u_k t]}g(y)\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;=\; 0$$

при $k=1,\dots,n$, або просто

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\int_{[0,\,(1-\rho)t]}g(y)\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;=\; 0 \tag{2.122}$$

внаслідок правильної зміни $g(t)h^*(t)$. Оскільки $g(t)h^*(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, маємо

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\int_{[0,\,t_0]}g(y)\,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} \;=\; 0$$

та, внаслідок границі Поттера (A.1) леми 160,

$$\begin{aligned}\frac{\int_{[t_0,\,(1-\rho)t]}g(y)\,\mathrm{d}(-h^*(y))}{g(t)h^*(t)} &\overset{(A.1)}{\leq} A\frac{\int_{[t_0,\,(1-\rho)t]}y^{1/\alpha-\delta}\,\mathrm{d}(-h^*(y))}{t^{1/\alpha-\delta}h^*(t)}\\ &\sim \frac{\beta}{1/\alpha-\beta-\delta}(1-\rho)^{1/\alpha+\rho-\delta},\end{aligned}$$

де асимптотичне співвідношення випливає з теореми 1.6.4 книги [42]. Це завершує доведення (2.122) та всієї теореми. □

Зауваження 46. У випадку зростаючої функції h та $\rho>0$, доведення значно простіше. Враховуючи, що $\nu(0)=1$, запишемо

$$\begin{aligned}Z_t^*(u) &= \int_{[0,\,u]}\frac{h^*(t(u-y))}{h^*(t)}\mathrm{d}_y\left(\frac{\nu(yt)-\mu^{-1}yt}{g(t)}\right)\\ &= \frac{h^*(ut)}{g(t)h^*(t)}+\int_{(0,\,u]}\frac{h^*(t(u-y))}{h^*(t)}\mathrm{d}_y\left(\frac{\nu(yt)-\mu^{-1}yt}{g(t)}\right)\\ &= \int_{(0,\,u]}\frac{\nu(yt)-\mu^{-1}yt}{g(t)}\mathrm{d}_y\left(-\frac{h^*(t(u-y)}{h^*}\right)=\int_{(0,\,u]}\frac{\nu(yt)-\mu^{-1}yt}{g(t)}\rho_t^*(\mathrm{d}y)\end{aligned}$$

де скінченна міра ρ_t^* на $[0,u]$ визначена рівністю

$$\rho_t^*(a,b]:=\frac{h^*(t(u-a))-h^*(t(u-b))}{h^*(t)},\quad 0\leq a\leq b\leq u.$$

Оскільки, $\rho > 0$, то міри ρ_t^* слабко збігаються до *скінченної* міри ρ^* на $[0,\, u]$, що визначена $\rho^*(a, b] := (u-a)^\rho - (u-b)^\rho$. Ця міра є абсолютно неперервною з щільністю $x \mapsto \rho(u-x)^{\rho-1}$ на $(0, u]$. Використавши лему 171(a) та збіжність (2.76) отримуємо одновимірну збіжність

$$\int_{[0,\, u]} \frac{\nu(yt) - \mu^{-1}yt}{g(t)} \rho_t^*(\mathrm{d}y) \overset{\mathrm{d}}{\to} I_{\alpha,\rho}(u), \quad t \to \infty,$$

яка миттєво поширюється на збіжність скінченновимірних розподілів.

Доведення теореми 34. Покладемо $a(t) := \mathbb{P}\{\xi > t\}$. Зафіксуємо довільне $\varepsilon \in (0, 1)$ та покажемо, що

$$I_\varepsilon(u,t) \;:=\; \frac{a(t)}{h(t)} \sum_{k\ge 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{S_k \le \varepsilon ut\}} \Rightarrow \int_{[0,\, \varepsilon u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad t \to \infty,$$

в просторі $D(0, \infty)$ з J_1-топологією. Запишемо

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(u,t) \;&=\; a(t) \sum_{k\ge 0} \left(\frac{h(ut-S_k)}{h(t)} - (u - t^{-1}S_k)^\rho \right) \mathbb{1}_{\{S_k \le \varepsilon ut\}} \\ &+\; a(t) \sum_{k\ge 0} (u - t^{-1}S_k)^\rho \mathbb{1}_{\{S_k \le \varepsilon ut\}} = I_{\varepsilon,1}(u,t) + I_{\varepsilon,2}(u,t) \end{aligned}$$

та покажемо, що

$$I_{\varepsilon,1}(u,t) \Rightarrow 0 \quad \text{та} \quad I_{\varepsilon,2}(u,t) \Rightarrow \int_{[0,\, \varepsilon u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \tag{2.123}$$

у просторі $D(0, \infty)$ з J_1-топологією. До кінця доведення зафіксуємо довільні додатні константи $0 < a < b < \infty$. Помітимо, що

$$|I_{\varepsilon,1}(u,t)| \le \sup_{(1-\varepsilon)u \le y \le u} \left| \frac{h(ty)}{h(t)} - y^\rho \right| a(t)\nu(\varepsilon ut),$$

а, отже,

$$\sup_{a \le u \le b} |I_{\varepsilon,1}(u,t)| \le \sup_{(1-\varepsilon)a \le y \le b} \left| \frac{h(ty)}{h(t)} - y^\rho \right| a(t)\nu(\varepsilon bt).$$

Зі збіжності (2.75) випливає $a(t)\nu(\varepsilon bt) \overset{\mathrm{d}}{\to} W_\alpha^{\leftarrow}(\varepsilon b)$, що в поєднанні з лемою 159(a) дає збіжність до нуля за ймовірністю правої частини останньої центрованої формули і доводить перше співвідношення в (2.123).

Для доведення другого співвідношення в (2.123) помітимо, що

$$I_{\varepsilon,2}(u,t) = \int_{[0,\, \varepsilon u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}\left(a(t)\nu(ty)\right).$$

Нагадаємо, що $a(t)\nu(ty) \Rightarrow W_\alpha^{\leftarrow}(y)$ у просторі $D[0,\infty)$ при $t\to\infty$. Використовуючи теорему Скорохода про представлення, неперервність м.н. $(W_\alpha^{\leftarrow}(y))_{y\geq 0}$ та лему 174, отримуємо друге співвідношення в (2.123).

Звертаючись знову до теореми 4.2 в [39], бачимо, що для доведення збіжності скінченновимірних розподілів в теоремі 34 достатньо показати, що для кожного $\rho\in\mathbb{R}$ та кожного *фіксованого* $u>0$

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\int_{[0,\,\varepsilon u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) = J_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,\,u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \quad \text{м.н.} \qquad (2.124)$$

та

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\bigg\{\frac{a(t)}{h(t)}\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{\varepsilon ut<S_k\leq ut\}}>\theta\bigg\}=0 \qquad (2.125)$$

для кожного $\theta>0$. Аналогічно, функціональна збіжність при $\rho>-\alpha$ випливатиме з наступних двох тверджень. По-перше збіжність в (2.124) є локально рівномірною в $(0,\infty)$ м.н. По-друге, виконується рівномірний аналог (2.125), а саме

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\bigg\{\frac{a(t)}{h(t)}\sup_{u\in[a,\,b]}\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{\varepsilon ut<S_k\leq ut\}}>\theta\bigg\}=0 \qquad (2.126)$$

для всіх $\theta>0$.

Для перевірки того, що співвідношення (2.124) виконується поточково для всіх $\rho\in\mathbb{R}$, запишемо для фіксованого $u>0$

$$\int_{[0,\,u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)-\int_{[0,\,\varepsilon u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)=\int_{[0,\,u]}(u-y)^\rho\mathbb{1}_{(\varepsilon u,\,u]}(y)\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y).$$

За теоремою про мажоровану збіжність, права частина збігається до нуля м.н. при $\varepsilon\uparrow 1$, оскільки $J_{\alpha,\rho}(u)=\int_{[0,\,u]}(u-y)^\beta \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)<\infty$ м.н., див. підрозділ 6.2.

Ймовірність у правій частині (2.125) обмежена зверху виразом

$$\mathbb{P}\{\nu(ut)-\nu(\varepsilon ut)>0\}=\mathbb{P}\{\nu(ut)-\nu(\varepsilon ut)\geq 1\}=\mathbb{P}\{ut-S_{\nu(ut)-1}<(1-\varepsilon)ut\}.$$

Згідно з відомою теоремою Динкіна-Ламперті, див. теорему 8.6.3 в [42],

$$t^{-1}(t-S_{\nu(t)-1}) \quad \overset{\mathrm{d}}{\to} \quad \eta_\alpha, \quad t\to\infty,$$

де η_α має бета-розподіл з параметрами $1-\alpha$ та α, тобто

$$\mathbb{P}\{\eta_\alpha\in \mathrm{d}x\}=\pi^{-1}\sin(\pi\alpha)x^{-\alpha}(1-x)^{\alpha-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)\mathrm{d}x. \qquad (2.127)$$

Звідки

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\{\nu(ut)-\nu(\varepsilon ut)>0\}=\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\mathbb{P}\{\eta_\alpha<1-\varepsilon\}=0,$$

що доводить (2.125) та збіжність скінченновимірних розподілів в теоремі 34.

Перейдемо до доведення функціональної граничної теореми. Зокрема надалі припускається, що $\rho>-\alpha$ та $h\in D[0,\infty)$.

Оскільки $\rho>-\alpha$, то права частина (2.124) є м.н. неперервною, див. підрозділ 6.2. Легко бачити, що й ліва частина (2.124) також є м.н. неперервною. Оскільки ліва частина є монотонною по ε, з теореми Діні випливає локально рівномірна в $(0,\infty)$ збіжність в формулі (2.124).

Для перевірки (2.126) нам знадобиться наступне твердження, яке буде доведено пізніше.

Твердження 47. *Зафіксуємо $T>0$ та покладемо $A_t:=\{(u,v):0\le v<u\le T, u-v\ge 1/t\}$ при $t>0$. Якщо $a(t)=\mathbb{P}\{\xi>t\}\sim t^{-\alpha}\ell^*(t)$ для деякого $\alpha\in(0,1)$, то для довільного $\delta\in(0,\alpha)$ маємо*

$$\lim_{x\to\infty}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}=0.$$

Зафіксуємо $\Delta\in(0,(\alpha+\rho)/2)$ та помітимо, що з границі Поттера, див. теорему 1.5.6 в [42], випливає існування такого $c>1$, що

$$\frac{h(t(u-y))}{h(t)}\le 2(u-y)^{\rho-\Delta}$$

для всіх $t>0$, u та y таких, що $t(u-y)\ge c$ та $u-y\le 1$. Використовуючи цю оцінку, маємо для досить великих t, $u \in [a, b]$ та $\varepsilon > 0$ такого, що $(1-\varepsilon)b \le 1$,

$$\begin{aligned}
&\frac{a(t)}{h(t)} \sum_{k \ge 0} h(ut - S_k) \mathbb{1}_{\{\varepsilon ut < S_k \le ut\}} \\
&= \frac{a(t)}{h(t)} \int_{(\varepsilon u,\, u-c/t]} h(t(u-y)) \mathrm{d}\nu(ty) + \frac{a(t)}{h(t)} \int_{(u-c/t,\, u]} h(t(u-y)) \mathrm{d}\nu(ty) \\
&\le 2a(t) \int_{(\varepsilon u,\, u-c/t]} (u-y)^{\rho-\Delta} \mathrm{d}\nu(ty) + \frac{a(t)}{h(t)} \left(\sup_{y \in [0,c]} h(y) \right) (\nu(tu) - \nu(tu-c)) \\
&= 2(-\rho+\Delta) \int_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(\nu(tu) - \nu(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1} \mathrm{d}y \\
&+ 2u^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta} a(t)(\nu(tu) - \nu(\varepsilon tu)) \\
&+ \left(\frac{a(t)}{h(t)} \left(\sup_{y \in [0,c]} h(y) \right) - 2c^{\rho-\Delta} t^{-\rho+\Delta} a(t) \right) (\nu(tu) - \nu(tu-c)).
\end{aligned}$$

Оскільки $t \mapsto a(t)/h(t)$ та $t \mapsto t^{-\rho+\Delta} a(t)$ правильно змінюються з від'ємними індексами $-\alpha-\rho$ та $-\alpha-\rho+\Delta$ відповідно, то

$$\left(\frac{a(t)}{h(t)} \left(\sup_{y \in [0,c]} h(y) \right) - 2c^{\rho-\Delta} t^{-\rho+\Delta} a(t) \right) \sup_{u \in [a,\, b]} (\nu(tu) - \nu(tu-c)) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$$

згідно з лемою А.1 в [129]. Далі,

$$\begin{aligned}
&\sup_{u \in [a,b]} u^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta} a(t)(\nu(tu) - \nu(\varepsilon tu)) \\
&\qquad\qquad \le a^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta} a(t) \sup_{u \in [a,\, b]} (\nu(tu) - \nu(\varepsilon tu))
\end{aligned}$$

та $a(t) \sup_{u \in [a,\, b]} (\nu(tu) - \nu(\varepsilon tu)) \overset{\mathrm{d}}{\to} \sup_{u \in [a,\, b]} (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(\varepsilon u))$ внаслідок (2.75) та теореми про неперервне відображення. Тому

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \uparrow 1} \overline{\lim_{t \to \infty}} \mathbb{P} \left\{ \sup_{u \in [a,b]} u^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta} a(t)(\nu(tu) - \nu(\varepsilon tu)) > \theta \right\} \\
&\le \lim_{\varepsilon \uparrow 1} \mathbb{P} \left\{ a^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta} \sup_{u \in [a,b]} (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u\varepsilon)) > \theta \right\} \\
&= \lim_{\varepsilon \uparrow 1} \mathbb{P} \left\{ a^{\rho-\Delta}(1-\varepsilon)^{\rho-\Delta}(2b)^{\alpha} \sup_{u \in [a/2b, 1/2]} (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u\varepsilon)) > \theta \right\} = 0
\end{aligned}$$

для всіх $\theta > 0$, де передостання рівність випливає з самоподібності $W_\alpha^{\leftarrow}$, а остання є наслідком формули (6.8) нижче та вибору Δ.

Отже, для доведення (2.126) залишається показати, що

$$\lim_{\varepsilon\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,T]}\int_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(\nu(tu)-\nu(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1}\mathrm{d}y>\theta\right\}=0 \quad (2.128)$$

для всіх $\theta>0$ та всіх $T>0$. Для $0<\delta<\alpha+\beta-\Delta$ маємо такі нерівності:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,T]}\int_{\varepsilon u}^{u-c/t} a(t)(\nu(tu)-\nu(ty))(u-y)^{\rho-\Delta-1}\mathrm{d}y>\theta\right\}\\
&=\mathbb{P}\left\{\cdots,\ \sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}\\
&\qquad\qquad+\mathbb{P}\left\{\cdots,\ \sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}\le x\right\}\\
&\le\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}\\
&\qquad\qquad+\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[0,T]}\int_{\varepsilon u}^{u}(u-y)^{\alpha+\rho-\Delta-\delta-1}\mathrm{d}y>\delta/x\right\}\\
&=\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}+\mathbb{P}\left\{\int_0^{(1-\varepsilon)T}y^{\alpha+\rho-\Delta-\delta-1}\mathrm{d}y>\delta/x\right\}
\end{aligned}$$

для $x>0$. Спрямовуючи $t\to\infty$, $\varepsilon\uparrow 1$ та $x\to\infty$ та використовуючи твердження 47 для першого доданка в правій частині, отримуємо (2.128), що завершує доведення теореми 34. $\square$

Доведення твердження 47. Оскільки $a(t)=\mathbb{P}\{\xi>t\}$ правильно змінюється, можна припустити, що $T=1$. З розбиття множини A_t, представленого в координатах $(u,h):=(u,u-v)$ на рисунку 2.1, випливає

$$\begin{aligned}
&\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}\le\sup_{1/t\le h\le 1}\sup_{0\le u\le 1}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu((u-h)t))}{h^{\alpha-\delta}}\\
&\le\sup_{j=1,\dots,\lceil\log_2 t\rceil}\sup_{2^{-j}\le h\le 2^{1-j}}\sup_{k=1,\dots,2^{j-1}}\sup_{(k-1)2^{1-j}\le u\le k2^{1-j}}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu((u-h)t))}{h^{\alpha-\delta}}\\
&\le\sup_{j=1,\dots,\lceil\log_2 t\rceil}\sup_{k=1,\dots,2^{j-1}}\frac{a(t)(\nu(tk2^{-j+1})-\nu(t((k-2)2^{-j+1})))}{2^{-j(\alpha-\delta)}},
\end{aligned}$$

де ми скористались монотонністю $(\nu(t))_{t\ge 0}$ в останній нерівності.

Застосовуючи нерівність Буля, запишемо

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}$$
$$\leq\sum_{j=1}^{\lceil\log_2 t\rceil}\sum_{k=1}^{2^{j-1}}\mathbb{P}\left\{\frac{a(t)(\nu(tk2^{-j+1})-\nu(t((k-2)2^{-j+1})))}{2^{-j(\alpha-\delta)}}>x\right\}.$$

Використавши субадитивність за розподілом $(\nu(t))_{t\geq 0}$ (для $k\geq 3$) та монотонність $(\nu(t))_{t\geq 0}$ (для $k=1,2$), маємо

$$\mathbb{P}\left\{\frac{a(t)(\nu(tk2^{-j+1})-\nu(t((k-2)2^{-j+1})))}{2^{-j(\alpha-\delta)}}>x\right\}$$
$$\leq\mathbb{P}\{a(t)\nu(t2^{-j+2})>x2^{-j(\alpha-\delta)}\},$$

звідки

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}\leq\sum_{j=1}^{\lceil\log_2 t\rceil}2^{j-1}\mathbb{P}\{a(t)\nu(t2^{-j+2})>x2^{-j(\alpha-\delta)}\}$$
$$=\sum_{j=1}^{\lceil\log_2 t\rceil}2^{j-1}\mathbb{P}\{\exp(a(t2^{-j+2})\nu(t2^{-j+2}))>\exp(x2^{-j(\alpha-\delta)}a(t2^{-j+2})/a(t))\}$$
$$\leq\sum_{j=1}^{\lceil\log_2 t\rceil}2^{j-1}\exp(-x2^{-j(\alpha-\delta)}a(t2^{-j+2})/a(t))\,\mathbb{E}\exp(a(t2^{-j+2})\nu(t2^{-j+2}))$$
$$\leq C\sum_{j=1}^{\lceil\log_2 t\rceil}2^{j-1}\exp(-x2^{-j(\alpha-\delta)}a(t2^{-j+2})/a(t)),$$

де передостанній рядок випливає з нерівності Маркова, а рівномірна обмеженість $\mathbb{E}[\exp(a(t2^{-j+2})\nu(t2^{-j+2}))]$ є наслідком теореми 182. Застосовуючи границю Поттера до функції правильної зміни a, маємо

$$a(t2^{-j+2})/a(t)\geq c2^{(j-2)(\alpha-\delta/2)}$$

для деякого $c>0$, досить великих $t>0$ та всіх $j=2,\ldots,\lceil\log_2 t\rceil$. Отже,

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\left\{\sup_{(u,v)\in A_t}\frac{a(t)(\nu(ut)-\nu(vt))}{(u-v)^{\alpha-\delta}}>x\right\}$$
$$\leq C\bigg(\exp(-x2^{\delta-\alpha})+\sum_{j\geq 2}2^{j-1}\exp(-c_1x2^{\delta j/2})\bigg),$$

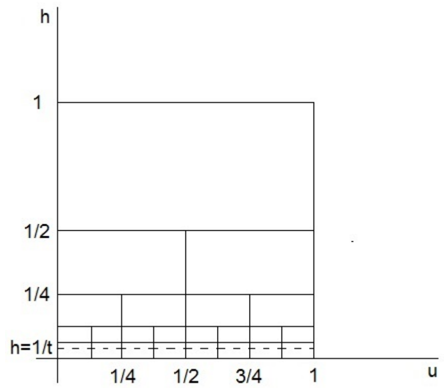


Рис. 2.1: Розбиття квадрата, яке використовується в доведенні твердження 47

де $c_1 := c2^{\delta-2\alpha} > 0$. Останній ряд збігається рівномірно по $x \in [1, \infty)$. Спрямування $x \to \infty$ завершує доведення твердження 47.

$\square$

2.3.8 Доведення теореми 39. Ми розпочнемо з доведення простого результату теорії відновлення для випадкових блукань у випадку повільної зміни хвоста розподілу кроку блукання.

Розглянемо величини: *останнє значення перед* u, тобто $u \mapsto S_{\nu(u)-1}$, та *перестриб в точці* u, тобто $u \mapsto S_{\nu(u)} - u$. Застосовуючи теорему 13.6.4 в [268] отримаємо наступний результат для довільного фіксованого $u > 0$

$$\left(\frac{L(S_{\nu(L^{\leftarrow}(tu))-1})}{t}, \frac{L(S_{\nu(L^{\leftarrow}(tu))})}{t} - u\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} (m(m^{\leftarrow}(u)-), m(m^{\leftarrow}(u)) - u) \tag{2.129}$$

при $t \to \infty$. Замінивши t на $L(t)/u$ у цьому співвідношенні, отримаємо

$$(m(m^{\leftarrow}(u)-), m(m^{\leftarrow}(u))) \overset{\mathrm{d}}{=} u\,(m(m^{\leftarrow}(1)-), m(m^{\leftarrow}(1)))\,, \tag{2.130}$$

та

$$\left(\frac{L(S_{\nu(t)-1})}{L(t)}, \frac{L(S_{\nu(t)})}{L(t)}\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} (m(m^{\leftarrow}(1)-), m(m^{\leftarrow}(1)))\,, \quad t \to \infty.$$

Помітимо, що $m(m^{\leftarrow}(1)-) < 1$ це значення m перед досягненням їм рівня 1, а $m(m^{\leftarrow}(1)) > 1$ це перше значення m після досягнення рівня 1. Для підрахунку їх спільного розподілу, помітимо, що для всіх $0 < x_1 < 1$ та $x_2 > 1$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{m(m^{\leftarrow}(1)-) \le x_1, m(m^{\leftarrow}(1)) \le x_2\} \\
&\quad = \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{m(s-) \le x_1, m(s) \le x_2, m^{\leftarrow}(1) \in \mathrm{d}s\} \\
&\quad = \int_{[0,\infty)} \mathbb{P}\{\mathcal{P}([0,s) \times (x_1, +\infty)) = 0, \mathcal{P}([s,\, s+\mathrm{d}s] \times (1, x_2]) \ge 1\} \\
&\quad = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^s \int_{x_1}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\mathrm{d}t\right\} \int_1^{x_2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\mathrm{d}s = x_1\left(1 - \frac{1}{x_2}\right).
\end{aligned}$$

Підсумовуючи, отримуємо такий результат.

Твердження 48. *При $t \to \infty$,*

$$\left(\frac{L(S_{\nu(t)-1})}{L(t)}, \frac{L(S_{\nu(t)})}{L(t)}\right) \xrightarrow{\mathrm{d}} (\mathcal{U}, \mathcal{V}),$$

де $\mathcal{U}$ та $\mathcal{V}$ незалежні, $\mathcal{U}$ має рівномірний розподіл на $(0,1)$ та $\mathcal{V}$ має розподіл $\mathbb{P}\{\mathcal{V} > x\} = \frac{1}{x}$ при $x \ge 1$.

Доведення теореми 39. Запишемо для $t > 0$

$$\frac{Z(L^{\leftarrow}(ut))}{th(L^{\leftarrow}(t))} \;=\; \int_{[0,\, L^{\leftarrow}(ut)]} \frac{h(L^{\leftarrow}(ut) - y)}{th(L^{\leftarrow}(t))}\mathrm{d}\nu(y), \quad u \ge 0.$$

Згідно з припущенням, що L строго зростає, неперервна та $L(0) = 0$, заміна змінної дає

$$\frac{Z(L^{\leftarrow}(ut))}{th(L^{\leftarrow}(t))} \;=\; \int_{[0,\, u]} \frac{h(L^{\leftarrow}(ut) - L^{\leftarrow}(zt))}{h(L^{\leftarrow}(t))}\mathrm{d}\frac{\nu(L^{\leftarrow}(zt))}{t},$$

де диференціал береться по змінній z. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_1 < \cdots < u_n$ та $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \ge 0$. Зафіксуємо також $\varepsilon \in (0, u_1)$. Застосовуючи прийом Крамера-Уолда, бачимо, що достатньо показати

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{Z(L^{\leftarrow}(u_i t))}{th(L^{\leftarrow}(t))} \xrightarrow{\mathrm{d}} \sum_{i=1}^n \gamma_i u_i^\alpha m^{\leftarrow}(u_i), \quad t \to \infty. \tag{2.131}$$

Перепишемо ліву частину (2.131) так

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{Z(L^{\leftarrow}(u_it))}{th(L^{\leftarrow}(t))}\\
&= \int_{[0,\infty)}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{h(L^{\leftarrow}(u_it)-L^{\leftarrow}(zt))}{h(L^{\leftarrow}(t))}\mathbb{1}_{\{0\le z\le u_i-\varepsilon\}}\right)\mathrm{d}\frac{\nu(L^{\leftarrow}(zt))}{t}\\
&+ \int_{[0,\infty)}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\frac{h(L^{\leftarrow}(u_it)-L^{\leftarrow}(zt))}{h(L^{\leftarrow}(t))}\mathbb{1}_{\{u_i-\varepsilon< z\le u_i\}}\right)\mathrm{d}\frac{\nu(L^{\leftarrow}(zt))}{t}\\
&= Z_{1,\varepsilon}(t)+Z_{2,\varepsilon}(t).
\end{aligned}$$

Згідно з формулою (A.2) в лемі 161,

$$Z_{1,\varepsilon}(t)=\int_{[0,\infty)}\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(u_i^{\alpha}+o(1))\mathbb{1}_{\{0\le z\le u_i-\varepsilon\}}\right)\mathrm{d}\frac{\nu(L^{\leftarrow}(zt))}{t},$$

де член $o(1)$ не залежить від $z\in[0,u_i-\varepsilon]$ та прямує до нуля при $t\to\infty$. Отже,

$$Z_{1,\varepsilon}(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(u_i^{\alpha}+o(1))\frac{\nu(L^{\leftarrow}((u_i-\varepsilon)t))}{t}.$$

З теореми 36 отримуємо

$$Z_{1,\varepsilon}(t)\overset{\mathrm{d}}{\to}\sum_{i=1}^{n}\gamma_iu_i^{\alpha}m^{\leftarrow}(u_i-\varepsilon)=:Z_{1,\varepsilon},\quad t\to\infty.$$

Очевидно, що $m^{\leftarrow}(u_i-\varepsilon)\uparrow m^{\leftarrow}(u_i-)$ м.н. при $\varepsilon\downarrow 0$ для всіх $i=1,\dots,n$. Отже, м.н.

$$Z_{1,\varepsilon}\to\sum_{i=1}^{n}\gamma_iu_i^{\alpha}m^{\leftarrow}(u_i-)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_iu_i^{\alpha}m^{\leftarrow}(u_i),\quad \varepsilon\downarrow 0,$$

де друга рівність випливає з неперервності $(m^{\leftarrow}(u))_{u\ge 0}$ м.н. для кожного $u\ge 0$, див. твердження 4.7 в [227][10]. Застосовуючи теорему 4.2 в [39], бачимо, що лишається перевірити

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\{Z_{2,\varepsilon}(t)>\delta\}=0 \tag{2.132}$$

для кожного $\delta>0$. Помітимо, що (2.132) випливає з формули

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\{\nu(L^{\leftarrow}(ut))-\nu(L^{\leftarrow}((u-\varepsilon)t))>0\}=0$$

[10]Оскільки $(m^{\leftarrow}(u))_{u\ge 0}$ не спадає, зі стохастичної неперервності в фіксованій точці $u\ge 0$ випливає неперервність в цій точці м.н.

для кожного $u > 0$. Маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\nu(L^{\leftarrow}(ut)) - \nu(L^{\leftarrow}((u-\varepsilon)t)) > 0\} \\
&= \mathbb{P}\{\nu(L^{\leftarrow}(ut)) - \nu(L^{\leftarrow}((u-\varepsilon)t)) \geq 1\} = \mathbb{P}\{S_{\nu(L^{\leftarrow}((u-\varepsilon)t))} \leq L^{\leftarrow}(ut)\} \\
&= \mathbb{P}\{L(S_{\nu(L^{\leftarrow}((u-\varepsilon)t))})/t \leq u\} \to \mathbb{P}\{m(m^{\leftarrow}(u-\varepsilon)) \leq u\}, \quad t \to \infty,
\end{aligned}$$

згідно з формулою (2.129). Остаточно,

$$\mathbb{P}\{m(m^{\leftarrow}(u-\varepsilon)) \leq u\} \overset{(2.130)}{=} \mathbb{P}\{m(m^{\leftarrow}(1)) \leq u/(u-\varepsilon)\} = \frac{\varepsilon}{u},$$

оскільки $m(m^{\leftarrow}(1))$ має розподіл Парето, див. твердження 48. Права частина останньої центрованої формули прямує до нуля при $\varepsilon \downarrow 0$, що завершує доведення теореми 39. □

2.3.9 Доведення теорем 40 та 41. Для доведення теорем 40 нам потрібні два допоміжних результати: леми 49 та 50. Замінюючи знаменник в (2.69) на функцію, що зростає швидше, дає збіжність до нуля скінченновимірних розподілів. Проте, цей результат має місце без припущень теореми 29 про правильну зміни.

Лема 49. *Припустимо, що*

- $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$*;*
- *або*
$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t v(y)\mathrm{d}y = \infty \quad \textit{та} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{v(t)}{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y} = 0$$
та існує монотонна функція u *така, що* $v(t) \sim u(t)$ *при* $t \to \infty$*, або* v *безпосередньо інтегровна за Ріманом на* $[0, \infty)$.

Тоді

$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{s(t)}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty \qquad (2.133)$$

для довільної додатної функції s*, яка правильно змінюється на нескінченності та задовольняє*

$$\lim_{t\to\infty} s^2(t)/\int_0^t v(y)\mathrm{d}y = \infty.$$

Доведення. Згідно з нерівністю Чебишева та прийомом Крамера-Уолда достатньо довести, що

$$s^{-2}(t)\,\mathbb{E}\Bigg[\bigg(Y(t)-\sum_{k\geq 0}h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\bigg)^2\Bigg]\ \to\ 0,\quad t\to\infty.$$

Останнє математичне сподівання дорівнює $\int_{[0,t]}v(t-y)\mathrm{d}U(y)$. Якщо v є безпосередньо інтегровною за Ріманом, то цей інтеграл скінченний, див. лему 163. Якщо v неінтегровна та u є монотонною функцією такою, що $v(t)\sim u(t)$, лема 167(a) з $r_1=0$ та $r_2=1$ дає

$$\int_{[0,t]}v(t-y)\,\mathrm{d}U(y)\ \sim\ \int_{[0,t]}u(t-y)\,\mathrm{d}U(y),\quad t\to\infty.$$

Модифікуючи (за потреби) u в правому околі нуля, можемо вважати, що u монотонна та локально інтегровна. З еквівалентності $u(t)\sim v(t)$ випливає $\lim_{t\to\infty}(u(t)/\int_0^t u(y)\mathrm{d}y)=0$ і лема 165 (з $\phi=u$, $r_1=0$ та $r_2=1$) дає

$$\int_{[0,t]}u(t-y)\,\mathrm{d}U(y)\ \sim\ \frac{1}{\mu}\int_0^t u(y)\,\mathrm{d}y,\quad t\to\infty.$$

Звідки

$$\int_0^t u(y)\,\mathrm{d}y\ \sim\ \int_0^t v(y)\,\mathrm{d}y\ =\ o(s^2(t)),\quad t\to\infty,$$

де остання рівність випливає з припущень про s. Доведення леми 49 завершено. □

Лема 50. *Припустимо, що h є монотонною та невід'ємною, а розподіл ξ належить області притягання α-стійкого розподілу з $\alpha\in(1,2]$ (тобто виконується співвідношення* (2.76)*). Тоді*

$$\left(\frac{\sum_{k\geq 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}-\frac{1}{\mu}\int_0^{ut}h(y)\,\mathrm{d}y}{r(t)}\right)_{u>0}\ \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\ 0,\quad t\to\infty$$

для довільної додатної функції r, що правильно змінюється на нескінченності з додатним індексом та

$$\lim_{t\to\infty}\frac{r(t)}{c(t)h(t)}=\infty,$$

де функція c така, як в (2.76).

Доведення. Застосовуючи прийом Крамера-Уолда та враховуючи правильну зміну r, достатньо довести

$$\frac{\int_{[0,t]} h(t-y)\,\mathrm{d}(\nu(y)-\frac{y}{\mu})}{r(t)} = \frac{\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t h(y)\,\mathrm{d}y}{r(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0 \tag{2.134}$$

при $t\to\infty$. Міркуючи так само як в доведенні теореми 32, див. формули (2.112) та (2.113), при доведенні (2.134) можемо замінити h на довільну $h^*\in D[0,\infty)$, що збігається з h на $[t_0,\infty)$ для $t_0>0$. Обираючи t_0 досить великим, можна вважати, що h^* монотонна та невід'ємна на $[0,\infty)$. Якщо h^* не спадає, ми покладемо $h^*(t)=0$ при $t\in[0,t_0)$, зокрема $h^*(0)=0$.

Випадок неспадної h^*. Інтегрування частинами демонструє, що достатньо перевірити

$$\frac{1}{r(t)}\int_{[0,1]}\big(\nu(t)-\nu(t(1-y)-)-\mu^{-1}ty\big)\,\mathrm{d}(-h^*(t(1-y))) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty. \tag{2.135}$$

З монотонності випливає $h^*(t(1-y))/h^*(t)\leq 1$ для всіх $y\in[0,1]$, тому $\lim_{t\to\infty}\frac{h^*(t(1-y))}{r(t)/c(t)}=0$. Для досить великих t, визначимо скінченні міри ρ_t на $[0,1]$ рівністю

$$\rho_t([0,a]) = \frac{r(t)/c(t)-h^*(t(1-a))}{r(t)/c(t)}, \quad a\in[0,1].$$

Тоді ρ_t збігаються слабко до δ_0 при $t\to\infty$. Застосовуючи неперервне відображення $\mathcal{I}: D[0,\infty)\to D[0,1]$, де $\mathcal{I}(f(\cdot))=f(1)-f((1-\cdot)-)$, до (2.76), бачимо

$$\frac{\nu(t)-\nu(t(1-y)-)-\mu^{-1}ty}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(1)-\mathcal{S}_\alpha((1-y)-)$$

у просторі $D[0,1]$ з J_1- або M_1-топологією. Застосовуючи лему 171(б), отримуємо (2.135), так як $(\mathcal{S}_\alpha(1)-\mathcal{S}_\alpha((1-y)-))_{y\in[0,1]}$ є м.н. неперервним в нулі та $\mathcal{S}_\alpha(1)-\mathcal{S}_\alpha(1-)=0$ м.н.

Випадок незростаючої h^*. Інтегрування частинами демонструє, що достатньо перевірити

$$\frac{\nu(t)-\mu^{-1}t}{r(t)}h^*(t) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0 \quad \text{та} \quad \frac{1}{r(t)}\int_{[0,t]}\Big(\nu(t)-\nu((t-y)-)-\frac{y}{\mu}\Big)\,\mathrm{d}(-h^*(y)) \overset{\mathbb{P}}{\to} 0 \tag{2.136}$$

при $t \to \infty$. Перше з цих співвідношень випливає з формули (2.76) та припущення $\lim_{t\to\infty} r(t)/(c(t)h(t)) = \infty$. Міркуючи так, як в доведенні теореми 32, див. формулу (2.117), бачимо, що друге співвідношення в (2.136) випливає з

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{[t_0,t]} y^{1/\alpha-\delta} \mathrm{d}(-h^*(y))}{t^{1/\alpha-\delta} r(t)/c(t)} \;=\; 0$$

для деяких $\delta \in (0, 1/\alpha)$ та $t_0 = t_0(\delta) > 0$, що фігурують в границі Поттера (A.1) леми 159. Перевірка цього співвідношення є простою вправою і не наводиться, його можна знайти на с. 1254 в [138]. Доведення леми 50 завершено. $\square$

Доведення теореми 40. Випадок $p = 0$. Згідно з теоремою 29 виконується співвідношення (2.69), тобто

$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{\mu}} V_\beta(u)\right)_{u>0} \qquad (2.137)$$

при $t \to \infty$, оскільки v правильно змінюється з індексом $\beta \in (-1, \infty)$.

Внаслідок правильної зміни $\big(\int_0^t v(y)\mathrm{d}y\big)^{1/2}$ з додатним індексом $\frac{1+\beta}{2}$ та

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y}}{c(t)|h(t)|} = +\infty,$$

застосування[11] леми 50 (з $r(t) = (\int_0^t v(y)\mathrm{d}y)^{1/2}$) дає

$$\left(\frac{\sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}} - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\int_0^t v(y)\mathrm{d}y}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty.$$

Додаючи це співвідношення до (2.137), завершуємо доведення, оскільки

$$\int_0^t v(y)\mathrm{d}y \;\sim\; \int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t), \quad t \to \infty.$$

Випадок $p > 0$. З теореми 32 випливає, що при $t \to \infty$

$$\left(\frac{\sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}} - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{c(t)h(t)}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (\mu^{-(\alpha+1)/\alpha} I_{\alpha,\rho}(u))_{u>0}. \qquad (2.138)$$

[11] У лемі 50 вимагається, щоб h була невід'ємною з деякого місця. Якщо h недодатна з деякого місця то, замінивши її на $-h$, бачимо, що лема 50 залишається вірною.

Під-випадок $p = 1$. Оскільки c правильно змінюється з індексом $1/\alpha$, див. лему 160, $c \cdot h$ правильно змінюється з додатним індексом. Якщо v є безпосередньо інтегровною за Ріманом, то лема 49 (з $s(t) = c(t)h(t)$) дає

$$\left(\frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{c(t)h(t)}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty. \tag{2.139}$$

Якщо $\lim_{t\to\infty} \int_0^t v(y)\mathrm{d}y = \infty$, то зі збіжності $\lim_{t\to\infty}(c^2(t)h^2(t)/\int_0^t v(y)\mathrm{d}y) = \infty$ випливає $\lim_{t\to\infty}(v(t)/\int_0^t v(y)\mathrm{d}y) = 0$. Щоб це побачити, можна припустити, що v монотонна. Якщо вона не зростає, то твердження очевидне. Припустимо, що v не спадає. Внаслідок правильної зміни $c^2(t)h^2(t)$ та нерівності $\int_0^t v(y)dy \geq v(t/2)t/2$, робимо висновок, що існує $a > 0$ таке, що $\lim_{t\to\infty} t^a/v(t) = \infty$. Нехай a_* є інфімумом таких a. Тоді знайдеться $\varepsilon > 0$ таке, що $t^{a_*+\varepsilon}/v(t) \to \infty$ та $t^{a_*+\varepsilon-1}/v(t) \to 0$. Отже, при $t \to \infty$

$$\frac{v(t)}{\int_0^t v(y)dy} \leq \frac{v(t)}{\int_{t/2}^t v(y)dy} \leq \frac{2v(t)}{tv(t/2)} = 2^{a_*+\varepsilon}\frac{v(t)}{t^{a_*+\varepsilon}}\frac{(t/2)^{a_*+\varepsilon-1}}{v(t/2)} \to 0,$$

оскільки обидва множники прямують до нуля згідно з вибором a_*.

Застосовуючи лему 49 ще раз, бачимо, що (2.139) виконується. Додаючи (2.138) та (2.139) отримуємо потрібне внаслідок співвідношення

$$c^2(t)h^2(t) \sim \int_0^t v(y)\mathrm{d}y + c^2(t)h^2(t), \quad t \to \infty.$$

Під-випадок $p \in (0, 1)$. Ми наведемо доведення у випадку $\sigma^2 < \infty$, інші випадки можна довести аналогічно. Граничне співвідношення, яке потрібно довести, виглядає так

$$\left(\frac{Y(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sigma\sqrt{t}h(t)}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(c_1 V_\beta(u) + c_2 I_{2,\rho}(u)\right)_{u>0}, \quad t \to \infty, \tag{2.140}$$

при $t \to \infty$, де $c_1 := \sqrt{\frac{(1-p)(1+\beta)}{p\mu}}$ та $c_2 := \mu^{-(\alpha+1)/\alpha}$. Запишемо

$$\begin{aligned}\frac{Y(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sigma\sqrt{t}h(t)} &= \frac{Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}}{\sigma\sqrt{t}h(t)} \\ &\quad + \frac{\sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}} - \mu^{-1}\int_0^{ut} h(y)\mathrm{d}y}{\sigma\sqrt{t}h(t)} \\ &=: A_t(u) + B_t(u).\end{aligned}$$

Згідно теореми 29, виконується (2.137), що еквівалентно

$$(A_t(u))_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (c_1 V_\beta(u))_{u>0}, \quad t\to\infty.$$

З формули (2.138) ми знаємо, що

$$(B_t(u))_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(c_2 I_{2,\rho}(u)\right)_{u>0}, \quad t\to\infty. \tag{2.141}$$

Для доведення (2.140) скористаємось прийомом Крамера-Уолда та теоремою неперервності Леві. Достатньо показати, що для кожного $m\in\mathbb{N}$, дійсних $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, $\beta_1,\ldots,\beta_m$, та $0<u_1<\cdots,u_m<\infty$ і $w,z\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}w\sum_{j=1}^m \alpha_j A_t(u_j)+\mathrm{i}z\sum_{r=1}^m \beta_r B_t(u_r)\Big)\Big]\\
&\quad= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}wc_1\sum_{j=1}^m \alpha_j V_\beta(u_j)\Big)\Big]\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}zc_2\sum_{r=1}^m \beta_r I_{2,\rho}(u_r)\Big)\Big]\\
&\quad=\exp\big(-D(u_1,\ldots,u_m)c_1^2w^2/2\big)\mathbb{E}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}zc_2\sum_{r=1}^m \beta_r I_{2,\rho}(u_r)\Big)\Big]
\end{aligned} \tag{2.142}$$

де $D(u_1,\ldots,u_m)$ було визначено в (2.84). Нагадаємо, що $\mathcal{F}$ позначає σ-алгебру, породжену $(S_k)_{k\ge 0}$. Ідея наступного доведення полягає в тому, що в той час як B_t є $\mathcal{F}$-вимірним, скінченновимірні розподіли A_t слабко збігаються при фіксованій $\mathcal{F}$. Більш точно, запишемо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\mathcal{F}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}w\sum_{j=1}^m \alpha_j A_t(u_j)+\mathrm{i}z\sum_{r=1}^m \beta_r B_t(u_r)\Big)\Big]\\
&\quad= \exp\Big(\mathrm{i}z\sum_{r=1}^m \beta_r B_t(u_r)\Big)\,\mathbb{E}_\mathcal{F}\Big[\exp\Big(\mathrm{i}w\sum_{j=1}^m \alpha_j A_t(u_j)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Враховуючи (2.141),

$$\exp\Big(\mathrm{i}z\sum_{r=1}^m \beta_r B_t(u_r)\Big) \overset{\text{d}}{\to} \exp\Big(\mathrm{i}zc_2\sum_{r=1}^m \beta_r I_{2,\rho}(u_r)\Big), \quad t\to\infty.$$

Оскільки X та ξ припускаються незалежними, то співвідношення (2.85) та (2.86) виглядають так

$$\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}_\mathcal{F}[Z_{k+1,t}^2] \overset{\mathbb{P}}{\to} D(u_1,\ldots,u_m), \quad t\to\infty,$$

та

$$\sum_{k\ge 0}\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\big[Z^2_{k+1,t}\mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>y\}}\big] \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \quad t\to\infty,$$

для всіх $y>0$ відповідно. З цих співвідношень та збіжності

$$y(t) := \frac{\sqrt{\mu^{-1}tv(t)}}{\sigma\sqrt{t}h(t)} \quad \to \quad c_1, \quad t\to\infty,$$

робимо висновок, що

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\left[\exp\left(\mathrm{i}w\sum_{j=1}^m \alpha_j A_t(u_j)\right)\right] \ &= \ \mathbb{E}_{\mathcal{F}}\left[\exp\left(\mathrm{i}wy(t)\sum_{k\ge 0} Z_{k+1,t}\right)\right]\\ &\overset{\mathrm{d}}{\to}\ \exp(-D(u_1,\dots,u_m)c_1^2w^2/2), \quad t\to\infty,\end{aligned}$$

згідно з формулою (2.96) леми 44. Оскільки права частина цього співвідношення невипадкова, то можна застосувати лему Слуцького і отримати

$$\begin{aligned}&\exp\left(\mathrm{i}z\sum_{r=1}^m \beta_r B_t(u_r)\right)\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\left[\exp\left(\mathrm{i}w\sum_{j=1}^m \alpha_j A_t(u_j)\right)\right]\\ &\quad\overset{\mathrm{d}}{\to} \exp\left(\mathrm{i}zc_2\sum_{r=1}^m \beta_r I_{2,\rho}(u_r)\right)\exp(-D(u_1,\dots,u_m)c_1^2w^2/2), \quad t\to\infty.\end{aligned}$$

З теореми Лебега про мажоровану збіжність отримуємо (2.142). Теорема (40) доведена. □

Доведення теореми 41. Випадок $q=0$. Згідно з теоремою 30

$$\left(\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\left(Y(ut)-\sum_{k\ge 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le ut\}}\right)\right)_{u>0} \ \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\ (Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0} \quad (2.143)$$

при $t\to\infty$. Залишається перевірити, що

$$\left(\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\sum_{k\ge 0}h(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le ut\}}\right)_{u>0} \ \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\ 0, \quad t\to\infty,$$

що еквівалентно, враховуючи прийом Крамера-Уолда та правильну зміну нормування,

$$\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\mathbb{E}\left[\sum_{k\ge 0}|h(t-S_k)|\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\right] \ \to\ 0, \quad t\to\infty. \quad (2.144)$$

Це випливає з леми 170(б) (з $\phi_1(t) = |h(t)|$, $\phi(t) = \sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\}}$, $\gamma = (\beta-\alpha)/2$ та $q(t) = \sqrt{u(t)}$, де $u(t)$ визначена в теоремі 30). Умова $\phi_1 = o(\phi)$ виконується з огляду на припущення $q = 0$. Доведення в цьому випадку завершено, оскільки

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)}} \sim \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}}, \quad t \to \infty.$$

Випадок $q = 1$. З теореми 34 бачимо, що

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)} \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (J_{\alpha,\rho}(u))_{u>0}, \quad t \to \infty.$$

Залишається перевірити

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)}\left(Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}\right)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty.$$

З врахуванням нерівності Маркова та прийому Крамера-Уолда достатньо довести

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)}\right)^2 \mathbb{E}\left[\left(Y(ut) - \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}\right)^2\right]$$
$$= \left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)}\right)^2 \int_{[0,t]} v(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Це випливає з леми 170(б) з $\phi_1(t) = v(t)$, $\phi(t) = h^2(t)/\mathbb{P}\{\xi > t\}$, $\gamma = 2\rho + \alpha$ та $q(t) = w^2(t)$. Умова $\phi_1 = o(\phi)$ виконується з огляду на припущення $q = 1$. Доведення в цьому випадку завершено, оскільки

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\} + h^2(t)}} \sim \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h(t)}, \quad t \to \infty.$$

Випадок $q \in (0,1)$. Покладемо

$$\bar{A}_t(u) := \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}} \sum_{k\geq 0} \big(X_{k+1}(ut - S_k) - h(ut - S_k)\big)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}},$$
$$\bar{B}_t(u) := \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}} \sum_{k\geq 0} h(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \leq ut\}}$$

та

$$A_{\alpha,\beta}(u) \ := \ q^{1/2}(1-q)^{-1/2} J_{\alpha,(\beta-\alpha)/2}.$$

Ми покажемо, що

$$\sum_{j=1}^{m} \gamma_j(\bar{A}_t(u_j) + \bar{B}_t(u_j)) \ \overset{\mathrm{d}}{\to} \ \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(Z_{\alpha,\beta}(u_j) + A_{\alpha,\beta}(u_j)), \quad t \to \infty$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$, всіх $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ та довільних $0 < u_1 < \cdots < u_m < \infty$.

Покладемо для $k \in \mathbb{N}_0$ та $t > 0$

$$\bar{Z}_{k+1,t} := \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}} \sum_{j=1}^{m} \gamma_j(X_{k+1}(u_j t - S_k) - h(u_j t - S_k))\mathbb{1}_{\{S_k \le u_j t\}}.$$

Тоді $\sum_{j=1}^{m} \gamma_j \bar{A}_t(u_j) = \sum_{k\ge 0} \bar{Z}_{k+1,t}$ та

$$\sum_{k\ge 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}_{k+1,t}^2] = \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)} \int_{[0,u_m]} \Bigg(\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^2 v(t(u_j - y))\mathbb{1}_{[0,u_j]}(y)$$
$$+ 2 \sum_{1\le r<l\le m} \gamma_r\gamma_l f(t(u_r - y), t(u_l - y))\mathbb{1}_{[0,u_r]}(y) \Bigg) \mathrm{d}\nu(ty).$$

Можемо написати

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^{m} \gamma_j\big(\bar{A}_t(u_j) + \bar{B}_t(u_j)\big)\Bigg)\Bigg] \\
&= \exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \bar{B}_t(u_j)\Bigg)\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{k\ge 0} \bar{Z}_{k+1,t}\Bigg)\Bigg] \\
&= \ \exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \bar{B}_t(u_j)\Bigg) \Bigg(\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{k\ge 0} \bar{Z}_{k+1,t}\Bigg)\Bigg] \\
&- \exp\Bigg(- \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}_{k+1,t}^2] z^2/2\Bigg)\Bigg) \\
&+ \exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \bar{B}_t(u_j) - \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}_{k+1,t}^2] z^2/2\Bigg)
\end{aligned} \tag{2.145}$$

для $z \in \mathbb{R}$.

Згідно з формулою (2.100) в лемі 45 (з $b = q^{-1}(1-q)$)

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{B}_t(u_j) + \lambda_2 \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}] \\
&\quad = \lambda_1 \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}} \int_{[0,u_m]} \sum_{j=1}^m \gamma_j h(t(u_j - y)) \mathbb{1}_{[0,u_j]}(y) \mathrm{d}\nu(ty) \\
&\quad + \lambda_2 \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)} \int_{[0,u_m]} \Bigg(\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 v(t(u_j - y)) \mathbb{1}_{[0,u_j]}(y) \\
&\quad + 2 \sum_{1\leq r<l\leq m} \gamma_r \gamma_l f(t(u_r - y), t(u_l - y)) \mathbb{1}_{[0,u_r]}(y) \Bigg) \mathrm{d}\nu(ty) \\
&\quad \overset{\mathrm{d}}{\to} \ \lambda_1 \sum_{j=1}^m \gamma_j A_{\alpha,\beta}(u_j) + \lambda_2 D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m), \quad t \to \infty \qquad (2.146)
\end{aligned}$$

для довільних дійсних λ_1 та λ_2, де $D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m)$ було визначено в (2.104). Отже,

$$\begin{aligned}
&\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{B}_t(u_j) - \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}|z^2/2\Bigg) \\
&\quad \overset{\mathrm{d}}{\to} \ \exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^m \gamma_j A_{\alpha,\beta}(u_j) - D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m) z^2/2\Bigg), \quad t \to \infty
\end{aligned}$$

для кожного $z \in \mathbb{R}$, а тому

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^m \gamma_j \bar{B}_t(u_j) - \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}] z^2/2\Bigg)\Bigg] \\
&\qquad = \ \mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^m \gamma_j A_{\alpha,\beta}(u_j) - D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m) z^2/2\Bigg)\Bigg] \\
&\qquad = \ \mathbb{E}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{j=1}^m \gamma_j (A_{\alpha,\beta}(u_j) + Z_{\alpha,\beta}(u_j))\Bigg)\Bigg]
\end{aligned}$$

згідно з теоремою Лебега про мажоровану збіжність. Друга рівність в останній формулі випливає з того, що $\sum_{j=1}^m \gamma_j Z_{\alpha,\beta}(u_j)$ має центрований нормальний розподіл з дисперсією $D_{\alpha,\beta}(u_1, \ldots, u_m)$.

Згідно з формулою (2.98) в лемі 44

$$\mathbb{E}_{\mathcal{F}}\Bigg[\exp\Bigg(\mathrm{i}z \sum_{k\geq 0} \bar{Z}_{k+1,t}\Bigg)\Bigg] - \exp\Bigg(- \sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}] z^2/2\Bigg) \ \overset{\mathrm{d}}{\to} \ 0, \quad t \to \infty.$$

Таким чином, перший доданок в правій частині (2.145) збігатиметься до нуля, якщо ми перевіримо

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}] \stackrel{\mathrm{d}}{\to} D_{\alpha,\beta}(u_1,\ldots,u_m), \quad t\to\infty \tag{2.147}$$

та

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{F}}[\bar{Z}^2_{k+1,t}\mathbb{1}_{\{|\bar{Z}_{k+1,t}|>y\}}] \stackrel{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty \tag{2.148}$$

для всіх $y>0$. Збіжність (2.147) випливає з (2.146) при $\lambda_1=0$ та $\lambda_2=1$. З огляду на нерівність (2.87) формула (2.148) є наслідком вже перевіреної формули (2.108). Це завершує доведення у випадку $q\in(0,1)$, оскільки з $\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}v(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}v(t)+h^2(t)}=1-q$ випливає

$$\sqrt{1-q}\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}} \sim \frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{\sqrt{\mathbb{P}\{\xi>t\}v(t)+h^2(t)}}, \quad t\to\infty.$$

Теорема 41 доведена. □

Доведення наслідку 42. Перевіримо, що $f(u,w)=\mathbb{E}[X(u)X(w)]-\mathbb{E}[X(u)]\mathbb{E}[X(w)]$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}^2_+$ з індексом β та граничною функцією C.

Припущення $q<1$ гарантує, що

$$\lim_{t\to\infty} v(t)/h^2(t)=\infty,$$

тому $\mathbb{E}[X^2(t)]\sim v(t)$, зокрема, $v(t)$ правильно змінюється з показником β, який повинен бути невід'ємним. Далі, $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(ut)]\mathbb{E}[X(wt)]/v(t)=0$ внаслідок

$$\frac{\mathbb{E}[X(ut)]\mathbb{E}[X(wt)]}{v(t)} \leq \frac{(\mathbb{E}[X(wt)])^2}{v(wt)}\frac{v(wt)}{v(t)}$$

для $0<u<w$ за монотонністю. Більш важливо, що

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[X(ut)X(wt)]/v(t)=C(u,w),$$

а функція C є неперервною в $\mathbb{R}^2_+$, див. лему 2 в [61], оскільки для кожного $t>0$, функція $(u,w)\mapsto\mathbb{E}[X(ut)X(wt)]$ не спадає по кожній змінній. Внаслідок того, що збіжність монотонних функцій до неперервної функції є локально рівномірною, обидва граничних співвідношення виконуються локально рівномірно в $\mathbb{R}_+^2$. Отже,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(ut, wt)}{v(t)} \;=\; C(u, w)$$

рівномірно в смугах в $\mathbb{R}_+^2$.

Нагадаємо, що $\beta \geq 0$ та помітимо, що правильна зміна h з індексом ρ гарантує, що $\rho \geq 0$. Перевіримо, що по неперервності можна покласти $Z_{\alpha,\beta}(0)$ рівним 0. Для цього запишемо

$$\mathbb{E}[Z_{\alpha,\beta}^2(u)] = \mathbb{E}\left[\int_{[0,u]} (u-y)^\beta \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\right] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+1)} u^{\beta+\alpha} \to 0,$$

при $u \downarrow 0$. Звідки випливає, що $\lim_{u\downarrow 0} Z_{\alpha,\beta}(u) = 0$ за ймовірністю. Внаслідок цього можемо стверджувати, що збіжність скінченновимірних розподілів в теоремі 41 можна поширити з $u > 0$ на $u \geq 0$.

Залишається помітити, що зі збіжності скінченновимірних розподілів випливає збіжність в M_1-топології на $D[0,\infty)$ внаслідок монотонності $(Y(ut))_{u\geq 0}$ для кожного $t > 0$, див. наслідок 12.5.1 в [268]. Якщо граничний процес має неперервні траєкторії, то збіжність в J_1-топології випливає з зауваження 2.1 в [271].

□

2.4 Збіжність з нормуванням, що повільно змінюється

2.4.1 Основний результат та обговорення. Припустимо, що $\sigma^2 < \infty$ та умова (2.72) виконується з $\rho > -1/2$. Тоді нормування в теоремі 32 правильно змінюється з індексом $\rho + 1/2 > 0$. У основній теоремі цього підрозділу розглянуто випадок, коли $\rho = -1/2$, але h^2 не є інтегровною. У цьому випадку граничний результат схожий на результат теореми 32 і зовсім відрізняється від твердження у випадку інтегровної h^2 (випадок (A1) теореми 14). Принциповим моментом у ньому є наявність сублінійного масштабування часу, відмінного від $t + u$ або ut, які фігурували в попередніх результатах. Як можна було б очікувати, у точці такого «фазового переходу» виникають додаткові технічні складнощі, тому доведення наступної теореми принципово відрізняється від доведень у інших режимах та базується на техніці сильної апроксимації.

Нагадаємо, що $\mathcal{S}_2 := (\mathcal{S}_2(u))_{u\in[0,1]}$ позначає стандартний броунівський рух. Нехай $\mathcal{Q} := (\mathcal{Q}(u))_{u\in[0,1]}$ є центрованим гауссівським процесом з незалежними значеннями та дисперсією $\mathbb{E}[Q(u)]^2 = u$, що не залежить від $\mathcal{S}_2$. Покладемо

$$\widehat{\mathcal{S}}_2(u) = \mathcal{S}_2(1-u) + \mathcal{Q}(u), \quad u \in [0,1].$$

Теорема 51. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ *для деякого* $r > 2$*, а функція* $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *є неперервною справа, локально обмеженою функцією, що не зростає для великих значень аргументу. Якщо умова* (2.72) *виконується з* $\rho = -1/2$ *та* $\int_0^\infty h^2(y)\mathrm{d}y = \infty$*, то*

$$\left(\frac{Z(t+g(t,u)) - \mu^{-1}\int_0^{t+g(t,u)} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\right)_{u\in[0,1]} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (\widehat{\mathcal{S}}_2(u))_{u\in[0,1]}, \quad t\to\infty,$$

де $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi$*,* $\mu = \mathbb{E}\xi$*, а* $g : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}_+$ *– довільна неспадна по другому аргументу функція, що задовольняє*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{g(t,u)} h^2(y)\mathrm{d}y}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y} = u \tag{2.149}$$

для кожного $u \in [0,1]$.

Зауваження 52. Помітимо, що функція $m(t) := \int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y$ неперервна, неспадна, повільно змінюється на нескінченності та необмежена при $t\to\infty$, див. лему 159(г). Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що функція $g(t,u) = m^{\leftarrow}(um(t))$ задовольняє умову (2.149).

Процес $\widehat{\mathcal{S}}_2$ з'являвся в різних роботах, зокрема в нещодавніх [44, 47]. Наявність $\mathcal{Q}$ робить траєкторії $\widehat{\mathcal{S}}_2$ сильно нерегулярними, див. рисунок 2.2. Зокрема, цей процес не має версій в просторі $D[0,1]$. Коваріаційна структура $\widehat{\mathcal{S}}_2$ схожа на коваріаційну структуру броунівського руху $\mathcal{S}_2$: для довільних $u, v \in [0,1]$

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\mathcal{S}}_2(u), \widehat{\mathcal{S}}_2(v)) = \begin{cases} (1-u)\wedge(1-v), & \text{якщо } u \neq v, \\ 1, & \text{якщо } u = v. \end{cases}$$

Серед іншого з цього випливає, що жоден з процесів $\widehat{\mathcal{S}}_2(\cdot)$ та $\widehat{\mathcal{S}}_2(1-\cdot)$ не є самоподібним.

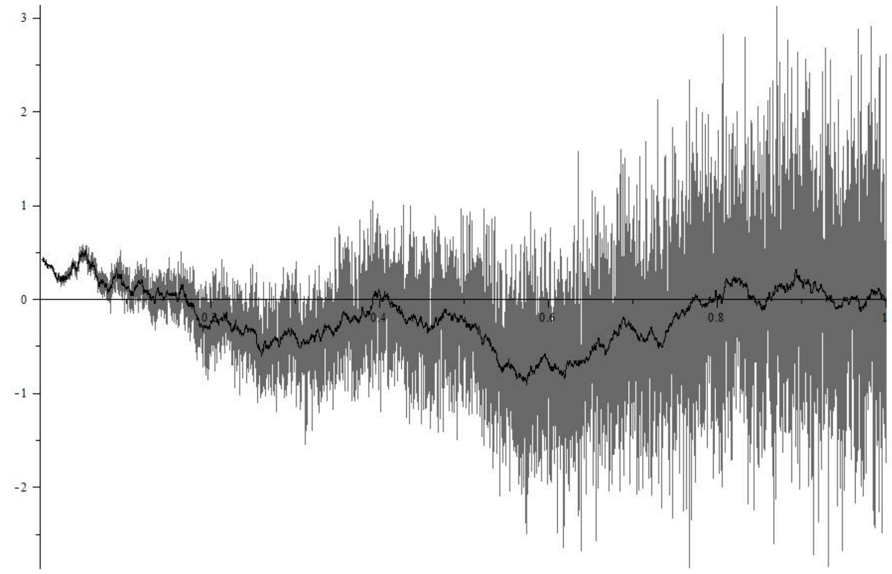


Рис. 2.2: Граничний процес $\widehat{\mathcal{S}}_2$ (сірий графік) та стандартний броунівський рух в оберненому часі $\mathcal{S}_2(1-u)$ (чорний графік)

Зауваження 53. Розглянемо, як читаються результати теореми 51 для різних типів функції повільної зміни $\widehat{\ell}$ в представленні $h(t) = t^{-1/2}\widehat{\ell}(t)$ – «повільних функції повільної зміни», «швидких функцій повільної зміни» та «помірних функцій повільної зміни». До кінця цього зауваження L є довільною функцією, що повільно змінюється на ∞.

«Помірні» $\widehat{\ell}$. Якщо $\widehat{\ell}(t) = (\ln t)^{(\rho_1-1)/2}L(\ln t)$ для деякого $\rho_1 > 0$, то

$$m(t) = \int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y \sim \int_0^{\ln t} h^2(e^y)e^y\mathrm{d}y \sim \rho_1^{-1}(\ln t)^{\rho_1}L^2(\ln t), \quad t \to \infty$$

згідно з лемою 159(в), оскільки $h^2(e^y)e^y \sim y^{\rho_1-1}L^2(y)$. Отже, можна покласти $g(t,u) = t^{u^{1/\rho_1}}$.

«Повільні» $\widehat{\ell}$. Якщо $\widehat{\ell}(t) = (\ln t)^{-1/2}(\ln\ln t)^{(\rho_1-1)/2}L(\ln\ln t)$ для деякого $\rho_1 > 0$, то

$$m(t) \sim \rho_1^{-1}(\ln\ln t)^{\rho_1}L^2(\ln\ln t)$$

і можна покласти $g(t,u) = \exp((\ln t)^{u^{1/\rho_1}})$.

«Швидкі» $\widehat{\ell}$. Якщо $\widehat{\ell}(t) = \exp((\rho_1/2)(\ln t)^\gamma)(\ln t)^{(\gamma-1)/2}L(\exp((\ln t)^\gamma))$ для деяких $\rho_1 > 0$ та $\gamma \in (0,1)$, то

$$m(t) \sim (\gamma\rho_1)^{-1}\exp(\rho_1(\ln t)^\gamma)L^2(\exp((\ln t)^\gamma))$$

і можна покласти $g(t,u) = tu^{(\gamma\rho_1)^{-1}(\ln t)^{1-\gamma}}$.

2.4.2 Доведення теореми 51.

Ми розпочнемо з допоміжної леми.

Лема 54. *Нехай h не зростає на $\mathbb{R}_+$ та задовольняє умови теореми 51. Тоді для довільних $0 \le b < a \le 1$,*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{t+t^{(b)}} h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y} = 1-a,$$

де $t^{(u)} := g(t,u)$, $u \in [0,1]$, див. (2.149) *для визначення g.*

Доведення. Ми спочатку розглянемо головний член інтеграла і перевіримо, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{t^{(a)}}^t h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y}{m(t)} = 1-a, \tag{2.150}$$

де, нагадаємо, $m(t) = \int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y$. Ми часто використовуватимемо простий факт, що $\lim_{t\to\infty} t^{(a)}/t^{(b)} = \infty$, який випливає з повільної зміни та монотонності m. З монотонності h отримуємо

$$m(t+t^{(a)}-t^{(b)}) - m(2t^{(a)}-t^{(b)}) \le \int_{t^{(a)}}^t h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y \le m(t)-m(t^{(a)}),$$

що дає (2.150) з огляду на (2.149) та повільну зміну m. Залишається показати, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^{t^{(a)}} h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y}{m(t)} = 0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\int_t^{t+t^{(b)}} h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y}{m(t)}. \tag{2.151}$$

Для перевірки першої рівності в (2.151) скористаємось монотонністю h і запишемо

$$\int_0^{t^{(a)}} h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y \le h(t^{(a)}-t^{(b)}) \int_0^{t^{(a)}} h(y)\mathrm{d}y = O(\widehat{\ell}^2(t^{(a)}))$$

згідно з лемою 159(в), оскільки h правильно змінюється з індексом $-1/2$. З іншого боку, згідно з частиною (г) леми 159,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{\ell}^2(t^{(a)})}{m(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\widehat{\ell}(t^{(a)})}{\int_0^{t^{(a)}} y^{-1}\widehat{\ell}^2(y)\mathrm{d}y} \frac{m(t^{(a)})}{m(t)} = 0,$$

що доводить перше співвідношення в (2.151). Для другого співвідношення маємо оцінку

$$\int_t^{t+t^{(b)}} h(y)h(y+t^{(a)}-t^{(b)})\mathrm{d}y \le h^2(t)t^{(b)} \sim \widehat{\ell}^2(t)t^{-1}t^{(b)} = o(\widehat{\ell}^2(t)) = o(m(t)),$$

де останній перехід випливає з леми 159(г). Доведення леми 54 завершено.

$\square$

Доведення теореми 51. Ми доведемо теорему у припущенні, що функція h є всюди незростаючою, нескінченно диференційовної та такою, що $t \mapsto e^{-t}(-h'(t))$ не зростає. Те, що такі припущення не зменшують загальності, доведено на сс. 71-72 роботи [132].

Доведення розіб'ємо на три кроки.

Крок 1. (Зведення до стаціонарного процесу відновлення). Спочатку ми доведемо, що

$$\frac{\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} - \sum_{k\geq 0} h(t-S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}}}{a(t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty, \tag{2.152}$$

для довільної функції $a(t)$ такої, що $\lim_{t\to\infty} a(t) = +\infty$. Роблячи це, ми інтенсивно використовуватимемо формулу

$$S_k^* = S_0^* + S_k, \quad k\geq 0.$$

Розпочнемо з рівності

$$\begin{aligned} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \;&-\; h(t-S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}} \\ &= h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t<S_k^*\}} - \Big(h(t-S_k^*) - h(t-S_k)\Big)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}}, \end{aligned}$$

яка виконується м.н. Звідси

$$\begin{aligned} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \;&-\; h(t-S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}} \leq h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t<S_k^*\}} \\ &= h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t,\, S_0^*>t\}} + h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{t-S_0^*<S_k\leq t,\, S_0^*\leq t\}} \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

Очевидно, що

$$\Big(\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\Big)\mathbb{1}_{\{S_0^*>t\}} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0.$$

Використавши монотонність h та субадитивність за розподілом ν, отримаємо

$$\sum_{k\geq 0} h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{t-S_0^*<S_k\leq t,\, S_0^*\leq t\}} \leq h(0)\big(\nu(t)-\nu(t-S_0^*)\big)\mathbb{1}_{\{S_0^*\leq t\}} \overset{\mathrm{d}}{\leq} h(0)\nu(S_0^*).$$

З іншого боку,

$$h(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \;-\; h(t-S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}} \geq -\Big(h(t-S_k^*) - h(t-S_k)\Big)\mathbb{1}_{\{S_k^*\leq t\}}$$

м.н. Застосуємо теорему про середнє значення для диференційовних функцій та той факт, що $e^{-t}(-h'(t))$ не зростає. Маємо для деякого $\theta \in [t - S_k^*,\, t - S_k]$,

$$\begin{aligned}(h(t - S_k^*) - h(t - S_k))\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}} &= e^{-\theta}(-h'(\theta))e^{\theta} S_0^* \mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}} \\ &\le e^{-(t - S_k^*)}(-h'(t - S_k^*))e^{t - S_k}\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}} S_0^* = -h'(t - S_k^*))\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}} S_0^* e^{S_0^*}\end{aligned}$$

м.н. Функція $t \to (-h'(t))$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0, \infty)$, оскільки вона додатна, інтегровна, а функція $t \to e^{-t}(-h'(t))$ не зростає. Отже, $\mathbb{E}\left[\sum_{k \ge 0}(-h'(t - S_k^*))\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t\}}\right] = O(1)$ згідно з лемою 163. Поєднуючи наведені факти, бачимо, що має місце збіжність (2.152). Таким чином, для доведення теореми потрібно перевірити, що при $t \to \infty$

$$\left(\frac{\sum\limits_{k \ge 0} h(t + t^{(u)} - S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t + t^{(u)}\}} - \mu^{-1}\int_0^{t + t^{(u)}} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\sigma^2 \mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\right)_{u \in [0,1]} \stackrel{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (\widehat{\mathcal{S}}_2(u))_{u \in [0,1]}. \tag{2.153}$$

Для доведення (2.153) скористаємось прийомом Крамера-Уолда і покажемо, що при $t \to \infty$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\sum_{k \ge 0} h(t + t^{(u_i)} - S_k^*)\mathbb{1}_{\{S_k^* \le t + t^{(u_i)}\}} - \mu^{-1}\int_0^{t + t^{(u_i)}} h(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\sigma^2 \mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}} \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{\mathcal{S}}_2(u_i) \tag{2.154}$$

для довільного $n \in \mathbb{N}$, довільних $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ та всіх $0 \le u_1 < \cdots < u_n \le 1$. Зауважмо, що в.в. в правій частині (2.154) має центрований нормальний розподіл з дисперсією $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 + 2\sum_{1 \le k < m \le n} \alpha_k \alpha_m (1 - u_m)$.

Інтегруючи частинами, бачимо, що чисельник лівої частини (2.154) дорівнює

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{[0,\, t + t^{(u_i)}]} h(t + t^{(u_i)} - y)\mathrm{d}(\nu^*(y) - \mu^{-1}y) \\ =\ &\sum_{i=1}^n \alpha_i \Big(h(t + t^{(u_i)})\big(\nu^*(t + t^{(u_i)}) - \mu^{-1}(t + t^{(u_i)})\big) \\ +\ &\int_{[0,\, t + t^{(u_i)}]} (\nu^*(t + t^{(u_i)}) - \nu^*((t + t^{(u_i)} - y)-) - \mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h(y)) \Big).\end{aligned}$$

Оскільки h правильно змінюється, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{th^2(t)}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}=0 \tag{2.155}$$

згідно з лемою 159(г). Внаслідок збіжності за розподілом $(\nu^*(t)-\mu^{-1}t)/\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}t}$ до нормального закону[12] маємо

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\sqrt{t}h(t+t^{(u_i)})}{\sqrt{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\frac{\nu^*(t+t^{(u_i)})-\mu^{-1}(t+t^{(u_i)})}{\sqrt{t}}\ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0,\quad t\to\infty,$$

що демонструє еквівалентність (2.154) та

$$\sum_{i=1}^n\alpha_i\frac{\int_{[0,\,t+t^{(u_i)}]}(\nu^*(t+t^{(u_i)})-\nu^*((t+t^{(u_i)}-y)-)-\mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h(y))}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}$$

$$\overset{\mathrm{d}}{\to}\sum_{i=1}^n\alpha_i\widehat{\mathcal{S}}_2(u_i). \tag{2.156}$$

Обертаючи час відносно точки $t+t^{(u_n)}$ з використанням твердження 17, робимо висновок, що ліва частина (2.156) має той самий розподіл, що й

$$\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_{[0,\,t+t^{(u_i)}]}(\nu^*(y+t^{(u_n)}-t^{(u_i)})-\nu^*(t^{(u_n)}-t^{(u_i)})-\mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h(y))}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}.$$

Поклавши $r_m:=t^{(u_n)}-t^{(u_{n-m})}$ при $m=0,\dots,n-1$, перепишемо (2.156) у такому вигляді

$$\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i\int_{[0,\,t+t^{(u_i)}]}(\nu^*(y+r_{n-i})-\nu^*(r_{n-i})-\mu^{-1}y)\mathrm{d}(-h(y))}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\overset{\mathrm{d}}{\to}\sum_{i=1}^n\alpha_i\widehat{\mathcal{S}}_2(u_i) \tag{2.157}$$

при $t\to\infty$.

Крок 2. (Зведення до незалежних в.в.). Метою цього кроку є заміна приростів $(\nu^*(y+r_{n-i})-\nu^*(r_{n-i}))_{r_{n-i}\le y\le r_{n-i+1}}$ (які є залежними) на незалежні в.в. Ідея полягає у послідовній заміні перестрибів випадкового блукання $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ точок $r_1,\dots,r_{n-1}$ незалежними копіями S_0^* зі збереженням всіх інших кроків блукання незмінними.

[12] Це випливає з рівності $\nu^*(t)=\nu(t-S_0^*)$, яка виконується для всіх $t\ge 0$, та центральної граничної теореми для $\nu(t)$.

Нехай $S_{0,0},\dots,S_{0,n-1}$ є незалежними копіями S_0^*, які також не залежать від $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Поклавши

$$S_k^{*(0)}:=S_k^*,\quad k\geq 0,\quad \nu^{*(0)}(s):=\inf\{k\in\mathbb{N}:S_k^{*(0)}>s\},\quad s\geq 0$$

та

$$\nu^{(0)}(s):=\inf\{k\in\mathbb{N}:S^{*(0)}_{\nu^{*(0)}(r_1)+k}-S^{*(0)}_{\nu^{*(0)}(r_1)}>s\},\quad s\geq 0,$$

визначимо рекурсивно для $m=1,\dots,n-1$ процеси

$$S_k^{*(m)}:=r_m+S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)+k}-S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)}+S_{0,m},\quad k\geq 0,$$
$$\nu^{*(m)}(s):=\inf\{k\in\mathbb{N}:S_k^{*(m)}>s\},\quad s\geq r_m$$

та

$$\nu^{(m)}(s):=\inf\{k\in\mathbb{N}:S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)+k}-S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)}>s\},\quad s\geq 0.$$

Зауважимо, що процес $(\nu^{*(m)}(s+r_m))_{s\geq 0}$ є копією процесу $(\nu^*(s))_{s\geq 0}$, а процеси $(\nu^{*(m)}(s))_{r_m\leq s\leq r_{m+1}}$ при $m=0,\dots,n-2$ та $(\nu^{*(n-1)}(s))_{s\geq r_{n-1}}$ незалежні в сукупності.

Чисельник в (2.157) дорівнює $\sum_{j=1}^n\theta_j+R(t)$, де

$$\begin{aligned}\theta_1 &:= \int_{[0,\,t+t^{(u_1)}]}(\nu^*(y+t^{(u_n)}-t^{(u_1)})-\nu^*(t^{(u_n)}-t^{(u_1)})\\ &- \mu^{-1}y)\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=1}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)})\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_j &:= \int_{[0,\,t^{(u_j)}-t^{(u_{j-1})}]}(\nu^*(y+t^{(u_n)}-t^{(u_j)})-\nu^*(t^{(u_n)}-t^{(u_j)})\\ &- \mu^{-1}y)\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=j}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_j)})\Big)\end{aligned}$$

при $j=2,\dots,n$, та $R(t)$ є таким, що

$$\frac{R(t)}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0,\quad t\to\infty.$$

Отже, з точністю до члена, що збігається до нуля за ймовірністю, чисельник в (2.157) дорівнює сумі $\sum_{k=1}^n\theta_k$ *залежних* випадкових величин. Тепер покажемо, що замість цієї суми ми можемо працювати з сумою $\sum_{k=1}^n\theta'_k$ *незалежних* випадкових величин, де

$$\theta_1' := \int_{[0,\,t+t^{(u_1)}]} (\nu^{*(n-1)}(y+t^{(u_n)}-t^{(u_1)}) - \frac{y}{\mu})\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=1}^{n} \alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)})\Big)$$

та для $j = 2, \dots, n$

$$\theta_j' := \int_{[0,\,t^{(u_j)}-t^{(u_{j-1})}]} (\nu^{*(n-j)}(y+t^{(u_n)}-t^{(u_j)}) - \frac{y}{\mu})\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=j}^{n} \alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_j)})\Big).$$

Для доведення правомірності такої заміни, покажемо спочатку, що при $m = 1, \dots, n-1$ та $y \geq 0$,

$$\mathbb{E}[|\nu^*(y+r_m) - \nu^*(r_m) - \nu^{*(m)}(y+r_m)|] \leq a_m c < \infty, \tag{2.158}$$

де $a_m := 2^m - 1$ та $c = 2\mathbb{E}\nu(S_0^*) + \mathbb{E}\nu(y_0)$ для досить великого y_0. З огляду на припущення $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ маємо $\mathbb{E}S_0^* < \infty$ і, отже, $c < \infty$ та $\mathbb{E}\nu(y) \leq \mu^{-1}y + \mathrm{const}$ для всіх $y \geq 0$.

Перевіримо, що для $m = 1, \dots, n-1$,

$$I_m := \mathbb{E}|\nu^{*(m-1)}(y+r_m) - \nu^{*(m-1)}(r_m) - n\nu^{*(m)}(y+r_m)| \leq c. \tag{2.159}$$

Дійсно,

$$\begin{aligned}
&\nu^{*(m-1)}(y+r_m) - \nu^{*(m-1)}(r_m) - \nu^{*(m)}(y+r_m) \\
&\qquad = \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S^{*(m-1)}_{\nu^{(m-1)}(r_m)+k} - S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)} \leq y - (S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)} - r_m)\}} \\
&\qquad - \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)+k} - S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)} \leq y - S_{0,m}\}} \\
&\qquad = \nu^{(m)}(y-\eta_m)\mathbb{1}_{\{\eta_m \leq y\}} - \nu^{(m)}(y - S_{0,m})\mathbb{1}_{\{S_{0,m}\leq y\}},
\end{aligned}$$

де $\eta_m := S^{*(m-1)}_{\nu^{*(m-1)}(r_m)} - r_m$. Процес $(\nu^{(m)}(t))_{t\geq 0}$ є копією $(\nu(t))_{t\geq 0}$, що не залежить від η_m та $S_{0,m}$. Останні дві величини є незалежними копіями S_0^*. З нерівності $\mathbb{E}S_0^* < \infty$ випливає $\lim_{y\to\infty} \mathbb{E}\nu(y)\mathbb{P}\{S_0^* > y\} = 0$ з огляду на $\mathbb{E}\nu(y) \sim \mu^{-1}y$ при $y \to \infty$ за елементарною теоремою відновлення. Маємо

$$\begin{aligned}
I_m &= \mathbb{E}|\nu^{(m)}(y-\eta_m) - \nu^{(m)}(y-S_{0,m})|\mathbb{1}_{\{\eta_m\leq y, S_{0,m}\leq y\}} \\
&+ \mathbb{E}\nu^{(m)}(y-S_{0,m})\mathbb{1}_{\{\eta_m > y, S_{0,m}\leq y\}} + \mathbb{E}\nu^{(m)}(y-\eta_m)\mathbb{1}_{\{\eta_m\leq y, S_{0,m} > y\}} \\
&\leq \mathbb{E}\nu^{(m)}(|\eta_m - S_{0,m}|) + 2\mathbb{E}\nu(y)\mathbb{P}\{S_0^* > y\} \leq 2\mathbb{E}\nu(S_0^*) + \mathbb{E}\nu(y_0)
\end{aligned}$$

для досить великих y_0, де ми використали субадитивність за розподілом $\nu^{(m)}(t)$.

Перевіримо (2.158) методом математичної індукції. При $m = 1$ формула (2.158) випливає з формули (2.159) з $m = 1$. Припустимо, що (2.158) виконується для всіх $m \le j - 1 < n - 1$. Тоді

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}|\nu^*(y + r_j) - \nu^*(r_j) - \nu^{*(j)}(y + r_j)| \\
&\quad\le\ \mathbb{E}|\nu^*(y + r_j) - \nu^*(r_{j-1}) - \nu^{*(j-1)}(y + r_j)| \\
&\quad+\ \mathbb{E}|\nu^{*(j-1)}(y + r_j) - \nu^{*(j-1)}(r_j) - \nu^{*(j)}(y + r_j)| \\
&\quad+\ \mathbb{E}|\nu^{*(j-1)}(r_j) + nu^*(r_{j-1}) - \nu^*(r_j)| \le (2a_{j-1} + 1)c = a_j c,
\end{aligned}$$

оскільки перший член не перевищує $a_{j-1}c$ (застосуємо (2.158) з $m = j - 1$ та $y + r_j - r_{j-1}$ замість y), другий член не перевищує c (застосуємо (2.158) з $m = j$), а третій член не перевищує $a_{j-1}c$ (застосуємо (2.158) з $m = j - 1$ та $y = r_j - r_{j-1}$).

Підсумовуючи, бачимо, що з (2.158) випливає еквівалентність (2.157) та

$$\frac{\sum_{k=1}^n \theta'_k}{\sqrt{\sigma^2\mu^{-3}\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}} \ \xrightarrow{\mathrm{d}}\ \sum_{i=1}^n \alpha_i \widehat{\mathcal{S}}_2(u_i).$$

Крок 3. (Заміна $\nu^*(t)$ броунівським рухом). Нехай $\mathcal{S}_{2,0}, \ldots, \mathcal{S}_{2,n-1}$ є незалежними броунівськими рухами такими, що $\mathcal{S}_{2,k}$ апроксимує $\nu^{*(k)}(\cdot + t^{(u_n)} - t^{(u_{n-k})})$ в сенсі леми 205 в додатку.

Ми стверджуємо, що

$$\begin{aligned}
K_{n-1}(t) := \left(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\right)^{-1/2} &\int_{[0,\, t+t^{(u_1)}]} |\nu^{*(n-1)}(y + t^{(u_n)} - t^{(u_1)}) - \mu^{-1}y \\
&- \sigma\mu^{-3/2}\mathcal{S}_{2,n-1}(y)|\mathrm{d}\left(-\sum_{k=1}^n \alpha_k h(y + t^{(u_k)} - t^{(u_1)})\right) \ \xrightarrow{\mathbb{P}}\ 0 \qquad (2.160)
\end{aligned}$$

та для $j = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
K_{n-j}(t) := \left(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\right)^{-1/2} &\int_{[0,\, t^{(u_j)}-t^{(u_{j-1})}]} |\nu^{*(n-j)}(y + t^{(u_n)} - t^{(u_j)}) - \mu^{-1}y \\
&- \sigma\mu^{-3/2}\mathcal{S}_{2,n-j}(y)|\mathrm{d}\left(-\sum_{k=j}^n \alpha_k h(y + t^{(u_k)} - t^{(u_j)})\right) \ \xrightarrow{\mathbb{P}}\ 0 \qquad (2.161)
\end{aligned}$$

при $t\to\infty$. З t_0 та A, як в лемі 205, (2.160) випливає з нерівності

$$\begin{aligned}K_{n-1}(t) &\leq K_{n-1}(t)\mathbb{1}_{\{t_0>t+t^{(u_1)}\}}+\Big(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\Big)^{-1/2}\\ &\times \Big(\int_{[0,\,t_0]}|\nu^{*(n-1)}(y+t^{(u_n)}-t^{(u_1)})-\mu^{-1}y\\ &- \sigma\mu^{-3/2}\mathcal{S}_{2,n-1}(y)|\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=1}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)})\Big)\\ &+ A\int_{(t_0,\,t+t^{(u_1)}]}y^{1/r}\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=1}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)})\Big)\Big)\mathbb{1}_{\{t_0\leq t+t^{(u_1)}\}},\end{aligned}$$

оскільки перші два доданки тривіально збігаються до нуля за ймовірністю, а третій – внаслідок збіжності інтеграла $\int_{(t_0,\,\infty)}y^{1/r}\mathrm{d}(-h(y))$. Співвідношення (2.161) перевіряються аналогічно.

Формули (2.160) та (2.161) демонструють, що ми звели початкову задачу до перевірки

$$\frac{\sum_{k=1}^n\theta_k''}{\sqrt{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}}\ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_{i=1}^n\alpha_i\widehat{\mathcal{S}}_2(u_i),$$

де

$$\theta_1'':=\int_{[0,\,t+t^{(u_1)}]}\mathcal{S}_{2,n-1}(y)\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=1}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)})\Big)$$

та для $j=2,\ldots,n$,

$$\theta_j'':=\int_{[0,\,t^{(u_j)}-t^{(u_{j-1})}]}\mathcal{S}_{2,n-j}(y)\mathrm{d}\Big(-\sum_{k=j}^n\alpha_k h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_j)})\Big).$$

Оскільки $\sum_{k=1}^n\theta_k''$ є сумою незалежних центрованих величин з нормальним розподілом, залишається перевірити, що

$$\mathbb{D}\left(\sum_{k=1}^n\theta_k''\right)=\sum_{k=1}^n\mathbb{D}\,\theta_k''\ \sim\ \left(\sum_{i=1}^n\alpha_i^2+2\sum_{1\leq k<m\leq n}\alpha_k\alpha_m(1-u_m)\right)\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y.$$

Записавши інтеграл, що визначає θ_1'', як границю інтегральних сум, пересвідчуємось, що

$$\mathbb{D}\theta_1'' = \int_0^{t+t^{(u_1)}} \biggl(\sum_{k=1}^n \alpha_k (h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_1)}) - h(t+t^{(u_k)})\biggr)^2 \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \biggl(\int_{t^{(u_k)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_k)}} h^2(y)\mathrm{d}y - 2h(t+t^{(u_k)}) \int_{t^{(u_k)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_k)}} h(y)\mathrm{d}y$$

$$+ (t+t^{(u_1)})h^2(t+t^{(u_k)})\biggr)$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j \biggl(\int_{t^{(u_i)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_i)}} h(y)h(y+t^{(u_j)}-t^{(u_i)})\mathrm{d}y$$

$$- h(t+t^{(u_i)}) \int_{t^{(u_j)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_j)}} h(y)\mathrm{d}y - h(t+t^{(u_j)}) \int_{t^{(u_i)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_i)}} h(y)\mathrm{d}y$$

$$+ (t+t^{(u_1)})h(t+t^{(u_i)})h(t+t^{(u_j)})\biggr) = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \int_{t^{(u_k)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_k)}} h^2(y)\mathrm{d}y$$

$$+ 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j \int_{t^{(u_i)}-t^{(u_1)}}^{t+t^{(u_i)}} h(y)h(y+t^{(u_j)}-t^{(u_i)})\mathrm{d}y + o\biggl(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\biggr).$$

Останній o-член з'являється тому, що другий, п'ятий та шостий доданки у правій частині наведеної рівності обмежені, а третій та сьомий є $o\Bigl(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\Bigr)$ згідно з (2.155). Аналогічно, при $m=2,\dots,n$ маємо

$$\mathbb{D}\theta_m'' = \int_0^{t^{(u_m)}-t^{(u_{m-1})}} \biggl(\sum_{k=m}^n \alpha_k (h(y+t^{(u_k)}-t^{(u_m)}) - h(t^{(u_k)}-t^{(u_{m-1})})\biggr)^2 \mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=m}^n \alpha_k^2 \int_{t^{(u_k)}-t^{(u_m)}}^{t^{(u_k)}-t^{(u_{m-1})}} h^2(y)\mathrm{d}y$$

$$+2\sum_{m\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j \int_{t^{(u_i)}-t^{(u_m)}}^{t^{(u_i)}-t^{(u_{m-1})}} h(y)h(y+t^{(u_j)}-t^{(u_i)})\mathrm{d}y + o\biggl(\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y\biggr).$$

Використавши наведені обчислення, отримуємо

$$\frac{\mathbb{D}\bigl(\sum_{k=1}^n \theta_k''\bigr)}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y} = \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \frac{\int_0^{t+t^{(u_k)}} h^2(y)\mathrm{d}y}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y}$$

$$+ \ 2\sum_{1\le i<j\le n} \alpha_i\alpha_j \frac{\int_0^{t+t^{(u_i)}} h(y)h(y+t^{(u_j)}-t^{(u_i)})\mathrm{d}y}{\int_0^t h^2(y)\mathrm{d}y} + o(1).$$

При $t\to\infty$, коефіцієнти при α_k^2, $k=1,\dots,n$ збігаються до одиниці. Застосовуючи лему 54, переконуємось, що коефіцієнти при $2\alpha_i\alpha_j$, $1\le i<j\le n$,

збігаються до $1 - u_j$ при $t \to \infty$. Доведення теореми 51 завершено. $\square$

2.5 Приклади та застосування

2.5.1 Процеси зі скінченною тривалістю та число активних випадкових процесів у системі з імміграцією. Припустимо, що процес X має скінченну тривалість, тобто випадкова величина $\tau := \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\}$ є м.н. скінченною та $X(t) = 0$ при $t \geq \tau$. Вважатимемо процес X «активним» в момент часу t тоді і тільки тоді, коли $t < \tau$. Нехай $\tau_k := \inf\{t \geq 0 : X_k(t) = 0\}$. Кількість активних процесів в системі з імміграцією в момент часу $t \geq 0$ дорівнює

$$M(t) := \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k \leq t < S_k + \tau_{k+1}\}}.$$

Зазначимо, що процес M сам є випадковим процесом з імміграцією в якому $X(t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$. Підкреслимо, що процес $X(t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$ та процес $X(t)$ в означенні τ є різними об'єктами.

З огляду на його простоту, процесу M була приділена значна увага в літературі. Можливі інтерпретації:

- $M(t)$ є числом зайнятих серверів в момент часу t в СМО $GI/G/\infty$, див. [159];

- $M(t)$ є числом активних завантажень в комп'ютерній мережі в момент часу t, див. [172, 201];

- $M(t)$ є різницею між числом візитів в інтервал $[0, t]$ стандартного $\big(S_n\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$ та збуреного $\big(S_n + \tau_{n+1}\big)_{n \in \mathbb{N}_0}$ випадкового блукання, див. [8].

Дослідимо, коли процеси зі скінченною тривалістю збігаються до стаціонарних версій. Припустимо, що виконуються перші дві умови теореми 3: $\mathbb{E}\xi < \infty$, та розподіл ξ неарифметичний. Також припустимо, що процес X має скінченну тривалість у наведеному вище сенсі і більше того

$$\mathbb{P}\{X(t) \geq 0\} = 1 \quad \text{та} \quad \mathbb{P}\{X(t) \in (0,1)\} = 0, \quad t \geq 0. \tag{2.162}$$

Тоді умова $\mathbb{E}\tau < \infty$ є необхідною і достатньою для виконання співвідношення (2.8). За додаткового припущення (2.9) умова $\mathbb{E}\tau < \infty$ еквівалентна (2.10).

Дійсно, якщо $\mathbb{E}\tau < \infty$, то з (2.16) випливає, що $G(t) = \mathbb{E}[|X(t)| \wedge 1]$ та $H_\varepsilon(t) = \mathbb{E}\big[\sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]}(|X(u)| \wedge 1)\big]$ (для довільного $\varepsilon > 0$) є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $[0,\infty)$. Тому (2.8) та (2.10) (за додаткового припущення (2.9)) випливають з теореми 3.

Припустимо тепер, що $\mathbb{E}\tau = \infty$. Згідно з посиленим законом великих чисел, для довільного $\rho \in (0,\mu)$, існує м.н. скінченна в.в. M така, що $S^*_k > (\mu-\rho)k$ для $k \geq M$. Тому, для довільного $u \in \mathbb{R}$ м.н.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\big\{X_k(u+S^*_k)\mathbb{1}_{\{u+S^*_k\geq 0\}} \geq 1|(S^*_j)_j\big\} &= \sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{u+S^*_k\geq 0\}}\mathbb{P}\big\{\tau_k > u+S^*_k\big|(S^*_j)_j\big\}\\
&= \sum_{k\geq \nu^*(-u)}\mathbb{P}\big\{\tau_k - u > S^*_k\big|(S^*_j)_j\big\}\\
&\geq \sum_{k\geq M\vee\nu^*(-u)}\mathbb{P}\big\{\tau - u > (\mu-\rho)k\big|(S^*_j)_j\big\}\\
&= \infty,
\end{aligned}$$

де $\tau_k = \inf\{t : X_k(t) = 0\}$ та $\nu^*(-u) := \inf\{k \in \mathbb{N}_0 : S^*_k \geq -u\}$. При фіксованих $(S^*_j)_j$ ряд $\sum_{k\geq 0} X_{k+1}(u+S^*_k)\mathbb{1}_{\{S^*_k\geq -u\}}$ не збігається м.н. за теоремою про три ряди. Оскільки члени ряду є невід'ємними, то при заданих $(S^*_j)_j$, цей ряд є розбіжним м.н. Отже, для кожного $u \in \mathbb{R}$ маємо $\sum_{k\in\mathbb{Z}} X_{k+1}(u+S^*_k)\mathbb{1}_{\{S^*_k\geq -u\}} = \infty$ м.н., тому (2.8) не може виконуватись.

Наведемо два приклади процесів X, які мають скінченну тривалість та задовольняють (2.162).

Приклад 55. Нехай X є докритичним гіллястим процесом Беллмана-Харріса, див. розділ 4 книги [21] для означення та властивостей, з єдиним предком. Нехай η та N є незалежними, де η є тривалістю життя індивіда, а N є кількістю нащадків. Припустимо, що $\mathbb{P}\{\eta = 0\} = 0$, $\mathbb{P}\{N = 0\} < 1$ та $\mathbb{P}\{N = 1\} < 1$. Тоді Y є докритичним або критичним процесом Беллмана-Харіса з одиничною імміграцією в моменти відновлення. Процес Y задовольняє співвідношення (2.8) тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}\tau < \infty$. Для збіжності одновимірних розподілів цей критерій було встановлено в теоремі 1 [216] з використанням техніки твірних функцій. За умови $\mathbb{E}\eta < \infty$, яка гарантує $\mathbb{E}\tau < \infty$, слабка збіжність одновимірних розподілів докритичного процесу з імміграцією була встановлена в теоремі 3 [148]. Зауважимо, що збіжність (2.10) еквівалентна $\mathbb{E}\tau < \infty$ за додаткового припущення (2.9), яке виконується, зокрема, якщо розподіл η є неперервним.

Приклад 56. Нехай X є процесом народження і загибелі з $X(0) = i \in \mathbb{N}$ м.н. Припустимо, що X поглинається в стані 0 з ймовірністю один. Оскільки умова (2.9) завжди виконується, то відповідний процес Y задовольняє (2.10) тоді і тільки тоді, коли $\mathbb{E}\tau < \infty$. Критерій скінченності $\mathbb{E}\tau$ в термінах інфінітезимальних інтенсивностей можна знайти в теоремі 7.1 [161].

Наведемо тепер асимптотичні результати для процесу $(M(t))_{t\geq 0}$ за різноманітних припущень на розподіл (ξ, τ), оскільки вони нам знадобляться в інших розділах. Незалежність ξ та τ не припускається.

З теореми 3 випливає

Твердження 57. *Припустимо, що $\mathbb{E}\xi < \infty$, $\mathbb{E}\tau < \infty$ та нехай ξ має неперервний розподіл. Тоді*

$$M(u+t) \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{\{0\leq u+S_k^*<\tau_k\}}, \quad t\to\infty,$$

у просторі $D(\mathbb{R})$ з J_1-топологією.

З теореми 40 випливає

Твердження 58. *Нехай $\mathbb{P}\{\tau > t\} \sim t^{\beta}\widehat{\ell}(t)$ при $t\to\infty$ для деякого $\beta \in (-1, 0]$, і нехай ξ належить області притягання деякого стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$. Нехай функція c така, як в* (2.76).

(a) Якщо $\mathbb{P}\{\tau > t\} = o(t/c^2(t))$ при $t\to\infty$, то

$$\left(\frac{M(ut) - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\mathbb{P}\{\tau > y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{1}{\mu}\int_0^t \mathbb{P}\{\tau > y\}\mathrm{d}y}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (V_\beta(u))_{u>0},$$

де V_β є центрованим гауссівським процесом з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)] = w^{1+\beta} - (w-u)^{1+\beta}, \quad 0\leq u\leq w.$$

(б) Якщо $t/c^2(t) = o(\mathbb{P}\{\tau > t\})$ при $t \to \infty$, то

$$\left(\frac{M(ut) - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut} \mathbb{P}\{\tau > y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{\tau > t\}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{\alpha,\beta}(u))_{u>0},$$

де $I_{\alpha,\beta}$ є дробово інтегровним α-стійким процесом Леві, що був введений в означенні 25.

Зауваження 59. Якщо $\sigma^2 < \infty$ то ми завжди знаходимось в ситуації (а). Якщо $\sigma^2 = \infty$ та $\mathbb{P}\{\tau > t\}c^2(t) \sim t$ при $t \to \infty$, граничну теорему можна отримати за додаткового припущення, що ξ та τ незалежні. Для залежних ξ та τ таких, що $\mathbb{P}\{\tau > t\}c^2(t) \sim t$, задача відкрита.

З теореми 41 (випадок $q = 1$) випливає

Твердження 60. *Припустимо, що ξ належить області притягання деякого стійкого розподілу з $\alpha \in (0,1)$ та $\mathbb{P}\{\tau > t\} = t^{\rho}\widehat{\ell}(t)$, $\rho \geq -\alpha$. Припустимо також, що у випадку випадку $\rho = -\alpha$ існує монотонна функція w така, що $\mathbb{P}\{\tau > t\} \sim w(t)\mathbb{P}\{\xi > t\}$ та $w(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Тоді*

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\mathbb{P}\{\tau > t\}}M(ut)\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(J_{\alpha,\rho}(u)\right)_{u>0},$$

де $J_{\alpha,\rho}$ є дробово інтегровним оберненим стійким субординатором, що був введений в означенні 27.

Якщо $\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\tau>t\}}{\mathbb{P}\{\xi>t\}} = 0$, то згідно з лемою 170(а) $\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}[M(t)] = 0$, а, отже, $M(t) \to 0$ за ймовірністю.

Випадок

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim c\mathbb{P}\{\tau > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t), \quad t \to \infty \tag{2.163}$$

для деякого $c \in (0,\infty)$ та $\alpha \in (0,1)$ не покривається наведеними результатами і потребує окремого дослідження.

Нехай $\mathcal{P}^{(\alpha,c)} := \sum_k \delta_{(t_k,j_k)}$ є пуассонівським точковим процесом на $[0,\infty) \times (0,\infty]$ з мірою інтенсивності $\mathbb{LEB} \times \nu_{\alpha,c}$, де $\mathbb{LEB}$ є мірою Лебега на $[0,\infty)$, а $\nu_{\alpha,c}$ є мірою на $(0,\infty]$, що визначена рівністю

$$\nu_{\alpha,c}\big((x,\infty]\big) = c^{-1}x^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Твердження 61. *Припустимо, що виконується умова* (2.163). *Нехай* $c(\cdot)$ *є довільною додатною функцією такою, що*

$$\lim_{t\to\infty} t\ell^*(c(t))/c^\alpha(t) = \lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi > c(t)\} = 1.$$

Якщо для довільних $x, y > 0$ *виконується умова*

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{\xi > xc(t), \tau > yc(t)\} = 0, \tag{2.164}$$

то

$$(M(ut))_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{W_\alpha(t_k)\leq u<W_\alpha(t_k)+j_k\}},\right)_{u\geq 0},$$

де α*-стійкий субординатор* $(W_\alpha(t))_{t\geq 0}$*, див. означення 26, не залежить від пуассонівського процесу* $\mathcal{P}^{(\alpha,c)} = \sum_k \delta_{(t_k,\, j_k)}$.

Зауваження 62. Умова (2.164) виконується тривіальним чином, якщо ξ та τ незалежні. Умови (2.163) та (2.164) означають, що має місце збіжність у просторі точкових мір $M_p([0,\infty]^2/\{(0,0)\})$ з грубою топологією:

$$t\mathbb{P}\{c^{-1}(t)(\xi,\tau) \in \cdot\} \to \mu_{\alpha,c}(\cdot), \tag{2.165}$$

де

$$\mu_{\alpha,c}\{(u,v) : u > x \text{ або } v > y\} = x^{-\alpha} + c^{-1}y^{-\alpha}, \quad x, y > 0.$$

Зокрема, міра $\mu_{\alpha,c}$ зосереджена на координатних осях.

Зауваження 63. Зі збіжності в твердженні 61 одразу випливає стаціонарність процесу $(\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{W_\alpha(t_k)\leq e^u<W_\alpha(t_k)+j_k\}})_{u\in\mathbb{R}}$. Можна перевірити, див. лему 1.1 в [141], що одновимірні розподіли граничного процесу геометричні з параметром $c(c+1)^{-1}$.

Доведення твердження 61. З припущення $\mathbb{P}\{\xi > t\} \sim t^{-\alpha}\ell^*(t)$, $\alpha \in (0,1)$ випливає

$$\frac{S_{[ut]}}{c(t)} \Rightarrow W_\alpha(u), \quad t\to\infty$$

у просторі $D[0,\infty)$ з J_1-топологією. Також має місце збіжність

$$\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)} \Rightarrow W_\alpha(u), \quad t\to\infty \tag{2.166}$$

у просторі $D[0,\infty)$ з J_1-топологією, де $S_{[ut]-1}=0$ при $0\le u<1/t$. Дійсно, очевидна збіжність скінченновимірних розподілів, гарантує збіжність в J_1-топології внаслідок теореми 3.2 в [271], оскільки дограничні процеси мають монотонні траєкторії та є адитивними (в сенсі статті [271]) , а граничний процес є стохастично неперервним.

Згідно з твердженням 3.20 в [227], умова $\mathbb{P}\{\tau>t\}\sim c^{-1}t^{-\alpha}\ell^*(t)$ гарантує збіжність

$$\sum_{k\ge1}\delta_{(k/t,\,\tau_k/c(t))}\ \Rightarrow\ \mathcal{P}^{(\alpha,\,c)},\quad t\to\infty,$$

в просторі $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ з грубою топологією. За визначенням грубої топології це еквівалентно

$$\sum_{k\ge1}g\big(k/t,\,\tau_k/c(t)\big)\ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_m g(t_m,\,j_m),\ \ t\to\infty \tag{2.167}$$

для кожної $g\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$.

Припустимо, що має місце спільна збіжність (це вірно, наприклад, у випадку незалежних ξ та τ)

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)},\sum_{k\ge1}\delta_{(k/t,\,\tau_k/c(t))}\right)\ \Rightarrow\ (W_\alpha(u),\mathcal{P}^{(\alpha,\,c)}),\quad t\to\infty, \tag{2.168}$$

у просторі $D[0,\infty)\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ з продакт-топологією. Тоді дослівне повторення останнього фрагменту доведення теореми 2.1 в [201] дає

$$\sum_{k\ge0}\delta_{(S_k/c(t),\,\tau_{k+1}/c(t))}\Rightarrow\sum_m\delta_{(W_\alpha(t_m),\,j_m)},\ \ t\to\infty$$

у просторі $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ з грубою топологією, звідки потрібне твердження випливає з доведення наслідку 2.3 в [201][13].

Отже, нам достатньо перевірити збіжність (2.168). Згідно з лемою 184 співвідношення (2.168) випливатиме з

$$\left(\frac{S_{[ut]-1}}{c(t)},\sum_{k\ge1}g\big(k/t,\,\tau_k/c(t)\big)\right)\Rightarrow\Big(W_\alpha(u),\sum_m g(t_m,\,j_m)\Big),\ \ t\to\infty$$

у просторі $D[0,\infty)\times[0,\infty)$ для довільної $g\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$.

[13] Відображення T, визначене формулою (2.1) в цитованій роботі, є неперервним в точці $(W_\alpha,\mathcal{P}^{(\alpha,\,c)})$ м.н. внаслідок незалежності W_α та $\mathcal{P}^{(\alpha,\,c)}$.

Розглядаючи другі координати як сталі в $D[0,\infty)$ і застосовуючи лему 2.6 в [126], робимо висновок, що достатньо перевірити збіжність скінченновимірних розподілів, тобто

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]-1}}{c(t)} + \gamma \sum_{k\geq 1} g\big(k/t, \tau_k/c(t)\big) \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_{i=1}^n \gamma_i W_\alpha(u_i) + \gamma \sum_m g(t_m,\, j_m), \quad (2.169)$$

при $t\to\infty$ для кожного $n\in\mathbb{N}$, всіх $\gamma,\gamma_1,\ldots,\gamma_n\geq 0$ та всіх $0<u_1<u_2<\cdots<u_n$, а також щільність координат (окремо, першої і другої).

Щільність перших координат випливає з (2.166), а других – з (2.167). З технічних причин нам буде зручніше перевіряти співвідношення

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]}}{c(t)} + \gamma \sum_{k\geq 1} g\big(k/t, \tau_k/c(t)\big) \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \sum_{i=1}^n \gamma_i W_\alpha(u_i) + \gamma \sum_m g(t_m,\, j_m), \quad t\to\infty, \quad (2.170)$$

яке еквівалентне (2.169) внаслідок леми Слуцького.

Перевіримо (2.170) методом доведення твердження 3.21 в [227]. Для фіксованого $z>0$ маємо

$$\begin{aligned}
\phi_t(z) \ &:=\ \mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{S_{[u_i t]}}{c(t)} + \gamma \sum_{k\geq 1} g\big(k/t,\, \tau_k/c(t)\big)\Big)\Big) \\
&=\ \mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{c(t)} \sum_{k\geq 1} \xi_k 1_{\{k\leq u_i t\}} + \gamma \sum_{k\geq 1} g\big(k/t, \tau_k/c(t)\big)\Big)\Big) \\
&=\ \prod_{k\geq 1} \mathbb{E}\exp\Big(-z\Big(\frac{\xi}{c(t)} \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k\leq u_i t\}} + \gamma g\big(k/t,\, \tau/c(t)\big)\Big)\Big) \\
&=\ \prod_{k\geq 1} \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} \big(1-K(z,u,v,k/t)\big)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in \mathrm{d}u, \tau/c(t)\in \mathrm{d}v\Big\},
\end{aligned}$$

де $K(z,u,v,w) := 1-\exp\Big(-z\Big(u\sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{w\leq u_i\}} + \gamma g(w,v)\Big)\Big)$. Позначимо через C компактний носій g. Очевидно,

$$\begin{aligned}
&\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in \mathrm{d}u,\, \tau/c(t)\in \mathrm{d}v\Big\} \\
&\quad \leq\ \mathbb{E}\Big(1-\exp\Big(-\frac{z\xi}{c(t)}\sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{k\leq u_i t\}}\Big)\Big) + \mathbb{P}\Big\{\Big(\xi/c(t),\, \tau/c(t)\Big)\in C\Big\},
\end{aligned}$$

для всіх $k\in\mathbb{N}$, що дає

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in \mathrm{d}u, \tau/c(t)\in \mathrm{d}v\Big\} = 0. \quad (2.171)$$

Для довільного досить малого $x_0 > 0$ існує $M = M(x_0) > 0$ таке, що

$$0 \le -\ln(1-x) - x \le Mx^2, \quad 0 < x \le x_0.$$

У поєднанні з (2.171) це дає

$$\begin{aligned} 0 &\le -\ln\phi_t(z) - \sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in\mathrm{d}u,\ \tau/c(t)\in\mathrm{d}v\Big\} \\ &\le\ M\sum_{k\ge1}\Big(\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in\mathrm{d}u,\ \tau/c(t)\in\mathrm{d}v\Big\}\Big)^2 \end{aligned}$$

для досить великих t, а тому

$$\lim_{t\to\infty}\Big(-\ln\phi_t(z) - \sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\frac{\xi}{c(t)}\in\mathrm{d}u,\ \frac{\tau}{c(t)}\in\mathrm{d}v\Big\}\Big) = 0 \tag{2.172}$$

для кожного $z > 0$ з огляду на (2.171), якщо сума в останньому виразі збігається при $t\to\infty$. Покажемо, що вона дійсно збігається.

Зі співвідношення (2.165) випливає

$$\begin{aligned} \mu^{(t)}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}x) \ &:=\ \sum_{k\ge1}\delta_{k/t}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in\mathrm{d}u,\ \tau/c(t)\in\mathrm{d}v\Big\} \\ &\to\ \mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v), \quad t\to\infty, \end{aligned} \tag{2.173}$$

у грубій топології у просторі $M_p(([0,\infty]^2/\{(0,0)\})\times[0,\infty))$. Оскільки функція g має компактний носій в $[0,\infty)\times(0,\infty]$, то знайдуться такі $a, A > 0$, що $g(w,v) = 0$ при $w > A$ або $v < a$. Звідси робимо висновок, що носій функції $(u,v,w)\mapsto K(z,u,v,w)$ для кожного фіксованого z міститься в множині $[0,\infty]\times[a,\infty]\times[0,\max(A,u_n)]$, яка є компактною в $([0,\infty]^2/\{(0,0)\})\times[0,\infty)$. Отже, з зображення

$$\begin{aligned} &\sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in\mathrm{d}u,\ \tau/c(t)\in\mathrm{d}v\Big\} \\ &\qquad = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,x)\mu^{(t)}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v,\mathrm{d}x) \end{aligned}$$

випливає

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to\infty}\sum_{k\ge1}\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,k/t)\mathbb{P}\Big\{\xi/c(t)\in\mathrm{d}u,\ \tau/c(t)\in\mathrm{d}v\Big\} \\ &\qquad = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v) \end{aligned} \tag{2.174}$$

для кожного фіксованого $z > 0$.

Використовуючи те, що $g(x,0) = 0$ запишемо

$$\int_{[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)} K(z,u,v,x)\mathrm{d}x\mu_{\alpha,c}(\mathrm{d}u,\mathrm{d}v)$$
$$= \alpha \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(1 - \exp\Big(- zu \sum_{i=1}^n \gamma_i 1_{\{x\le u_i\}}\Big)\Big)\mathrm{d}x u^{-\alpha-1}\mathrm{d}u$$
$$+ \alpha c^{-1} \int_0^\infty \int_0^\infty \Big(1 - \exp(-z\gamma g(x,v))\Big)\mathrm{d}x v^{-\alpha-1}\mathrm{d}v$$
$$= -\ln \mathbb{E}\exp\big(- z\sum_{i=1}^n \gamma_i W_\alpha(u_i)\big) - \ln \mathbb{E}\exp\big(- z\gamma \sum_m g(t_m,\, j_m)\big)$$

для всіх $z > 0$, що в поєднанні з (2.174) та (2.172) дає (2.170), а, отже, й спільну збіжність (2.168). Доведення твердження завершено. $\square$

2.5.2 Процеси вигляду $X(t) = \eta g(t)$. Нехай $X(t) = \eta g(t)$, де η є деякою випадковою величиною, яка може залежати від ξ, а функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ лежить в $D(\mathbb{R})$ та $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Припустимо, що $\mathbb{P}\{\eta = b\} = 1$ та $t \to |g(t)| \wedge 1$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом. Тоді (2.8) та (2.10) (за додаткового припущення (2.9)) виконуються.

Припустимо, що $g(t) = e^{-at}$, $a > 0$. Якщо $\mathbb{E}[\ln^+ |\eta|] < \infty$, то відповідна незростаюча функція

$$H_\varepsilon(t) = \mathbb{E}\Big[\sup_{u\in[t,\,t+\varepsilon]} \big(|\eta| e^{-au} \wedge 1\big)\Big] = \mathbb{E}[|\eta| e^{-at} \wedge 1]$$

є інтегровною, отже, й безпосередньо інтегровною на $[0,\infty)$. Умова (2.9) виконується, оскільки $\mathcal{D} = \{0\}$, $\mathcal{D}_\xi = -\mathfrak{A}$ та $\Delta_X = -\mathfrak{A}$. Отже, (2.10) виконується. Якщо ж $\mathbb{E}[\ln^+ |\eta|] = \infty$, то з теореми 2.1 [109] випливає

$$\lim_{n\to\infty} \Big| \sum_{k=0}^n \eta_{k+1} \exp(-aS_k^*)\Big| = \infty$$

за ймовірністю, де $\eta_1, \eta_2, \ldots$ є незалежними копіями η. Це означає, що (2.8) та (2.10) не можуть виконуватись.

Нехай $\mathbb{D}\eta \in (0,\infty)$, а g правильно змінюється на нескінченності з індексом $\beta/2$ для деякого $\beta > -1$. Тоді $h(t) = g(t)\mathbb{E}\eta$ та $v(t) = g^2(t)\mathbb{D}\eta$. Функція

$f(u,w)=g(u)g(w)\mathbb{D}\eta$ правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β та граничною функцією $C(u,w)=(uw)^{\beta/2}$, а умова (2.64) виконується з огляду на лему 159(a). З умови $\lim_{t\to\infty}\sqrt{tv(t)}/|g(t)|=\infty$ випливає

$$\mathbb{E}\big[(X(t)-h(t))^2\mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{tv(t)}\}}\big]$$
$$=g^2(t)\,\mathbb{E}\big[(\eta-\mathbb{E}\eta)^2\mathbb{1}_{\{|\eta-\mathbb{E}\eta|>y\sqrt{tv(t)}/|g(t)|\}}\big]=o(v(t)),$$

а тому (2.68) виконується. Також внаслідок співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}/|g(t)|=\infty,$$

яке виконується для довільного розподілу ξ, маємо

$$\mathbb{E}\big[(X(t)-h(t))^2\mathbb{1}_{\{|X(t)-h(t)|>y\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}\}}\big]$$
$$=g^2(t)\,\mathbb{E}\big[(\eta-\mathbb{E}\eta)^2\mathbb{1}_{\{|\eta-\mathbb{E}\eta|>y\sqrt{v(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}}/|g(t)|\}}\big]=o(v(t)),$$

що гарантує виконання умови (2.71).

Якщо $\mathbb{E}\eta=0$ та $\mu\in(0,\infty)$, то згідно з теоремою 29

$$\left(\frac{\sum_{k\geq0}\eta_{k+1}g(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}}{\sqrt{\mu^{-1}t\mathbb{E}\eta^2}g(t)}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(V_\beta(u))_{u>0},$$

де V_β є центрованим гауссівським процесом з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)]=\int_0^u(u-y)^{\beta/2}(w-y)^{\beta/2}\,\mathrm{d}y,\quad 0<u\leq w.$$

Граничний процес можна представити в інтегральному вигляді

$$V_\beta(u)=\int_{[0,u]}(u-y)^{\beta/2}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_2(y),\quad u>0.$$

До кінця цього прикладу припускаємо, що η та ξ незалежні. Якщо $\mathbb{E}\eta=0$, а $\mathbb{P}\{\xi>t\}$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $-\alpha$, $\alpha\in(0,1)$ та $\beta>-\alpha$, то згідно з теоремою 30,

$$\left(\frac{\sqrt{\mathbb{P}\{\xi>t\}}}{g(t)}\sum_{k\geq0}\eta_{k+1}g(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(\sqrt{\mathbb{E}\eta^2}Z_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}.$$

Граничний процес можна представити в інтегральному вигляді

$$Z_{\alpha,\beta}(u)=\int_{[0,u]}(u-y)^{\beta/2}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_2(W_\alpha^{\leftarrow}(y)),\quad u>0$$

де $\mathcal{S}_2$ є незалежним від $W_\alpha^{\leftarrow}$ броунівським рухом. Таке представлення можна отримати підрахунком умовної коваріації.

Якщо $\mathbb{E}\eta \neq 0$, $\sigma^2 < \infty$, а g є монотонною з деякого місця, то згідно з теоремою 40,

$$\left(\frac{\sum_{k\geq 0}\eta_{k+1}g(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}} - \mu^{-1}\mathbb{E}\eta\int_0^{ut}g(y)\mathrm{d}y}{\mathbb{E}\eta\sqrt{t}g(t)}\right)_{u>0}$$
$$\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\left(\frac{\sigma^2}{\mu^3}\right)^2 I_{2,\beta/2}(u) + \left(\frac{\mathbb{D}\eta}{(\mathbb{E}\eta)^2\mu}\right)^{1/2} V_\beta(u)\right)_{u>0}.$$

Якщо $\mathbb{E}\eta \neq 0$, а $\mathbb{P}\{\xi > t\}$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ та $\beta > -2\alpha$, то, з огляду на $\lim_{t\to\infty} v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\}/h^2(t) = 0$, застосування теореми 41 з $q = 1$ дає

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{g(t)}\sum_{k\geq 0}\eta_{k+1}g(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left((\mathbb{E}\eta)J_{\alpha,\beta/2}(u)\right)_{u>0}.$$

Якщо також $\eta \geq 0$ м.н., а g зростає (отже $\beta \geq 0$), то згідно з наслідком 42, граничне співвідношення виконується в M_1-топології на $D[0,\infty)$.

2.5.3 Число візитів збуреного випадкового блукання в інтервал. Нехай $X(t) := \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}$ для деякої м.н. додатної в.в. τ. Відповідний випадковий процес з імміграцією має вигляд

$$N(t) := \sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\leq t\}}, \quad t \geq 0$$

і інтерпретується як число візитів *збуреного випадкового блукання* $(S_k + \tau_{k+1})_{k\geq 0}$ в інтервал $[0,t]$. Зазначимо, що $N(t) = \nu(t) - M(t)$, де процес $(M(t))_{t\geq 0}$ розглядався у підрозділі 2.5.1.

Перший (простий) результат про асимптотику $(N(t))_{t\geq 0}$ сформульовано у наступному твердженні.

Твердження 64. *Якщо* $\mu := \mathbb{E}\xi < \infty$*, то м.н.*

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{u\in[0,1]}\left|\frac{\mu(N(t)-N(t(1-u)-)}{t} - u\right| = 0. \tag{2.175}$$

Доведення. Якщо ми зможемо перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(tu)}{t} = \lim_{t\to\infty}\frac{N(tu-)}{t} = \frac{u}{\mu} \quad \text{м.н.} \tag{2.176}$$

для кожного $s > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mu\big(N(t) - N(t(1-u)-)\big)}{t} \;=\; u \quad \text{м.н.}$$

для всіх $u \in [0,1]$, що доводить (2.175) з огляду на теорему Діні про локально рівномірну збіжність послідовності монотонних функцій до неперервної границі.

Доведення (2.176). Оскільки $N(tu) - N(tu-) \le 1$ для всіх $t, s > 0$, то достатньо перевірити твердження для $N(tu)$. Використаємо оцінку

$$\frac{\nu(tu-y)}{t} \;-\; \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{\nu(tu)} \mathbb{1}_{\{\tau_k > y\}} \;\le\; \frac{N(tu)}{t} \;\le\; \frac{\nu(tu)}{t} \quad \text{м.н.}, \tag{2.177}$$

яка виконується для довільного $y > 0$ та достатньо великих t. Згідно з посиленим законом великих чисел $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau_k > y\}} = \mathbb{P}\{\tau > y\}$, а згідно з теоремою 5.1 на с. 57 в [115] маємо $\lim_{n\to\infty} t^{-1}\nu(tu) = \mu^{-1}u$ м.н. Отже, $\lim_{t\to\infty} t^{-1}\sum_{k=1}^{\nu(tu)} \mathbb{1}_{\{\eta_k > y\}} = \mu^{-1}u\mathbb{P}\{\eta > y\}$ м.н. Таким чином, (2.176) випливає з (2.177) після спрямування t, а потім y, до нескінченності. $\square$

Якщо $\mathbb{E}\xi < \infty$, то слабку збіжність скінченновимірних розподілів $(N(ut))_{u\ge 0}$ можна отримати з теореми 40 (випадок $p = 1$), а у випадку, коли $\mathbb{P}\{\xi > t\}$ правильно змінюються з показником $-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, з теореми 41 (випадок $q = 1$). У другому випадку, як випливає з наслідку 42, має місце збіжність у просторі Скорохода з J_1-топологією. Як демонструє наступне твердження, за додаткового моментного припущення, збіжність у просторі Скорохода має місце й у випадку $\mathbb{E}\xi < \infty$.

Теорема 65. *Нехай $F(x) = \mathbb{P}\{\tau \le x\}$, $x \ge 0$. У випадках (C1), (C2) та (C3), припустимо, що $\mathbb{E}\tau^a < \infty$ для деякого $a > 0$ та нехай функція c така, як в* (2.76). *Як завжди, покладемо $\mu := \mathbb{E}\xi$ та $\sigma^2 := \mathbb{D}\xi$.*

(C1) Якщо $\mathbb{D}\xi < \infty$, то

$$\frac{N(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} F(y)\mathrm{d}y}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2 t}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(u), \quad t \to \infty, \tag{2.178}$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з J_1-топологією.

(C2) Якщо $\sigma^2 = \infty$ *та*

$$\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi \le t\}}] \sim \ell^*(t), \quad t \to \infty,$$

то

$$\frac{N(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} F(y)\mathrm{d}y}{\mu^{-3/2}c(t)} \Rightarrow \mathcal{S}_2(u), \quad t \to \infty, \qquad (2.179)$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією.*

(C3) Якщо

$$\mathbb{P}\{\xi > x\} \ \sim \ x^{-\alpha}\ell^*(x), \quad x \to \infty \qquad (2.180)$$

для деякого $\alpha \in (1,2)$*, то*

$$\frac{N(ut) - \mu^{-1}\int_0^{ut} F(y)\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(u), \quad t \to \infty, \qquad (2.181)$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* M_1*-топологією.*

(C4) Якщо (2.180) *виконується з* $\alpha \in (0,1)$*, то*

$$\mathbb{P}\{\xi > t\}N(ut) \Rightarrow W_\alpha^{\leftarrow}(u), \qquad (2.182)$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією.*

Доведення. Випадок (C4) випливає з наслідку 42. Розглянемо випадки (C1)-(C3). Згідно з зауваженням 33 (див. також теорему 1.1 в [129]), оскільки функція $h(t) = F(t) = \mathbb{P}\{\tau \le t\}$ не спадає, ми знаємо, що (2.178), (2.179) та (2.181) виконуються з $\sum_{k\ge 0} F(ut - S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \le ut\}}$ замість $N(ut)$. Покладемо

$$R(t) \ := \ \sum_{k\ge 0}\left(\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\le t\}} - F(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\right)$$

при $t \ge 0$. З огляду на представлення

$$N(t) \ - \ \frac{1}{\mu}\int_0^t F(u)\,\mathrm{d}u \ = \ R(t) \ + \ \left(\sum_{k\ge 0} F(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}} - \frac{1}{\mu}\int_0^t F(u)\mathrm{d}u\right)$$

та лему Слуцького достатньо перевірити, що для кожного $T > 0$

$$t^{-1/2}\sup_{0\le u\le T}|R(ut)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty, \qquad (2.183)$$

врахувавши також співвідношення $\lim_{t\to\infty} t^{-1/2}c(t) = \infty$, яке виконується у випадках (C2) та (C3). Припустимо, що ми довели

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1/2}R(t) \;=\; 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.184}$$

Запишемо

$$\begin{aligned} t^{-1/2}\sup_{0\le u\le T}|R(ut)| \;&\le t^{-1/2}\sup_{0\le u\le s}|R(u)| \;+\; t^{-1/2}\sup_{s\le u\le tT}|R(u)| \\ &\le\; t^{-1/2}\sup_{0\le u\le s}|R(u)| \;+\; T^{1/2}\sup_{u\ge s}|u^{-1/2}R(u)| \end{aligned}$$

при $0 < s < tT$. Спрямовуючи спочатку t, а потім s до нескінченності, бачимо, що з (2.184) випливає (2.183).

Доведемо (2.184). Помітимо, що для кожного $t \ge 0$, існує $m \in \mathbb{N}_0$ таке, що $t \in [m, m+1)$ та

$$\begin{aligned} t^{-1/2}R(t) \le m^{-1/2}\sum_{k\ge 0}\big(\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\le m+1\}} - F(m+1-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m+1\}}\big) \\ +\; m^{-1/2}\sum_{k\ge 0}\big(F(m+1-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m+1\}} - F(m-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m\}}\big). \end{aligned}$$

Очевидно, що має місце аналогічна оцінка знизу, а тому (2.184) є наслідком двох граничних співвідношень

$$\lim_{\mathbb{N}\ni m\to\infty} m^{-1/2}R(m) \;=\; 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.185}$$

та

$$\lim_{\mathbb{N}\ni m\to\infty} m^{-\delta}\sum_{k\ge 0}\big(F(m+1-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m+1\}} - F(m-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m\}}\big) \;=\; 0 \quad \text{м.н.} \tag{2.186}$$

для кожного $\delta > 0$.

Доведення (2.185). Помітимо, що для кожного $t \ge 0$ в.в. $R(t)$ є границею м.н. мартингала $(R(k,t), \mathcal{F}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, де $R(0,t) := 0$, $\mathcal{F}_0 := \{\Omega, \emptyset\}$,

$$R(k,t) := \sum_{j=0}^{k-1}\big(\mathbb{1}_{\{S_j+\tau_{j+1}\le t\}} - F(t-S_j)\mathbb{1}_{\{S_j\le t\}}\big)$$

та $\mathcal{F}_k := \sigma((\xi_j, \tau_j) : 1 \le j \le k)$ при $k \in \mathbb{N}$. Для кожного $l \in \mathbb{N}$ з нерівності Буркгольдера-Девіса-Ганді, див. теорему 11.3.2 в [51], випливає

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}R^{2l}(t) &\le C\Big(\Big[\sum_{k\ge 0} \mathbb{E}\big((R(k+1,t)-R(k,t))^2|\mathcal{F}_k\big)\Big]^l \\
&\quad + \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}\big(R(k+1,t)-R(k,t)\big)^{2l}\Big) \\
&= C\left(\mathbb{E}\left[\sum_{k\ge 0} F(t-S_k)(1-F(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\right]^l\right. \\
&\quad \left. + \sum_{k\ge 0} \mathbb{E}\big(\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\le t\}} - F(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\big)^{2l}\right) =: C(I_1(t)+I_2(t))
\end{aligned}$$

для деякої додатної константи C.

Оскільки

$$\sum_{k\ge 0} F(t-S_k)(1-F(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}} \le \sum_{k\ge 0}(1-F(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}},$$

то, застосовуючи лему 164 до незростаючої функції $t \mapsto 1-F(t)$, отримуємо

$$I_1(t) = O\left(\left(\int_0^t (1-F(y))\mathrm{d}y\right)^l\right), \quad t\to\infty. \tag{2.187}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\big(\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\le t\}} - F(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\big)^{2l}\Big|\mathcal{F}_k\right) \\
&\quad = \big(F(t-S_k)(1-F(t-S_k))^{2l} + (1-F(t-S_k))(F(t-S_k))^{2l}\big)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}} \\
&\quad \le (1-F(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}},
\end{aligned}$$

що дає $I_2(t) \le \mathbb{E}\sum_{k\ge 0}(1-F(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}$, а тому

$$I_2(t) = O\left(\int_0^t (1-F(y))\mathrm{d}y\right), \quad t\to\infty$$

згідно з лемою 164. Отже, ми показали

$$\mathbb{E}R^{2l}(t) = O\left(\left(\int_0^t (1-F(y))\,\mathrm{d}y\right)^l\right), \quad t\to\infty. \tag{2.188}$$

Зокрема, $\mathbb{E}R^{2l}(t) = O(1)$, якщо $\mathbb{E}\tau = \int_0^\infty (1 - F(y))\mathrm{d}y < \infty$. Якщо $\mathbb{E}\tau = \infty$, то умова $\mathbb{E}\tau^a < \infty$ для деякого $a > 0$ гарантує, що $a \in (0, 1)$. Використовуючи (2.188) у поєднанні з $\lim_{t\to\infty} t^a(1-F(t)) = 0$ (тривіальним наслідком $\mathbb{E}\tau^a < \infty$) дає $\mathbb{E}R^{2l}(m) = O(m^{l(1-a)})$ при $m \to \infty$. Отже, для довільного $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\{|R(m)| > \varepsilon m^{1/2}\} \le \frac{\mathbb{E}R^{2l}(m)}{\varepsilon^l m^l} = O(m^{-la}), \quad m \to \infty,$$

за нерівністю Маркова. Обираючи $l := \min\{j \in \mathbb{N} : ja \ge 2\}$ в останній оцінці, отримуємо (2.185) застосуванням леми Бореля-Кантеллі.

Доведення (2.186). Покладемо $J(m) := \int_{[0,\,m]} \big(F(m+1-y) - F(m-y)\big)\,\mathrm{d}\nu(y)$ для $m \in \mathbb{N}$. Використаємо оцінку

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{k\ge 0} \big(F(m+1-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k \le m+1\}} \;-\; F(m-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le m\}}\big) \\ &= \int_{[0,\,m+1]} F(m+1-y)\;\mathrm{d}\nu(y) \;-\; \int_{[0,\,m]} F(m-y)\;\mathrm{d}\nu(y) \\ &\le J(m) + \nu(m+1) - \nu(m). \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{m\to\infty} m^{-\delta}(\nu(m+1) - \nu(m)) = 0$ м.н., див. лему A.1 в [129], то залишається розглянути $J(m)$. Але з нерівностей

$$\begin{aligned} J(m) &= F(m+1) - F(m) + \sum_{k=0}^{m-1} \int_{(k,\,k+1]} \big(F(m+1-y) - F(m-y)\big)\mathrm{d}\nu(y) \\ &\le 1 + \sum_{k=0}^{m-1} \big(F(m+1-k) - F(m-1-k)\big)(\nu(k+1) - \nu(k)) \\ &\le 1 + (F(m) + F(m+1) - F(1)) \max_{0\le k\le m-1} (\nu(k+1) - \nu(k)), \end{aligned}$$

випливає $\lim_{m\to\infty} m^{-\delta} J(m) = 0$ м.н. внаслідок тієї ж леми A.1 в [129]. Доведення теореми 65 завершено. □

Зауваження 66. Використовуючи аналогічні міркування, можна довести наступне твердження, яке нам знадобиться в подальшому. Для довільних додатних b та c,

$$t^{-c} \sup_{u\in[0,1]} \big(N(ut+b) - N(ut)\big) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty. \tag{2.189}$$

Повне доведення можна знайти в [7], див. твердження 3.3.

Також у подальшому нам знадобиться просте твердження, яке узагальнює відомий факт, що середнє число візитів звичайного випадкового блукання з додатними кроками в інтервали довжини y обмежене лінійною функцією від y.

Твердження 67. *Знайдуться такі C та D, що для всіх $x, y \geq 0$ маємо*

$$\mathbb{E}\big(N(x+y)-N(x)\big) \;\leq\; Cy+D. \tag{2.190}$$

Доведення. Нагадаємо, що функція відновлення

$$U(x) \;:=\; \mathbb{E}\nu(x) \;=\; \sum_{j\geq 1}\mathbb{P}\{S_{j-1}\leq x\}, \quad x\in\mathbb{R},$$

є субадитивною на $\mathbb{R}$, тобто $U(x+y)\leq U(x)+U(y)$ для всіх $x, y\in\mathbb{R}$, а, отже,

$$U(x)\leq Cx^{+}+C_2$$

для всіх $x\in\mathbb{R}$ та деяких додатних констант C та D. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big(N(x+y)-N(x)\big) \;&=\; \sum_{j\geq 1}\mathbb{P}\{x<S_{j-1}+\tau_j\leq x+y\}\\
&=\; \sum_{j\geq 1}\int_{[0,\infty)}\mathbb{P}\{x-z<S_{j-1}\leq x+y-z\}\,\mathbb{P}\{\tau\in \mathrm{d}z\}\\
&=\; \int_{[0,\infty)}\big(U(x+y-z)-U(x-z)\big)\,\mathbb{P}\{\tau\in \mathrm{d}z\}\\
&\leq\; U(y) \;\leq\; Cy+D.
\end{aligned}$$

для всіх $x, y\geq 0$. □

2.5.4 Інші приклади

Приклад 68. Нехай $Z := (Z(t))_{t\geq 0}$ є стаціонарним процесом Орнштейна-Уленбека, що визначений

$$Z(t)=e^{-t}\theta+\int_{[0,t]}e^{-(t-y)}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_2(y), \quad t\geq 0$$

де θ має центрований нормальний розподіл з дисперсією $1/2$ та не залежить від броунівського руху $\mathcal{S}_2$. Незалежність Z та ξ не вимагається. Покладемо $X(t) = (t+1)^{\beta/2}Z(t)$ для $\beta\in(-1,0)$. Тоді $\mathbb{E}[X(t)] = 0$ та

$f(u,w)=\mathbb{E}[X(u)X(w)]=2^{-1}(u+1)^{\beta/2}(w+1)^{\beta/2}e^{-|u-w|}$, звідки випливає, що f фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом β. Внаслідок стаціонарності для кожного $t>0$, $Z(t)$ має той же розподіл, що й θ. Тому

$$\mathbb{E}[X(t)^2\mathbb{1}_{\{|X(t)|>y\}}]=(t+1)^\beta\mathbb{E}[\theta^2\mathbb{1}_{\{|\theta|>y(t+1)^{-\beta/2}\}}]=o(t^\beta),$$

тобто виконана умова (2.68). Якщо $\mu<\infty$, застосування теореми 29 дає

$$\left(\frac{\sum_{k\geq0}X_{k+1}(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}}}{\sqrt{(2\mu)^{-1}t^{\beta+1}}}\right)_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(V_\beta(u))_{u>0},$$

де граничний процес є центрованим гауссівським процесом з незалежними значеннями (білим шумом).

Приклад 69. Нехай $X(t)=\mathcal{S}_2((t+1)^{-\alpha})$, $\mathbb{P}\{\xi>t\}\sim t^{-\alpha}$ та припустимо, що X та ξ незалежні. Тоді $f(u,w)=\mathbb{E}[X(u)X(w)]$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом $-\alpha$ та граничною функцією $C(u,w)=(u\vee w)^{-\alpha}$. Умова (2.71) випливає з рівності

$$\mathbb{E}[X(t)^2\mathbb{1}_{\{|X(t)|>y\}}]=(t+1)^{-\alpha}\mathbb{E}[\mathcal{S}_2(1)^2\mathbb{1}_{\{|\mathcal{S}_2(1)|>y(t+1)^{\alpha/2}\}}]=o(t^{-\alpha})$$

для всіх $y>0$. Таким чином, теорема 30 (з $u(t)\equiv1$) застосовна та дає граничний результат $(\sum_{k\geq0}X_{k+1}(ut-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\leq ut\}})_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}(Z_{\alpha,\alpha}(u))_{u>0}$.

2.6 Висновки до розділу 2

В цьому розділі було запропоновано нове поняття – випадкового процесу з імміграцією в моменти відновлення. Це поняття включило в себе декілька добре відомих в прикладній ймовірності об'єктів, зокрема процеси дробового ефекту та гіллясті процесів з імміграцією. Було зроблено ряд кроків до побудови асимптотичної теорії випадкових процесів з імміграцією:

- в теоремах 14, 32, 34, 39 та 51 отримано результати про слабку збіжність процесів дробового ефекту;
- в теоремі 3 сформульовано загальні умови за яких випадкові процеси з імміграцією мають стаціонарну версію та має місце збіжність до неї;

- теореми 29, 30 та їх кульмінація – теореми 40 та 41 дають загальні умови збіжності випадкових процесів з імміграцією до самоподібних процесів;

- отримано ряд результатів для окремих класів випадкових процесів з імміграцією, пов'язаних зі збуреними випадковими блуканнями: теорема 65 та твердження 57, 58, 60 та 61.

Розділ 3

Регенеративні композиції, випадкові перестановки та коалесценти з множинними злиттями

3.1 Випадкові регенеративні композиції

Ми використовуватимемо позначення у ґратках Бернуллі, введені у вступі. Зокрема, $K^*_{n,r}$ позначає число комірок, що містять рівно r куль (число блоків розміру r в композиції), випадковий процес

$$K^*_n(t) := \sum_{r=1}^{[n^t]} K^*_{n,r}, \quad t \in [0,1],$$

рахує кількість ненульових блоків композиції розміру $\leq n^t$, а $K^*_n := K^*_n(1)$ є числом зайнятих комірок (загальне число ненульових блоків композиції).

3.1.1 Граничні теореми для числа ненульових блоків регенеративних композицій. Асимптотична поведінка малих частин в ґратці Бернуллі добре вивчена у випадку $\mathbb{E}|\ln W| < \infty$. Згідно з теоремою 3.3 в [102], випадковий вектор $(K^*_{n,1}, \dots, K^*_{n,j})$, при фіксованому j, збігається за розподілом до аналогічного вектора, визначеного в термінах граничної схеми розміщення, в якій ваги куль ототожнюються з моментами стрибків стандартного процесу Пуассона на $[0,\infty)$, а комірки формуються послідовними точками множини $\exp(A)$, де A є стаціонарним точковим процесом відновлення на $\mathbb{R}$, що породжений розподілом $|\ln W|$. Критерій слабкої збіжності числа $K^*_n = K^*_n(1)$ зайнятих комірок також відомий, див. теорему 1.1 та наслідок 1.1 в [95]. Одним з наслідків згаданих результатів є те, що за умови $\mathbb{E}|\ln W| < \infty$, внесок малих частин в асимптотику K_n^* є асимптотично незначним при $n \to \infty$, а тому постає природне питання, які з компонент вектора $(K_{n,1}^*, \ldots, K_{n,n}^*)$ роблять основний внесок в K_n^* для великих n. Якщо $\mathbb{E}|\ln W| < \infty$, то відповідь на це питання дає твердження 70. У випадку $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ див. формулу (3.8) нижче.

Твердження 70. *Якщо* $\mu := \mathbb{E}|\ln W| < \infty$, *то*

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| \frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t \right| \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad n \to \infty. \tag{3.1}$$

Таким чином, якщо $\mu < \infty$, то випадкова функція розподілу $t \mapsto K_n^*(t)/K_n^*$ збігається рівномірно за ймовірністю до рівномірної функції розподілу на $[0,1]$. Це дає кількісну відповідь на наведене вище питання, а саме для всіх $t < s$, $t, s \in [0,1]$, асимптотичний внесок вектора $(K_{n,[n^t]}^*, \ldots, K_{n,[n^s]}^*)$ у K_n^* пропорційний (за ймовірністю) до $s - t$.

Порівняємо цей результат з іншими відомими в літературі результатами такого роду. Розглянемо функцію $\rho^*(x)$, що визначена

$$\rho^*(x) \ := \ \#\{k \in \mathbb{N} : p_k^* \geq 1/x\} = \#\{k \in \mathbb{N} : W_1 \cdot \ldots \cdot W_{k-1}(1 - W_k) \geq 1/x\} \tag{3.2}$$

при $x > 0$. Підкреслимо, що ця функція зростає логарифмічно, як випливає з твердження 64 в розділі 2. Розглянемо тепер схему Карліна з детермінованими (чи випадковими) p_k такими, що функція $\rho(x)$, яка визначена так

$$\rho(x) \ := \ \#\{k \in \mathbb{N} : p_k \geq 1/x\}, \quad x > 0, \tag{3.3}$$

правильно змінюється на нескінченності з індексом α, $\alpha \in (0,1)$. Нехай K_n та $K_{n,r}$ позначають число зайнятих комірок та число комірок, які містять рівно r куль відповідно, після розміщення n куль. Тоді $\lim_{n\to\infty} K_{n,r}/K_n = c(r)$ м.н. для деяких відомих констант $c(r) > 0$, див. теореми 8 та 9 в [160], теорему 2.1 в [106] та наслідок 21 в [92] (цікаве узагальнення міститься в [249]). Отже, маємо різкий контраст у порівнянні з (3.1), оскільки основний внесок в K_n (при правильній зміні функцій ρ) роблять саме малі частини.

З огляду на твердження 70, природним є питання про швидкість збіжності в $D[0,1]$ розподілу $K_n^*(t)/K_n^*$ до рівномірно розподілу. Ми дамо відповідь на це питання, довівши функціональну граничну теорему для підхожим чином нормованого та центрованого процесу $(K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$. Основні результати цього підрозділу – теореми 71 та 74. В них розглянуто випадки скінченного та нескінченного μ відповідно.

Теорема 71. *Припустимо, що*

$$\mathbb{E}|\ln(1-W)|^a \;<\; \infty \tag{3.4}$$

для деякого $a>0$. *Покладемо*

$$u_n(t) \;:=\; \mu^{-1}\int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)|\leq s\}\,\mathrm{d}s,$$
$$v_n(t) \;:=\; \mu^{-1}\int_{(1-t)\ln n}^{\ln n} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)|> s\}\,\mathrm{d}s \;=\; \mu^{-1}t\ln n - u_n(t)$$

при $t\in[0,1]$, *де* $\mu=\mathbb{E}|\ln W|$.

(D1) Якщо $\sigma^2:=\mathbb{D}|\ln W|<\infty$, *то*

$$\frac{K_n^*(t)-u_n(t)}{\sqrt{\mu^{-3}\sigma^2\ln n}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n\to\infty$$

та

$$\sqrt{\mu\sigma^{-2}\ln n}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*}-t+\frac{v_n(t)-tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t)-t\mathcal{S}_2(1), \quad n\to\infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією, де* $(\mathcal{S}_2(t))_{t\in[0,1]}$ *є стандартним броунівським рухом.*

(D2) Якщо $\sigma^2=\infty$ *та*

$$\mathbb{E}[(\ln W)^2 \mathbb{1}_{\{|\ln W|\leq x\}}] \;\sim\; \ell(x), \quad x\to\infty,$$

для деякої ℓ, *то*

$$\frac{K_n^*(t)-u_n(t)}{\mu^{-3/2}c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n\to\infty,$$

та

$$\frac{\sqrt{\mu}\ln n}{c(\ln n)}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*}-t+\frac{v_n(t)-tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_2(t)-t\mathcal{S}_2(1), \quad n\to\infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією, де* c *є довільною додатною функцією такою, що* $\lim_{x\to\infty} c^{-2}(x)x\ell(c(x))=1$.

(D3) Якщо

$$\mathbb{P}\{|\ln W| > x\} \;\sim\; x^{-\alpha}\ell(x), \quad x \to \infty, \tag{3.5}$$

для деякого $\alpha \in (1,2)$ та деякої ℓ, то

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)} \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t), \quad n \to \infty,$$

та

$$\frac{\mu^{1/\alpha}\ln n}{c(\ln n)}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\right) \Rightarrow \mathcal{S}_\alpha(t) - t\mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty,$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ з M_1-топологією, де c є довільною додатною функцією такою, що $\lim_{x\to\infty} c^{-\alpha}(x)x\ell(c(x)) = 1$ та $(\mathcal{S}_\alpha(t))_{t\in[0,1]}$ є спектрально негативним α-стійким процесом Леві таким, що $\mathcal{S}_\alpha(1)$ має характеристичну функцію (2.67).

Зауваження 72. Аналогічно до того, як це зроблено в [95], де вивчалась слабка збіжність K_n^*, можна перевірити, що моментна умова (3.4) не потрібна для збіжності скінченновимірних розподілів $(K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$. Наше доведення 71 базується на розкладі

$$\begin{aligned} K_n^*(t) - u_n(t) \;=\; &\Big(K_n^*(t) - \big(\rho^*(n) - \rho^*\big(n^{(1-t)-}\big)\big)\Big) \\ &+ \big(\rho^*(n) - \rho^*\big(n^{(1-t)-}\big) - u_n(t)\big) \end{aligned} \tag{3.6}$$

де $\rho^*(x)$ визначено в (3.2). Як буде показано далі, незалежно від виконання умови (3.4), перший член у правій частині (3.6), відповідним чином нормований та центрований, збігається до нуля за ймовірністю. Проте, для доведення збіжності другого доданка, моментна умова (3.4) є важливим інгредієнтом, див. теорему 65 у попередньому розділі.

Зауваження 73. Кожного разу, коли другий член $v_n(t)$ центрування $K_n^*(t)$ нівелюється нормуванням, зокрема у випадку $\mathbb{E}|\ln(1-W)| < \infty$, «справжнє» центрування $K_n^*(t)$ є просто $\mu^{-1}t\ln n$. Аналогічно, член $\frac{v_n(t)-tv_n(1)}{u_n(1)}$ можна прибрати з граничних результатів для $K_n^*(t)/K_n^*$, оскільки при множенні на нормуванням він збігається до нуля рівномірно.

Припустимо, що W має бета-розподіл з параметрами $\theta > 0$ та 1, що дає

$$\mathbb{E}|\ln W| \;=\; \theta^{-1}, \quad \mathbb{D}|\ln W| \;=\; \theta^{-2} \quad \text{та} \quad \mathbb{E}|\ln(1-W)|^a \;<\; \infty \quad \text{при } a > 0.$$

З частини (D1) теореми 71 разом з попереднім зауваженням випливає

$$\frac{K_n^*(t) - \theta t \ln n}{\sqrt{\theta \ln n}} \Rightarrow \mathcal{S}_2(t), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ з J_1-топологією, що, з огляду на (1.5), еквівалентно (1.3). Отже, наш результат дає нове доведення (1.3) і узагальнює цю знамениту функціональну граничну теорему.

Як буде показано нижче у підрозділі 3.2, та як було показано в [102] відповідно, схожі узагальнення існують для закону Ердеша-Турана для порядку перестановок Юенса (див. теорему 88 нижче) та для слабкої збіжності числа малих циклів в перестановках Юенса (див. теорему 5.1 на с. 96 в [15]).

Теорема 74. *Якщо співвідношення* (3.5) *виконується для деякого* $\alpha \in (0,1)$*, то*

$$\frac{\ell(\ln n) K_n^*(t)}{(\ln n)^\alpha} \Rightarrow W_\alpha^{\leftarrow}(1) - W_\alpha^{\leftarrow}((1-t)-), \quad n \to \infty, \tag{3.7}$$

та

$$\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} \Rightarrow 1 - \frac{W_\alpha^{\leftarrow}((1-t)-)}{W_\alpha^{\leftarrow}(1)}, \quad n \to \infty \tag{3.8}$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ *з* J_1*-топологією, де* $W_\alpha^{\leftarrow}$ *є оберненим* α*-стійким субординатором (див. означення 26).*

Перш ніж перейти до доведення основних результатів, окреслимо коротко наш підхід до аналізу $K_n^*(t)$. Спочатку розглянемо простіший функціонал K_n в довільній схемі Карліна. Для заданих $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$, назвемо комірку k великою, якщо $p_k \geq 1/n$. В середньому велика комірка k є зайнятою, оскільки середнє число куль в ній $np_k \geq 1$. Тому можна очікувати, що величина K_n є асимптотично близькою до числа великих комірок, яке дорівнює $\rho(n)$, див. формулу (3.3). Для ґраток Бернуллі така евристика була строго обґрунтована в [95]. А саме, було показано, що величина $K_n^* = K_n^*(1)$, підхожим чином нормована та центрована, слабко збігається тоді і тільки тоді, коли величина $\rho^*(n)$, визначена в (3.2) та нормована й центрована так само, слабко збігається до того ж закону. Міркуючи аналогічно, можна зробити припущення, що процес $(K_n^* - K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$ має добре наближатись $(\rho^*(n^{1-t}))_{t\in[0,1]}$. Нижче буде показано, що обернений в часі процес

$$\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}) \;=\; \#\{k \in \mathbb{N} : n^{-1} < p_k^* \leq n^{t-1}\}, \quad t \in [0,1]$$

є рівномірно достатньо близьким до $(K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$, що дасть змогу отримати функціональну граничну теорему для $(K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$ з граничного результату для $(\rho^*(n)-\rho^*(n^{(1-t)-}))_{t\in[0,1]}$. Це спостереження пояснює розклад (3.6) та дозволить нам обійти стандартну процедуру пуассонізації-депуассонізації, що раніше використовувалась для аналізу $K_n^*(1)$. Підкреслимо, що наведена нижче лема 75 насправді демонструє, що асимптотика $K_n(t) := \sum_{k=1}^{[n^t]} K_{n,r}$ для великих n регулюється асимптотикою $\rho(n)-\rho(n^{(1-t)-})$ у довільній схемі Карліна з детермінованими чи випадковими $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ у випадках, коли $\rho(x)$ має логарифмічний ріст та задовольняє деяким додатковим умовам на прирости.

Як тільки функціональна гранична теорема для $(\rho^*(n^t))_{t\in[0,1]}$ доведена, відповідна функціональна гранична теорема для $(\rho^*(n)-\rho^*(n^{(1-t)-}))_{t\in[0,1]}$ випливає з теореми про неперервне відображення. Поклавши

$$T_n^* \;:=\; |\ln W_1|+\cdots+|\ln W_{n-1}|+|\ln(1-W_n)|,\quad n\in\mathbb{N} \tag{3.9}$$

та помітивши, що $\rho^*(n^t)=\#\{k\in\mathbb{N}: T_k^*\le t\ln n\}$ є числом візитів збуреного випадкового блукання $(T_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ в інтервал $[0,t\ln n]$, бачимо, що для доведення результатів цього підрозділу залишиться застосувати теорему 65 з розділу 2.

Доведення теорем 71 та 74

В наступній лемі, що є першим основним інгредієнтом доведення теореми 71, розглядається *довільна схема Карліна* з невипадковими $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Для $j=1,\dots,n$ нехай $Z_{n,j}$ позначає число куль в j-ій комірці. Отже,

$$K_n(t) \;:=\; \sum_{j\ge1}\mathbb{1}_{\{Z_{n,j}\in[1,n^t]\}},\quad t\in[0,1]$$

є числом комірок, що містять не більше $[n^t]$ куль. Зв'язок з ґратками Бернуллі стає очевидним при фіксації «середовища» (W_k).

Лема 75. *Нехай функція ρ визначена формулою* (3.3). *Тоді*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]}\left|K_n(t)-\Big(\rho(n)-\rho\big(n^{(1-t)-}\big)\Big)\right|\right] \;\le\; 6\left(\rho(n)-\rho\big(x_0^{-1}n(\ln n)^{-2}\big)\right)$$
$$+\;\frac{3\rho(n)}{\ln n}\;+\;\int_1^\infty t^{-2}(\rho(nt)-\rho(n))\,\mathrm{d}t\;+\;2\sup_{t\in[0,1]}\Big(\rho(en^{1-t})-\rho(e^{-1}n^{1-t})\Big),$$

де $x_0>1$ є деякою константою, що не залежить ані від n, ані від $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Доведення. Зазначимо, що всі оцінки в цьому доведенні, включаючи $n^t - n^{3t/4} > 1$ при $t \in [l_n, 1]$, де $l_n := \frac{2 \ln \ln n}{\ln n}$, виконуються при достатньо великих n. Розпочнемо з базової нерівності

$$\begin{aligned}\Big|K_n(t) - \big(\rho(n) - \rho\big(n^{(1-t)-}\big)\big)\Big| \leq\ & \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} > n^t,\, np_j \in [1, n^t]\}} \ + \ \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} = 0,\, np_j \in [1, n^t]\}} \\ &+ \ \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} \in [1, n^t],\, np_j > n^t\}} \ + \ \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} \in [1, n^t],\, np_j < 1\}} \\ &=: \ S_n^{(1)}(t) + S_n^{(2)}(t) + S_n^{(3)}(t) + S_n^{(4)}(t)\end{aligned}$$

та оцінимо $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,1]} S_n^{(i)}(t)]$ при $i = 1, 2, 3, 4$.

Для першого доданка маємо

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} > n^t,\, np_j \in [1, n^t]\}} &\leq \sup_{t\in[0,\, l_n)} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{np_j \in [1, n^t]\}} \\ &+ \sup_{t\in[l_n, 1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} > n^t,\, np_j \in [1, n^t - n^{3t/4}]\}} + \sup_{t\in[l_n,\, 1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} > n^t,\, np_j \in (n^t - n^{3t/4},\, n^t]\}} \\ &\leq \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{np_j \in [1, n^{l_n})\}} + \sup_{t\in[l_n,\, 1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} - np_j > n^{3t/4},\, np_j \in [1, n^t - n^{3t/4}]\}} \\ &+ \sup_{t\in[l_n,\, 1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{np_j \in (n^t - n^{3t/4},\, n^t]\}} \leq \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{np_j \in [1,\, \ln^2 n)\}} \\ &+ \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j} - np_j > (np_j)^{3/4},\, np_j \in [1, n]\}} + \sup_{t\in[l_n,\, 1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{np_j \in (n^t - n^{3t/4},\, n^t]\}} \\ &=: \ S_n^{(11)} + S_n^{(12)} + S_n^{(13)}.\end{aligned}$$

За визначенням ρ

$$S_n^{(11)} \ = \ \rho(n) - \rho(n(\ln n)^{-2}).$$

Випадкова величина $Z_{n,j}$ має біноміальний розподіл з параметрами n та p_j. Тому $\mathbb{E}Z_{n,j} = np_j$ та $\mathbb{D}Z_{n,j} = np_j(1-p_j)$. Використавши нерівність Чебишева, маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S_n^{(12)} \ &\leq \ \sum_{j\geq 1} \frac{np_j(1-p_j)}{(np_j)^{3/2}} \mathbb{1}_{\{np_j \in [1,n]\}} \ \leq \ \sum_{j\geq 1} (np_j)^{-1/2} \mathbb{1}_{\{np_j \in [1,n]\}} \\ &= \ \int_{[1, n/(\ln n)^2]} n^{-1/2} x^{1/2} \, \mathrm{d}\rho(x) \ + \ \int_{(n/(\ln n)^2,\, n]} n^{-1/2} x^{1/2} \, \mathrm{d}\rho(x) \\ &\leq \ \frac{\rho(n)}{\ln n} \ + \ \Big(\rho(n) - \rho\big(n(\ln n)^{-2}\big)\Big).\end{aligned}$$

Третій член $S_n^{(13)}$ можна оцінити так

$$\begin{aligned} S_n^{(13)} &= \sup_{t\in[l_n,\,1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{p_j\in(n^{t-1}-n^{3t/4-1},\, n^{t-1}]\}} \leq \sup_{t\in[l_n,1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{p_j\in(n^{t-1}(1-n^{-l_n/4}),\, n^{t-1}]\}} \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{p_j\in(n^{t-1}(1-n^{-l_n/4}),\, n^{t-1}]\}} = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\geq 1} \mathbb{1}_{\{p_j\in(n^{t-1}(1-(\ln n)^{-1/2}),\, n^{t-1}]\}} \\ &\leq \sup_{t\in[0,1]} \Big(\rho\big(en^{1-t}\big) - \rho\big(n^{1-t}\big)\Big). \end{aligned}$$

Остаточно маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} S_n^{(1)}(t)\right] \leq\ & 2\Big(\rho(n) - \rho\big(n(\ln n)^{-2}\big)\Big) \ + \frac{\rho(n)}{\ln n} \\ & + \sup_{t\in[0,1]} \Big(\rho\big(en^{1-t}\big) - \rho\big(n^{1-t}\big)\Big). \end{aligned}$$

Оскільки випадкові функції $S_n^{(2)}(t)$ та $S_n^{(4)}(t)$ монотонні по t, робимо висновок, що

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} S_n^{(2)}(t)\right] &= \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{Z_{n,j}=0\}\mathbb{1}_{\{np_j\in[1,n]\}} = \sum_{j\geq 1} (1-p_j)^n \mathbb{1}_{\{np_j\in[1,n]\}} \\ &\leq \sum_{j\geq 1} e^{-p_j n}\mathbb{1}_{\{1/n\leq p_j\leq 1\}} = \int_{[1,n/\ln n]} e^{-n/x}\mathrm{d}\rho(x) + \int_{(n/\ln n,\, n]} e^{-n/x}\mathrm{d}\rho(x) \\ &\leq \frac{\rho(n)}{n} + \Big(\rho(n) - \rho\big(n\big(\ln n)^{-1}\big)\Big) \leq \frac{\rho(n)}{\ln n} + \Big(\rho(n) - \rho\big(n(\ln n)^{-2}\big)\Big). \end{aligned}$$

Тому за нерівністю Маркова

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} S_n^{(4)}(t)\right] &= \ \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}\{Z_{n,j}\geq 1\}\mathbb{1}_{\{np_j\leq 1\}} \ \leq \ \sum_{j\geq 1} np_j \mathbb{1}_{\{np_j\leq 1\}} \\ &= \ \int_{[n,\,\infty)} nx^{-1}\ \mathrm{d}\rho(x) \ = \ \int_{[1,\,\infty)} x^{-1}\ \mathrm{d}(\rho(nx)-\rho(n)). \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами та використовуючи той факт, що $\lim_{x\to\infty} x^{-1}\rho(x) = 0$, див. лему 3 в [160], отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\sup_{t\in[0,1]} S_n^{(4)}(t)\right] &\leq \ \int_1^\infty x^{-2}(\rho(nx)-\rho(n))\ \mathrm{d}x \ + \ \Big(\rho(n) - \rho(n-)\Big) \\ &\leq \ \int_1^\infty x^{-2}(\rho(nx)-\rho(n))\ \mathrm{d}x \ + \ \Big(\rho(n) - \rho\big(n(\ln n)^{-2}\big)\Big). \end{aligned}$$

Для оцінки $S_n^{(3)}(t)$ запишемо

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j}\in[1,n^t],\, np_j>n^t\}}
&\le \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j}\le n^t,\, np_j-(np_j)^{3/4}\ge n^t\}} + \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{np_j-(np_j)^{3/4}<n^t\le np_j\}}\\
&\le \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{Z_{n,j}\le np_j-(np_j)^{3/4},\, np_j\ge1\}} + \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{np_j-(np_j)^{3/4}<n^t\le np_j\}}\\
&= \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{n-Z_{n,j}-n(1-p_j)\ge(np_j)^{3/4},\, np_j\in[1,n]\}} + \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{np_j-(np_j)^{3/4}<n^t\le np_j\}}.
\end{aligned}$$

Оскільки $n - Z_{n,j}$ має біноміальний розподіл з параметрами n та $1-p_j$, то скориставшись нерівністю Чебишева та вже доведеною оцінкою для $\mathbb{E}S_n^{(12)}$, маємо

$$\mathbb{E}\left[\sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{n-Z_{n,j}-n(1-p_j)\ge(np_j)^{3/4},\, np_j\in[1,n]\}}\right] \le \frac{\rho(n)}{\ln n} + \Big(\rho(n)-\rho\big(n(\ln n)^{-2}\big)\Big).$$

Для знаходження підхожої оцінки для другого доданка ми перевіримо, що з нерівностей $x-x^{3/4}<y\le x$ та $y\ge1$ випливає

$$y \le x < y + (x_0-1)y^{3/4}, \tag{3.10}$$

де $x_0>1$ є єдиним коренем рівняння $x-x^{3/4}=1$. Дійсно, якщо $x<x_0$, то

$$x = (x-x^{3/4}) + x^{3/4} < y + x_0^{3/4} = y + (x_0-1) \le y + (x_0-1)y^{3/4},$$

де остання нерівність є наслідком $y\ge1$. З іншого боку, якщо $x\ge x_0$, то

$$\begin{aligned}
x = (x-x^{3/4}) + (1-x^{-1/4})^{-3/4}(x-x^{3/4})^{3/4} &< y + (1-x_0^{-1/4})^{-3/4}(x-x^{3/4})^{3/4}\\
&< y + (1-x_0^{-1/4})^{-3/4}y^{3/4} = y + (x_0-1)y^{3/4},
\end{aligned}$$

де перша нерівність випливає з того, що $x\mapsto(1-x^{-1/4})^{-3/4}$ не спадає на $(1,\infty)$, а тому $(1-x^{-1/4})^{-3/4}\le(1-x_0^{-1/4})^{-3/4}$ при $x\ge x_0$. З огляду на (3.10)

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{np_j-(np_j)^{3/4}<n^t\le np_j\}} &\le \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{n^t\le np_j<n^t+(x_0-1)n^{3t/4}\}}\\
&\le \sup_{t\in[0,l_n]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{n^t\le np_j<n^t+(x_0-1)n^{3t/4}\}} + \sup_{t\in[l_n,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{n^t\le np_j<n^t+(x_0-1)n^{3t/4}\}}\\
&\le \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{1\le np_j<x_0n^{l_n}\}} + \sup_{t\in[l_n,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{p_j\in[n^{t-1},\, n^{t-1}(1+(x_0-1)n^{-t/4}))\}}
\end{aligned}$$

$$\le \Big(\rho(n) - \rho\big(x_0^{-1} n (\ln n)^{-2}\big)\Big) + \sup_{t\in[l_n,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{p_j \in [n^{t-1},\, n^{t-1}(1+(x_0-1)n^{-l_n/4}))\}}$$

$$\le \Big(\rho(n) - \rho\big(x_0^{-1} n (\ln n)^{-2}\big)\Big) + \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j\ge1} \mathbb{1}_{\{p_j \in [n^{t-1},\, n^{t-1}(1+(x_0-1)(\ln n)^{-1/2}))\}}$$

$$\le \Big(\rho(n) - \rho\big(x_0^{-1} n (\ln n)^{-2}\big)\Big) + \sup_{t\in[0,1]} \Big(\rho\big(n^{1-t}\big) - \rho\big(e^{-1} n^{1-t}\big)\Big),$$

де, нагадаємо, $l_n = 2\ln\ln n/\ln n$. Поєднання отриманих оцінок завершує доведення леми. □

Застосуємо наведений щойно результат до ґраток Бернуллі. Нагадаємо, що ґратка Бернуллі є схемою розміщення Карліна з випадковими ймовірностями $(p_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, що визначені у (1.2). Фіксуючи $(p_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ та застосовуючи лему 75, отримуємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]} |K_n^*(t) - (\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))| \Big| (p_j^*)\right) \\
&\quad \le 6\Big(\rho^*(n) - \rho^*\big(x_0^{-1} n(\ln n)^{-2}\big)\Big) + \frac{3\rho^*(n)}{\ln n} + \int_1^\infty \frac{\rho^*(nx) - \rho^*(n)}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + 2\sup_{t\in[0,1]} \Big(\rho^*(en^{1-t}) - \rho^*(e^{-1}n^{1-t})\Big) =: \varepsilon_n,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

де $\rho^*(x)$ було визначено в формулі (3.2). Наступна лема демонструє, що ε_n зростає повільніше за будь-який степінь $\ln n$.

Лема 76. *Для довільного $c > 0$ маємо*

$$\frac{\varepsilon_n}{(\ln n)^c} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n\to\infty.$$

Доведення. Помітимо, що

$$\rho^*(x) = N(\ln x), \tag{3.12}$$

де $(N(x))_{x\ge0}$ є числом візитів в інтервал $[0,x]$ збуреного випадкового блукання з кроком $\xi = |\ln W|$ та збуренням $\tau = |\ln(1-W)|$. Використовуючи формулу (2.190), робимо висновок, що середнє перших трьох членів в (3.11) є $O(\ln\ln n)$. Тому їх сума, поділена на $(\ln n)^c$, збігається до нуля за ймовірністю згідно з нерівністю Маркова. Четвертий член оцінюється так

$$\sup_{t\in[0,1]} \big(\rho^*(en^{1-t}) - \rho^*(e^{-1}n^{1-t})\big) = \sup_{t\in[0,1]} \big(N(t\ln n + 1) - N(t\ln n - 1)\big)$$

і є $o((\ln n)^c)$ за ймовірністю для кожного $c > 0$ згідно з формулою (2.189). $\square$

Доведення твердження 70. Згідно з лемою 76

$$\frac{1}{\ln n}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,1]} |K_n^*(t) - (\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))|\middle|(p_j^*)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

Тому

$$\frac{1}{\ln n}\sup_{t\in[0,1]} \left|K_n^*(t) - (\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))\right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty \tag{3.13}$$

за нерівністю Маркова та теоремою про мажоровану збіжність. Далі

$$\left|\frac{K_n^*}{\mu^{-1}\ln n} - 1\right| \le \frac{|K_n^* - \rho^*(n)|}{\mu^{-1}\ln n} + \left|\frac{\rho^*(n)}{\mu^{-1}\ln n} - 1\right| \quad \text{м.н.}$$

Перший член у правій частині збігається до нуля за ймовірністю згідно з (3.13) (нагадаємо, що $K_n^* = K_n^*(1)$), а другий збігається з огляду на (3.12) та твердження 64. Отже,

$$\frac{K_n^*}{\ln n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\mu}, \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Для завершення доведення помітимо, що

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t\right| &= \frac{\mu^{-1}\ln n}{K_n^*}\left(\frac{\sup_{t\in[0,1]}|K_n^*(t) - tK_n^*|}{\mu^{-1}\ln n}\right) \\
&\le \frac{\mu^{-1}\ln n}{K_n^*}\Bigg(\frac{\sup_{t\in[0,1]}|K_n^*(t) - \big(\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-})\big)|}{\mu^{-1}\ln n} \\
&\qquad + \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{\mu(\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))}{\ln n} - t\right| + \left|\frac{K_n^*}{\mu^{-1}\ln n} - 1\right|\Bigg),
\end{aligned}$$

де права частина збігається до нуля за ймовірністю внаслідок (3.13), (3.14) та твердження 64. $\square$

Доведення теореми 71. Доведення для $K_n^*(t)$. Позначимо через a_n нормування, яке використовується для $K_n^*(t)$ у відповідних частинах теореми 71, та помітимо, що a_n зростає швидше за деякий додатний степінь логарифма. Згідно з (3.11), лемою 76 та нерівністю Маркова

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{t\in[0,1]}|K_n^*(t) - (\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))| > \varepsilon a_n\middle|(p_j^*)\right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty$$

для всіх $\varepsilon > 0$. Використовуючи теорему про мажоровану збіжність, маємо

$$a_n^{-1} \sup_{t\in[0,1]} |K_n^*(t) - (\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-}))| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad n \to \infty.$$

З огляду на представлення (3.6), залишається довести теорему 71 з $\rho^*(n) - \rho^*(n^{(1-t)-})$ замість $K_n^*(t)$. Використовуючи (3.12), бачимо, що для цього достатньо застосувати теорему 65 до процесу $(\rho^*(n^t))_{t\in[0,1]}$, використати теорему про неперервне відображення та такі три спостереження.

- В J_1- або в M_1-топології на $D([0,1],\mathbb{R}^2)$
$$\left(\frac{\rho^*(n) - u_n(1)}{a_n}, \frac{-\rho^*(n^{(1-t)-}) + u_n(1) - u_n(t)}{a_n}\right) \Rightarrow \big(\mathcal{S}_\alpha(1), -\mathcal{S}_\alpha((1-t)-)\big),$$
при $n \to \infty$.
- Якщо простір $D([0,1],\mathbb{R}^2)$ наділено J_1 або M_1-топологією (яка сильніша за топологію добутку), то відображення $\psi : D[0,1] \times D([0,1],\mathbb{R}^2) D[0,1]$, що визначене $\psi((x_1(\cdot), x_2(\cdot))) := x_1(\cdot) + x_2(\cdot)$ є неперервним, див. розділ 4 в статті [267];
- $(Y(1) - Y((1-t)-))_{t\in[0,1]} \overset{f.d.}{=} (Y(t))_{t\in[0,1]}$ для кожного процесу Леві Y.

Доведення для $K_n^*(t)/K_n^*$. Запишемо

$$\begin{aligned}\frac{\ln n}{\mu a_n}\left(\frac{K_n^*(t)}{K_n^*} - t + \frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\right) &= \frac{\ln n}{\mu K_n^*}\frac{v_n(t) - tv_n(1)}{u_n(1)}\frac{K_n^* - u_n(1)}{a_n} \\ &+ \frac{\ln n}{\mu K_n^*}\left(\frac{K_n^*(t) - tK_n^* + v_n(t) - tv_n(1)}{a_n}\right)\end{aligned} \tag{3.15}$$

з тим же a_n, що й вище. З вже доведеного випливає, що

$$\frac{K_n^*(t) - u_n(t)}{a_n} \Rightarrow Z(t), \quad n \to \infty, \tag{3.16}$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ з J_1- або M_1-топологією та деяким процесом Леві Z. Використаємо теорему про неперервне відображення, неперервність додавання та (3.14), щоб отримати

$$\frac{\ln n}{\mu K_n^*}\left(\frac{K_n^*(t) - tK_n^* + v_n(t) - tv_n(1)}{a_n}\right) \Rightarrow Z(t) - tZ(1) \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0,1]$ з J_1- або M_1-топологією. З огляду на (3.14), (3.16) та

$$\sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{v_n(t)-tv_n(1)}{u_n(1)}\right| \ \leq\ \frac{2v_n(1)}{u_n(1)}\ \to\ 0,\quad n\to\infty,$$

перший член в (3.15) збігається до нуля за ймовірністю рівномірно по $t\in[0,1]$. Застосування леми Слуцького завершує доведення. $\square$

Доведення теореми 74. Аргументи, використані при доведенні граничної теореми 71 для процесу K_n^* переносяться без змін і ми отримуємо (3.7). Доведемо граничний результат для процесу $K_n^*(t)/K_n^*$. З формули (3.7) випливає

$$\left(\frac{\ell(\ln n)K_n^*(t)}{(\ln n)^\alpha},\ \frac{(\ln n)^\alpha}{\ell(\ln n)K_n^*}\right)\Rightarrow\left(W_\alpha^{\leftarrow}(1)-W_\alpha^{\leftarrow}((1-t)-),\ \frac{1}{W_\alpha^{\leftarrow}(1)}\right),\quad n\to\infty$$

у просторі $D([0,1],\mathbb{R}^2)$ з J_1-топологією. Для завершення доведення залишається застосувати теорему про неперервне відображення разом з фактом: відображення $\phi\ :\ D([0,1],\mathbb{R}^2)\ \to\ D[0,1]$, що визначене $\phi((x_1(\cdot),x_2(\cdot)))\ :=\ x_1(\cdot)x_2(\cdot)$ є неперервним в J_1-топології на $D([0,1],\mathbb{R}^2)$. $\square$

3.1.2 Граничні теореми для числа нульових блоків.

У цьому підрозділі ми доведемо граничні теореми для числа порожніх комірок (нульових блоків композицій), а саме ми розглядатимемо процес $(L^*_{[e^t]})_{t\geq 0}$. На відміну від попереднього розділу, ми доведемо лише результати про збіжність скінченновимірних розподілів. Також підкреслимо, що граничні теореми цього підрозділу є принципово відмінними від граничних теорем попереднього підрозділу, оскільки тепер аргумент t процесу $L^*_{[e^t]}$ відповідає часу (кількості розміщених куль), а не простору (розміру блоків композицій), як в процесі $(K_n^*(t))_{t\in[0,1]}$.

Перш ніж сформулювати основні результати, нагадаємо одне з тверджень теореми 1.1 роботи [128].

Твердження 77 (Іксанов, 2012)**.** *Припустимо, що* $\mathbb{E}|\ln W|=\infty$ *та*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}(1-W)^n}{\mathbb{E}W^n}=c\in(0,\infty).$$

Тоді

$$L_n^*\ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\ L^*,\ \ n\to\infty, \tag{3.17}$$

де L^* – випадкова величина з геометричним розподілом

$$\mathbb{P}\{L^*=k\}=\frac{c}{c+1}\Big(\frac{1}{c+1}\Big)^k,\quad k\in\mathbb{N}_0.$$

Зокрема, співвідношення (3.17) *виконується, якщо*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{|\ln W|>x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>x\}}=c. \tag{3.18}$$

Не слід очікувати, що лише за умов $\mathbb{E}|\ln W|=\infty$ та (3.18) матиме місце збіжність яких-небудь скінченновимірних розподілів, пов'язаних з послідовністю $\big(L_n^*\big)$. Проте, за додаткового припущення про правильну зміну чисельника (а, отже, й знаменника) в (3.18), результат такого роду доведено в наведеній нижче теоремі 78.

Нагадаємо, що для $\alpha\in(0,1)$ та $c>0$ точковий процес $\mathcal{P}^{(\alpha,c)}:=\sum_k\delta_{(t_k,j_k)}$ є пуассонівським процесом на $[0,\infty)\times(0,\infty]$ з мірою інтенсивності $\mathbb{LEB}\times\nu_{\alpha,c}$, де $\mathbb{LEB}$ – міра Лебега на $[0,\infty)$, а $\nu_{\alpha,c}$ – міра на $(0,\infty]$, що задається рівністю

$$\nu_{\alpha,c}\big((x,\infty]\big)=c^{-1}x^{-\alpha},\quad x>0.$$

Нехай $\big(W_\alpha(t)\big)_{t\geq0}$ – α-стійкий субординатор, що не залежить від $\mathcal{P}^{(\alpha,c)}$, див. означення 26.

Теорема 78. *Припустимо, що існують $\alpha\in(0,1)$, функція ℓ та константа $c\in(0,\infty)$ такі, що*

$$\mathbb{P}\{|\ln W|>x\}\ \sim\ c\,\mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>x\}\ \sim\ x^{-\alpha}\ell(x),\quad x\to\infty. \tag{3.19}$$

Тоді

$$(L^*_{[e^{ut}]})_{u>0}\overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow}\Big(\sum_k\mathbb{1}_{\{W_\alpha(t_k)\leq u<W_\alpha(t_k)+j_k\}}\Big)_{u>0},\quad t\to\infty. \tag{3.20}$$

Теореми 79 та 80, що наводяться нижче, посилюють теореми 1.1 в [130] та 1.2 в [128] відповідно, в яких була встановлена збіжність одновимірних розподілів.

Теорема 79. *Припустимо, що існують $\alpha\in(0,1)$ та $\beta\geq-\alpha$, а також функції ℓ та $\widehat{\ell}$ такі, що*

$$\mathbb{P}\{|\ln W|>x\}\ \sim\ x^{-\alpha}\ell(x)\quad \textit{та}\quad \mathbb{P}\{|\ln(1-W)|>x\}\ \sim\ x^{\beta}\widehat{\ell}(x),\quad x\to\infty. \tag{3.21}$$

У випадку $\alpha = -\beta$ припустимо також, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 0$$

та існує неспадна функція u така, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}u(x)}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}} = 1.$$

Тоді

$$\left(\frac{\mathbb{P}\{|\ln W| > t\}}{\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}} L^*_{[e^{ut}]}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (J_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}, \quad t \to \infty. \tag{3.22}$$

Теорема 80. *Нехай $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\} \sim t^{\beta}\widehat{\ell}(t)$ при $t \to \infty$ для деякого $\beta \in (-1, 0]$, а розподіл $|\ln W|$ належить області притягання деякого стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$. Нехай функція c така, як в* (2.76) *з $\xi := |\ln W|$.*

(а) Якщо $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\} = o(t/c^2(t))$ при $t \to \infty$, то

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}{\sqrt{\frac{1}{\mu}\int_0^t \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (V_\beta(u))_{u>0},$$

де V_β є центрованим гауссівським процесом з коваріацією

$$\mathbb{E}[V_\beta(u)V_\beta(w)] = w^{1+\beta} - (w-u)^{1+\beta}, \quad 0 \le u \le w.$$

(б) Якщо $t/c^2(t) = o(\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\})$ при $t \to \infty$, то

$$\left(\frac{L^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > y\}\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}c(t)\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (I_{\alpha,\beta}(u))_{u>0}.$$

Зауваження 81. Підкреслимо, що граничні результати для процесу $(L^*_{[e^{ut}]})_{u>0}$ при $t \to \infty$ в точності повторюють граничні результати для процесу $(M(ut))_{u>0}$, введеному в підрозділі 2.5.1 і побудованому з $\xi := |\ln W|$ та $\tau := |\ln(1-W)|$. Такий збіг невипадковий. Нижче, див. леми 83, 84 та 85, ми покажемо, що асимптотика $(L^*_{[e^{ut}]})_{u>0}$ збігається з асимптотикою процесу $(M^*(ut))_{u>0}$, де

$$M^*(t) := \sum_{k\ge1} \mathbb{1}_{\{|\ln W_1|+\dots+|\ln W_{k-1}| \le t < |\ln W_1|+\dots+|\ln W_{k-1}|+|\ln(1-W_k)|\}}, \quad t \ge 0.$$

Зауваження 82. Відмітимо дві ситуації, які не покриваються наведеними вище результатами.

(I) Припустимо, що в теоремі 80 $\mathbb{D}|\ln W| = \infty$ та існує границя

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > t\}c^2(t)/t \in (0,\infty).$$

Нам невідомо, чи має місце збіжність навіть одновимірних розподілів.

(II) Наведені вище теореми зібрані разом, оскільки їх доведення проходять в рамках єдиного підходу. На жаль, цей підхід не працює у випадку $\mathbb{E}|\ln(1-W)| < \infty$. Два різних доведення збіжності одновимірних розподілів числа порожніх комірок у випадку $\mathbb{E}(|\ln W| + |\ln(1-W)|) < \infty$ можна знайти в [101, 102]. Понад це, у роботі [101] доведено, що у випадку $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ та $\mathbb{E}|\ln(1-W)| < \infty$ число порожніх комірок збігається до нуля за ймовірністю. Аналогічно, якщо в умовах теореми 79 хвіст $\mathbb{P}\{|\ln W| > x\}$ асимптотично домінує хвіст $\mathbb{P}\{|\ln(1-W)| > x\}$ (тобто $\beta \le -\alpha$), то число порожніх комірок збігається до нуля за ймовірністю.

Доведення теорем 78, 79 та 80

В контексті задач, пов'язаних зі схемами розміщення, досить плідною є ідея пуассонізації. Нехай $\big(\lambda_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ є пуассонівським потоком одиничної інтенсивності, який не залежить ані від $\big(U_j\big)$, ані від $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Позначимо через $\big(\pi(t)\big)_{t\ge 0}$ відповідний процес Пуассона, що визначений рівністю

$$\pi(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \le t\}, \quad t \ge 0.$$

Замість схеми розміщення n куль будемо використовувати версію ґратки Бернуллі, в якій моменти розміщення куль (точок U_k) по коміркам задаються послідовністю $\big(\lambda_k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. А саме, точка U_k розміщується у відповідну комірку з сегменту $[0,1]$ в момент часу λ_k. Таким чином, за проміжок часу $[0,t]$ по коміркам буде розміщено $\pi(t)$ куль. Позначимо через $\pi_j(t)$ кількість куль в j-ій комірці в момент часу t. Зрозуміло, що при фіксації середовища $(W_j)_{j\in\mathbb{N}}$ процес $\big(\pi_j(t)\big)_{t\ge 0}$, $j \in \mathbb{N}$ є процесом Пуассона з інтенсивністю $p_j^* = W_1 \cdots W_{j-1}(1-W_j)$, та для різних j ці процеси незалежні. Остання властивість пояснює переваги пуассонізованої схеми.

Нагадаємо, що N_n^* є індексом останньої зайнятої комірки та введемо позначення $N^*(t) := N_{\pi(t)}^*$, $K^*(t) := K_{\pi(t)}^*$ та $L^*(t) := L_{\pi(t)}^*$. Тоді, наприклад, $L^*(t)$ є числом порожніх комірок з проміжку зайнятості при розміщенні $\pi(t)$ куль. Нагадаємо, що ґратку Бернуллі можна розглядати як схему Карліна у випадковому середовищі $(p_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$, що задається незалежними однаково розподіленими в.в. $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$, див. формулу (1.2). Наступні два результати демонструють, що вивчення асимптотики $L(t)$ можна звести до вивчення простого функціоналу від середовища $(p_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$ по аналогії до того, як це було зроблено в попередньому підрозділі для $K_n^*(t)$.

Визначимо стандартне випадкове блукання $\big(S_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ рівностями

$$S_0 := 0, \quad S_n := |\ln W_1| + \cdots + |\ln W_n|, \quad n \in \mathbb{N}$$

та покладемо $\tau_n := |\ln(1 - W_n)|$.

Лема 83. *Якщо* $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$, *то*

$$\left(L^*(e^{ut}) - \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k \leq ut < S_k + \tau_{k+1}\}}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty. \tag{3.23}$$

Лема 84. *Якщо* $\mathbb{E}|\ln W| < \infty$, *то*

$$\left(\frac{L^*(e^{ut}) - \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k \leq ut < S_k + \tau_{k+1}\}}}{a(t)}\right)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty \tag{3.24}$$

для довільної функції a *такої, що* $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \infty$. *Іншими словами, скінченновимірні розподіли сім'ї процесів* $\big(L^*(e^{ut}) - \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k \leq ut < S_k + \tau_{k+1}\}}\big)_{u\geq 0}$, $t \geq 0$ *щільні.*

Лема 85, що наводиться далі, дозволяє здійснити депуассонізацію, тобто перехід від схеми з пуассонівською кількістю куль до початкової схеми з фіксованою кількістю куль.

Лема 85. *Без жодних моментних припущень на* $|\ln W|$ *маємо*

$$\big(L^*(e^{ut}) - L_{[e^{ut}]}\big)_{u>0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty.$$

Зауважимо, що в роботах [101, 128, 130] використовувалось декілька підходів до депуассонізації числа порожніх комірок. Проте, твердження леми 85 є найсильнішим з відомих навіть у випадку одновимірних розподілів.

З наведених вище лем бачимо, що теорема 79 випливає з твердження 60, теорема 80 є наслідком твердження 58, а з твердження 61 випливає теорема 78, якщо перевірити умову (2.164), яка виглядає так

$$\lim_{t\to\infty} t\mathbb{P}\{|\ln W| > xc(t), |\ln(1-W)| > yc(t)\} = 0$$

для всіх $x, y > 0$. Ймовірність в останній формулі є $\mathbb{P}\{1-e^{-yc(t)} < W < e^{-xc(t)}\}$ і дорівнює нулю для великих t.

Доведення леми 83. Як завжди покладемо

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\} = \inf\{k \in \mathbb{N} : |\ln W_1| + \cdots + |\ln W_k| > t\}, \quad t \geq 0$$

та введемо функцію відновлення

$$U(t) := \mathbb{E}\nu(t) = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}\{S_k \leq t\}, \ \ t \geq 0.$$

В подальшому ми будемо використовувати теорему Блекуелла та ключову теорему відновлення. Внаслідок припущення $\mathbb{E}|\ln W| = \infty$ окремий аналіз для випадку арифметичного розподілу $|\ln W|$ не потрібний. Дійсно, згідно з теоремою Блекуелла та міркуваннями монотонності, як в арифметичному так і в неарифметичному випадках маємо

$$\lim_{t\to\infty} \big(U(t+h) - U(t)\big) = 0 \tag{3.25}$$

для довільного $h > 0$. Дослівне повторення доведення ключової теореми відновлення, що наводиться на с. 241 в [226], дозволяє стверджувати, що

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[0,\,t]} g(t-x)\mathrm{d}U(x) = 0,$$

якщо функція g безпосередньо інтегровна за Ріманом на $[0, \infty)$, та

$$\lim_{t\to\infty} \int_{[t,\,\infty)} g(t-x)\mathrm{d}U(x) = 0,$$

якщо g безпосередньо інтегровна за Ріманом на $(-\infty, 0]$.

Для доведення леми 83 достатньо перевірити збіжність до нуля лівої частини (3.23) при $u = 1$ та скористатись прийомом Крамера-Уолда. Подальше доведення розіб'ємо на декілька кроків.

Крок 1. Покажемо, що максимальний номер зайнятої комірки за проміжок часу $[0, e^t]$, задовольняє співвідношення

$$N^*(e^t) - \nu(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty.$$

Для цього покладемо $E(n) := -\ln \min(U_1, \ldots, U_n)$ та помітимо, що $N^*(e^t) = \nu(E(\pi(e^t)))$. Різниця $E(n) - \ln n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до випадкової величини E^*, що має розподіл Гумбеля. Оскільки послідовність $\big(E(n)\big)$ не залежить від процесу $\big(\pi(t)\big)$, то різниця $E(\pi(e^t)) - \ln \pi(e^t)$ також збігається до E^* за розподілом при $t \to \infty$. Внаслідок слабкого закону великих чисел для процесу Пуассона: $\ln \pi(e^t) - t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ при $t \to \infty$. Отже,

$$E(\pi(e^t)) - t \xrightarrow{\mathrm{d}} E^*, \quad t \to \infty. \tag{3.26}$$

Покладемо $R(t) := E(\pi(e^t))$. Використовуючи нерівність Маркова та той факт, що функція відновлення U не спадає, для довільних $\gamma > 0$ та $\varepsilon > 0$ маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left\{ \big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{0<R(t)-t\leq\gamma\right\}} > \varepsilon \middle| R(t) \right\} \\
&\quad \leq \ \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\left(\big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{0<R(t)-t\leq\gamma\right\}} \middle| R(t) \right) \\
&\quad = \ \varepsilon^{-1}\big(U\big(t + R(t) - t\big) - U(t)\big)\mathbb{1}_{\{0<R(t)-t\leq\gamma\}} \leq \varepsilon^{-1}\big(U(t+\gamma) - U(t)\big).
\end{aligned}$$

З цієї формули та співвідношення (3.25) випливає, що

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\left\{ \big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{0<R(t)-t\leq\gamma\right\}} > \varepsilon \middle| R(t) \right\} = 0 \quad \text{м.н.}$$

Таким чином,

$$\big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{0<R(t)-t\leq\gamma\right\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty,$$

за теоремою Лебега про мажоровану збіжність.

Очевидно, що для довільних $\gamma > 0$ та $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\big\{ \big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{R(t)-t>\gamma\right\}} > \varepsilon \big\} \leq \mathbb{P}\{R(t) - t > \gamma\}.$$

Виходячи з цієї нерівності, згадуючи співвідношення (3.26), та використовуючи абсолютну неперервність розподілу в.в. E^*, робимо висновок, що

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathbb{P}\big\{ \big(\nu(R(t)) - \nu(t)\big)\mathbb{1}_{\left\{R(t)-t>\gamma\right\}} > \varepsilon \big\} \leq \mathbb{P}\{E^* > \gamma\}.$$

Нарешті,
$$\lim_{\gamma\to\infty}\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\mathbb{P}\big\{\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)\mathbb{1}_{\big\{R(t)-t>\gamma\big\}}>\varepsilon\big\}=0.$$
Як наслідок отриманих оцінок маємо
$$\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)\mathbb{1}_{\big\{R(t)-t>0\big\}}\overset{\mathbb{P}}{\to}0,\quad t\to\infty.$$
Аналогічними міркуваннями доводиться співвідношення
$$\big(\nu(R(t))-\nu(t)\big)\mathbb{1}_{\big\{R(t)-t\le 0\big\}}\overset{\mathbb{P}}{\to}0,\quad t\to\infty.$$
Цим завершується перший етап доведення леми 83.

Крок 2. Мета цього кроку – знаходження підхожої апроксимації для $K^*(e^t)$ – числа комірок, в кожну з яких потрапила хоча б одна куля за проміжок часу $[0,e^t]$. Покажемо, що
$$K^*(e^t)-\sum_{k\ge 0}\bigg(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\bigg)\overset{\mathbb{P}}{\to}0,\quad t\to\infty.$$
Має місце представлення
$$K^*(e^t)=\sum_{k\ge 1}\mathbb{1}_{\{\pi_k(e^t)\ge 1\}},\tag{3.27}$$
де $\pi_k(e^t)$ – кількість куль (в пуассонізованій схемі), що потрапили в k-у комірку за проміжок часу $[0,\ e^t]$. Внаслідок рівності
$$\mathbb{E}\big(K^*(e^t)|(p_j^*)\big)=\sum_{k\ge 0}\bigg(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\bigg)\tag{3.28}$$
для доведення бажаної апроксимації достатньо показати, що
$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\mathbb{D}\big(K(e^t)|(p_j^*)\big)=0.\tag{3.29}$$
Оскільки при фіксованих $\big(p_j^*\big)$ індикатори в (3.27) незалежні, то
$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\mathbb{D}\big(K(e^t)|(p_j^*)\big)\\&\quad=\mathbb{E}\sum_{k\ge 0}\bigg(\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)-\exp\big(-2e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\bigg)\\&\quad=\int_{[0,\infty)}\bigg(\varphi(e^{t-y})-\varphi(2e^{t-y})\bigg)\mathrm{d}U(y),\end{aligned}\tag{3.30}$$

де $\varphi(y) := \mathbb{E}e^{-y(1-W)}$. Згідно з лемою 162 функція $g_0(y) := \varphi(e^y) - \varphi(2e^y)$ безпосередньо інтегровна за Ріманом на $\mathbb{R}$, а тому з ключової теореми відновлення випливає співвідношення (3.29).

КРОК 3. Переконаємось, що

$$Z(t) := \sum_{k\geq 0}\Big(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Big)\mathbb{1}_{\{S_k>t\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t\to\infty.$$

Згідно з лемою 162 функція $g_1(y) := \mathbb{E}\big(1-\exp\big(-e^y(1-W)\big)\big)$ безпосередньо інтегровна за Ріманом на $(-\infty, 0]$. З ключової теореми відновлення маємо

$$\mathbb{E}Z(t) = \int_{[t,\,\infty)} g_1(t-y)\mathrm{d}U(y) \to 0, \quad t\to\infty.$$

КРОК 4. Перевіримо, що

$$Y(t) := \sum_{k\geq 0}\Big(\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big) - \mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}>t\}}\Big)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t\to\infty.$$

Для цього запишемо $Y(t)$ у вигляді різниці двох невід'ємних випадкових функцій

$$\begin{aligned} Y(t) &= \sum_{k\geq 0}\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\mathbb{1}_{\{S_k+\tau_{k+1}\leq t\}} \\ &- \sum_{k\geq 0}\Big(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Big)\mathbb{1}_{\{S_k\leq t<S_k+\tau_{k+1}\}} =: Y_1(t)-Y_2(t) \end{aligned}$$

та покажемо, що $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}Y_i(t) = 0$, $i=1,2$. Дійсно, за лемою 162 функції $g_2(y) = \mathbb{E}\exp\big(-e^y(1-W)\big)\mathbb{1}_{\{1-W>e^{-y}\}}$ та $g_3(y) = \mathbb{E}(1-\exp(-e^y(1-W)))\mathbb{1}_{\{1-W\leq e^{-y}\}}$ є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $[0,\infty)$. З ключової теореми відновлення випливає, що

$$\mathbb{E}Y_1(t) = \int_{[0,\,t]} g_2(t-y)\mathrm{d}U(y)\to 0,\ \ \mathbb{E}Y_2(t) = \int_{[0,\,t]} g_3(t-y)\mathrm{d}U(y)\to 0, \quad t\to\infty,$$

що й потрібно було довести.

Враховуючи рівність

$$\begin{aligned} L^*(e^t) - \sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq t<S_k+\tau_{k+1}\}} &= \Big(N^*(e^t) - \sum_{k\geq 0}\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\Big) \\ &- \Big(K^*(e^t) - \sum_{k\geq 0}\Big(1-\exp\big(-e^{t-S_k}(1-W_{k+1})\big)\Big)\Big) - Z(t) + Y(t), \end{aligned}$$

доведення леми 83 завершується поєднанням результатів кроків 1-4. $\square$

Доведення леми 84 є аналогічним до доведення леми 83 і не наводиться. Необхідні деталі можна знайти в лемі 2.2 в [141].

Доведення леми 85. Достатньо показати, що

$$K^*(t) - K^*_{[t]} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{та} \quad N^*(t) - N^*_{[t]} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty, \tag{3.31}$$

та скористатись прийомом Крамера-Уолда. Внаслідок нерівності $\mathbb{P}\{N^*(t) \neq N^*_{[t]}\} \leq \mathbb{P}\{K^*(t) \neq K^*_{[t]}\}$, лише перше співвідношення потребує доведення.

Покажемо, спочатку, що для довільного $x > 0$

$$K^*(t + x\sqrt{t}) - K^*(t - x\sqrt{t}) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty. \tag{3.32}$$

З формули (3.28) для достатньо великих t маємо

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(K^*(t + x\sqrt{t}) - K^*(t - x\sqrt{t})\big)\\ &\qquad = \int_{[0,\infty)} \big(\varphi((t - x\sqrt{t})e^{-y}) - \varphi((t + x\sqrt{t})e^{-y})\big)\mathrm{d}U(y),\end{aligned}$$

де $\varphi(y) = \mathbb{E}e^{-y(1-W)}$. Оскільки функція $-\varphi'(y)$ не зростає, то за теоремою про середнє значення для диференційовних функцій

$$\varphi\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big) - \varphi\big((t + x\sqrt{t})e^{-y}\big) \leq -\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big)2x\sqrt{t}e^{-y}.$$

Тому

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\big(K^*(t + x\sqrt{t}) - K^*(t - x\sqrt{t})\big) \leq \frac{2x\sqrt{t}}{t - x\sqrt{t}}\\ &\qquad \leq \int_{[0,\infty)} \big(-\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big)\big)(t - x\sqrt{t})e^{-y}\mathrm{d}U(y).\end{aligned}$$

Згідно з лемою 162 функція $g_4(y) = -\varphi'(e^y)e^y$ безпосередньо інтегровна за Ріманом на $\mathbb{R}$. З леми 163 випливає, що

$$\int_{[0,\infty)} \big(-\varphi'\big((t - x\sqrt{t})e^{-y}\big)\big)(t - x\sqrt{t})e^{-y}\mathrm{d}U(y) = O(1), \quad t \to \infty.$$

Таким чином, для довільного $x > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\big(K^*(t + x\sqrt{t}) - K^*(t - x\sqrt{t})\big) = 0,$$

що дає (3.32). Оскільки процес $\big(K^*(s)\big)_{s\geq 0}$ не спадає м.н., то для довільного $x>0$

$$\begin{aligned}|K^*_{[t]}-K^*(t)| &= |K^*(\lambda_{[t]})-K^*(t)|\mathbb{1}_{\{|\lambda_{[t]}-t|\leq x\sqrt{t}\}}+|K^*(\lambda_{[t]})-K^*(t)|\mathbb{1}_{\{|\lambda_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}\\ &\leq K^*(t+x\sqrt{t})-K^*(t-x\sqrt{t})+|K^*(\lambda_{[t]})-K^*(t)|\mathbb{1}_{\{|\lambda_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}.\end{aligned}$$

Отже, для довільного $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{|K^*_{[t]}-K^*(t)|>2\varepsilon\}\\ &\leq \mathbb{P}\{K^*(t+x\sqrt{t})-K^*(t-x\sqrt{t})>\varepsilon\}\\ &+\mathbb{P}\{|K^*(\lambda_{[t]})-K^*(t)|\mathbb{1}_{\{|\lambda_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}}>\varepsilon\}\\ &\leq \mathbb{P}\{K(t+x\sqrt{t})-K(t-x\sqrt{t})>\varepsilon\}+\mathbb{P}\{|\lambda_{[t]}-t|>x\sqrt{t}\}.\end{aligned}$$

Враховуючи (3.32) та використовуючи центральну граничну теорему для для $\lambda_{[t]}$, отримуємо

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mathbb{P}\{|K^*_{[t]}-K^*(t)|>2\varepsilon\}\leq \mathbb{P}\{|\mathcal{S}_2(1)|>x\}.$$

Спрямовуючи $x\to\infty$, бачимо, що має місце перше співвідношення в (3.31). $\square$

3.1.3 Граничні теореми для логарифмічних сепарабельних статистик.

У цьому підрозділі ми розглянемо граничні теореми для більш екзотичного функціоналу на ґратці Бернуллі:

$$V^*_n := \sum_{r=1}^{n} K^*_{n,r}\ln r = \sum_{j\geq 1}\ln^+ Z_{n,j},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Такий функціонал нам знадобиться в наступному підрозділі для вивчення регенеративних випадкових перестановок.

Статистика V^*_n є прикладом та званих *сепарабельних (або роздільних) статистик* вигляду $\sum_r K_{n,r}h(r)$ (термінологія запропонована в [193, 202] в контексті схем розміщення). Функціонали $K^*_{n,r}$ та K^*_n є самі по собі прикладами таких статистик з деякими індикаторними функціями. Функціонал V^*_n є прикладом сеперабельної статистики з необмеженою функцією h. Для перестановок Юенса сепарабельні статистики досить загального вигляду вивчались в статтях Бабу та Манставічюса, див. [23, 186].

Основний результат для V^*_n сформульовано в такому твердженні.

Твердження 86. *Припустимо, що* $|\ln W|$ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha \in (1,2]$*. Тоді при* $t \to \infty$ *маємо*

$$\left(\frac{V^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W) \le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge 0},$$

де функція c *така, як в* (2.76) *з* $\xi := |\ln W|$.

Як і в попередніх підрозділах, ми доведемо твердження 86 технікою збурених випадкових блукань. Розпочнемо з доведення допоміжної леми. Нагадаємо, див. підрозділ 2.5.3, що

$$N(t) := \sum_{k\ge 1} \mathbb{1}_{\{S_{k-1}+\tau_k \le t\}}, \quad t \ge 0,$$

є числом візитів збуреного випадкового блукання $(S_{k-1}+\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ в інтервал $[0,t]$.

Лема 87. *Припустимо, що* ξ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha \in (1,2]$*. Тоді при* $t \to \infty$ *маємо*

$$\left(\frac{\int_0^{tu}\left(N(y) - \frac{1}{\mu}\int_0^y \mathbb{P}\{\tau \le z\}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge 0},$$

де функція c *така, як в* (2.76).

Доведення. Одразу підкреслимо, що за додаткового припущення $\mathbb{E}\tau^a < \infty$ для деякого $a > 0$, навіть сильніше твердження зі збіжністю в J_1- або M_1-топології одразу випливає з теореми 65 та неперервності оператора інтегрування у вказаних топологіях.

Покладемо $F(x) := \mathbb{P}\{\tau \le x\}$ та

$$\widehat{N}(t) := \sum_{k\ge 0} F(t-S_k) = \sum_{k\ge 0} F(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}, \quad t \ge 0.$$

З нерівності Коші-Буняковського-Шварца маємо

$$\frac{\mathbb{E}\left(\int_0^t |N(x)-\widehat{N}(x)|\mathrm{d}x\right)^2}{t^2c^2(t)} \le \frac{\int_0^t \mathbb{E}(N(x)-\widehat{N}(x))^2\mathrm{d}x}{tc^2(t)}.$$

З леми 2.3 роботи [95] ми знаємо, що підінтегральний вираз в правій частині є $o(x)$ при $x \to \infty$, а тому права частина збігається до нуля при $t \to \infty$, оскільки $t/c^2(t) = O(1)$. Отже,

$$\frac{\int_0^t (N(x) - \widehat{N}(x))\mathrm{d}x}{tc(t)} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0, \quad t \to \infty,$$

внаслідок нерівності Чебишева. Згадуючи прийом Крамера-Уолда, бачимо, що залишається довести

$$\left(\frac{\int_0^{tu} \left(\widehat{N}(y) - \frac{1}{\mu} \int_0^y F(z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha} tc(t)} \right)_{u \geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y \right)_{u \geq 0},$$

але це твердження одразу випливає з теореми 32 з функцією $h(t) = \int_0^t F(z)\mathrm{d}z$ та елементарного спостереження: $I_{\alpha,1}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)\mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y) = \int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y$, $u \geq 0$. □

Доведення твердження 86. Ми знову використаємо техніку пуассонізації і розглянемо схему розміщення в якій кулі розміщуються по коміркам в моменти стрибків однорідного процесу Пуассона $(\pi_t)_{t \geq 0}$. Будемо писати $V^*(t) = V^*_{\pi(t)}$.

Нам знадобиться твердження про великі відхилення для процесу Пуассона (π_t): при $t > 1$,

$$\mathbb{P}\{\pi_t \leq (1 - \varepsilon_t)t\} \leq \exp(-t(\varepsilon_t + \ln(1 - \varepsilon_t)(1 - \varepsilon_t))) =: q(t), \tag{3.33}$$

де $\varepsilon_t := t^{-\beta}$ для довільного $\beta \in (0, 1/2)$. Зауважимо, що $\lim_{t \to \infty} q(t) = 0$ та $(-\ln q(t)) \sim t^{1-2\beta}$. Нерівність (3.33) є оцінкою Чернова для пуассонівського розподілу і випливає зі стандартних міркувань: застосування нерівності Маркова до $e^{-s\pi_t}$ та мінімізації правої частини по s.

Для $j = 1, 2$ покладемо

$$f_j(t) := \mathbb{E}(\ln^+ \pi_t)^j = e^{-t} \sum_{k \geq 2} \ln^j k (t^k/k!), \quad t \geq 0.$$

Ці функції не спадають та диференційовні з $f_j(0) = 0$ та

$$f_j'(0) = 0. \tag{3.34}$$

Доведемо, що

$$\lim_{t\to\infty}(f_1(t) - \ln t) = 0 \tag{3.35}$$

та

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0, \tag{3.36}$$

де $h(t) := \mathbb{D}(\ln^+ \pi_t)$. Для цього запишемо

$$f_1(t) - \ln t \le \mathbb{E}\ln(\pi_t + 1) - \ln t \le \ln(t+1) - \ln t \le t^{-1}, \tag{3.37}$$

де ми використали нерівність Йєнсена на другому кроці. Аналогічно,

$$f_2(t) - \ln^2 t \le \mathbb{E}\ln^2(\pi_t + 1) - \ln^2 t \le \ln^2(t+1) - \ln^2 t \le \frac{2\ln(t+1)}{t}. \tag{3.38}$$

Тут використано те, що ми працюємо на множині $\{\pi_t \ge 2\}$, а функція $t \mapsto \ln^2(1+t)$ вгнута при $t \ge 2$.

Для достатньо великих t та ε_t, що було введене вище,

$$\begin{aligned} f_1(t) - \ln t &\ge \mathbb{E}(\ln^+ \pi_t - \ln t)\mathbb{1}_{\{\pi_t > (1-\varepsilon_t)t\}} - \ln t\mathbb{P}\{\pi_t \le (1-\varepsilon_t)t\} \\ &\ge \ln(1-\varepsilon_t)\mathbb{P}\{\pi_t > (1-\varepsilon_t)t\} - q(t)\ln t =: p(t). \end{aligned}$$

Вираз у правій частині прямує до нуля (зі швидкістю $t^{-\beta}$) при $t \to \infty$. Поєднуючи цю нерівність з (3.37), отримуємо (3.35). Помітимо, що

$$f_1^2(t) = \ln^2 t + 2\ln t(f_1(t) - \ln t) + (f_1(t) - \ln t)^2 \ge \ln^2 t + 2p(t)\ln t.$$

Отже,

$$h(t) = f_2(t) - f_1^2(t) \overset{(3.38),(3.39)}{\le} 2(t^{-1}\ln(t+1) - p(t)\ln t) = O(\ln t/t^{\beta}),$$

що доводить (3.36)[1].

Нагадаємо, див. формулу (3.2), що

$$\begin{aligned} \rho^*(e^x) &:= \#\{k \in \mathbb{N} : p_k^* \ge e^{-x}\} \\ &= \#\{k \in \mathbb{N} : |\ln W_1| + \dots + |\ln W_{k-1}| + |\ln(1-W_k)| \le x\}, \quad x \ge 0 \end{aligned}$$

та тривіальний факт

$$\mathbb{E}\rho^*(e^x) \le Cx + D, \quad x \ge 0 \tag{3.39}$$

[1] Альтернативне доведення формул (3.35) та (3.36) можна також отримати з теореми 4 в [147] з використанням комплексного аналізу.

для деяких констант C, D, див. лему 67.

Два основні спостереження для подальшого аналізу є такими (вони будуть доведені далі):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V^*(e^t)|(W_k)) &= \sum_{j\geq 1} f_1(e^t p_j^*) = \int_{[1,\infty)} f_1(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x) \\ &= \int_{[0,t]} (t-x)\mathrm{d}\rho^*(e^x) + O_{\mathbb{P}}(t) = \int_0^t \rho^*(e^x)\mathrm{d}x + O_{\mathbb{P}}(t) \quad (3.40)\end{aligned}$$

та

$$\mathbb{D}(V^*(e^t)|(W_k)) = \sum_{j\geq 1} h(e^t p_j^*) = O_{\mathbb{P}}(t). \quad (3.41)$$

З формули (3.39) випливає $\rho^*(e^t) = O_{\mathbb{P}}(t)$, тому (3.35) дає

$$\int_{[1,e^t]} f_1(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x) = \int_{[0,t]} (t-x)\mathrm{d}\rho^*(e^x) + O_{\mathbb{P}}(t) = \int_0^t \rho^*(e^x)\mathrm{d}x + O_{\mathbb{P}}(t),$$

де, насправді, ми використали лише обмеженість $f_1(t) - \ln t$. Далі,

$$\begin{aligned}\int_{[e^t,\infty)} f_1(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x) &= -\int_{[0,1]} f_1(y)\mathrm{d}\rho^*(e^t/y) \\ &= -f_1(1)\rho^*(e^t) + \int_0^1 \rho^*(e^t/y) f_1'(y)dy.\end{aligned}$$

Застосовуючи (3.39), бачимо

$$\mathbb{E}\left[\int_{[e^t,\infty)} f_1(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x)\right] \leq O(t) + \int_0^1 (C\ln y + D) f_1'(y)\mathrm{d}y = O(t),$$

оскільки $\int_0^1 |\ln y| f_1'(y)\mathrm{d}y < \infty$ з огляду на (3.34). Отже, (3.40) виконується. Формула (3.41) перевіряється аналогічно з використанням нерівності

$$\int_{[e^t,\infty]} h(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x) \leq \int_{[e^t,\infty]} f_2(e^t/x)\mathrm{d}\rho^*(x).$$

Згідно з лемою 87 з $N(x) = \rho^*(e^x)$ маємо при $t \to \infty$

$$\left(\frac{\int_0^{tu} \left(\rho^*(e^y) - \frac{1}{\mu}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \leq z\}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha} t c(t)}\right)_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0},$$

а тому, внаслідок (3.40),

$$\left(\frac{\mathbb{E}(V^*(e^{ut})|(W_k)) - \frac{1}{\mu}\int_0^{tu}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \leq z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha} t c(t)}\right)_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0},$$

і значить

$$\left(\frac{V^*(e^{ut}) - \frac{1}{\mu}\int_0^{tu}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\ge 0}$$

за нерівністю Чебишева та (3.41).

Залишається провести депуассонізацію, тобто показати, що

$$\left(\frac{V^*(e^{ut}) - V^*_{[e^{ut}]}}{tc(t)}\right)_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t\to\infty.$$

Застосовуючи прийом Крамера-Уолда, бачимо, що достатньо перевірити

$$\frac{V^*(t) - V^*_{[t]}}{(\ln t)c(\ln t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty.$$

Зафіксуємо довільні $\delta > 0$ та $\varepsilon > 0$. Використавши монотонність V^*, маємо

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{|V^*(t) - V^*(\lambda_{[t]})| > \delta c(\ln t)\ln t\}\\ &\qquad\le \mathbb{P}\{|t-\lambda_{[t]}| > t\varepsilon\} + \mathbb{P}\{|V^*((1+\varepsilon)t) - V^*((1-\varepsilon)t)| > \delta c(\ln t)\ln t\}.\end{aligned}$$

Перший доданок збігається до нуля внаслідок слабкого закону великих чисел для послідовності (λ_k). Другий доданок збігається до нуля внаслідок співвідношення

$$\frac{\int_{\ln((1-\varepsilon)t)}^{\ln((1+\varepsilon)t)}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W)| \le z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{(\ln t)c(\ln t)} \to 0, \quad t\to\infty,$$

та повільної зміни функції $t\mapsto (\ln t)c(\ln t)$, які гарантують

$$\frac{V^*((1+\varepsilon)t) - V^*((1-\varepsilon)t)}{(\ln t)c(\ln t)} \overset{\mathbb{P}}{\to} 0, \quad t\to\infty.$$

Доведення завершено. □

3.2 Регенеративні випадкові перестановки

Випадкова перестановка Π^*_n породжується ґраткою Бернуллі у такий спосіб: натуральні числа $i_1,\dots,i_\ell$ утворюють цикл $(i_1\ \dots\ i_\ell)$ якщо виконані умови:

(i) $U_{i_1} < \dots < U_{i_\ell}$,

(ii) точки $U_{i_1}, \ldots, U_{i_\ell}$ і лише вони потрапляють в деякий інтервал $(V_j, V_{j-1}]$.

Записуючи точки вибірки $U_1, \ldots, U_n$ у зростаючому порядку та вставляючи символ $|$ між двома сусідніми порядковими статистиками, якщо вони потрапили у різні інтервали, отримуємо циклічний запис перестановки Π_n^* читанням запису зліва направо. Наприклад, запис $U_7 \,|\, U_3\ U_4\ U_2\ U_5 \,|\, U_6\ U_1$ дає перестановку $(7)(3\ 4\ 2\ 5)(6\ 1)$. Для переходу до стандартного циклічного запису $(1\ 6)(2\ 5\ 3\ 4)(7)$ потрібно переставити цикли у порядку зростання їх мінімальних елементів та зробити циклічний зсув в кожному з циклів так, щоб мінімальний елемент стояв на першому місці. Однак, зберігаючи початковий запис, який враховує порядок на дійсній осі, ми гарантуємо виконання умови *регенеративності*:

- *Регенеративність*: для $m \in \{1, \ldots, n-1\}$, за умови, що останній цикл Π_n^* має довжину m, циклічна структура Π_n^* після видалення останнього циклу має той же розподіл, що й циклічна структура Π_{n-m}^*.

Безпосередньо з означення також випливає, що Π_n^* задовольняє таким двом властивостям:

- *Узгодженість*: перестановки Π_n^* узгоджені для всіх n. Перехід від Π_{n+1}^* до Π_n^* зводиться до видалення $n+1$ з його циклу.

- *Переставність*: розподіл Π_n^* є інваріантним відносно спряження в $\mathfrak{S}_n$. Еквівалентно, при заданій циклічній структурі $(K_{n,1}^*, \ldots, K_{n,n}^*)$ розподіл Π_n^* рівномірний[2].

Враховуючи умову переставності, властивість регенеративності можна переформулювати так: якщо останній цикл Π_n^* має довжину m, перестановка, отримана після видалення останнього циклу та перенумерування інших елементів зростаючою бієкцією на множину $\{1, 2, \ldots, n-m\}$, дає перестановку з тим же розподілом, що й Π_{n-m}^*.

Підкреслимо, якщо W має бета-розподіл з параметрами θ та 1, то Π_n^* є перестановкою Юенса. Таким чином, запропонована конструкція є узагальненням перестановок Юенса.

[2] З конструкції очевидно, що $K_{n,r}^*$ дорівнює числу циклів довжини r в Π_n^*.

Теорема 88. *Припустимо, що розподіл W є абсолютно неперервним з щільністю f.*

(i) якщо існують $\delta_1 \geq 0$ та $\delta_2 \geq 0$ такі, що f не зростає $(0, \delta_1)$, обмежена на $[\delta_1, 1-\delta_2]$ та не спадає на $(1-\delta_2, 1)$, а $|\ln W|$ належить області притягання деякого α-стійкого розподілу з $\alpha \in (1, 2]$, то при $t \to \infty$ маємо

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W) \leq z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\mu^{-1-1/\alpha}tc(t)}\right)_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0},$$

де функція c така, як в (2.76) *з* $\xi := |\ln W|$.

(ii) Якщо для деякого $\alpha \in [0, 1)$

$$\sup_{x\in[0,1]} x^\alpha(1-x)^\alpha f(x) < \infty \qquad (3.42)$$

то $\sigma^2 < \infty$ та

$$\left(\frac{\ln O^*_{[e^{ut}]} - \frac{1}{\mu}\int_0^{ut}\int_0^y \mathbb{P}\{|\ln(1-W) \leq z\}\mathrm{d}z\mathrm{d}y}{\sigma\mu^{-3/2}t^{3/2}}\right)_{u\geq 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(\int_0^u \mathcal{S}_2(y)\mathrm{d}y\right)_{u\geq 0}.$$

Зауваження 89. Якщо W має бета-розподіл з параметрами θ та 1, то взявши $u = 1$ та $t = \ln n$ в пункті (ii) теореми 88, отримуємо

$$\frac{\ln O^*_n - (\theta/2)\ln^2 n}{\sqrt{\theta \ln^3 n}} \overset{\text{d}}{\to} \int_0^1 \mathcal{S}_2(y)\mathrm{d}y, \quad t \to \infty.$$

Враховуючи, що $\int_0^1 \mathcal{S}_2(y)\mathrm{d}y$ має центрований нормальний розподіл з дисперсією $1/3$, остання центрована формула еквівалентна (1.6).

Умови теореми 88 покривають, зокрема, всі обмежені щільності та всі бета-щільності для довільних $a, b > 0$. Наш підхід до доведення теореми 88 базуватиметься на перевірці того, що величина $\ln O_n$ добре апроксимується величиною $V^*_n = \sum_{r=1}^n K^*_{n,r}\ln r$, див. підрозділ 3.1.3. Неформально це пояснюється формулами

$$e^{V^*_n} = \prod_{r=1}^n r^{K^*_{n,r}} = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\sum_{r=1}^n \lambda_p(r)K^*_{n,r}}, \quad O^*_n = \prod_{p\in\mathcal{P}} p^{\max_{r:K^*_{n,r}>0}\lambda_p(r)}, \qquad (3.43)$$

де $\mathcal{P}$ позначає множину простих чисел, а $\lambda_p(m)$ є степенем простого числа p в розкладі m на прості множники, та тим, що для достатньо великих p в сумі $\sum_{r=1}^{n} \lambda_p(r) K^*_{n,r}$ є лише один ненульовий доданок, який і дорівнює $\max_{r: K^*_{n,r}>0} \lambda_p(r)$, оскільки для досить великих r, $K^*_{n,r}$ з великою ймовірністю дорівнює 0 або 1. Те, що V_n^* дійсно добре апроксимує $\ln O_n^*$ строго показано в лемі 91.

Для $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ покладемо

$$D_{n,j} := \sum_{r \le n,\, j|r} K^*_{n,r} = \sum_{r=1}^{\lfloor n/j \rfloor} K^*_{n,\,rj}.$$

В подальшому нам знадобляться рівномірні оцінки на математичні сподівання $\mathbb{E}(D_{n,j} - 1)^+$.

Лема 90. *В умовах теореми 88 асимптотичні співвідношення*

$$\mathbb{E}(D_{n,j} - 1)^+ = O\left(\frac{\ln n}{j}\right), \tag{3.44}$$

$$\mathbb{E}(D_{n,j} - 1)^+ = O\left(\frac{\ln^2 n}{j^2}\right) \tag{3.45}$$

виконуються рівномірно по $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доведення. Покладемо $D^{(1)}_{n,j} := \sum_{r=1}^{\lfloor n/j \rfloor - 1} K^*_{n,rj}$. Очевидно, що $(D_{n,j} - 1)^+ \le D^{(1)}_{n,j}$.

Нехай A_n є довжиною останнього циклу Π_n^*. Ця величина має розподіл

$$\mathbb{P}\{A_n = j\} = C_n^j \frac{\mathbb{E}W^{n-j}(1-W)^j}{1 - \mathbb{E}W^n}, \quad 1 \le j \le m. \tag{3.46}$$

Двовимірний масив $(D^{(1)}_{n,j})$ задовольняє рекурентному співвідношенню

$$\begin{aligned} D^{(1)}_{n,j} &= 0, \;\; n < j, \\ D^{(1)}_{n,j} &\overset{\mathrm{d}}{=} \mathbb{1}_{\{j | A_n,\, j \le A_n \le n-j\}} + \hat{D}^{(1)}_{n-A_n,j}, \;\; n \ge j, \end{aligned} \tag{3.47}$$

де величини $\hat{D}^{(1)}_{n,k}$ не залежать від Π_n^* та розподілені, як $D^{(1)}_{n,k}$ для всіх фіксованих $n, k \in \mathbb{N}$. Взявши математичні сподівання, отримуємо

$$\mathbb{E}D^{(1)}_{n,j} = \sum_{r=1}^{\lfloor n/j \rfloor - 1} \mathbb{P}\{A_n = jr\} + \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}\{n - A_n = i\} \mathbb{E}D^{(1)}_{i,j} \quad n \ge j,$$

та $\mathbb{E}D_{n,j}^{(1)} = 0$ при $n < j$.

Згідно з лемами 188(i) та 189 (з $c_j = j$) співвідношення (3.44) випливатиме з формули

$$j \sum_{r=1}^{\lfloor n/j \rfloor - 1} \mathbb{P}\{A_n = rj\} = O(1), \ \ j \le n, \ \ n \in \mathbb{N}. \tag{3.48}$$

Доведення цієї формули наведено в лемі 208. Підкреслимо, що співвідношення (3.48) – це єдине місце, в якому використовується припущення про існування щільності W. Можна перевірити, що без певних припущень на неперервність W це співвідношення не виконується (наприклад, воно не виконується при $W = 1/2$ м.н. та $j = n/2$). Також зауважимо, що у випадку рівномірного розподілу W (у цьому разі Π_n^* є рівномірною перестановкою), A_n має рівномірний розподіл на $\{1, 2, \ldots, n\}$ і (3.48) виконується тривіально.

Для перевірки другого співвідношення в (3.45) запишемо

$$\begin{aligned} (D_{n,j} - 1)^+ &= (D_{n,j} - 1)^+ \mathbb{1}_{\{K^*_{n, \lfloor n/j \rfloor j} = 0\}} = (D_{n,j}^{(1)} - 1)^+ \mathbb{1}_{\{K^*_{n, \lfloor n/j \rfloor j} = 0\}} \\ &\le (D_{n,j}^{(1)} - 1)^+ \le D_{n,j}^{(1)} (D_{n,j}^{(1)} - 1)/2 =: D_{n,j}^{(2)}. \end{aligned}$$

Підносячи до квадрату (3.47) та використовуючи (3.48) і (3.44), отримуємо

$$\mathbb{E}D_{n,j}^{(2)} = O(j^{-2} \ln n) + \sum_{i=j}^{n} \mathbb{P}\{n - A_n = i\} \mathbb{E}D_{i,j}^{(2)}, \ \ n \ge j, \ j \in \mathbb{N},$$

Застосувавши лему 188(ii) та лему 189 (з $c_j = j^2$), отримуємо (3.45). □

Наведена далі оцінка на $V_n^* - \ln O_n^*$ узагальнює лему 4 в [18].

Лема 91. *В умовах теореми 88 має місце співвідношення*

$$\left(\frac{V^*_{[e^{ut}]} - \ln O^*_{[e^{ut}]}}{t^{1+\varepsilon}} \right)_{u \ge 0} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} 0, \quad t \to \infty,$$

для довільного $\varepsilon > 0$.

Доведення. Враховуючи представлення, див. с. 289 в [62],

$$V_n^* - \ln O_n = \sum_{p \in \mathcal{P}} \ln p \sum_{s \ge 1} (D_{n, p^s} - 1)^+,$$

яке демонструє, що $V_n^* - \ln O_n^* \geq 0$, та нерівність Маркова, достатньо перевірити

$$\mathbb{E}\left(V_n^* - \ln O_n^*\right) = O\left(\ln n \ln\ln n\right), \quad n \to \infty.$$

Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(V_n^* - \ln O_n^*\right) &= \sum_{p\in\mathcal{P},\, s\in\mathbb{N}} \ln p\, \mathbb{E}(D_{n,p^s} - 1)^+ \\
&\leq \sum_{p\in\mathcal{P},\, p\leq \ln n} \ln p\, \mathbb{E}(D_{n,p} - 1)^+ \\
&+ \sum_{p\in\mathcal{P},\, s\geq 2,\, p^s\leq \ln n} \ln p\, \mathbb{E}(D_{n,p^s} - 1)^+ \\
&+ \sum_{j>\ln n} \ln j\, \mathbb{E}(D_{n,j} - 1)^+ =: S_1(n) + S_2(n) + S_3(n).
\end{aligned}$$

Застосовуючи (3.44) та відоме співвідношення $\sum_{p\in\mathcal{P},p\leq x} \frac{\ln p}{p} \sim \ln x$ при $x \to \infty$, отримуємо $S_1(n) = O(\ln n \ln\ln n)$. З тієї ж формули (3.44) випливає $S_2(n) = O(\ln n)$. Нарешті, з формули (3.45) маємо $S_3(n) = O(\ln n \ln\ln n)$. Доведення завершено. □

Доведення теореми 88. Твердження теореми одразу випливає з леми 91 та твердження 86, оскільки $\lim\limits_{t\to\infty} t^\varepsilon / c(t) = 0$ при $\varepsilon < 1/2$. □

3.3 Переставні коалесценти з множинними злиттями та пилом

У цьому підрозділі ми отримаємо граничні теореми для коалесцентів з пилом, тобто коалесцентів типів (I) та (II), див. класифікацію на с. 64. Нагадаємо, що в нескінченному коалесценті з пилом $\mathfrak{P}$ у будь-який момент часу $t > 0$ присутня нескінченна кількість первинних блоків, що не брали участь у злиттях. Пил (ми будемо також використовувати термін пилова компонента) нескінченного коалесцента має додатну частоту в сенсі, що число синглтонів в $\mathfrak{P}_n(t)$ зростає лінійно по n при $n \to \infty$.

Протягом цього підрозділу ми припускатимемо, що міра Λ не має атома в 1, що виключає можливість злиття всіх блоків $\mathfrak{P}$ в один блок через експоненційний час. Клас коалесцентів з пилом може бути охарактеризований моментною умовою

$$\int_0^1 x^{-1}\Lambda(\mathrm{d}x) = \int_0^1 x\,\Lambda'(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{3.49}$$

За умови (3.49) кожне злиття блоків в нескінченному коалесценті $\mathfrak{P}$ включає в себе нескінченну кількість синглтонів. Це означає, що більшість переходів в скінченному коалесценті $\mathfrak{P}_n$ включають в себе деякі з первинних синглтонів при великих n. Іншими словами, в дереві коалесцента з пилом більшість внутрішніх вершин з'єднується безпосередньо з одним з n листків. Ми покажемо, що така інтуїція вірна в сенсі, що асимптотика часу поглинання τ_n та числа злиттів X_n може бути знайдена аналізом еволюції пилової компоненти. Еволюцією пилової компоненти $\mathfrak{P}_\infty$, в свою чергу, керує простий процес вигляду $\exp(-S_t)$, де $S = (S_t)_{t\geq 0}$ є деяким субординатором. Ми побудуємо каплінг $\mathfrak{P}$ та S, який дозволить нам застосувати відомі результати про перетин рівня субординатором та результати з асимптотичної теорії регенеративних композицій для аналізу τ_n та X_n відповідно.

Зв'язок між $\mathfrak{P}$ та S вперше вивчався в роботі [100] у випадку, коли міра Λ' скінченна, а субординатор S є узагальненим процесом Пуассона. В подальших результатах цього підрозділу, хоча нас і цікавить переважно випадок нескінченної міри Λ', випадок скінченної Λ' не виключається. Понад це, ми узагальнемо результати [100] позбувшись однієї з умов на міру Λ', що накладалась в згаданій роботі.

В роботі [116] частина результатів для X_n була отримана незалежно від цієї роботи в контексті загальних результатів по асимптотиці часів поглинання в спадних ланцюгах Маркова. Наш підхід дозволяє отримати більш делікатні результати про еволюцію коалесцентів з пилом, наприклад виділяючи окремо злиття, що включають в себе первинні синглтони $\mathfrak{P}_n$.

3.3.1 Коалесцент та синглтони коалесцента. В ролі фазового простору коалесцента $\mathfrak{P}_n$ беремо множину розбиттів $\{1,\ldots,n\}$, в якій кожен синглтон розглядається, як *первинний* або *вторинний*. Під *пиловою компонентою* $\mathfrak{P}_n$ ми розуміємо набір первинних блоків (синглтонів). Кожний не-синглтон вважається вторинним. Ми використовуватимемо запис розбиття у порядку зростання мінімальних елементів блоків, елементи кожного блоку також записуються у незростаючому порядку, вторинні блоки братимуться в дужки. Наприклад, запис $1\ (2)\ (3\ 5\ 6)\ 4\ 7$, означає розбиття множини $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ в якому є три первинні блоки $1,4,7$ та два вторинні блоки $(2),(3\ 5\ 6)$ відповідно.

Введемо величини $\lambda_{m,1}$ згідно з формулою (1.7), але при $k=1$. У припущенні (3.49) маємо $\lambda_{m,1}<\infty$.

Модифікуємо означення коалесценту $\mathfrak{P}_n$, додавши новий тип переходів, що враховує наведену структуру фазового простору з відокремленням первинних та вторинних синглтонів. Розглядатимемо $\mathfrak{P}_n$, як процес на множині розбиттів $\{1,2,\ldots\}$ з початковим станом $1\ 2\ \cdots\ n$ з n первинними синглтонами. Кожний допустимий перехід $\mathfrak{P}_n$ є або злиттям блоків в один, або перетворення первинного синглтону на вторинний. З розбиття, що містить m блоків, переходи першого типу відбуваються з інтенсивностями $\lambda_{m,k}$ $(2\le k\le m)$, а перехід другого типу з інтенсивністю $\lambda_{m,1}$. Наприклад, послідовність переходів $\mathfrak{P}_7$ може виглядати так:

$$
\begin{aligned}
1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \to 1\ 2\ (3\ 5\ 6)\ 4\ 7 \to 1\ (2)\ (3\ 5\ 6)\ 4\ 7 \to \\
1\ (2\ 4)\ (3\ 5\ 6)\ 7 \to 1\ (2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) \to (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7).
\end{aligned}
$$

Нагадаємо, що величина $N_n(t)$ визначалась, як число блоків розбиття $\mathfrak{P}_n(t)$. Процес $N_n=(N_n(t))_{t\ge 0}$ є марковським з інтенсивностями переходів

$$
\varphi_{m,k}:=C_n^k\lambda_{m,k}=C_n^k\int_0^1 x^{k-2}(1-x)^{m-k}\Lambda(\mathrm{d}x)
$$

для переходу зі стану m в стан $m-k+1$. Перетворення первинного синглтону на вторинний не спричиняє стрибка N_n. Нагадаємо, що $\tau_n=\inf\{t: N_n(t)=1\}$, а число злиттів X_n є просто числом стрибків процесу N_n на шляху від n до 1. У наведеному прикладі це число дорівнює чотирьом, оскільки другий перехід не змінює числа блоків.

Проективною границею процесів $\mathfrak{P}_n$ при $n\to\infty$ є марковський процес $\mathfrak{P}$, який стартує з розбиття $\mathbb{N}$ на первинні синглтони $1\ 2\ \cdots$ та набуває значень в множині розбиттів $\mathbb{N}$. Кожне розбиття $\mathfrak{P}(t)$ має лише первинні синглтони, тобто такі блоки, що не брали участь у злиттях до моменту часу t. Кожний первинний синглтон має експоненційний час життя з параметром

$\lambda_{1,1} = \int_0^1 x\Lambda'(\mathrm{d}x)$, після якого він зливається з нескінченною кількістю інших блоків.

Розділення синглтонів $\mathfrak{P}_n(t)$ на первинні та вторинні стає прозорим, якщо розглядати $\mathfrak{P}_n$, як звуження $\mathfrak{P}$ на $\{1, 2, \ldots, n\}$. Вторинні синглтони в $\mathfrak{P}_n(t)$ є унікальними в $\{1, 2, \ldots, n\}$ представниками нескінченних блоків $\mathfrak{P}(t)$. Первинні синглтони $\mathfrak{P}_n(t)$ є також первинними синглтонами в $\mathfrak{P}(t)$.

Нехай $N_n^*(t)$ є числом первинних синглтонів в $\mathfrak{P}_n(t)$. Процес $N_n^* = (N_n^*(t))_{t \geq 0}$ є незростаючим марковським процесом, який переходить зі стану m в стан $m - k$ при $1 \leq k \leq m$ з інтенсивністю $\varphi_{m,k}$. Покладемо

$$\tau_n^* := \inf\{t \geq 0 : N_n^*(t) = 0\},$$

тобто τ_n^* є моментом часу, коли останній з n первинних синглтонів зникає. При $1 \leq r \leq n$, нехай $K_{n,r}$ є числом декрементів розміру r в процесі (N_n^*) на його шляху від n до 0, та нехай $K_n := \sum_{r=1}^{n} K_{n,r}$ є загальним числом[3] декрементів (N_n^*). Позначимо X_n^* число не одиничних декрементів (N_n^*). Очевидно

$$X_n^* = K_n - K_{n,1}. \tag{3.50}$$

Ми називатимемо блоки розбиття $\mathfrak{P}_n(\tau_n^*)$, що залишились в момент часу τ_n^* *залишковими* та позначимо їх число R_n.

Процеси N_n та N_n^* виглядають дуже схожими, тому на перший погляд дивно, що вивчати N_n^* значно простіше. Таке спрощення пояснюється тим, що декременти N_n^* утворюють регенеративну композицію числа n в сенсі Гнедіна-Пітмена [105]. Ми покажемо, що N_n^* дає гарну апроксимацію N_n при великих n, а тому X_n^* та τ_n^* є близькими до X_n та τ_n. В одну сторону зв'язок досить очевидний:

$$X_n^* \leq X_n, \quad N_n^*(t) \leq N_n(t), \quad \tau_n^* \leq \tau_n.$$

Наприклад, кожне злиття, що залучає принаймні два первинних синглтони породжує стрибок X_n та, з додатною ймовірністю, деяка кількість $R_n \geq 2$

[3] Ми вибираємо позначення $K_{n,r}$ та K_n, які вище використовувались для позначення числа комірок, що містять рівно r куль, та загального числа зайнятих комірок в схемі розміщення Карліна, невипадково. Введені щойно декременти $K_{n,r}$ та K_n є такими числами зайнятості у схемах Карліна, асоційованих з регенеративними композиціями. Позначення $K_{n,r}^*$ та K_n^* зарезервовано для регенеративних композицій, породжених ґратками Бернуллі.

залишкових блоків залишається в момент, коли останній первинний синглтон зникає.

3.3.2 Каплінг з субординатором.

Умова (3.49) гарантує, що знайдеться субординатор $S = (S_t)_{t \geq 0}$ з перетворенням Лапласа

$$\mathbb{E} e^{-zS_t} = e^{-t\Phi(z)}, \quad z \geq 0, \tag{3.51}$$

де експонента Лапласа задається формулою

$$\Phi(z) := \int_0^1 (1 - (1-x)^z)\Lambda'(\mathrm{d}x).$$

Ми представимо коалесцент в термінах проходження експоненційних рівнів субординатором S. Спочатку опишемо еволюцію пилової компоненти.

Нехай $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ є незалежними однаково розподіленими стандартними експоненційними випадковими величинами, що не залежать від S та нехай $\varepsilon_{n:n} < \cdots < \varepsilon_{n:1}$ є відповідними порядковими статистиками. З доведення теореми 5.2(i) в [105] випливає така

Лема 92. *Для довільного $t \geq 0$, за умови, що $S_t = s \in (\varepsilon_{n:m+1}, \varepsilon_{n:m})$, субординатор перестрибує рівень $\varepsilon_{n:m}$ з інтенсивністю $\Phi(m)$ та потрапляє в інтервал $(\varepsilon_{n:m-k+1}, \varepsilon_{n:m-k})$ з інтенсивністю $\varphi_{m,k}$ при $1 \leq k \leq m \leq n$.*

Дамо кожному з первинних синглтонів $1\ 2 \cdots\ n$ експоненційну мітку $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$. Вважатимемо, що для кожного $t \geq 0$ мітки $\varepsilon_j > S_t$ асоційовані з первинними синглтонами, що існують в момент часу t. Якщо t є моментом стрибка S та в інтервалі $(S_{t-}, S_t]$ міститься рівно одна мітка ε_j, вважатимемо таку подію перетворенням первинного синглтону j на вторинний синглтон. Якщо $(S_{t-}, S_t]$ містить принаймні дві мітки, вважатимемо таку подію злиттям первинних синглтонів. Поклавши $N_n^*(t) := \#\{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \varepsilon_j > S_t\}$ отримаємо бажаний каплінг субординатора та процесу, що рахує первинні синглтони. Зокрема, $\Phi(n) = \sum_{k=1}^n \varphi_{n,k}$ є повною інтенсивністю переходу коалесцента $\mathfrak{P}_n$ з початкового стану $1\ 2 \cdots\ n$.

Регенеративне впорядковане розбиття множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ визначається так: два числа i, j лежать в одному блоці тоді і тільки тоді, коли $T_{\varepsilon_i} = T_{\varepsilon_j}$, де $T_s := \inf\{t \geq 0 : S_t > s\}$ є моментом проходження рівня s субординатором

$(S_t)_{t\geq 0}$, див. [105]. Розміри блоків розбиття утворюють регенеративну композицію n, а їх число дорівнює числу стрибків N_n^* до моменту поглинання в стані 0.

Наведена еволюція первинних синглтонів узгоджена для різних n. Якщо надати кожному з нескінченної кількості первинних синглтонів $1\ 2\ \ldots$ відповідну експоненційну мітку $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, то це задасть початковий стан та еволюцію пилової компоненти нескінченного субординатора $\mathfrak{P}$. З побудови та посиленого закону великих чисел випливає, що частота пилової компоненти $\mathfrak{P}$ є спадаючим процесом $(\exp(-S_t))_{t\geq 0}$.

Безпосередньо з каплінгу випливає перший важливий наслідок про асимптотику τ_n^*, моменту зникнення останнього первинного синглтона в $\mathfrak{P}_n$. Оскільки $\tau_n^* = T_{\varepsilon_{n:1}}$ та $\varepsilon_{n:1} - \ln n$ слабко збігається до розподілу Гумбеля, то асимптотика τ_n^* збігається з асимптотикою $T_{\ln n}$ в такому сенсі:

Твердження 93. *Якщо для деяких констант $a_n > 0$ та $b_n \in \mathbb{R}$, одна з послідовностей випадкових величин $(\tau_n^* - b_n)/a_n$ або $(T_{\ln n} - b_n)/a_n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до невиродженого власного розподілу, то інша також збігається до цього розподілу.*

З побудованого каплінгу випливає такий спосіб реалізації повної динаміки коалесцента $\mathfrak{P}_n$. У момент часу 0 мітки $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ представляють собою первинні синглтони $1\ 2 \cdots n$. В момент часу $t > 0$ маємо певну кількість міток в множині $[S_t, \infty)$, що представляють блоки розбиття $\mathfrak{P}_n(t)$. Якщо в момент часу $t > 0$ субординатор перестрибнув рівно через k міток, що відповідають деяким блокам $I_1, \ldots, I_k \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, то народжується новий блок $I_1 \cup \cdots \cup I_k$ та йому присвоюється мітка $S_t + \varepsilon$, де ε є копією стандартної експоненційної випадкової величини, що не залежить від S та всіх інших міток, присвоєних до моменту часу t. Наприклад, якщо в момент часу $t = T_{\varepsilon_{n:n}}$ субординатор перестрибнув рівно через k рівнів $\varepsilon_{j_1}, \ldots, \varepsilon_{j_k}$, то народжується вторинний блок $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ (який є вторинним синглтоном при $k = 1$) та йому присвоюється експоненційно розподілена на $[S_t, \infty)$ мітка.

3.3.3 Час поглинання τ_n. Наша мета – застосувати побудований у попередньому підрозділі каплінг для аналізу асимптотики τ_n. В момент часу τ_n^* в коалесценті є рівно R_n залишкових блоків, тому маємо рівність розподілів

$$\tau_0 := 0, \quad \tau_n \overset{\mathrm{d}}{=} \tau_n^* + \tilde{\tau}_{R_n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.52}$$

де $\tilde{\tau}_m$ є незалежною від (τ_n^*, R_n) копією τ_m для кожного фіксованого $m \in \mathbb{N}_0$. Для досягнення згаданої мети нам потрібно оцінити R_n.

У свій перший перехід марковський процес N_n^* стрибає зі стану n у випадковий стан з розподілом

$$p_{n,k} := \varphi_{n,n-k}/\Phi(n), \quad 0 \le k \le n-1.$$

Нехай $g_{n,k}$ є ймовірністю того, що N_n^* відвідує стан k. У термінах субординатора $g_{n,k} = \mathbb{P}\{T_{\varepsilon_{n:k+1}} < T_{\varepsilon_{n:k}}\}$ (ми покладаємо $\varepsilon_{n:n+1} = 0$) і є ймовірністю того, що інтервал $[\varepsilon_{n:k+1}, \varepsilon_{n:k}]$ перетинається з областю значень S. Для $g_{n,k}$ відома явна формула, див. формулу (50) в [105], але вона незручна для застосувань.

Лема 94. *Припустимо, що $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є послідовністю невід'ємних чисел такою, що $\left(\frac{\Phi(k)r_k}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ не зростає. Тоді послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, що визначена*

$$a_0 = 0, \;\; a_n := \sum_{k=1}^{n} g_{n,k} r_k, \quad n \in \mathbb{N}$$

задовольняє

$$a_n = O\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k \Phi(k)}{k}\Big), \;\; n \to \infty.$$

Доведення. Твердження випливає з леми 186. Дійсно, фіксуючи перший стрибок N_n^*, бачимо, що послідовність (a_n) задовольняє рекурсію

$$a_0 = 0, \;\; a_n = r_n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k} a_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Лема 186 застосовна з $\psi_n = \Phi(n)$. Умова (L2) згаданої леми виконується за припущенням, а умова (L1) випливає з рівностей

$$\Phi(n) \sum_{k=0}^{n} (1 - k/n) p_{n,k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \varphi_{n,n-k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \varphi_{n,k} = \int_0^1 x^{-1} \Lambda(\mathrm{d}x) > 0.$$

□

Оскільки функція $s \mapsto \Phi(s)/s$ не зростає, то послідовність $\left(\frac{\Phi(k)r_k}{k}\right)$ не зростає, якщо (r_k) не зростає.

Лема 95. *Якщо виконується одна з двох еквівалентних умов*

$$\int_0^1 |\ln y| y \Lambda'(\mathrm{d}y) < \infty, \tag{3.53}$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(k)}{k^2} < \infty, \tag{3.54}$$

то

$$\mathbb{E}R_n = O(1), \quad n \to \infty,$$

що означає щільність розподілів R_n.

Доведення. Для перевірки еквівалентності (3.53) та (3.54) запишемо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Phi(k)}{k^2} - \int_0^1 |\ln y| y \Lambda'(\mathrm{d}y)$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{y} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1 - (1-y)^k - ky(1-y)^{k-1}}{k^2} \right) y \Lambda'(\mathrm{d}y).$$

Вираз у дужках обмежений по $y \in [0,1]$, оскільки ряд у дужках мажорується константою $\pi^2/6 - 1$, а вираз у дужках збігається до одиниці при $y \downarrow 0$. Таким чином, ряд та інтеграл в лівій частині одночасно скінченні або нескінченні внаслідок умови (3.49).

Перейдемо до доведення щільності R_n. У генеалогії кожного залишкового блоку знайдеться остання подія, злиття або перетворення первинного синглтону на вторинний, в якій були задіяні первинні синглтони. Якщо вторинний блок b утворився в деякий момент часу $t \le \tau_n^*$, коли відбулась ця подія, і якщо в цей момент часу існувало $j \ge 0$ первинних синглтонів, то b стане залишковим блоком, якщо сам b та подальші блоки, що його включають, не зливались з цими j первинними синглтонами та подальшими блоками, що їх включають, до моменту часу τ_n^*. Іншими словами, блок b та j первинних синглтонів належать різним гілкам дерева коалесцента, розрізаного в момент часу τ_n^*. Нехай q_j є ймовірністю того, що такий блок b стане залишковим блоком. Звужуючи коалесцент на $j+1$ блок, бачимо, що q_j залежить лише від j. Узгодженість коалесцента також гарантує, що q_j спадає по j. Усереднюючи по всім моментам часу, в які відбувались злиття чи перетворення з участю первинних синглтонів, отримуємо

$$\mathbb{E}R_n = \sum_{j=0}^{n-1} g_{n,j}q_j. \tag{3.55}$$

Далі, за умови $S_t = s$, ми маємо рівно j експоненційних міток первинних синглтонів, що більші ніж s. Блоку b присвоюється нова експоненційна мітка $u = s+\varepsilon$, яка лежить к кожному з $j+1$ підінтервалів (s,∞), породжених точками $\varepsilon_{n:j},\ldots,\varepsilon_{n:1}$, з ймовірністю $1/(j+1)$. Якщо цей проміжок є $(\varepsilon_{n:k+1},\varepsilon_{n:k})$, то b може стати залишковим блоком лише тоді, коли (i) $T_{\varepsilon_{n:k+1}} < T_u < T_{\varepsilon_{n:k}}$ та (ii) b не зливається з k первинними синглтонами або подальшими блоками, що їх містять, до часу τ_n^*. Якщо виконується умова (i), то умова (ii) не достатня для того, щоб b був залишковим, оскільки можливі злиття з деякими з j первинних синглтонів не враховуються. Це дає нерівність

$$q_j \ \le \ \frac{1}{j+1}\sum_{k=0}^{j} g_{j+1,k+1}p_{k+1,k}q_k, \quad 1 \le j \le n-1,$$

та $q_0 = 1$. Індекси $j+1$ та $k+1$ у цій нерівності виникають, оскільки в інтервалі (s,∞) в момент часу t міститься $j+1$ мітка. Добуток $g_{j+1,k+1}p_{k+1,k}$ – це (умовна) ймовірність події $\{T_{\varepsilon_{n:k+1}} < T_u < T_{\varepsilon_{n:k}}\}$, а q_k – це ймовірність того, що b не брав участь у злиттях з k первинними блоками після цієї події.

Підставляючи $\varphi_{k,1} = k(\Phi(k)-\Phi(k-1))$, отримуємо

$$q_j \le \frac{1}{j+1}\sum_{k=1}^{j+1} g_{j+1,k}\frac{k(\Phi(k)-\Phi(k-1))}{\Phi(k)}q_{k-1} \le \frac{c}{j+1}\sum_{k=1}^{j+1}(\Phi(k)-\Phi(k-1))q_{k-1},$$

де була використана лема 94 з

$$r_k = \frac{k(\Phi(k)-\Phi(k-1))q_{k-1}}{\Phi(k)}.$$

Потрібна в цій лемі монотонність виконується оскільки q_k та $\Phi(k)-\Phi(k-1)$ спадають по k (друге твердження має місце з огляду на вгнутість Φ).

Покладемо $a_j = (j+1)q_j$ та $b_j = c(\Phi(j+1)-\Phi(j))/(j+1)$, тоді

$$a_j \le \sum_{k=0}^{j} b_k a_k, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Покажемо, що послідовність (a_j) обмежена. Покладемо $M_j := \max_{i=0,\dots,j} a_i$, тоді також

$$M_j \le \sum_{k=0}^{j} b_k M_k.$$

Оскільки $\Phi(j)/j$ спадає, то $\Phi(j+1)-\Phi(j) \le \Phi(j+1)/(j+1)$, що у поєднанні з (3.54) означає збіжність ряду $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$. Оберемо

$$n_0 := \inf\{k \ge 0 : \sum_{i=k}^{\infty} b_i < 1/2\}.$$

Якщо $\lim_{n\to\infty} M_n = \infty$, то

$$1 \le \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} b_k M_k}{M_n} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=n_0}^{n} b_k M_k}{M_n} \le \sum_{k=n_0}^{\infty} b_k \le 1/2,$$

що є суперечністю. Отже, (a_n) обмежена, а тому

$$q_j \le M_j/(j+1) \le \mathrm{const}/j.$$

Підставляючи це в (3.55) та застосовуючи лему 94, отримуємо обмеженість $\mathbb{E}R_n$ при $n \to \infty$. $\square$

Маючи на озброєнні лему 95, можемо сформулювати основний результат про час поглинання у коалесцентах з пилом.

Теорема 96. *Припустимо, що виконується умова* (3.53)*. Якщо для деяких констант $a_n > 0$ та $b_n \in \mathbb{R}$, одна з послідовностей випадкових величин $(\tau_n - b_n)/a_n$ або $(T_{\ln n} - b_n)/a_n$ слабко збігається при $n \to \infty$ до невиродженого власного розподілу, то інша також збігається до цього розподілу. Кожне з цих тверджень еквівалентне тому, що S_1 належить області притягання деякого стійкого розподілу.*

Доведення. При виконанні умови (3.53) послідовність (R_n) щільна за лемою 95. Отже, щільна й послідовність τ_{R_n}. Перша частина теореми випливає з твердження 93 та розкладу (3.52). Для доведення другої частини достатньо помітити, що $(T_{\ln n} - b_n)/a_n$ слабко збігається тоді і тільки тоді, коли слабко збігається $(\widehat{T}_{\ln n} - b_n)/a_n$, де

$$\widehat{T}(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : \widehat{S}_k > t\}, \quad t \ge 0,$$

а $(\widehat{S}_k)$ є стандартним випадковим блуканням з кроком S_1. $\square$

Умова (3.53) не є дуже сильною, оскільки завжди $\Phi(k) = o(k)$, $k \to \infty$. Для конкретності припустимо, що хвіст Λ' правильно змінюється в нулі, тобто

$$\Lambda'((x,1]) \sim x^{-\gamma}\ell_1(1/x), \quad x \downarrow 0, \tag{3.56}$$

для деякої функції ℓ_1 та $\gamma \in [0,1]$. Тоді умова (3.53) виконується при $\gamma \in [0,1)$. Якщо $\gamma = 1$, то асимптотика ℓ_1 стає важливою, наприклад (3.53) виконується при $\ell_1(y) = (\ln y)^{-\delta}$ якщо $\delta > 2$ та не виконується при $\delta \in (1,2]$.

Приклад 97. Припустимо, що (3.53) виконується та

$$\mathtt{s}^2 := \mathbb{D}S_1 = \int_0^1 |\ln(1-x)|^2 \Lambda'(\mathrm{d}x) < \infty.$$

Тоді

$$\frac{T_{\ln n} - \mathtt{m}^{-1}\ln n}{(\mathtt{m}^{-3}\mathtt{s}^2 \ln n)^{1/2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1),$$

а тому

$$\frac{\tau_n - \mathtt{m}^{-1}\ln n}{(\mathtt{m}^{-3}\mathtt{s}^2 \ln n)^{1/2}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1), \tag{3.57}$$

де $\mathtt{m} := \mathbb{E}S_1 = \int_0^1 |\ln(1-x)|\Lambda'(\mathrm{d}x)$.

Цей приклад застосовний до бета-коалесцентів з $a > 1$, $b > 0$. Безпосереднім підрахунком інтегралів можна пересвідчитись, що константи $\mathtt{m}$ та $\mathtt{s}^2$ у цьому випадку є такими, як в таблиці 1.2.

У прикладі 4.2 роботи [96] розглянуто ситуації, в яких має місце збіжність до стійких розподілів.

3.3.4 Число злиттів X_n. У якості апроксимації X_n ми розглядатимемо X_n^*, яке є числом стрибків N_n^* розміру два і більше. На відміну від теореми 96, універсальний критерій збіжності X_n невести не вдається, оскільки відсутній такий критерій для X_n^*. Випадки, у яких поведінка X_n^* відома (теорема 71 з $t = 1$ в цій роботі та результати статей [25, 93, 106, 107]) покриваються припущенням (3.56) про правильну зміну Λ'. Ми отримаємо результати в цьому припущенні, але виключимо випадок $\gamma = 1$, в якому $K_{n,1}$ є домінуючим членом в сумі $K_n = \sum_{r=1}^n K_{n,r}$. Згідно зі стандартною тауберовою теоремою при $\gamma < 1$ умова (3.56) еквівалента асимптотиці експоненти Лапласа:

$$\Phi(z) \sim \Gamma(1-\gamma)z^{\gamma}\ell_1(z), \quad z \to \infty.$$

Випадок скінченної міри Λ' відповідає випадку $\gamma = 0$ та обмеженій функції Φ.

Послідовність $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не спадає та задовольняє рекурентному співвідношенню

$$X_1 = 0, \quad X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} \tilde{X}_{n-J_n+1} + \mathbb{1}_{\{J_n\geq 2\}}, \quad n \geq 2, \tag{3.58}$$

де в правій частині $\tilde{X}_i$ є незалежною від J_n копією X_i для кожного фіксованого $i \in \mathbb{N}$, а J_n розподілена, як перший декремент N_n^*, тобто $\mathbb{P}\{J_n = k\} = p_{n,n-k}$ при $1 \leq k \leq n$. Аналогічно, число X_n^* злиттів, що включають в себе принаймні два первинних синглтони, задовольняє

$$X_1^* = 0, \quad X_n^* \stackrel{\mathrm{d}}{=} \tilde{X}_{n-J_n}^* + \mathbb{1}_{\{J_n\geq 2\}}, \quad n \geq 2, \tag{3.59}$$

де покладено $X_0^* = 0$. Використовуючи (3.50), можемо записати інший розклад

$$X_n = X_n^* + D_n = K_n - K_{n,1} + D_n \quad \text{м.н.}, \tag{3.60}$$

де D_n є числом злиттів, в яких бере участь не більше одного первинного синглтона. Таким чином, злиття робить внесок в D_n, якщо в ньому бере участь рівно один первинний синглтон або принаймні два вторинних блоки та жодного первинного синглтона.

Лема 98. *Маємо*

$$\mathbb{E}D_n \leq c\sum_{k=1}^{n} \left(\Phi(k)/k\right)^2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.61}$$

Зокрема, якщо виконується одна з двох еквівалентних умов

$$\int_0^1 x^{-2}\biggl(\int_0^x \int_y^1 \Lambda'(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y\biggr)^2 \mathrm{d}x < \infty, \tag{3.62}$$

або

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi(k)/k\right)^2 < \infty, \tag{3.63}$$

то розподіли послідовності (D_n) щільні.

Доведення. Еквівалентність (3.62) та (3.63) випливає з твердження 1.4 в [33].

Зафіксуємо деякий первинний синглтон b, внаслідок переставності можна вважати, що цей синглтон є $\{1\}$. Припустимо, що $\tilde{X}_{n-1}$ реалізується, як число злиттів між $n-1$ первинним синглтоном $\{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{b\}$. Тоді $X_n = \tilde{X}_{n-1} + Z_n$, де Z_n є індикатором події, що у першому злитті, в якому бере участь b, бере участь рівно один інший блок a. В момент злиття b та a марковський процес N_n^* робить стрибок розміру один або два в залежності від того первинним чи вторинним блоком є a. Нехай Y_n є індикатором того, що перше перетворення блоку b є або перетворенням на вторинний синглтон, або злиття, яке включає не більше одного іншого первинного блоку та довільну кількість вторинних блоків. Очевидно, $Y_n \geq Z_n$, тому з формули (3.58) випливає

$$X_n \overset{\mathrm{d}}{\leq} \tilde{X}_{n-J_n} + Y_{n-J_n+1} + \mathbb{1}_{\{J_n \geq 2\}}. \tag{3.64}$$

Переходячи до математичних сподівань в (3.64), (3.59) та (3.60), та поклавши $d_n := \mathbb{E}D_n$, $y_n := \mathbb{E}Y_n$, отримуємо

$$d_1 = 0, \quad d_n \leq \sum_{k=1}^{n-1} p_{n,k}(d_k + y_{k+1}), \quad n \geq 2.$$

Звідки, ітеруючи

$$d_1 = 0, \quad d_n \leq \sum_{j=1}^{n-1} g_{n,j} y_{j+1}, \quad n \geq 2.$$

Внаслідок переставності $y_n = (\mathbb{E}K_{n,1} + 2\mathbb{E}K_{n,2})/n$. Оскільки

$$\mathbb{E}K_{n,1} = \sum_{k=1}^{n} g_{n,k} p_{k,k-1} = \sum_{k=1}^{n} g_{n,k} \frac{k(\Phi(k) - \Phi(k-1))}{\Phi(k)},$$

то, використовуючи лему 94 з $r_k = k(\Phi(k) - \Phi(k-1))/\Phi(k)$, отримуємо

$$\mathbb{E}K_{n,1} \leq c_1 \, \Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.65}$$

Аналогічно, див. наприклад лему А.2 в [96],

$$\mathbb{E}K_{n,2} \leq c_2 \, \Phi(n).$$

Отже,

$$d_n \leq c_3 \sum_{k=1}^{n} g_{n,k} \Phi(k)/k.$$

З леми 94 з $r_k = c_3 \, \Phi(k)/k$ отримуємо оцінку (3.61). $\square$

Випадок узагальненого процесу Пуассона. Припустимо, що Λ' є скінченною мірою на $(0, 1)$. Оскільки масштабування часу не впливає на розподіл X_n, можна вважати, що міра Λ' є ймовірнісною мірою на $(0, 1)$. Нехай $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. W такої, що Λ' є розподілом $1 - W$. Субординатор S в цьому випадку є узагальненим процесом Пуассона зі стрибками $|\ln W_k|$.

Нехай $K_n^* = K_n^*(1)$ є числом блоків в регенеративній композиції в ґратці Бернуллі (еквівалентно, числом зайнятих комірок).

Теорема 99. *Припустимо, що* $\int_0^1 \Lambda'(\mathrm{d}x) < \infty$. *Якщо для деяких констант* $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ *та* $b_n \in \mathbb{R}$, *одна з трьох послідовностей випадкових величин*

$$\frac{K_n^* - b_n}{a_n}, \quad \frac{X_n^* - b_n}{a_n}, \quad \frac{X_n - b_n}{a_n}$$

слабко збігається при $n \to \infty$ *до деякого невиродженого власного розподілу, то дві інші також слабко збігаються до цього розподілу. Зокрема,* $\frac{K_n^* - b_n}{a_n}$ *слабко збігається, якщо розподіл* $|\ln W|$ *належить області притягання деякого стійкого розподілу.*

Доведення. Згадаємо представлення (3.60). Оскільки Λ' є скінченною мірою, то Φ обмежена, а, отже, виконується умова (3.63) і розподіли D_n щільні за лемою 98. Як вже зазначалось, вектор $(K_{n,1}^*, \ldots, K_{n,j}^*)$ слабко збігається, а тому розподіли $K_{n,1}^*$ щільні. Таким чином, теорема випливає з умови $a_n \to \infty$. З теорем 71 та 74 випливає, якщо $|\ln W|$ належить області притягання деякого стійкого розподілу, то K_n^* (з підхожим нормуванням) слабко збігається. Умова (3.4), як зазначалось в зауваженні після теореми 71, для слабкої збіжності K_n^* не потрібна. □

Випадок повільної зміни. Припустимо, що (3.56) виконується з $\gamma = 0$ та функцією повільної зміни $\ell_1(z) \to \infty, \quad z \to \infty$. Перетворення Лапласа задовольняє $\Phi(z) \sim \ell_1(z)$. Припустимо, що субординатор має скінченні моменти

$$\mathtt{m} = \mathbb{E}S_1 = \int_0^1 |\ln(1-x)| \Lambda'(\mathrm{d}x), \quad \mathtt{s}^2 = \mathbb{D}S_1 = \int_0^1 |\ln(1-x)|^2 \Lambda'(\mathrm{d}x).$$

Покладемо

$$b_n = \frac{1}{\mathtt{m}} \int_0^n \frac{\Phi(z)}{z} \mathrm{d}z\,, \quad a_n = \sqrt{\frac{\mathtt{s}^2}{\mathtt{m}^3} \int_0^n \frac{\Phi^2(z)}{z} \mathrm{d}z}.$$

В роботах [25] та [93] було показано, що при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}K_n \sim b_n, \quad \sqrt{\mathbb{D}K_n} \sim a_n,$$

та збіжність $(K_n - b_n)/a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1)$ для різних класів функцій ℓ_1. Зокрема, ці класи функцій включають

$$\ell_1(z) = \ln(\ln(\dots(\ln(z))\dots)), \quad \ell_1(z) = \ln^{\beta} z\ , \quad \ell_1(z) = \exp(\ln^{\gamma} z),$$

де $\beta > 0$ та $\gamma \in (0,1)$.

Ряд (3.63) збігається для довільної ℓ_1, тому згідно з лемою 98, $\mathbb{E}D_n = O(1)$. З іншого боку, з формули (3.65) та леми 159(г) випливає

$$\mathbb{E}K_{n,1} = O(\Phi(n)) = o(a_n).$$

З цього випливає, що зі збіжності $(K_n - b_n)/a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1)$ випливає збіжність $(X_n^* - b_n)/a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1)$ та $(X_n - b_n)/a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1)$.

Якщо $\mathtt{m} = \infty$ або $\mathtt{s}^2 = \infty$ та розподіл S_1 належить області притягання стійкого розподілу, відповідні результати по збіжності K_n можна знайти в [93].

Правильна зміна з індексом $0 < \gamma < 1$. У цьому разі ключовим розподілом є розподіл експоненційного функціоналу субординатора γS:

$$I = \int_0^{\infty} \exp(-\gamma S_t)\mathrm{d}t.$$

З теореми 4.1 та наслідку 5.2 роботи [106] випливає, що $X_n^*/a_n \xrightarrow{\mathrm{d}} I$, де $a_n = \Gamma(2-\gamma)n^{\gamma}\ell_1(n)$. Понад це, K_n/a_n та $K_{n,r}/a_n$ ($r \geq 1$) збігаються м.н. та в середньому.

Для встановлення збіжності X_n з використанням (3.60) нам потрібно оцінити $\mathbb{E}D_n$. Якщо $0 < \gamma < 1/2$ маємо $\mathbb{E}D_n = O(1)$, оскільки $\Phi(z) \sim c\,\ell_1(z)z^{\gamma}$, а тому ряд в (3.63) збігається. Якщо $1/2 < \gamma < 1$, то

$$\sum_{k=1}^{n} (\Phi(k)/k)^2 \sim c\,n^{2\gamma-1}\ell_1^2(n),$$

а при $\gamma = 1/2$ сума в лівій частині повільно змінюється при $n \to \infty$. Отже, в будь-якому разі $D_n/a_n \to 0$ за ймовірністю. Таким чином, ми довели

Теорема 100. *Припустимо, що*

$$\Lambda'((x,1]) \sim x^{-\gamma}\ell_1(1/x), \quad x \downarrow 0$$

для деякого $0 < \gamma < 1$. *Тоді*

$$\frac{X_n}{\Gamma(2-\gamma)n^{\gamma}\ell_1(n)} \xrightarrow{\mathrm{d}} \int_0^\infty \exp(-\gamma S_t)\mathrm{d}t, \quad n \to \infty.$$

Приклад 101. З наведеної вище теореми 100 випливає результат для X_n для бета-коалесцентів з $1 < a < 2$. У цьому разі

$$\frac{X_n}{n^{2-a}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \frac{\Gamma(2-a)}{2-a}\int_0^\infty \exp\{-(2-a)S_t\}\,\mathrm{d}t, \;\; n \to \infty,$$

де експонента Лапласа (S_t) дається формулою

$$\Phi(z) = \int_0^1 (1-(1-x)^z)x^{a-3}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x.$$

3.4 Висновки до розділу 3

У розділі досліджено три класи випадкових регенеративних структур: випадкові регенеративні композиції, випадкові регенеративні перестановки та переставні коалесценти з множинними злиттями. З використанням розробленого в розділі 2 апарату, було отримано такі результати для випадкових регенеративних композицій, породжених ґратками Бернуллі:

- отримано функціональні граничні теореми (теореми 71 та 74) для числа блоків композиції (еквівалентно, кількості зайнятих комірок в ґратці Бернуллі);
- доведено ряд граничних теорем для числа нульових блоків – теореми 78 та 80;

В підрозділі 3.2 запропоновано новий клас випадкових перестановок, який отримав назву регенеративних випадкових перестановок і узагальнив відомі Юенсівські перестановки. Основний результат, отриманий для цих структур – узагальнення закону Ердеша-Турана для порядку перестановки – представлений в теоремі 88.

Основний результат підрозділу 3.3 – каплінг випадкових регенеративних композицій та коалесцентів з пиловою компонентою. За допомогою цієї конструкції вдалось отримати ряд результатів для числа злиттів та часу поглинання:

- в теоремі 96 сформульовано критерій слабкої збіжності часу поглинання в коалесцентах з пиловою компонентою;
- в теоремах 99 та 100 отримано достатні умови слабкої збіжності числа злиттів.

Розділ 4

Ймовірнісні метрики та їх застосування до асимптотичного аналізу випадкових процесів з регенерацією

4.1 Граничні теореми для часу поглинання ланцюгів Маркова, що не зростають

Нехай $(M_n)_{n\geq 0}$ є однорідним ланцюгом Маркова з фазовим простором $\mathbb{N}_0$, поглинаючим станом 0 та матрицею перехідних ймовірностей $P = (p_{i,j})_{i,j\geq 0}$ такою, що $p_{i,j} = 0$ при $1 \leq i < j$ та $p_{i,i} < 1$ для всіх $i \in \mathbb{N}$. Ці умови означають, що ланцюг не зростає м.н., тобто

$$\mathbb{P}\{M_{n+1} \leq M_n | M_n \geq 1\} = 1, \quad n \geq 0.$$

Для таких ланцюгів Маркова час поглинання:

$$T := \inf\{k \geq 0 : M_k = 0\}$$

є, очевидно, майже напевно скінченним моментом зупинки відносно кожної ймовірнісної міри $\mathbb{P}_n := \mathbb{P}\{\cdot | M_0 = n\}$. Нижче ми будемо вивчати розподіл в.в. T відносно міри $\mathbb{P}_n$ при $n \to \infty$.

Подальший аналіз базуватиметься на дослідженні рекурсії

$$\mathbb{P}_n\{T \in \cdot\} = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}_n\{M_1 = n-k, T \in \cdot\} \ = \ \sum_{k=1}^{n} p_{n,n-k}\, \mathbb{P}_k\{T \in \cdot\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Введемо випадкові величини $T_0, \widehat{T}_0, T_1, \widehat{T}_1, ...$ та $I_1, I_2, ...$ на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ так, що

- $\mathbb{P}\{T_n \in \cdot\} = \mathbb{P}\{\widehat{T}_n \in \cdot\} = \mathbb{P}_n\{T \in \cdot\}$ для кожного $n \in \mathbb{N}_0$,
- $\mathbb{P}\{I_n \in \cdot\} = \mathbb{P}_n\{n - M_1 \in \cdot\} = (p_{n,n-k})_{0 \le k \le n}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$,
- $(T_n)_{n \ge 0}$, $(\widehat{T}_n)_{n \ge 0}$ та $(I_n)_{n \ge 1}$ є незалежними.

У таких позначеннях можемо записати (4.1) у вигляді рекурсії з випадковим індексом:

$$T_0 = 0, \quad T_n \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{T}_{n-I_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Зазначимо, що рекурсії з випадковим індексом вигляду

$$X_1 = 0, \quad X_n \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{X}_{n-I_n}, \quad n \ge 2, \tag{4.3}$$

в яких $I_n \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ м.н., легко зводяться до вигляду (4.2): достатньо покласти

$$T_0 := 0, \quad I_1 = 1, \quad \text{та} \quad T_n := X_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Всі результати цього підрозділу для T_n будуть вірними й для X_n. Рекурсії (4.2) нам вже зустрічались в попередньому розділі при аналізі числа злиттів в коалесцентах з множинними злиттями.

4.1.1 Апроксимація процесами відновлення. Основна мета цього підрозділу – отримати граничні теореми загального вигляду для послідовності (T_n) в контексті «апроксимації процесами відновлення», про яку згадувалось в огляді літератури. Понад це, ми розширимо цей підхід, отримавши також граничні теореми загального вигляду для (T_n) в ланцюгах Маркова з декрементами, які є асимптотично «мультиплікативно стаціонарними». Формально, це означає, що ми припускатимемо, що виконується одна з двох умов:

(Add) $I_n \overset{\mathrm{d}}{\to} \xi$ для деякої в.в. ξ, при $n \to \infty$;

(Mult) $n^{-1} I_n \overset{\mathrm{d}}{\to} 1 - \eta$ для деякої в.в. η зі значеннями в $[0, 1]$, при $n \to \infty$.

Обрані позначення є мнемонічними акронімами для «адитивний» та «мультиплікативний». В подальшому вважаємо, що ξ та η не залежать від всіх інших задіяних випадкових величин.

Опишемо коротко ідеї, що лежать в основі запропонованого підходу. Припустимо спочатку, що виконується умова *(Add)*. Нехай $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних копій ξ та $(S_n)_{n\geq 0}$ є відповідним випадковим блуканням

$$S_0 := 0 \quad \text{та} \quad S_n := S_{n-1} + \xi_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.4}$$

Розглянемо відповідний (дискретний) рахуючий процес

$$\nu_{n,\geq} := \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{S_k<n\}} \ = \ \inf\{k \geq 0 : S_k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{4.5}$$

та зауважимо, що $\nu_{0,\geq} := 0$. Зі стандартних міркувань випливає, що

$$\nu_{n,\geq} \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{\nu}_{n-\xi\wedge n,\geq}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

де $(\widehat{\nu}_{n,\geq})_{n\geq 0}$ позначає копію $(\nu_{n,\geq})_{n\geq 0}$, яка не залежить від ξ. Порівнюючи (4.2) та (4.6) та враховуючи гіпотезу *(Add)*, можна очікувати, що розподіл T_n для великих n є близьким до розподілу $\nu_{n,\geq}$, принаймні за додаткових припущень про «близькість» розподілів I_n та $\xi \wedge n$ у підхожому сенсі. У подальшому ми називатимемо ситуацію, в якій припускається *(Add)*, «адитивним випадком», підкреслюючи цим, що апроксимуючий процес $(\nu_{n,\geq})_{n\geq 0}$ будується зі стандартного адитивного блукання.

Схожу конструкцію можна навести й у випадку, коли виконується *(Mult)*. Нехай $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями η, а $(\Pi_n)_{n\geq 0}$ є відповідним мультиплікативним випадковим блуканням

$$\Pi_0 := 1, \quad \Pi_n := \Pi_{n-1}\eta_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Нехай $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$ є моментом першого потрапляння в (t,∞) адитивного випадкового блукання $(-\ln \Pi_n)_{n\geq 0}$, тобто

$$\Lambda_t := \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{-\ln \Pi_k \leq t\}} = \inf\{k \geq 0 : -\ln \Pi_k > t\}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Поклавши $L_t := \Lambda_{\ln t}$ при $t > 0$, маємо рівність розподілів

$$L_t \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{L}_{t\eta} = 1 + \widehat{L}_{t-t(1-\eta)}, \quad t \geq 1, \tag{4.9}$$

де $\widehat{L}$ має очевидний зміст та $L_t := 0$ при $0 < t < 1$. Це співвідношення нагадує (4.2) при $t = n$ оскільки $I_n \approx n(1-\eta)$ для великих n за умови *(Mult)*. Оскільки апроксимуючий процес $(L_t)_{t>0}$ будується з мультиплікативного випадкового блукання, то ми називатимемо цю ситуацію «мультиплікативним випадком».

Як вже зазначалось, без додаткових припущень умова *(Add)* не гарантує, що послідовності (T_n) та $(\nu_{n,\geq})$ мають однакову асимптотику. Аналогічне твердження має місце і у мультиплікативному випадку. Нам знадобляться додаткові умови на *швидкість збіжності* I_n до ξ в адитивному, та $n^{-1}I_n$ до $1-\eta$ в мультиплікативному, випадках. Для кількісної оцінки швидкості цих збіжностей ми будемо використовувати *мінімальні* L_p*-метрики* у просторах розподілів. Такий вибір продиктовано двома факторами:

- зі збіжності у таких метриках випливає слабка збіжність;
- ці метрики є в деякому сенсі інваріантними відносно афінних перетворень розподілів, що спрощує роботу з центрованими/нормованими послідовностями випадкових величин.

Нагадаємо означення мінімальних L^p-метрик. Зафіксуємо $p>0$. Нехай $\mathcal{D}^p$ позначає множину ймовірнісних мір на $\mathbb{R}$ зі скінченним абсолютним моментом порядку p. Пара випадкових величин (X,Y), які задані на спільному ймовірнісному просторі, називається (F,G)-каплінгом при $F,G\in\mathcal{D}^p$, якщо $\mathcal{L}(X)=F$ та $\mathcal{L}(Y)=G$, де $\mathcal{L}(X)$ позначає розподіл X. Позначимо це $(X,Y)\sim(F,G)$. Мінімальна L^p-метрика між F та G визначається формулою

$$d_p(F,G) \;:=\; \inf_{(X,Y)\sim(F,G)} (\mathbb{E}|X-Y|^p)^{1\wedge 1/p} \;=\; \inf_{(X,Y)\sim(F,G)} \|X-Y\|_p. \tag{4.10}$$

Ми використовуємо записи $d_p(X,Y)$ та $d_p(X,G)$ у якості скорочених позначень для $d_p(\mathcal{L}(X),\mathcal{L}(Y))$ та $d_p(\mathcal{L}(X),G)$ відповідно. Необхідні нам властивості метрик d_p зібрано у твердженні 206 в додатку B.

Теорема 102. *Припустимо, що виконується умова* (Add) *з розподілом* ξ, *який належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha\in(1,2]$ *та* $\mathbb{P}\{\xi=0\}=0$. *Нехай функція c визначена так, як в* (2.76)*, та*

$$d_p(I_n,\xi\wedge n) \;=\; o(n^{-1}c(n)),\quad n\to\infty, \tag{4.11}$$

де $p=2$*, якщо* $\mathbb{D}\xi<\infty$ *та* $p=1$ *інакше. Тоді*

$$d_p\left(\frac{T_n-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)},\,\mathcal{S}_\alpha(1)\right)\to 0 \quad \textit{та} \quad \frac{T_n-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)} \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{S}_\alpha(1),\quad n\to\infty,$$

з тим же p*, що й в* (4.11).

У мультиплікативному випадку маємо таку теорему.

Теорема 103. *Припустимо, що виконується умова (Mult) та розподіл* $|\ln\eta|$ *належить області притягання деякого* α*-стійкого розподілу з* $\alpha\in(1,2]$*. Нехай функція* c *визначена так, як в* (2.76) *з* $\xi:=|\ln\eta|$*, та*

$$d_1(\ln^+(n-I_n),\ln^+(n\eta))=o\left(\frac{c(\ln n)}{\ln n}\right),\quad n\to\infty. \tag{4.12}$$

Тоді

$$d_1\left(\frac{T_n-\mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)},\mathcal{S}_\alpha(1)\right)\to 0\quad \text{\textit{та}}\quad \frac{T_n-\mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{S}_\alpha(1),\quad n\to\infty.$$

4.1.2 Доведення теорем 102 та 103.

Доведення теореми 102. Ми розпочнемо зі спостереження

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}I_n=\mathbb{E}\xi=\mu. \tag{4.13}$$

Дійсно,

$$d_p(I_n,\xi)\le d_p(I_n,\xi\wedge n)+d_p(\xi\wedge n,\xi).$$

Перший доданок в правій частині збігається до нуля за умовою (4.11), а другий збігається до нуля за теоремою про мажоровану збіжність. Отже, (4.13) випливає з властивості (Conv) в твердженні 206. Одразу помітимо, що умова (L1) леми 187 виконується з $\psi_n=n$, де $p_{n,k}:=\mathbb{P}\{I_n=n-k\}$. Це спостереження нам знадобиться нижче.

Нашою метою є доведення того, що

$$d_p\left(\frac{T_n-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)},\mathcal{S}_\alpha(1)\right)\to 0,\quad n\to\infty,$$

для $p=2$ у випадку $\mathbb{D}\xi<\infty$ та для $p=1$ в протилежному випадку. Використовуючи нерівність трикутника, маємо оцінку зверху для лівої частини

$$d_p\left(\frac{T_n-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)},\frac{\nu_{n,\ge}-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)}\right)\;+\;d_p\left(\frac{\nu_{n,\ge}-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)},\mathcal{S}_\alpha(1)\right),$$

де, нагадаємо, $\nu_{n,\ge}=\inf\{k\ge 0:S_k\ge n\}$, а S_k є випадковим блуканням з кроками, розподіленим, як ξ. Згідно з формулою (2.76)

$$\frac{\nu_{n,\ge}-\mu^{-1}n}{\mu^{-(\alpha+1)/\alpha}c(n)}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mathcal{S}_\alpha(1),\quad n\to\infty,$$

а згідно з теоремами 178 та 181 має місце також збіжність абсолютних моментів порядків $< \alpha$ (якщо $\mathbb{D}\xi = \infty$) та порядків ≤ 2 (якщо $\mathbb{D}\xi < \infty$). Згідно з властивістю (Conv) твердження 206 маємо збіжність до нуля другого доданку в правій частині передостанньої центрованої формули. Для доведення збіжності до нуля першого доданку достатньо перевірити, що

$$e_n \;:=\; d_p(T_n, \nu_{n,\geq}) \;=\; o(c(n)), \quad n \to \infty \tag{4.14}$$

Внаслідок властивості (Lin) твердження 206.

Використовуючи рекурсії (4.2) та (4.6), а також властивість (Lin) твердження 206, отримуємо

$$\begin{aligned} d_p(T_n, \nu_{n,\geq}) &= d_p(\widehat{T}_{n-I_n}, \widehat{\nu}_{n-\xi\wedge n,\geq}) \leq d_p(\widehat{N}_{n-I_n}, \widehat{\nu}_{n-\xi\wedge n,\geq}) + d_p(\widehat{T}_{n-I_n}, \widehat{\nu}_{n-I_n,\geq}) \\ &\leq d_p(\widehat{\nu}_{n-I_n,\geq}, \widehat{\nu}_{n-\xi\wedge n,\geq}) + \|\widehat{\nu}'_{n-I_n,\geq} - \widehat{\nu}'_{n-I_n,\geq}\|_p \\ &=: e'_n + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{I_n = n-k\} \|\widehat{T}'_k - \widehat{\nu}'_{k,\geq}\|_p \end{aligned}$$

для довільних пар $(\widehat{T}'_k, \widehat{\nu}'_{k,\geq})$, які не залежать від I_n та $\widehat{T}'_k \overset{\mathrm{d}}{=} T_k$ та $\widehat{\nu}'_{k,\geq} \overset{\mathrm{d}}{=} \nu_{k,\geq}$. Переходячи до інфімумів по всім таким парам, отримуємо

$$e_n \leq e'_n + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{I_n = n-k\} e_k$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Припустимо, що ми довели асимптотичне співвідношення

$$e'_n = o(n^{-1}c(n)), \quad n \to \infty. \tag{4.15}$$

Застосовуючи лему 187 з $\psi_n = n$, маємо при $n \to \infty$

$$e_n = O\left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{j\geq k} e'_j\right) = o\left(\sum_{k=1}^{n} k^{-1}c(k)\right) = o(c(n)), \tag{4.16}$$

де ми використали теореми 1.5.3 та твердження 1.5.8 в [42] та правильну зміну c з показником $1/\alpha$.

Залишається довести (4.15). Нехай (I'_n, ξ') є $(\mathcal{L}(I_n), \mathcal{L}(\xi))$-каплінгом таким, що

$$d_p(I_n, \xi \wedge n) = d_p(I'_n, \xi' \wedge n) = \|I'_n - \xi' \wedge n\|_p$$

та $(S'_n)_{n\geq 0}$ є копією $(S_n)_{n\geq 0}$, яка не залежить від (I'_n, ξ'). Нехай $(\nu'_{n,\geq})_{n\geq 0}$ є відповідним процесом, що рахує, очевидно копією $(\nu_{n,\geq})_{n\geq 0}$. Тоді

$$\begin{aligned} e'_n &= d_p(\widehat{\nu}_{n-I_n,\geq}, \widehat{\nu}_{n-\xi\wedge n,\geq}) \leq \|\nu'_{n-I'_n,\geq} - \nu'_{n-\xi'\wedge n,\geq}\|_p \\ &= \|\sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{(n-I'_n)\wedge(n-\xi'\wedge n)\leq S'_k<(n-I'_n)\vee(n-\xi'\wedge n)\}}\|_p \leq \|I'_n - \xi' \wedge n\|_p, \end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з того, що число точок блукання S'_k в інтервалі $[a, b)$, $a, b \in \mathbb{N}$, не перевищує довжини цього інтервалу, оскільки ми припускаємо $\mathbb{P}\{\xi \geq 1\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1$. Отже,

$$e'_n \leq d_p(I'_n, \xi' \wedge n) = d_p(I_n, \xi \wedge n),$$

а тому (4.15) виконується внаслідок припущення (4.11). Доведення завершено.

□

Доведення теореми 103 використовує ідеї, схожі до тих, що ми використали вище, але є технічно більш складним, оскільки потребує використання стаціонарного процесу відновлення, див. підрозділ 2.1.1.

Доведення. Нагадаємо, що $(\Pi_n)_{n\geq 0}$ є мультиплікативним випадковим блуканням, що було визначено формулою (4.7), а $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$ є відповідним моментом потрапляння в (t, ∞), визначеним формулою (4.8).

Нехай $\eta_0^* \in (0, 1)$ є випадковою величиною, що не залежить від $(\Pi_n)_{n\geq 0}$ та має розподіл

$$r(t) := \mathbb{P}\{|\ln \eta_0^*| \leq t\} = \frac{1}{\mu_0} \int_0^t \mathbb{P}\{|\ln \eta| > s\} \mathrm{d}s, \quad t \geq 0. \tag{4.17}$$

Визначимо мультиплікативне випадкове блукання $(\Pi_k^*)_{k\geq 0}$ з затримкою Π_0^* рівностями

$$\Pi_0^* = \eta_0^* \quad \text{та} \quad \Pi_k^* := \eta_0^* \eta_1 \cdots \eta_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

стаціонарний процес відновлення для $(-\ln \Pi_k^*)_{k\geq 0}$ рівністю

$$\Lambda_t^* \ := \ \sum_{k\geq 0} \mathbb{1}_{\{-\ln \Pi_k^* \leq t\}}, \quad t \in \mathbb{R},$$

та покладемо $L_t^* := \Lambda_{\ln t}^*$ при $t > 0$. Тоді

$$\mathbb{E}\Lambda_t^* \ = \ \frac{t^+}{\mu_0}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4.18}$$

та

$$\mathbb{E}\Lambda_t = \frac{t}{\mu_0} + o(c(t)), \quad t \to \infty, \tag{4.19}$$

див. формулу (2.118). Аналогом (4.9) для процесу $(L_t^*)_{t\geq 0}$ є

$$L_t^* \overset{\mathrm{d}}{=} \mathbb{1}_{\{\eta_0^*>1/t\}} + \widehat{L}_{t\eta}^*, \quad t \geq 0, \tag{4.20}$$

де $(\widehat{L}_t^*)_{t>0}$ не залежить від η та отримано з $(L_t^*)_{t\geq 0}$ заміною $\eta_1, \eta_2, \ldots$ на їх незалежні копії у мультиплікативному блуканні $(\Pi_k^*)_{k\geq 0}$ і збереженням першого кроку η_0^*.

Використовуючи нерівність трикутника, маємо

$$\begin{aligned} d_1\left(\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right) &\leq d_1\left(\frac{T_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \frac{L_n^* - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}\right) \\ + \ d_1\left(\frac{L_n^* - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \frac{L_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}\right) &+ d_1\left(\frac{L_n - \mu_0^{-1}\ln n}{\mu_0^{-(\alpha+1)/\alpha}c(\ln n)}, \mathcal{S}_\alpha(1)\right). \end{aligned}$$

Третій доданок збігається до нуля внаслідок формули (2.76), теорем 178 та 181 та властивості (Conv) в твердженні 206. Таким чином, достатньо перевірити, що

$$d_1(T_n, L_n^*) \ = \ o(c(\ln n)) \quad \text{та} \quad d_1(L_n, L_n^*) \ = \ o(c(\ln n)), \quad n \to \infty. \tag{4.21}$$

Для перевірки другого співвідношення в (4.21) зауважимо, що

$$\Lambda_t^* \ = \ \Lambda_{t-|\ln \eta_0^*|}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4.22}$$

де η_0^* не залежить від $(\Lambda_t)_{t\geq 0}$. З цієї формули випливає

$$d_1(L_n, L_n^*) = d_1(\Lambda_{\ln n}, \Lambda_{\ln n}^*) \leq \mathbb{E}|\Lambda_{\ln n} - \Lambda_{\ln n}^*| = \mathbb{E}\Lambda_{\ln n} - \mathbb{E}\Lambda_{\ln n}^* = o(c(\ln n)),$$

де в передостанній рівності ми використали, що $\Lambda_t^* \leq \Lambda_t$ для всіх $t \in \mathbb{R}$ внаслідок (4.22), а в останній оцінці застосували формули (4.18) та (4.19).

Для доведення першого співвідношення в (4.21) використаємо рекурсії (4.20) та (4.2):

$$\begin{aligned} e_n &:= d_1(T_n, L_n^*) = d_1(1 + \widehat{T}_{n-I_n}, \mathbb{1}_{\{\eta_0^*>1/n\}} + \widehat{L}_{n\eta}^*) = d_1(\widehat{T}_{n-I_n}, \widehat{L}_{n\eta}^* - \mathbb{1}_{\{\eta_0^*\leq 1/n\}}) \\ &\leq d_1(\widehat{L}_{n-I_n}^*, \widehat{L}_{n\eta}^* - \mathbb{1}_{\{\eta_0^*\leq 1/n\}}) + d_1(\widehat{T}_{n-I_n}, \widehat{L}_{n-I_n}^*) =: e_n' + \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\{I_n = n-k\}e_k, \end{aligned}$$

де $e'_n := d_1(\widehat{L}^*_{n-I_n}, \widehat{L}^*_{n\eta} - \mathbb{1}_{\{\eta_0^* \le 1/n\}})$. Припустимо, що нам відомо

$$e'_n = o\left(\frac{c(\ln n)}{\ln n}\right), \quad n \to \infty, \tag{4.23}$$

та помітимо, що умова *(Mult)* гарантує

$$\mathbb{E}(n - I_n) \sim n\mathbb{E}\eta, \quad n \to \infty. \tag{4.24}$$

З цього випливає, що $\psi_n \equiv 1$ задовольняє умову (L1) леми 187 з $p_{n,k} := \mathbb{P}\{I_n = n - k\}$. Застосовуючи цю лему та (4.23), отримуємо

$$e_n = O\left(\sum_{k=1}^{n} \sup_{j \ge k} \frac{e'_j}{j}\right) = o\left(\sum_{k=3}^{n} \sup_{j \ge k} \frac{c(\ln j)}{j \ln j}\right) = o\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{c(\ln k)}{k \ln k}\right),$$

де ми використали теорему 1.5.3 в [42] та правильну зміну $c(\ln t)/(t \ln t)$ з індексом -1. Зауважимо, що ряд $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{c(\ln k)}{k \ln k}$ розбіжний, оскільки $c(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Таким чином, при $n \to \infty$

$$\sum_{k=3}^{n} \frac{c(\ln k)}{k \ln k} \sim \int_e^n \frac{c(\ln y)}{y \ln y}\, dy = \int_1^{\ln n} \frac{c(u)}{u} \mathrm{d}u \sim \text{const} \cdot c(\ln n)$$

згідно з теоремою 1.6.1 в [42], що завершує доведення першого співвідношення в(4.21).

Залишається перевірити (4.23). Нехай (I'_n, η') є $(\mathcal{L}(I_n), \mathcal{L}(\eta))$-каплінгом таким, що

$$d_1(\ln^+(n - I_n), \ln^+(n\eta)) = \| \ln^+(n - I'_n) - \ln^+(n\eta') \|_1$$

та нехай $(\widehat{\Pi}^*_n)_{n \ge 0}$ є копією $(\Pi^*_n)_{n \ge 0}$, що не залежить від (I'_n, η') та має перший крок $\widehat{\eta}^*_0$. Покладемо

$$\widehat{\Lambda}^*_t := \sum_{k \ge 0} \mathbb{1}_{\{-\ln \widehat{\Pi}^*_k \le t\}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

та $\widehat{L}^*_t := \widehat{\Lambda}^*_{\ln t}$ при $t > 0$. Маємо

$$\begin{aligned} e'_n &= d_1(\widehat{L}^*_{n-I_n}, \widehat{L}^*_{n\eta} - \mathbb{1}_{\{\eta_0^* \le 1/n\}}) \le \|\widehat{L}^*_{n-I'_n} - \widehat{L}^*_{n\eta'} - \mathbb{1}_{\{\widehat{\eta}_0^* \le 1/n\}}\|_1 \\ &\le \|\widehat{L}^*_{n-I'_n} - \widehat{L}^*_{n\eta'}\|_1 + \mathbb{P}\{\widehat{\eta}^*_0 \le 1/n\}, \end{aligned}$$

де $\widehat{\eta}^*_0 = \widehat{\Pi}^*_0 \overset{\mathrm{d}}{=} \eta^*_0$. Згадуючи (4.17), бачимо, що

$$\mathbb{P}\{\eta^*_0 \le 1/n\} = \mathbb{P}\{-\ln \eta^*_0 \ge \ln n\} = \frac{1}{\mu_0} \int_{\ln n}^{\infty} \mathbb{P}\{|\ln \eta| > s\} \mathrm{d}s = 1 - r(\ln n). \tag{4.25}$$

Оскільки $t(1-r(t))$ правильно змінюється з показником $2-\alpha$, то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t(1-r(t))}{c(t)}=0,$$

а, отже,

$$\mathbb{P}\{\eta_0^*\le 1/n\}=o(c(\ln n)/\ln n),\quad n\to\infty.$$

Щоб оцінити $\|\widehat{L}^*_{n-I_n'}-\widehat{L}^*_{n\eta'}\|_1$, запишемо

$$\begin{aligned}\|\widehat{L}^*_{n-I_n'}-\widehat{L}^*_{n\eta'}\|_1&=\|\widehat{\Lambda}^*_{\ln(n-I_n')}-\widehat{\Lambda}^*_{\ln(n\eta')}\|_1=\|\widehat{\Lambda}^*_{\ln^+(n-I_n')}-\widehat{\Lambda}^*_{\ln^+(n\eta')}\|_1\\
&=\|\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\ln^+(n-I_n')\wedge\ln^+(n\eta')<-\ln\widehat{\Pi}_k^*\le\ln^+(n-I_n')\vee\ln^+(n\eta')\}}\|_1\\
&\le\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\{\ln^+(n-I_n')\wedge\ln^+(n\eta')<-\ln\widehat{\Pi}_k^*\le\ln^+(n-I_n')\vee\ln^+(n\eta')\big)\\
&=\mathbb{E}\widehat{\Lambda}^*_{\ln^+(n-I_n')\vee\ln^+(n\eta')}-\mathbb{E}\widehat{\Lambda}^*_{\ln^+(n-I_n')\wedge\ln^+(n\eta')}=\mu_0^{-1}d_1(\ln^+(n-I_n),\ln^+(n\eta)),\end{aligned}$$

де останній перехід випливає з формули $\mathbb{E}\widehat{\Lambda}_t^*=\mu_0^{-1}t$ при $t\ge 0$. Права частина є $o(c(\ln n)/(\ln n))$ за припущенням (4.12). Доведення завершено. □

4.2 Граничні теореми для коалесцентів без пилової компоненти

У цьому підрозділі ми сфокусуємось на підкласі коалесцентів без пилової компоненти, а саме бета-коалесцентах з параметрами $a\in(0,1]$ та $b>0$. Апарат, розроблений в підрозділі 3.3, для таких коалесцентів не працює, оскільки не виконується умова (3.49). При $a=1$ маємо коалесценти типу (III), а при $a\in(0,1)$ – типу (IV), див. класифікацію на с. 64. Використовуючи результати підрозділу 4.1, ми доведемо граничні результати для числа злиттів X_n в бета-коалесцентах з $a\in(0,1]$ та, як наслідок отримаємо граничну теорему для повної довжини L_n дерева в бета-коалесцентах з $a=1$. Зазначимо, що бета-коалесценти з $a\in(0,1)$ спускаються з нескінченності, тобто час поглинання τ_n слабко збігається без центрування та нормування. Нагадаємо, що $N_n(t)$ позначає кількість блоків в розбитті $\mathfrak{P}_n(t)$.

Нехай I_n є кількістю блоків, що беруть участь у першому злитті мінус один, тоді розподіл I_n має вигляд

$$\mathbb{P}\{I_n = k\} = C_n^{k+1}\frac{\lambda_{n,k+1}}{\lambda_n}, \quad 1 \le k \le n-1,$$

та мають місце рекурсії з випадковими індексами

$$X_1 = 0, \quad X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{X}'_{n-I_n}, \quad n \ge 2, \tag{4.26}$$

та

$$L_1 = 0, \quad L_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} nE_n + \widehat{L}_{n-I_n}, \quad n \ge 2, \tag{4.27}$$

де E_n позначає момент першого злиття, а, отже, має експоненційний розподіл з параметром λ_n. Як завжди, для кожного $k \in \mathbb{N}$ величини $\widehat{X}_k$ та $\widehat{L}_k$ вважаються незалежними від (T_n, I_n) копіями X_k та L_k відповідно.

Покладемо

$$p_{n,k}^{(a)} := \mathbb{P}\{I_n = n-k\}, \;\; k = 1, \ldots, n-1. \tag{4.28}$$

Безпосереднім підрахунком можна пересвідчитись, що для довільних $a \in (0, 1]$ та $b > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p_{n,n-k}^{(a)} = \frac{(2-a)\Gamma(k+a-1)}{\Gamma(a)(k+1)!} =: p_k^{(a)}, \;\; k \in \mathbb{N},$$

а, отже, див. також лему 2.1 в [63][1],

$$I_n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \xi, \;\; n \to \infty, \tag{4.29}$$

де ξ є випадковою величиною з розподілом $(p_k^{(a)})_{k\in\mathbb{N}}$. Зокрема

$$\mathbb{P}\{\xi \ge n\} \sim n^{a-2}/\Gamma(a), \quad n \to \infty.$$

та $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{1-a}$ при $a \in (0,1)$ та $\mathbb{E}\xi = \infty$ при $a = 1$.

Таким чином, ми бачимо, що виконується умова *(Add)* попереднього підрозділу і можна очікувати, що асимптотика X_n збігається з асимптотикою $\nu_{n,\ge} = \inf\{k \ge 0 : S_k \ge n\}$, де $(S_k)_{k\ge 0}$ є стандартним випадковим блуканням з кроками, що мають розподіл $(p_k^{(a)})_{k\in\mathbb{N}}$. Як буде показано нижче, це безпосередньо випливає з теореми 102 при $a \in (0,1)$ (оскільки в цьому і лише в цьому випадку $\mathbb{E}\xi < \infty$) та зі схожих міркувань у випадку $a = 1$.

[1]Насправді ця збіжність має місце також при $a \in (1, 2)$, але в цьому випадку застосовні результати підрозділу (3.3).

Теорема 104. *При $n \to \infty$ число X_n злиттів у бета-коалесцентах задовольняє:*

(i) *при* $0 < a < 1$ *та* $b > 0$

$$\frac{X_n - (1-a)n}{(1-a)n^{1/(2-a)}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \left(\frac{1-a}{\Gamma(a)}\right)^{1/(2-a)} \mathcal{S}_{2-a}(1), \quad n \to \infty,$$

(ii) *при* $a = 1$ *та* $b > 0$*,*

$$\frac{\ln^2 n}{n} X_n - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_1(1), \quad n \to \infty,$$

де $\mathcal{S}_1(1)$ *є спектрально негативним* 1*-стійким розподілом з характеристичною функцією* (1.12).

Доведення. Доведення (i). Оскільки ξ належить області притягання $(2-a)$-стійкого розподілу та $\mathbb{P}\{\xi \in \mathbb{N}\} = 1$, то згідно з теоремою 102 достатньо перевірити, що

$$d_1(I_n, \xi \wedge n) = o(n^{(a-1)/(2-a)}), \quad n \to \infty, \tag{4.30}$$

оскільки функцію c в (2.76) можна обрати $c(t) = t^{1/(2-a)}/\Gamma^{1/(2-a)}(a)$. Для оцінки $d_1(I_n, \xi \wedge n)$ скористаємось представленням Канторовича-Рубінштейна (Rep) з твердження 206:

$$d_1(I_n, \xi \wedge n) = \sup_{f \in \mathcal{F}_1} |\mathbb{E} f(I_n) - f(\xi \wedge n)| = \sup_{f \in \mathcal{F}_{1,0}} |\mathbb{E} f(I_n) - f(\xi \wedge n)|,$$

де $\mathcal{F}_{1,0} := \mathcal{F}_1 \cap \{f : f(0) = 0\}$. Маємо

$$\begin{aligned} d_1(I_n, \xi \wedge n) &= \sup_{f \in \mathcal{F}_{1,0}} |\sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = k\} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\{\xi = k\} f(k) - f(n)\mathbb{P}\{\xi > n\}| \\ &\le \sum_{k=1}^{n-1} |\mathbb{P}\{I_n = k\} - \mathbb{P}\{\xi = k\}| k + n\mathbb{P}\{\xi \ge n\}, \end{aligned}$$

де ми скористались тим, що з $f \in \mathcal{F}_{1,0}$ випливає $|f(x)| \le |x|$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Другий доданок в правій частині є $O(n^{a-1}) = o(n^{(a-1)/(2-a)})$. Перший доданок є $O(n^{a-1})$ внаслідок леми 209 з $p = 1$. Доведення (i) завершено.

Доведення (ii). Теорему 102 безпосередньо застосувати не можна, оскільки $\mathbb{E}\xi = \infty$, а цей випадок не покривається вказаною теоремою. Проте, такі ж міркування про апроксимацію процесами відновлення в мінімальних L_p-метриках, що були використані в її доведенні, працюють і в цьому випадку.

Перш за все зауважимо, що при $a = 1$ в.в. ξ має розподіл

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{k(k+1)}, \quad k \in \mathbb{N}$$

та належить області притягання 1-стійкого розподілу. Для відповідного процесу $\nu_{n,\geq}$ має місце гранична теорема

$$\frac{\ln^2}{n}\nu_{n,\geq} - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_\alpha(1), \quad n \to \infty, \tag{4.31}$$

див. наприклад твердження 2 в [142].

Для довільних випадкових величин X, Y розглянемо локально рівномірну метрику між характеристичними функціями

$$\chi_T(X,Y) := \chi_T(\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)) = \sup_{|t|\leq T} |\mathbb{E}e^{itX} - \mathbb{E}e^{itY}|.$$

Слабка збіжність еквівалентна збіжності в $\chi_T(X,Y)$ для всіх $T > 0$ внаслідок теореми неперервності для характеристичних функцій. Також для довільного фіксованого $q \in (0,1]$, тривіально перевіряється нерівність

$$\chi_T(X,Y) \leq C_{T,q} d_q(X,Y), \tag{4.32}$$

для довільних випадкових величин X, Y зі скінченними абсолютними моментами порядку q та деякою константою $C_{T,q}$.

Позначимо $a_n := n^{-1}\ln^2 n$ та $b_n := \ln n + \ln\ln n$ при $n \geq 2$. Для наших цілей достатньо показати, що $\lim_{n\to\infty} \chi_T(a_n X_n - b_n, \mathcal{S}_1(1)) = 0$ для кожного $T > 0$. З нерівності трикутника випливає

$$\chi_T(a_n X_n - b_n, \mathcal{S}_1(1)) \;\leq\; \chi_T(a_n X_n - b_n, a_n\nu_{n,\geq} - b_n) + \chi_T(a_n\nu_{n,\geq} - b_n, \mathcal{S}_1(1)).$$

Другий доданок в правій частині збігається до нуля з огляду на (4.31). Для збіжності до нуля першого доданку, внаслідок (4.32) та властивості (Lin) в твердженні 206, достатньо перевірити, що

$$e_n := d_q(X_n, \nu_{n,\geq}) = o(n^q/(\ln n)^{2q}), \quad n \to \infty, \tag{4.33}$$

для деякого $q \in (0,1]$. Використовуючи в точності такі ж міркування, як в доведенні теореми 102, отримуємо нерівність

$$e_n \le d_q(I_n, \xi \wedge n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\{I_n = n-k\} e_k.$$

Припустимо, що для деякого $q \in (0, 1/2]$ ми довели, що

$$d_q(I_n, \xi \wedge n) = o(n^{q-1}), \quad n \to \infty, \tag{4.34}$$

тоді застосування леми 187 з $\psi_n := n/\ln(n+1)$ дає

$$e_n = O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n^{p-1}}{\ln n}\right) = O(n^p/\ln n), \quad n \to \infty$$

звідки випливає (4.33).

Залишається оцінити $d_q(I_n, \xi \wedge n)$. Це можна зробити так само, як при доведенні (i). З представлення Канторовича-Рубінштейна маємо

$$d_q(I_n, \xi \wedge n) \le \sum_{k=1}^{n-1} k^p |\mathbb{P}\{I_n = k\} - \mathbb{P}\{\xi = k\}| + n^{p-1}.$$

Застосовуючи лему 209 з довільним $q \in (0, 1/2]$, отримуємо (4.34). Доведення (ii) завершено. □

З щойно доведеної теореми можна отримати результат про повну довжину L_n.

Теорема 105. *Для повної довжини L_n дерева в бета-коалесцентах з $a = 1$ та $b > 0$ маємо*

$$\frac{b \ln^2 n}{n} L_n - \ln n - \ln\ln n \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_1(1), \quad n \to \infty.$$

Доведення. Доведення базується на ідеях теореми 5.2 та наслідку 6.2 в [67]. З огляду на рівність

$$\frac{b \ln^2 n}{n} L_n - \ln n - \ln\ln n = \frac{\ln^2 n}{n} X_n - \ln n - \ln\ln n + \frac{\ln^2 n}{n}(bL_n - X_n),$$

достатньо показати, що $((\ln^2 n)/n)(bL_n - X_n) \to 0$ в L_2. Нехай

Нехай E_j є незалежними експоненційними величинами з параметрами λ_j, $j \ge 2$. Припускаючи, що E_j не залежать від послідовності станів, які відвідує процес $(N_n(t))_{t\ge 0}$, можемо вважати E_j часом, проведеним $(N_n(t))_{t\ge 0}$ у стані j за умови, що цей стан було відвідано. Нехай послідовність відвіданих станів є $n = i_0 > i_1 > \cdots > i_{k-1} > i_k = 1$, тоді L_n має розподіл $\sum_{r=0}^{k-1} i_r E_{i_r}$ при $n \geq 2$.

Для $k \in \{1, \ldots, n\}$ та $\mathrm{i} = (i_0, \ldots, i_k)$ з $n = i_0 > i_1 > \cdots > i_{k-1} > i_k = 1$ визначимо події $A_{k,\mathrm{i}} := \{X_n = k, (\Pi_n(t_0), \ldots, N_n(t_k)) = \mathrm{i}\}$, де $t_0 = 0$ та $t_1 < t_2 < \cdots$ є моментами злиттів. Маємо

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(bL_n - X_n)^2 &= \sum_{k,\mathrm{i}} \mathbb{P}\{A_{k,\mathrm{i}}\}\mathbb{E}\Big(\sum_{r=0}^{k-1}(bi_rE_{i_r} - 1)\Big)^2 \\
&= \sum_{k,\mathrm{i}} \mathbb{P}\{A_{k,\mathrm{i}}\}\Big(\sum_{r=0}^{k-1}\mathbb{E}(bi_rE_{i_r} - 1)^2 + \sum_{r,s=0, r\neq s}^{k-1}\mathbb{E}(bi_rE_{i_r} - 1)(bi_sE_{i_s} - 1)\Big).
\end{aligned}$$

Оскільки $\lambda_n = bn + O(\ln n)$ при $n \to \infty$, див. формулу (С.20), то $|\mathbb{E}(bkE_k - 1)| = O(k^{-1}\ln k)$ та $\mathbb{E}(bkE_k - 1)^2 = 1 + O(k^{-1}\ln k)$. Отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(bL_n - X_n)^2 &\leq \sum_{k,\mathrm{i}} \mathbb{P}\{A_{k,\mathrm{i}}\}\Big(\sum_{r=2}^{n}\mathbb{E}(brE_r - 1)^2 + \Big(\sum_{r=2}^{n}|\mathbb{E}(brT_r - 1)|\Big)^2\Big) \\
&= \sum_{k,\mathrm{i}} \mathbb{P}\{A_{k,\mathrm{i}}\}(n + O(\ln^4 n)) = n + O(\ln^4 n),
\end{aligned}$$

звідки випливає збіжність в L_2. Доведення завершено. $\square$

Зауважимо, що для бета-коалесцентів з $a = 1$, крім доведених нами граничних результатів, є досить точна інформація про асимптотику моментів (звичайних та центральних) для X_n та L_n, див. теорему 3.2, наслідок 3.3 та твердження 3.1 в [99].

4.3 Граничні теореми для числа нульових декрементів у випадковому блуканні з бар'єром

Нехай $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. ξ з розподілом $p_k = \mathbb{P}\{\xi = k\}$, $k \in \mathbb{N}$. Нагадаємо, що випадкове блукання з бар'єром $n \in \mathbb{N}$ – це послідовність $(R_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}_0}$, що визначена рівністю

$$R_0^{(n)} := 0, \quad R_k^{(n)} := R_{k-1}^{(n)} + \xi_k \mathbb{1}_{\{R_{k-1}^{(n)} + \xi_k < n\}}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $(R_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ є неспадним ланцюгом Маркова на множині $\{0,1,2,\dots,n-1\}$. За припущення $p_1 > 0$ випадкове блукання з бар'єром поглинається у стані $n-1$ м.н.

Величини

$$M_n^{(0)} := \#\{k\in\mathbb{N} : R_{k-1}^{(n)} \neq R_k^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)}+\xi_{l+1}<n\}}$$

$$T_n^{(0)} := \inf\{k\in\mathbb{N}_0 : R_k^{(n)} = n-1\} = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)}<n-1\}}$$

та

$$V_n^{(0)} := T_n^{(0)} - M_n^{(0)} = \#\{i\leq T_n : R_{i-1}^{(n)} = R_i^{(n)}\} = \sum_{l=0}^{T_n^{(0)}-1} \mathbb{1}_{\{R_l^{(n)}+\xi_{l+1}\geq n\}}$$

визначають число стрибків, час поглинання та число нульових декрементів до моменту поглинання випадкового блукання з бар'єром n.

У цьомі підрозділі ми застосуємо техніку ймовірнісних метрик для аналізу асимптотики числа $V_n^{(0)}$ нульових декрементів. Оскільки $V_n^{(0)} = T_n^{(0)} - M_n^{(0)}$, а величини $T_n^{(0)}$ та $M_n^{(0)}$ мають однаковий порядок росту, див. огляд літератури, то аналіз $V_n^{(0)}$ є складнішою проблемою ніж вивчення $M_n^{(0)}$ та $T_n^{(0)}$. Зокрема, підходи, використані в [143, 144], не дають бажаних результатів.

Ми отримаємо центральну граничну теорему для $V_n^{(0)}$ у припущенні

$$\mathbb{P}\{\xi\geq n\} = cn^{-\alpha} + O(n^{-(\alpha+\varepsilon)}),\ \ n\to\infty, \tag{4.35}$$

для деяких $c>0$, $\alpha\in(0,1)$ та $\varepsilon>0$.

Нехай η_α є в.в. з бета-розподілом з параметрами $(1-\alpha,\alpha)$, $\alpha\in(0,1)$, тобто її щільність задається формулою (2.127). Позначимо

$$\mu_\alpha := \mathbb{E}|\ln\eta_\alpha| = \Psi(1)-\Psi(1-\alpha) \quad \text{та} \quad \sigma_\alpha^2 := \mathbb{D}\ln\eta_\alpha = \Psi'(1-\alpha)-\Psi'(1),$$

де $\Psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$ є логарифмічною похідною гамма-функції.

Нехай $(S_k)_{k\in\mathbb{N}}$ є звичайним випадковим блуканням з кроками $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$S_0 = 0, \quad S_n = \xi_1+\cdots+\xi_n,\ \ n\in\mathbb{N},$$

та нехай $u_n := \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}\{S_k = n\}$ є послідовністю відновлення.

Теорема 106. *Припустимо, що виконується умова* (4.35). *Якщо* $\alpha \in (0, 1/2]$, *припустимо додатково, що*

$$u_n \sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{c\pi} n^{\alpha-1}, \quad n \to \infty. \tag{4.36}$$

Тоді

$$d_1\left(\frac{V_n^{(0)} - \mu_\alpha^{-1}\ln n}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3} \ln n}}, \mathcal{S}_2(1)\right) \to 0 \quad \textit{та} \quad \frac{V_n^{(0)} - \mu_\alpha^{-1}\ln n}{\sqrt{\sigma_\alpha^2 \mu_\alpha^{-3} \ln n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1), \quad n \to \infty.$$

Зауваження 107. Відомо, див. теорему 1 в [82], що з правильної зміни

$$\mathbb{P}\{\xi \geq n\} \sim n^{-\alpha}\ell(n), \quad n \to \infty, \tag{4.37}$$

з індексом $\alpha \in (1/2, 1)$ випливає

$$u_n \sim \frac{\sin(\pi\alpha)}{\ell(n)\pi} n^{\alpha-1}, \;\; n \to \infty, \tag{4.38}$$

зокрема з (4.35) випливає (4.36). З іншого боку, якщо $\alpha \in (0, 1/2]$, асимптотичне співвідношення (4.38) не є, в загальному випадку, наслідком (4.37) без додаткових припущень на p_n. Відомо, що (4.37) гарантує (4.38) у таких випадках:

- $p_{n+1}p_{n-1} > p_n^2$ при $n = 2, 3, \ldots$ (див. теорему 1 в [60]);
- p_n не зростає для великих n (див. наслідок 3-А в [269]);
- $p_n \sim \alpha\ell(n)n^{-\alpha-1}$ при $n \to \infty$ (див. теорему 1.1 в [209]).

В кожному з цих випадків (4.36) автоматично випливає з (4.35).

Доведення теореми 106. Для звичайного випадкового блукання $(S_k)_{k\geq 0}$, покладемо

$$\nu_{n,\geq} = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k \geq n\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

та $Y_n := n - S_{\nu_{n,\geq}-1}$. Легко бачити, що послідовність $(V_n^{(0)})$ задовольняє рекурсію з випадковим індексом

$$V_1^{(0)} = 0, \quad V_n^{(0)} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{1}_{\{Y_n > 1\}} + \widehat{V}_{Y_n}^{(0)}, \quad n \geq 2. \tag{4.39}$$

Цю рекурсію можна спростити, поклавши $X_n := X_n + \mathbb{1}_{\{n>1\}}$. Тоді

$$X_1 = 0, \quad X_n \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{X}_{Y_n}, \quad n \geq 2. \tag{4.40}$$

Очевидно, асимптотики X_n та $V_n^{(0)}$ однакові при $n \to \infty$.

Згідно з теоремою Динкіна-Ламперті, див. теорему 8.6.3 в [42],

$$Y_n/n \overset{\mathrm{d}}{\to} \eta_\alpha, \quad n \to \infty, \tag{4.41}$$

де η_α має щільність (2.127). Таким чином, виконується умова *(Mult)* в підрозділі 4.1, а тому згідно з теоремою 103 достатньо перевірити, що виконується умова (4.12), яка виглядає так:

$$d_1\left(\ln Y_n, \ln^+(n\eta_\alpha)\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right), \quad n \to \infty.$$

Помітимо, що

$$\begin{aligned} d_1\left(\ln(n\eta_\alpha), \ln^+(n\eta_\alpha)\right) &= \mathbb{E}|\ln(n\eta_\alpha)|\mathbb{1}_{\{|\ln\eta_\alpha|>\ln n\}} \\ &\leq 2\mathbb{E}|\ln\eta_\alpha|\mathbb{1}_{\{|\ln\eta_\alpha|>\ln n\}} = O(n^{-\delta}), \end{aligned}$$

для деякого $\delta > 0$, оскільки $|\ln\eta_\alpha|$ має скінченний експоненційний момент деякого додатного порядку. Покажемо, що

$$d_1\left(\ln Y_n, \ln(n\eta_\alpha)\right) = d_1\left(\ln\left(\frac{Y_n}{n}\right), \ln\eta_\alpha\right) = O\left(n^{-\delta_1}\right), \quad n \to \infty, \tag{4.42}$$

для деякого $\delta_1 > 0$. З рівності розподілів

$$Y_1 = 1, \quad Y_n \overset{\mathrm{d}}{=} n\mathbb{1}_{\{\xi \geq n\}} + \widehat{Y}_{n-\xi}\mathbb{1}_{\{\xi<n\}}, \quad n \geq 2,$$

робимо висновок, що

$$\mathbb{E}f(\ln Y_n) = \mathbb{P}\{\xi \geq n\}f(\ln n) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j \mathbb{E}f(\ln Y_{n-j}), \quad n \geq 2.$$

Підставляючи цю рівність у представлення Канторовича-Рубінштейна для від-стані $d_1(\ln Y_n, \ln(n\eta_\alpha))$ та використовуючи нерівність трикутника, запишемо

$$\begin{aligned}
d_1\Big(\ln Y_n, \ln(n\eta_\alpha)\Big) \\
&\le \sup_{f\in\mathcal{F}_1}\Big|\mathbb{P}\{\xi\ge n\}f(\ln n)+\sum_{j=1}^{n-1}p_j\mathbb{E}f(\ln(n-j)\eta_\alpha)-\mathbb{E}f(\ln(n\eta_\alpha))\Big| \\
&+\sum_{j=1}^{n-1}p_j\sup_{f\in\mathcal{F}_1}\Big|\mathbb{E}f(\ln Y_{n-j})-\mathbb{E}f(\ln(n-j)\eta_\alpha)\Big| \\
&=\sup_{f\in\mathcal{F}_1}\Big|\mathbb{P}\{\xi\ge n\}f(\ln n)+\sum_{j=1}^{n-1}p_j\mathbb{E}f(\ln(n-j)\eta_\alpha)-\mathbb{E}f(\ln(n\eta_\alpha))\Big| \\
&+\sum_{j=1}^{n-1}p_jd_1\Big(\ln Y_{n-j}, \ln(n-j)\eta_\alpha\Big).
\end{aligned}$$

Нехай $\tilde{\xi}$ не залежить від $\tilde{\eta}_\alpha$ та $\tilde{\xi}\overset{\mathrm{d}}{=}\xi$, $\tilde{\eta}_\alpha\overset{\mathrm{d}}{=}\eta_\alpha$. Перший доданок можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}
\sup_{f\in\mathcal{F}_1}&\Big|\mathbb{P}\{\xi\ge n\}f(\ln n)+\sum_{j=1}^{n-1}p_j\mathbb{E}f(\ln(n-j)\eta)-\mathbb{E}f(\ln(n\eta_\alpha))\Big| \\
&=d_1\Big(\ln(n\mathbb{1}_{\{\tilde{\xi}\ge n\}}+(n-\tilde{\xi})\tilde{\eta}_\alpha\mathbb{1}_{\{\tilde{\xi}<n\}}), \ln(n\tilde{\eta}_\alpha)\Big) \\
&=d_1\Big((\ln(1-\tilde{\xi}n^{-1})\tilde{\eta}_\alpha)\mathbb{1}_{\{\tilde{\xi}<n\}}, \ln\tilde{\eta}_\alpha\Big),
\end{aligned}$$

де ми використали властивість (Lin) метрики d_1 у другій рівності. Для довільного $x\ge 1$,

$$\mathbb{P}\{\xi\ge x\}=\mathbb{P}\{\xi\ge\lceil x\rceil\}=c(\lceil x\rceil)^{-\alpha}+O((\lceil x\rceil)^{-(\alpha+\varepsilon)})=cx^{-\alpha}+O(x^{-((\alpha+\varepsilon)\wedge 1)}),$$

а тому згідно з лемою 210 з $\beta=1/2$ та $x=n$, існують $K>0$ та $\delta_1\in(0,1-\alpha)$ такі, що

$$d_1\Big(\ln Y_n, \ln(n\eta_\alpha)\Big)\le Kn^{-(\alpha+\delta_1)}+\sum_{j=1}^{n-1}p_jd_1\Big(\ln Y_{n-j}, \ln(n-j)\eta_\alpha\Big).$$

Використавши 1-арифметичний варіант теореми 1 в [13] (цей результат вірний також при $\alpha\in(0,1/2]$ внаслідок припущення (4.36)), маємо

$$d_1\Big(\ln Y_n, \ln(n\eta_\alpha)\Big)=O(n^{-\delta_1}),\quad n\to\infty.$$

Доведення завершено. $\square$

4.4 Висновки до розділу 4

З використанням апарату теорії ймовірнісних метрик, зокрема теорії мінімальних L_p метрик, в цьому розділі було отримано загальні результати про слабку збіжність розв'язків випадкових рекурсій вигляду:

$$T_0 = 0, \quad T_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{T}_{n-I_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

де випадковий індекс I_n задовольняє одну з двох умов:

$$I_n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} \xi, \quad n \to \infty \quad \text{або} \quad I_n/n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} 1 - \eta, \quad n \to \infty.$$

В теоремах 102 та 103 наводяться загальні умови слабкої збіжності послідовності $(T_n)_{n\geq 0}$. З використанням цих результатів, розв'язано низку відкритих проблем:

- отримано граничні теореми для числа злиттів у коалесцентах без пилової компоненти (теореми 104 та 105);
- доведено центральну граничну теорему для числа нульових декрементів у випадковому блуканні з бар'єром.

Розділ 5

Процедури випадкового просіювання та задача вибору лідера

У цьому розділі ми розглянемо два типи випадкових просіювань (або процедур вибору лідера): процедури вибору лідера в яких R є множиною значень довільного випадкового блукання на $\mathbb{N}$, та випадок, коли R є множиною індексів рекордів у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з неперервним розподілом. Як ми побачимо далі, перший тип тісно пов'язаний з процесами Гальтона-Ватсона. Другий тип виявиться корисним для аналізу коалесцента Пуассона-Діріхле. Характерною рисою другого типу є нестандартна асимптотика в граничних теоремах, що включає в себе тетрації та ітеровані логарифми.

5.1 Випадкові просіювання, породжені випадковими блуканнями

Процедура вибору лідера випадковим блуканням, або, що еквівалентно, процедура просіювання випадковим блуканням, формально визначається так. Нехай $R^{(n)}$, $n \geq 1$, є незалежними копіями довільного випадкового блукання R на $\mathbb{N}$. Позначимо кроки $R^{(n)}$ через $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots$. Таким чином, $\xi_k^{(n)}$ при $k, n \in \mathbb{N}$ є незалежними однаково розподіленими в.в. з деяким розподілом

$\mathbb{P}\{\xi_k^{(n)} = i\} = p_i$, $i \in \mathbb{N}$, та[1]

$$R^{(n)}(0) = 0, \quad R^{(n)}(k) = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi_k^{(n)}.$$

В раунді n, гравці з поточними номерами $R^{(n)}(1), R^{(n)}(2), \ldots$ переходять в наступний раунд, а всі інші залишають гру. Гравці, що залишились, перенумеровуються $1, 2, \ldots$ та процедура повторюється знову. Нас цікавлять такі величини, які характеризують процес просіювання:

- $N_M^{(n)}$, число гравців з (початковими) номерами $1, 2, \ldots, M$, які вижили в перших n раундах, формально

$$N_M^{(0)} := M, \quad N_M^{(n)} := \#\{j \in \mathbb{N} : R^{(n)}(j) \le N_M^{(n-1)}\} \tag{5.1}$$

  при $M \in \mathbb{N}_0$ та $n \in \mathbb{N}$.

- $1 \le S_1^{(n)} < S_2^{(n)} < S_3^{(n)} < \cdots$, початкові номери гравців, що вижили в перших n раундах, формально

$$S_j^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} : N_i^{(n)} = j\} \tag{5.2}$$

  при $j \in \mathbb{N}$ та $n \in \mathbb{N}_0$.

- $T(M)$, число раундів, поки гравці з (початковими) номерами $1, 2, \ldots, M$ всі вибувають з гри, тобто

$$T(M) \ := \ \inf\{n \in \mathbb{N} : N_M^{(n)} = 0\} \tag{5.3}$$

  при $M \in \mathbb{N}$.

Продемонструємо зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона, який є досить очевидним. Маємо рекурентне співвідношення

$$\left(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots\right) \ = \ \left(S_{R^{(n)}(1)}^{(n-1)}, S_{R^{(n)}(2)}^{(n-1)}, \ldots\right), \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

з якого, враховуючи початкові значення $S_j^{(0)} = j$, $j \in \mathbb{N}$, випливає

$$\left(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots\right) \ = \ \left(R^{(1)} \circ \cdots \circ R^{(n)}(1), R^{(1)} \circ \cdots \circ R^{(n)}(2), \ldots\right), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.4}$$

[1]Протягом цього розділу ми писатимемо номер кроку блукання, як його аргумент, а не як нижній індекс, і будемо розглядати випадкове блукання, як випадкове відображення з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Оскільки в цьому розділі ітерації функцій будуть відігравати важливу роль, введемо такі позначення: для послідовності відображень $\varphi^{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}$ або $n \in \mathbb{N}$, довільної множини A у себе, покладемо

$$\varphi^{(k\uparrow n)}(\cdot) := \varphi^{(k)} \circ \ldots \circ \varphi^{(n)}(\cdot) \quad \text{та} \quad \varphi^{(n\downarrow k)}(\cdot) := \varphi^{(n)} \circ \ldots \circ \varphi^{(k)}(\cdot)$$

при $k < n$. Також вважатимемо, що при $k < n$, відображення $\varphi^{(n\uparrow k)}$ та $\varphi^{(k\downarrow n)}$ є тотожними відображеннями на множині A.

Співвідношення (5.4) демонструє, що випадковий вектор $(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots)$ є n-кратною *ітерацією вперед* випадкового блукання R, яке розглядається, як відображення з $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Перехід до *ітерацій назад* не змінює розподіл, тому маємо базове співвідношення для нашого випадкового просіювання:

$$\Big(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots\Big) \overset{\mathrm{d}}{=} \Big(R^{(n\downarrow 1)}(1), R^{(n\downarrow 1)}(2), \ldots\Big), \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.5}$$

Тепер зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона стає очевидним, j-та координата випадкового вектора у правій частині є нічим іншим, як числом нащадків індивідів $1, \ldots, j$ в поколінні n в процесі Гальтона-Ватсона, який стартує зі зліченного числа предків та має розподіл числа нащадків $(p_n)_{n\geq 1}$. Реалізація такого процесу Гальтона-Ватсона представлена на рисунку 5.1. Оскільки ми припускаємо $p_1 < 1$, то процес Гальтона-Ватсона виживає з ймовірністю один та є надкритичним.

Надалі ми розділимо введені процедури випадкового просіювання на два класи: породжені розподілом $(p_n)_{n\geq 1}$ зі скінченним середнім, тоді відповідний процес Гальтона-Ватсона теж має скінченне середнє, та випадкові просіювання для яких $\sum_{n\geq 1} np_n = \infty$.

Як видно зі співвідношення (5.5), граничні результати для $(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \ldots)$, представлені в теоремах 108 та 113, будуть отримані з відповідних результатів для процесів Гальтона-Ватсона. Після чого асимптотика $N_M^{(n)}$ при $n, M \to \infty$ та $T(M)$ при $M \to \infty$ може бути знайдена з простих співвідношень двоїстості:

$$\{N_M^{(n)} \geq k\} = \{S_k^{(n)} \leq M\}, \quad \{T(M) \leq k\} = \{S_1^{(k)} > M\}, \ \ k, M \in \mathbb{N}, \ \ n \in \mathbb{N}_0,$$

див. теореми 109, 110, 114 та 116. Граничні процеси в теоремах 108 та 113 є нерухомими точками деяких випадкових відображень і задовольняють, таким

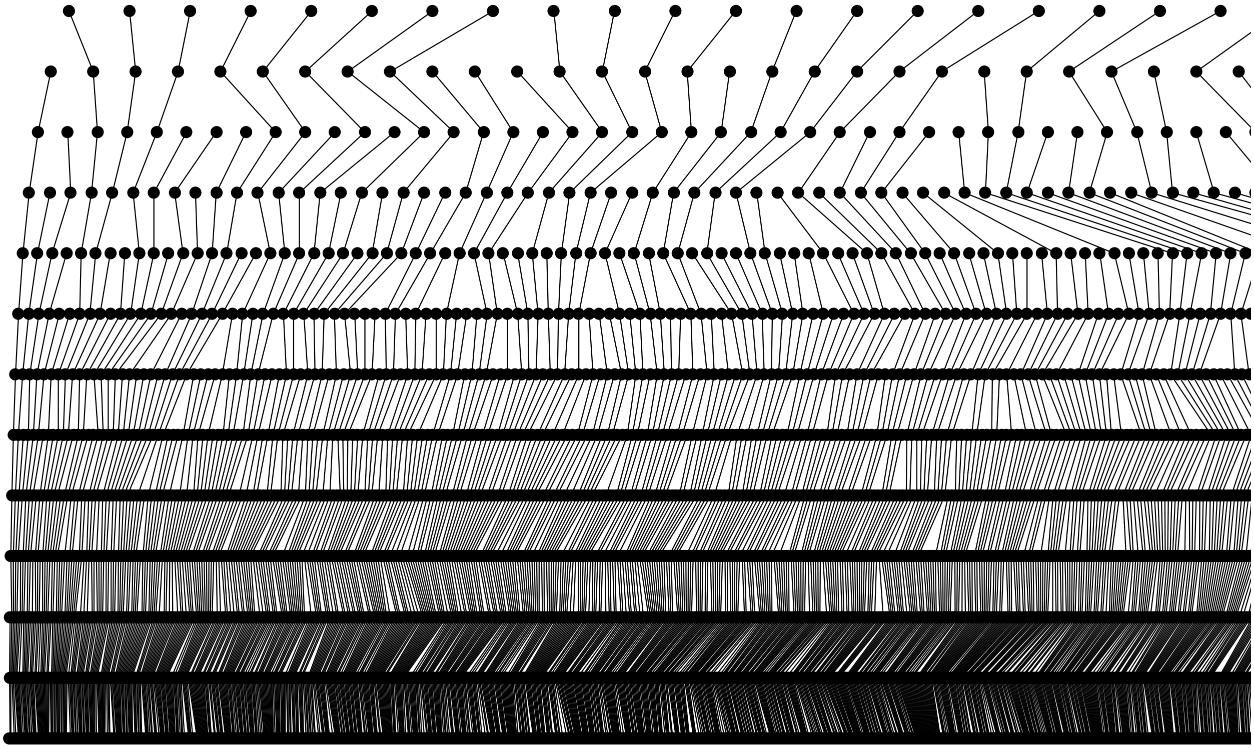


Рис. 5.1: Процес Гальтона-Ватсона зі зліченним числом предків $1, 2, \ldots$. У рядку $(n + 1)$ (якщо рахувати зверху вниз) представлені індивіди n-ого покоління. Індивід з номером j в поколінні n розташований в позиції $\mu^{-n} j$, де $\mu \in (1, \infty)$ є середнім числом нащадків одного індивіда. Кожний індивід в n-му поколінні з'єднується відрізком зі своїм *останнім* нащадком в поколінні $n + 1$. Наприклад, індивід 1 у верхньому рядку має 2-х безпосередніх нащадків, а кожен з індивідів $2, \ldots, 8$ у верхньому рядку мають по одному безпосередньому нащадку.

чином, *стохастичні рівняння нерухомих точок*, див. формули (5.7) та (5.15). Опис множин розв'язків таких рівнянь, даний в теоремах 112 та 118, є значно більш делікатним питанням, а відповідний аналіз базується на глибоких результатах про поведінку процесів Гальтона-Ватсона.

У подальшому ξ завжди позначає випадкову величину, що розподілена, як крок блукань $R^{(n)}$, тобто $\mathbb{P}\{\xi = n\} = p_n$ для $n \in \mathbb{N}$.

5.1.1 Випадок скінченного середнього кроку блукання. Розпочнемо з граничної теореми для $(S_j^{(n)})_{j \geq 1}$. Покладемо $\mu := \mathbb{E}\xi$ та нехай $(Z_n)_{n \geq 0}$ позначає процес Гальтона-Ватсона з розподілом нащадків $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Якщо $\mu \in (1, \infty)$, то нормований процес $(\mu^{-n} Z_n)_{n \geq 0}$ є невід'ємним мартингалом, а тому збігається м.н. до границі Z_∞, яка м.н. додатна, якщо $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$, або дорівнює нулю інакше.

Теорема 108. *Припустимо, що* $\mu \in (1, \infty)$. *Тоді*

$$\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_3^{(n)}}{\mu^n} \dots \right) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)} + Z_\infty^{(3)}, \dots), \quad n \to \infty, \tag{5.6}$$

де $Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(2)}, \dots$ *є незалежними копіями* Z_∞. *Розподіл граничного вектора в* (5.6) *задовольняє стохастичне рівняння нерухомої точки*

$$\Big(\mu X_1, \mu X_2, \dots\Big) \overset{\text{d}}{=} \Big(X_{R(1)}, X_{R(2)}, \dots\Big), \tag{5.7}$$

де випадкове блукання $(R(j))_{j \geq 0}$ *у правій частині є незалежним від* $(X_j)_{j \geq 0}$.

Теорема 109. *Нехай* $\mu \in (1, \infty)$ *та* $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. *Тоді, при* $n \to \infty$,

$$N_{\lfloor \mu^n t \rfloor}^{(n)} \Rightarrow N'(t), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0, \infty)$ *з* J_1*-топологією, де* $N'(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : Z_\infty^{(1)} + \dots + Z_\infty^{(k)} \leq t\}$ *при* $t \geq 0$.

Зазначимо, що N' є звичайним процесом відновлення для випадкового блукання $(\sum_{j=1}^k Z_\infty^{(j)})_{k \geq 1}$, зокрема є процесом Пуассона, якщо Z_∞ має експоненційний розподіл, див. приклад 111.

У наступному результаті сформульовано одновимірну граничну теорему для числа $T(M)$ раундів до того, які всі гравці з початковими номерами $1, \dots, M$ вибувають з гри. Ми не будемо формулювати функціональну граничну теорему (хоча зробити це неважко), оскільки формальна побудова граничного процесу вимагає введення суттєвої кількіості нових об'єктів. Така конструкція буде наведена далі при аналізі процедури просіювання, породженої рекордами, див. теорему 119 в наступному підрозділі.

Теорема 110. *Нехай* $\mu \in (1, \infty)$ *та* $\mathbb{E}\xi \ln \xi < \infty$. *Для довільного фіксованого* $x > 0$, *маємо*

$$T(\lfloor \mu^n x \rfloor) - n \overset{\text{d}}{\to} T'(x), \quad n \to \infty,$$

де $T'(x)$ *має розподіл*

$$\mathbb{P}\{T'(x) \leq k\} = \mathbb{P}\{Z_\infty > \mu^{-k} x\}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{5.8}$$

Приклад 111. У класичній процедурі вибору лідера ξ має геометричний розподіл на $\mathbb{N}$ з деяким параметром $p \in (0,1)$. Тоді процес у правій частині (5.6) є випадковим блуканням зі стандартним експоненційним розподілом кроку, $(N'(t))_{t\geq 0}$ є стандартним процесом Пуассона, а $T'(x)$ має дискретний аналог розподілу Гумбеля.

При аналізі теореми 108 виникає природне питання про множину розв'язків стохастичного рівняння нерухомої точки (5.7). Як вже зазначалось в огляді літератури, рівняння (5.7) можна розглядати, як означення певної стійкості точкових процесів на $[0,\infty)$, а тому опис множини розв'язків (5.7) еквівалентний опису стійких (в цьому розумінні) точкових процесів.

Якщо розподіл випадкової послідовності $(X_1, X_2, \ldots)$ задовольняє (5.7) та $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ є довільним неспадним випадковим процесом на $[0,\infty)$, який не залежить від $(X_1, X_2, \ldots)$ та задовольняє властивість

$$(G(\mu t))_{t\in\mathbb{R}_+} \overset{f.d.}{=} (\mu G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}, \tag{5.9}$$

то $(G(X_1), G(X_2), \ldots)$ також є розв'язком (5.7). Наступна теорема демонструє, що всі розв'язки (5.7) можна представити у такому вигляді, а граничний процес в (5.6) є в деякому сенсі фундаментальним розв'язком.

Теорема 112. *Нехай* $(X_1, X_2, \ldots)$ *є випадковим елементом* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *таким, що* $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \cdots$ *та виконується* (5.7) *з* $(R(j))_{j\geq 0}$*, що не залежить від* $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *та* $\mu = \mathbb{E}R(1) = \mathbb{E}\xi$*. Припустимо також, що*

$$\mathbb{E}R(1)\ln R(1) \ = \ \mathbb{E}\xi \ln \xi \ < \ \infty, \tag{5.10}$$

тобто $\mathbb{P}\{Z_\infty > 0\} = 1$*. Нехай* $(Z_\infty^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ *є незалежними копіями* Z_∞*. Тоді знайдеться випадковий процес* $(G(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$*, що не залежить від* $(Z_\infty^{(j)})_{j\geq 1}$ *та задовольняє* (5.9)*, такий, що*

$$(X_j)_{j\geq 1} \overset{\mathrm{d}}{=} \big(G(Z_\infty^{(1)} + \cdots + Z_\infty^{(j)})\big)_{j\geq 1}.$$

5.1.2 Випадок нескінченного середнього кроку блукання. Поведінка процесів Гальтона-Ватсона у випадку, коли середнє число нащадків нескінченне, вивчалося багатьма авторами, зокрема Дарлінгом [56], Сенетою [250], Девісом [57], Греєм [112], Шухом та Барбуром [245]. В останній роботі показано, що для довільного процесу Гальтона-Ватсона з нескінченним середнім знайдеться функція U та послідовність констант $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такі, що $U(Z_n)/C_n$ збігається м.н. до невиродженої в.в. Проте, враховуючи неявну конструкцію U та C_n, отримати кількісні результати для нашої моделі в цьому загальному випадку досить складно. Натомість ми працюватимемо у меншій загальності, припустивши, що виконуються умови Девіса [57], які, наскільки нам відомо, є найбільш загальними умовами, за яких можна знайти явний вигляд U та C_n. Вони також гарантують, що границя м.н. є додатною на множині виживання. Умова Девіса виглядає так:

$$x^{-\alpha-\gamma(x)} \leq \mathbb{P}\{\xi \geq x\} \leq x^{-\alpha+\gamma(x)}, \quad x \geq x_0, \tag{5.11}$$

для деякого $0 < \alpha < 1$, $x_0 \geq 0$ та незростаючої функції $\gamma(x)$ такої, що $x^{\gamma(x)}$ не спадає та $\int_{x_0}^{\infty} \gamma(\exp(e^x))\,dx < \infty$. Ця умова виконується, наприклад, якщо вираз $x^\alpha \mathbb{P}\{\xi > x\}$ є відділеним від нуля та нескінченності для $x \geq x_0$ (достатньо взяти $\gamma(x) = C/\ln x$). Для процесу Гальтона-Ватсона $(Z_n)_{n\geq 0}$ з розподілом числа нащадків ξ, який задовольняє наведену умову та $Z_0 = 1$, Девіс довів, див. теореми 1 та 2 в [57], що

$$Z_\infty^* := \lim_{n\to\infty} \alpha^n \ln(1 + Z_n) \ \in \ (0,\infty) \quad \text{м.н.} \tag{5.12}$$

Оскільки в наших умовах $\mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$, то $1 \leq Z_n \to \infty$ м.н., а, отже, формула (5.12) еквівалентна

$$Z_\infty^* = \lim_{n\to\infty} \alpha^n \ln Z_n \in (0,\infty) \quad \text{м.н.} \tag{5.13}$$

Випадкова величина Z_∞^* має неперервний розподіл на $(0,\infty)$, див. с. 715 в [260] або с. 3763 в [20].

Теорема 113. *Припустимо, що у процедурі вибору лідера випадковим блуканням крок ξ задовольняє умову* (5.11) *для деякого $\alpha \in (0,1)$. Тоді*

$$\left(\alpha^n \ln S_j^{(n)}\right)_{j\geq 1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(Z_\infty^{(*,1)}, Z_\infty^{(*,1)} \vee Z_\infty^{(*,2)}, Z_\infty^{(*,1)} \vee Z_\infty^{(*,2)} \vee Z_\infty^{(*,3)}, \dots\right), \quad n \to \infty, \tag{5.14}$$

де $Z_\infty^{(*,1)}, Z_\infty^{(*,2)}, \ldots$ *є незалежними копіями* Z_∞^*. *Розподіл граничного вектора в* (5.14) *задовольняє*

$$(X_1, X_2, \ldots) \overset{\mathrm{d}}{=} \left(\alpha X_{R(1)}, \alpha X_{R(2)}, \ldots\right), \tag{5.15}$$

де $(R(j))_{j\geq 1}$ *у правій частині не залежить від* $(X_j)_{j\geq 1}$.

В правій частині (5.14) стоять часткові максимуми послідовності незалежних копій додатної випадкової величини, на відміну від часткових сум у випадку скінченного середнього. Процес часткових максимумів добре вивчений, доведення марковської властивості та формули для перехідних ймовірностней можна знайти в лекціях 14, 15, 17 книги [213]. Звернемо увагу, що цей процес має кратні точки. Це означає, що початкові номери гравців, що залишились після n раундів утворюють кластери (на логарифмічній шкалі). Насправді, як випливає з теореми Реньї про рекорди, див с. 58 в [213], серед перших k елементів цього процесу є лише $\sim \ln k$ різних при $k \to \infty$.

Теорема 114. *В умовах теореми 113 маємо*

$$N^{(n)}_{\lfloor \exp(t\alpha^{-n})\rfloor} \Rightarrow N''(t), \quad n \to \infty$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* M_1*-топологією, де* $N''(t) := \#\{k \in \mathbb{N} : Z_\infty^{(*,1)} \vee \ldots \vee Z_\infty^{(*,k)} \leq t\}$, $t \geq 0$.

Зауваження 115. Наведена теорема не виконується в J_1-топології. Дійсно, траєкторії процесу $(N^{(n)}_{\lfloor \exp(x\alpha^{-n})\rfloor})_{x\geq 0}$ лежать в множині кусково-постійних неспадних функцій зі стрибками розміру 1, яка є замкненою в $D[0,\infty)$ з J_1-топологією. З іншого боку, процес N'' має стрибки розміру ≥ 2 з ймовірністю один (внаслідок наявності кластерів у процесі часткових максимумів), тому теорема 114 не може виконуватись в J_1-топології.

Наступна теорема – аналог теореми 110 у випадку нескінченного середнього.

Теорема 116. *В умовах теореми 113 для довільного фіксованого* $x > 0$ *маємо*

$$T([e^{\alpha^{-n}x}]) - n \overset{\mathrm{d}}{\to} T''(x), \quad n \to \infty,$$

де $T''(x)$ має розподіл

$$\mathbb{P}\{T''(x) \le k\} = \mathbb{P}\{Z_\infty^* > \alpha^k x\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Цікавий і простий приклад процесу Гальтона-Ватсона з нескінченним середнім числа нащадків можна отримати, взявши в якості розподілу ξ, так званий розподіл Сібуя з твірною функцією

$$f_\alpha(t) := \mathbb{E}t^\xi \ = \ 1-(1-t)^\alpha, \quad 0 \le t \le 1$$

з параметром $\alpha \in (0,1)$.

Твердження 117. *Якщо ξ має розподіл Сібуя з параметром $\alpha \in (0,1)$, то*

$$\sum_{j=1}^\infty \delta_{\alpha^n \ln S_j^{(n)}} \Rightarrow \sum_{i=1}^\infty G_i \, \delta_{P_i}, \quad n \to \infty,$$

у просторі точкових процесів $M_p(\mathbb{R}_+)$, де $P_1 < P_2 < \cdots$ є моментами стрибків стандартного процесу Пуассона на $(0,\infty)$ та, при фіксованих $P_1 < P_2 < \cdots$, величини $G_1, G_2, \ldots$ є (умовно) незалежними і G_j має (умовний) геометричний розподіл з параметром e^{-P_j}.

Доведення твердження 117 можна знайти в [9].

Наш останній результат про процедури просіювання випадковими блуканнями – аналог теореми 112, він дає опис множини розв'язків (5.15) за умови Девіса (5.11).

Теорема 118. *Нехай $(X_1, X_2, \ldots)$ є випадковим елементом $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ таким, що $0 \le X_1 \le X_2 \le \cdots$ та виконується співвідношення* (5.15) *з $(R(j))_{j\ge 0}$, що не залежить від $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Припустимо, що виконується умова Девіса* (5.11) *та нехай $(Z_\infty^{(*,j)})_{j\in\mathbb{N}}$ є незалежними копіями в.в. Z_∞^*, що визначена рівністю* (5.13). *Тоді знайдеться неспадний випадковий процес $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, який задовольняє співвідношення*

$$(G(\alpha t)_{t\in\mathbb{R}_+} \overset{f.d.}{=} (\alpha G(t))_{t\in\mathbb{R}_+} \tag{5.16}$$

та не залежить від $(Z_\infty^{(*,j)})_{j\ge 1}$ такий, що

$$(X_j)_{j\in\mathbb{N}} \overset{\mathrm{d}}{=} \left(G(Z_\infty^{(*,1)} \vee \ldots \vee Z_\infty^{(*,j)}) \right)_{j\ge 1}.$$

5.1.3 Доведення теорем 108, 109, 110 та 112.

Доведення базується на допоміжних результатах для випадкових блукань та процесів Гальтона-Ватсона, представлених в додатку А. Рекомендуємо читачу ознайомитись з підрозділом А.9.1. в додатку А.

Визначимо випадкове відображення $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ рівністю

$$\psi((x_1, x_2, \ldots)) \ := \ \frac{1}{\mu} \left(x_{R(1)}, x_{R(2)}, \ldots \right) \tag{5.17}$$

та відображення $\psi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ при $n \in \mathbb{N}$ рівностями

$$\psi_n((x_1, x_2, \ldots)) \ := \ \frac{1}{\mu} \left(x_{R^{(n)}(1)}, x_{R^{(n)}(2)}, \ldots \right). \tag{5.18}$$

Очевидно, (ψ_n) є незалежними копіями ψ.

Доведення теореми 108. З огляду на базове співвідношення (5.5), маємо

$$\begin{aligned}\left(\frac{S_1^{(n)}}{\mu^n}, \frac{S_2^{(n)}}{\mu^n}, \ldots \right) \ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} \ \left(\mu^{-n} R^{(n\downarrow 1}(1), \mu^{-n} R^{(n\downarrow 1}(2), \ldots \right) \\ &= \ \psi^{(1\uparrow n)}(1, 2, \ldots).\end{aligned}$$

Згідно з частиною (F1) твердження 192, ця послідовність збігається до $(Z_\infty^{(1)}, Z_\infty^{(1)} + Z_\infty^{(2)}, \ldots)$, що доводить (5.6). Рівняння нерухомої точки (5.7) випливає з м.н. неперервності відображення ψ у продакт-топології $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ та теореми про неперервне відображення. Це завершує доведення теореми 108. □

Доведення теореми 109. Помітимо, що $(N^{(n)}_{\lfloor x\mu^n \rfloor})_{x \geq 0}$ є лічильним процесом для випадкової послідовності $(\mu^{-n} S_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$. Згідно з теоремою 108, скінченновимірні розподіли цієї послідовності при $n \to \infty$ збігаються до скінченновимірних розподілів строго зростаючого випадкового блукання $(Z_\infty^{(1)} + \ldots + Z_\infty^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ з відповідним лічильним процесом $(N'(x))_{x \geq 0}$. Також, для кожного $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k \to \infty} S_k^{(n)} \ = \ \lim_{k \to \infty} (Z_\infty^{(1)} + \ldots + Z_\infty^{(k)}) \ = \ +\infty \quad \text{м.н.}$$

оскільки $\xi > 0$ м.н. та $Z_\infty^{(1)} > 0$ м.н. Згідно з лемою 177 з вищенаведеного випливає слабка збіжність лічильних процесів в просторі Скорохода з J_1-топологією. □

Доведення теореми 110. Для доведення цього результату достатньо помітити, що

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{T(\lfloor \mu^n x\rfloor) - n \le k\right\} \;&=\; \mathbb{P}\left\{S_1^{(n+k)} > \lfloor \mu^n x\rfloor\right\} \\ &= \mathbb{P}\left\{S_1^{(n+k)} > \mu^n x\right\} \;=\; \mathbb{P}\left\{\mu^{-(n+k)} S_1^{(n+k)} > \mu^{-k} x\right\}\end{aligned}$$

та скористатись теоремою 108. $\square$

Доведення теореми 112. Нехай $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots)$ є розв'язком (5.7), тобто

$$\left(\mu X_1^{(0)}, \mu X_2^{(0)}, \ldots\right) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(X_{R(1)}^{(0)}, X_{R(2)}^{(0)}, \ldots\right).$$

Згідно з теоремою Колмогорова про продовження міри, існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, який містить такі об'єкти:

- випадкову послідовність $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots)$;
- двосторонню послідовність $(R^{(n)}(\cdot))_{n\in\mathbb{Z}}$ незалежних копій випадкового блукання $R(\cdot)$ та відповідні відображення (5.18);
- двосторонню стаціонару послідовність $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \left((X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots)\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ таку, що V_k не залежить від $(\psi_n)_{n\le k}$ для кожного $k\in\mathbb{Z}$ і

  $$V_0 \;:=\; \left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots\right), \quad V_k \;=\; \psi_{k+1}(V_{k+1}), \quad k\in\mathbb{Z},$$

  що еквівалентно

  $$\left(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots\right) \;=\; \frac{1}{\mu}\left(X_{R^{(k+1)}(1)}^{(k+1)}, X_{R^{(k+1)}(2)}^{(k+1)}, \ldots\right), \quad k\in\mathbb{Z}.$$

За побудовою $V_k \stackrel{\mathrm{d}}{=} V_0$ при $k\in\mathbb{Z}$. Визначимо послідовність випадкових мір $(\nu_n)_{n\ge 0}$ на $[0,\infty)$ рівностями

$$\nu_n[0,t] \;:=\; \begin{cases} 0, & \text{якщо } t < \mu^{-n}, \\ \mu^{-n} X_{\lfloor t\mu^n\rfloor}^{(n)}, & \text{якщо } t \ge \mu^{-n}. \end{cases}$$

Це можливо, оскільки $(X_j^{(0)})_{j\ge1}$ не спадає та $(X_j^{(n)})_{j\ge1} \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X_j^{(0)})_{j\ge1}$ для кожного $n\in\mathbb{N}_0$. Припустимо, що ν_n збігаються м.н. при $n\to\infty$ до деякої міри ν_∞ в грубій топології на $[0,\infty)$, тобто

$$\nu_n \;\to \nu_\infty, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.} \tag{5.19}$$

в просторі $M_p([0,\infty))$. Покажемо, що $(X_k^{(0)})_{k\geq 1} \overset{\mathrm{d}}{=} (G(Z_\infty^{(1)}), G(Z_\infty^{(1)}+Z_\infty^{(2)}),\ldots)$, де $G(t) := \nu_\infty[0,t]$. Дійсно, при $n\in\mathbb{N}$,

$$\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)},\ldots\right) = \mu^{-n}\left(X^{(n)}_{\lfloor \mu^n \widehat{Z}_n(1)\rfloor}, X^{(n)}_{\lfloor \mu^n \widehat{Z}_n(2)\rfloor},\ldots\right)$$
$$= \left(\nu_n[0,\widehat{Z}_n(1)], \nu_n[0,\widehat{Z}_n(2)],\ldots\right)$$

з $\widehat{Z}_n(j) := \mu^{-n}(R^{(n\downarrow 1)})(j)$, що не залежать від ν_n. Як вже зазначалось,

$$\left(\widehat{Z}_n(j)\right)_{j\geq 1} \to \left(Z_\infty^{(1)}+\cdots+Z_\infty^{(j)}\right)_{j\geq 1}, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}, \tag{5.20}$$

що в поєднанні з (5.19) дає

$$\left(\nu_n, \left(\widehat{Z}_n(j)\right)_{j\in\mathbb{N}}\right) \to \left(\nu_\infty, \left(Z_\infty^{(1)}+\cdots+Z_\infty^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}}\right), \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$

в продакт-топології, де координати в правій частині незалежні. Умова (5.10) гарантує, що розподіл $Z_\infty^{(1)}$ є абсолютно неперервним, див. наслідок 4 на с. 36 в [21], тому

$$\mathbb{P}\left\{\nu_\infty(\{Z_\infty^{(1)}+\cdots+Z_\infty^{(j)}\})=0\right\} \;=\; 1$$

для всіх $j\in\mathbb{N}$. З леми 176 випливає

$$\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)},\ldots\right) \;=\; \left(\nu_n[0,\,\widehat{Z}_n(1)], \nu_n[0,\,\widehat{Z}_n(2)],\ldots\right)$$
$$\to \left(\nu_\infty[0,\,Z_\infty^{(1)}], \nu_\infty[0,\,Z_\infty^{(1)}+Z_\infty^{(2)}],\ldots\right), \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.},$$

що доводить потрібне представлення для $\left(X_1^{(0)}, X_2^{(0)},\ldots\right)$, як розв'язку (5.7).

Залишається довести (5.19). Розглянемо випадкові відображення $g_n(t) := \mu^{-n}R^{(n)}(\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor)$, $n\in\mathbb{N}$, $t\geq 0$, введені в твердженні 192. Маємо співвідношення

$$\nu_n[0,t] \;=\; \nu_{n+1}[0, g_{n+1}(t)] \tag{5.21}$$

при $n\in\mathbb{N}_0$ та $t\geq 0$. Для довільного $k\in\mathbb{N}_0$, ітеруючи (5.21), маємо

$$\nu_k[0,t] \;=\; \nu_{n+k}[0, g^{(n+k\downarrow k+1)}(t)], \tag{5.22}$$

зокрема

$$\nu_0[0,\,t] \;=\; \nu_n[0, \widehat{Z}_n(\lfloor t\rfloor)] \tag{5.23}$$

при $n\in\mathbb{N}$ та $t\geq 0$. Оскільки

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\widehat{Z}_n(\lfloor t\rfloor) \;=\; \lim_{t\to\infty} Z_\infty(t) \;=\; \infty,$$

то з формули (5.23) випливає, що для довільного $T > 0$,

$$\sup_{n\geq 0} \nu_n[0,T] \ < \ \infty \quad \text{м.н.} \tag{5.24}$$

Отже, родина $(\nu_n)_{n\geq 0}$ є м.н. відносно компактною в грубій топології, див. 15.7.5 в [156]. Нехай $(\nu_{m_n})_{n\geq 1}$, де послідовність $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ випадкова, є м.н. збіжною підпослідовністю з границею ν'_∞. З (5.22) маємо для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$ та $m_n > k$,

$$\nu_k[0,t] \ = \ \nu_{m_n}[0, g^{(m_n\downarrow k+1)}(t)], \quad t \geq 0. \tag{5.25}$$

Згідно з частиною (F2) твердження 192

$$g^{(m_n\downarrow k+1)}(t) \to \mu^{-k} Z_{k,\infty}(t\mu^k), \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з J_1-топологією. Спрямовуючи $n\to\infty$ в (5.25) та застосовуючи лему 176, маємо м.н.

$$\nu_k[0,t] \ = \ \nu'_\infty[0, \mu^{-k} Z_{k,\infty}(t\mu^k)], \quad t \geq 0 \tag{5.26}$$

для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}_0$. Згідно з частиною (F5) твердження 192, випадкова множина

$$\mathcal{Z} := \ \left\{\mu^{-k} Z_{k,\infty}(t\mu^k) : t\geq 0, k\in\mathbb{N}_0\right\}$$

є м.н. щільною в $[0,\infty)$. Якщо ν''_∞ є іншою частковою границею $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, то

$$\nu''_\infty[0,t] \ = \ \nu'_\infty[0,t], \quad t\in\mathcal{Z},$$

а тому $\nu''_\infty = \nu'_\infty$ м.н., що доводить (5.19).

Залишається показати, що процес G задовольняє умову (5.9). Це одразу випливає з

$$\nu_n[0,\mu t] \ = \ \mu^{-n} X^{(n)}_{\lfloor t\mu^{n+1}\rfloor} \overset{\mathrm{d}}{=} \mu^{-n} X^{(n+1)}_{\lfloor t\mu^{n+1}\rfloor} \ = \ \mu\nu_{n+1}[0,t], \quad t\geq \mu^{-(n+1)},$$

де рівність розподілів випливає з стаціонарності $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. $\square$

5.1.4 Доведення теорем 113, 114, 116 та 118.

Доведення базується на допоміжних результатах для випадкових блукань та процесів Гальтона-Ватсона, з нескінченним середнім, представлених в додатку А. Рекомендуємо читачу ознайомитись з підрозділом А.9.2. в додатку А.

Визначимо випадкове відображення $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ рівністю

$$\phi((x_1, x_2, \ldots)) \ := \ \alpha(x_{R(1)}, x_{R(2)}, \ldots) \tag{5.27}$$

та відображення $\phi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ при $n \in \mathbb{N}$ рівностями

$$\phi_n((x_1, x_2, \ldots)) \ := \ \alpha(x_{R^{(n)}(1)}, x_{R^{(n)}(2)}, \ldots), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.28}$$

Доведення теореми 113. Збіжність (5.14) є наслідком (5.5) та частини (G1) твердження 195. Рівняння нерухомої точки (5.15) випливає з неперервності м.н. відображення ϕ у продакт-топології $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\square$

Доведення теореми 114. Помітимо, що $(N^{(n)}_{\lfloor \exp(x\alpha^{-n})\rfloor})_{x\geq 0}$ є лічильним процесом для послідовності $(\alpha^n \ln S_k^{(n)})_{k\geq 1}$. Згідно з теоремою 113 скінченновимірні розподіли цієї послідовності слабко збігаються при $n \to \infty$ до скінченновимірних розподілів послідовності $(Z_\infty^{(*,1)} \vee \ldots \vee Z_\infty^{(*,k)})_{k\geq 1}$ з відповідним лічильним процесом $(N''(x))_{x\geq 0}$. Також для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to\infty} \alpha^n \ln S_k^{(n)} \ = \ \lim_{k\to\infty} (Z_\infty^{(*,1)} \vee \ldots \vee Z_\infty^{(*,k)}) \ = \ \infty \quad \text{м.н.},$$

оскільки $\xi > 0$ м.н. та Z_∞^* має необмежений носій. Згідно з лемою 177 з вищенаведеного випливає збіжність лічильних процесів в просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з M_1-топологією. $\square$

Доведення теореми 116. Твердження теореми випливає з ланцюжка

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{T(\lfloor e^{\alpha^{-n}x}\rfloor) - n \leq k\right\} \ &= \ \mathbb{P}\left\{S_1^{(n+k)} > \lfloor e^{\alpha^{-n}x}\rfloor\right\} \\ &= \ \mathbb{P}\left\{\alpha^{n+k} \ln S_1^{(n+k)} > \alpha^k x\right\} \to \mathbb{P}\{Z_\infty^* > \alpha^k x\}\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. $\square$

Доведення теореми 118. Підхід до доведення схожий на підхід в теоремі 112 у випадку скінченного середнього. Нехай $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots)$ є розв'язком (5.15), тобто

$$(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots) \overset{\mathrm{d}}{=} \alpha(X_{R(1)}^{(0)}, X_{R(2)}^{(0)}, \ldots).$$

Згідно з теоремою Колмогорова про продовження міри, існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, який містить такі об'єкти:

- послідовність $(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots)$;
- двосторонню послідовність $(R^{(n)}(\cdot))_{n\in\mathbb{Z}}$ незалежних копій випадкового блукання $R(\cdot)$ та відповідні відображення (5.28);
- двосторонню стаціонарну послідовність $(V_k)_{k\in\mathbb{Z}} = \big((X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ таку, що V_k не залежить від$(\phi_n)_{n\le k}$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$ та

$$V_0 \ := \ \big(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots\big), \quad V_k \ = \ \phi_{k+1}(V_{k+1}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

  що еквівалентно

$$\big(X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \ldots\big) \ = \ \alpha \left(X^{(k+1)}_{R^{(k+1)}(1)}, X^{(k+1)}_{R^{(k+1)}(2)}, \ldots\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Визначимо послідовність випадкових мір $(\upsilon_n)_{n\ge 0}$ на $[0,\infty)$ рівностями

$$\upsilon_n[0,t] \ := \ \alpha^n \ln X^{(n)}_{\lfloor \exp(t\alpha^{-n})\rfloor}, \quad t \ge 0$$

при $n \in \mathbb{N}_0$. Як в доведенні теореми 112, достатньо показати, що послідовність $(\upsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ збігається м.н. в просторі $M_p([0,\infty))$, тобто

$$\upsilon_n \to \upsilon_\infty, \quad n \to \infty, \quad \text{м.н.} \tag{5.29}$$

Розглянемо випадкові відображення $h_n(t) = \alpha^n \ln R^{(n)}(\lfloor e^{t\alpha^{-(n-1)}}\rfloor)$, $n \in \mathbb{N}$ та $t \ge 0$, введені в твердженні 195. Маємо

$$\upsilon_n[0,t] \ = \ \upsilon_{n+1}[0, h_{n+1}(t)], \tag{5.30}$$

що після ітерацій дає

$$\upsilon_k[0,\, t] \ = \ \upsilon_{n+k}[0,\, h^{(n+k\downarrow k+1)}(t)] \tag{5.31}$$

при $n \in \mathbb{N}_0$ та $t \ge 0$. Зокрема, для $k = 0$ маємо

$$\upsilon_0([0,\, t]) \ = \ \upsilon_n \left[0,\, \alpha^n \ln \left(\sum_{j=1}^{\lfloor e^t \rfloor} Z_{n,j}\right)\right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \ge 0. \tag{5.32}$$

Оскільки
$$\lim_{t\to\infty}\lim_{n\to\infty}\alpha^n \ln\sum_{j=1}^{\lfloor e^t\rfloor} Z_{n,j} = \lim_{t\to\infty} Z^*_\infty(t) = \infty \quad \text{м.н.},$$
див. (G1) в твердженні 195, то з формули (5.32) випливає, що для довільного $T > 0$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \upsilon_n[0,T] \ < \ \infty \quad \text{м.н.},$$
а, отже, м.н. відносна компактність $(\upsilon_n)_{n\geq 0}$ в грубій топології.

Нехай $(\upsilon_{m_n})_{n\geq 1}$ є м.н. збіжною підпослідовністю з границею υ'_∞. З формули (5.31) маємо м.н. для кожного $k\in\mathbb{N}_0$ та $m_n > k$
$$\upsilon_k[0,t] \ = \ \upsilon_{m_n}[0, h^{(m_n\downarrow k+1)}(t)], \quad t\geq 0. \tag{5.33}$$
Згідно з частиною (G2) твердження 195,
$$h^{(m_n\downarrow k+1)}(t) \to \alpha^k Z^*_{k,\infty}(t\alpha^{-k}), \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$
у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з J_1-топологією. Спрямовуючи $n\to\infty$ в (5.33) та застосовуючи лему 176, отримуємо
$$\upsilon_k[0,t] \ = \ \upsilon'_\infty[0,\, \alpha^k Z^*_{k,\infty}(t\alpha^{-k})], \quad t > 0$$
для кожного фіксованого $k\in\mathbb{N}_0$. Згідно з частиною (G5) твердження 195 випадкова множина точок $\alpha^k Z^*_{k,\infty}(t\alpha^{-k})$ при $t\geq 0$, $k\in\mathbb{N}_0$ є м.н. щільною в $[0,\infty)$. Тому, якщо υ''_∞ є іншою частковою границею $(\upsilon_n)_{n\geq 1}$, то м.н.
$$\upsilon''_\infty[0,t] \ = \ \upsilon'_\infty[0,t]$$
на щільній підмножині $[0,\infty)$, а, отже, $\upsilon''_\infty \equiv \upsilon'_\infty$, що доводить збіжність (5.29).

Властивість (5.16) перевіряється так, як в теоремі 112. □

5.2 Випадкові просіювання, породжені процесом рекордів, та їх зв'язок з коалесцентами з множинними злиттями

Нехай R є множиною індексів рекордів (тобто елементів, що більші за всі попередні елементи) у нескінченній послідовності незалежних однаково розподілених в.в. з деяким неперервним розподілом, який, не зменшуючи загальності, можна вважати рівномірним на $[0,1]$. За відомою теоремою Реньї, див.

наприклад с. 58 в [213], послідовність $R = \{R(k) : k \geq 1\}$ утворює однорідний ланцюг Маркова з механізмом переходу

$$R(1) = 1, \quad \mathbb{P}\{R(k) = j | R(k-1) = i\} = \frac{i}{j(j-1)}, \quad j > i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В термінах процедури вибору лідера, описаний алгоритм просіювання можна представити так: зліченна кількість занумерованих гравців генерують незалежно один від одного рівномірні на $[0, 1]$ в.в., ті з гравців, що згенерували значення, яке є більшим, ніж всі попередні згенеровані в цьому раунді значення, переходять в наступний раунд, інші вибувають з гри. Гравці, які перейшли в наступний раунд, перенумеровуються зі збереженням порядку і процедура повторюється заново. Зауважимо, що в такій моделі перший гравець назавжди залишається в грі.

Введемо випадкові індикатори

$$\xi_i^{(n)} \;:=\; \mathbb{1}\{\text{в раунді } n \text{ гравець з поточним номером } i \text{ генерує рекорд}\}, \tag{5.34}$$

при $i, n \in \mathbb{N}$. За вже згаданою теоремою Реньї нескінченні вектори $(\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots)$, $n \in \mathbb{N}$, є незалежними копіями вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots)$, де $(\xi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з розподілами Бернуллі:

$$\mathbb{P}\{\xi_i = 1\} \;=\; 1 - \mathbb{P}\{\xi_i = 0\} = \frac{1}{i}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{5.35}$$

Введемо випадкові величини

- $N_M^{(n)}$, число точок серед $1, 2, \ldots, M$, що не були просіяні у перших n раундах, формально

$$N_M^{(0)} := M, \quad N_M^{(n)} := \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_{N_M^{(n-1)}}^{(n)}, \quad M, n \in \mathbb{N}. \tag{5.36}$$

- $1 = S_1^{(n)} < S_2^{(n)} < S_3^{(n)} < \cdots$, початкові номери точок, що після перших n раундів та перенумерування мають номери $1, 2, \ldots$, формально

$$S_j^{(n)} := \inf\{i \in \mathbb{N} : N_i^{(n)} = j\}, \quad j, n \in \mathbb{N}. \tag{5.37}$$

- $T(M)$, число раундів поки всі точки $2, \ldots, M$ не будуть просіяні (нагадаємо, точка 1 залишається в грі назавжди), тобто

$$T(M) \;:=\; \inf\{n \in \mathbb{N} \colon N_M^{(n)} = 1\}, \quad M \in \mathbb{N}. \tag{5.38}$$

- $T_0(M)$, число раундів серед $1, \ldots, T(M)$ в яких принаймні одна точка просіюється:
$$T_0(M) := \sum_{j=0}^{T(M)-1} \mathbb{1}_{\{N_M^{(j)} \neq N_M^{(j+1)}\}}. \tag{5.39}$$

Введемо також процес

$$K(M) \ := \ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_M, \quad M \in \mathbb{N}, \tag{5.40}$$

який рахує рекорди у вибірці, тобто $K(M)$ є числом рекордів серед перших $\{1, 2, \ldots, M\}$ точок нескінченної вибірки.

5.2.1 Граничні теореми. Для формулювання наших результатів нам знадобиться поняття модифікованої *тетрації*. При $\rho \geq 1$ покладемо

$$E_0(\rho) \ := \ \rho, \quad E_n(\rho) \ := \ e^{E_{n-1}(\rho)-1}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.41}$$

Віднімання одиниці 1 у цьому означенні забезпечує те, що кожна з функцій E_n є строго зростаючим неперервним відображенням півосі $[1, +\infty)$ на себе з $E_n(1) = 1$.

Теорема 119. *Має місце збіжність*

$$(T([E_n(\rho)]) - n)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (T^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n \to \infty, \tag{5.42}$$

де $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ є неперервним за ймовірністю випадковим процесом з неспадними траєкторіями. Розподіли процесу $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ задовольняють стохастичне рівняння нерухомої точки

$$(T^*(e^{\rho-1}))_{\rho>1} \overset{f.d.}{=} (T^*(\rho) + 1)_{\rho>1}. \tag{5.43}$$

Зокрема, для кожного $\rho > 1$,

$$T([E_n(\rho)]) - n \ \overset{\text{d}}{\to} T^*(\rho), \quad n \to \infty. \tag{5.44}$$

Випадкові величини $T^*(\rho)$, $\rho > 1$, є цілозначними та $\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$.

Зауваження 120. Граничний процес $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ не належить жодному з відомих нам класів стохастичних процесів і нам не вдалось отримати замкнену

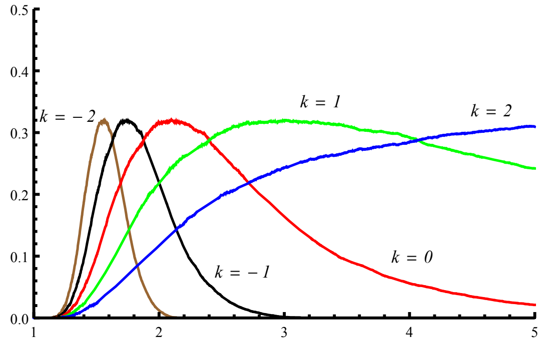


Рис. 5.2: Функції $\rho \mapsto \mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\}$ при $k \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Кожна з цих функції може бути використана для генерації інших внаслідок співвідношення (5.43).

форму навіть для одновимірних розподілів $\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Проте, ці ймовірності можна знайти чисельно за допомогою симуляції Монте-Карло, див. рисунок 5.2.

Позиції точок після n просіювань. Перейдемо до граничних теорем для $(S_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$ при $n \to \infty$. Нам знадобляться модифіковані повторні логарифми, що рекурсивно визначені при $\rho \geq 1$ формулами

$$L_0(\rho) := \rho, \quad L_n(\rho) := 1 + \ln L_{n-1}(\rho), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.45}$$

Очевидно, що кожна L_n є строго зростаючою неперервною функцією, яка відображає $[1, +\infty)$ на себе та $L_n(1) = 1$. Функції L_n та E_n є оберненими одна до одної та

$$L_n(E_n(s)) = E_n(L_n(s)) = s, \quad s \geq 1.$$

Понад це, для довільних цілих $n \geq m \geq 0$

$$L_n(E_m(s)) = L_{n-m}(s). \quad L_m(E_n(s)) = E_{n-m}(s), \quad s \geq 1. \tag{5.46}$$

Таким чином, можна покласти $L_{-n} := E_n$ та $E_{-n} := L_n$ при $n \in \mathbb{N}_0$. Множина функцій $\{E_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (еквівалентно, $\{L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$) утворює нескінченну циклічну підгрупу групи $(\mathcal{C}^{\uparrow}([1,\infty)), \circ)$, що складається з неперервних, строго зростаючих функцій, які відображають $[1, \infty)$ на себе з композицією в якості групової операції.

Теорема 121. *Знайдуться в.в.* $1 = S_1^* \leq S_2^* \leq \cdots$ *такі, що*

$$(L_n(S_1^{(n)}), L_n(S_2^{(n)}), L_n(S_3^{(n)}), \ldots) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (S_1^*, S_2^*, S_3^*, \ldots), \quad n \to \infty. \tag{5.47}$$

Граничний вектор задовольняє стохастичне рівняння нерухомої точки

$$(S_1^*, S_2^*, S_3^*, \ldots) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (L_1(S_{R(1)}^*), L_1(S_{R(2)}^*), L_1(S_{R(3)}^*), \ldots), \tag{5.48}$$

де індекси рекордів $(R(j))_{j\in\mathbb{N}}$ *у правій частині не залежить від* $(S_j^*)_{j\in\mathbb{N}}$.

Зауваження 122. Нормування в теоремі 121 є L_n, а не

$$\widetilde{L}_n(\cdot) := \underbrace{\ln \circ \ldots \circ \ln}_{n \text{ раз}}(\cdot),$$

яке може здаватись більш природнім вибором. Проте, вибір $\widetilde{L}_n$ в якості нормування приводить до неминучих проблем, оскільки $\widetilde{L}_n(S_j^{(n)})$ не визначений на множині додатної ймовірності

$$\Big\{S_j^{(n)} \le \underbrace{\exp \circ \ldots \circ \exp}_{n-2 \text{ раз}}(1)\Big\}.$$

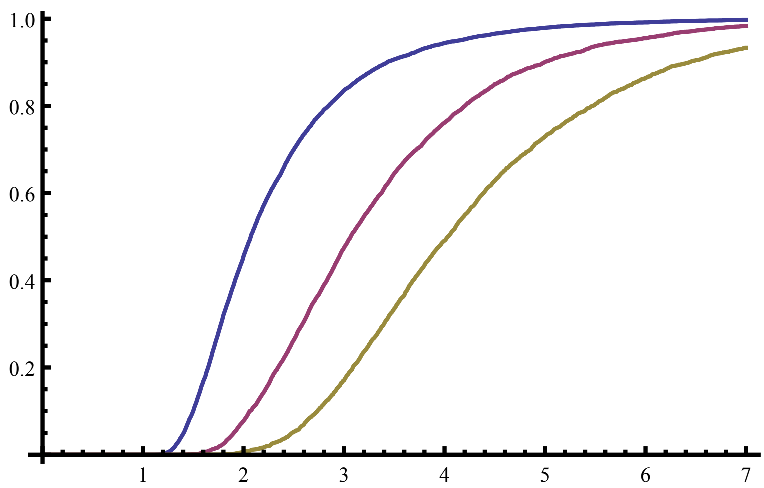


Рис. 5.3: Функції розподілу S_2^*, S_3^*, S_4^* (зліва направо).

Оскільки вектор $(1, 1, \ldots)$ також задовольняє рівняння (5.48), виникає питання чи не є граничний вектор в теоремі 121 виродженим. Як демонструє наступний результат, це не так, див. також рисунок 5.3.

Теорема 123. *Послідовність* $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ *задовольняє*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{S_k^*}{k} = 1 \quad \text{м.н.}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbb{E}S_k^*}{k} = 1, \qquad \frac{S_k^* - k}{\sqrt{k}} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1).$$

У доведеннях ми часто використовуватимемо факт, сформульований у наступному твердженні, що розподіл S_k^* при $k \ge 2$ є неперервним та при $m \ge 2$ спільний розподіл $(S_2^*, \ldots, S_m^*)$ присвоює додатну масу кожному $(m-1)$-вимірному інтервалу.

Твердження 124. *Розподіл S_k^* є неперервним для кожного $k \geq 2$ та*

$$\mathbb{P}\{S_2^* \in [\alpha_2, \beta_2], \ldots, S_m^* \in [\alpha_m, \beta_m]\} > 0 \tag{5.49}$$

для всіх $1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_m < \beta_m$ та $m \in \mathbb{N}$.

Сформулюємо тепер «просторово-часову» версію теореми 121. Як ми вже зауважили, розподіл вектора $V := (S_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ є інваріантним відносно випадкового відображення $\psi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, яке визначене

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \ \mapsto \ (L_1(x_{R(1)}), L_1(x_{R(2)}), L_1(x_{R(3)}), \ldots). \tag{5.50}$$

Ітеруючи це відображення, можемо побудувати односторонню стаціонарну послідовність $(V_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ таку, що $V_k = (S_{k,j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}_0$, є $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-значним випадковим елементом з тим же розподілом, що й V, та V_{k+1} є образом V_k під дією незалежної копії відображення ψ. Понад це, за теоремою Колмогорова про продовження, можна побудувати двосторонню стаціонарну послідовність $(V_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ таку, що $V_{k+1} = \psi^{(k)}(V_k)$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$, де $(\psi^{(k)})_{k \in \mathbb{Z}}$ є послідовністю незалежних копій ψ.

Теорема 125. *Поклавши $L_{n+k}(S_j^{(n+k)}) := 0$ при $n + k < 0$, маємо*

$$(L_{n+k}(S_j^{(n+k)}))_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (S_{k,j}^*)_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}}, \quad n \to \infty.$$

Число точок після n просіювань. Нагадаємо, що $N_M^{(n)}$ позначає число точок серед $\{1, \ldots, M\}$, що не були просіяні в перших n раундах. Нехай $N^*(\rho)$ позначає лічильний процес для послідовності $(S_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$:

$$N^*(\rho) := \#\{k \in \mathbb{N} \colon S_k^* \leq \rho\}, \quad \rho \geq 1. \tag{5.51}$$

Наш наступний результат – двоїста теорема до теореми 121.

Теорема 126. *Процес $(N^*(\rho))_{\rho \geq 1}$ є неперервним за ймовірністю та*

$$(N_{[E_n(\rho)]}^{(n)})_{\rho \geq 1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (N^*(\rho))_{\rho \geq 1}, \quad n \to \infty. \tag{5.52}$$

Якщо $(K(M))_{M \in \mathbb{N}}$ це процес, що рахує рекорди, див. формулу (5.40)*, який не залежить від $(N^*(\rho))_{\rho \geq 1}$, то має місце рівність розподілів*

$$(K(N^*(\rho)))_{\rho \geq 1} \overset{f.d.}{=} (N^*(1 + \ln \rho))_{\rho \geq 1}. \tag{5.53}$$

Зауваження 127. На відміну від теореми 119 параметр ρ в теоремі 126 змінюється в $[1, \infty)$, а не в $(1, \infty)$. Якщо $\rho = 1$, то обидві частини (5.52) рівні 1.

Нагадаємо з вищенаведеної теореми 125, що $(S^*_{k,j})_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ є «просторово-часовою» границею випадкового поля $(L_{n+k}(S_j^{(n+k)}))_{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ при $n \to \infty$. При $\rho \geq 1$ визначимо лічильні процеси

$$N^*_k(\rho) := \#\{j \in \mathbb{N} : S^*_{k,j} \leq L_k(\rho)\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Наступний результат – «просторово-часова» версія теореми 126.

Теорема 128. *Маємо*

$$\left(N^{(n+k)}_{[E_n(\rho)]}\right)_{\rho\geq 1, k\in\mathbb{Z}} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (N^*_k(\rho))_{\rho\geq 1, k\in\mathbb{Z}}, \quad n \to \infty.$$

Число результативних раундів. Нагадаємо з означення (5.39), що

$$T_0(M) \;:=\; \sum_{j=0}^{T(M)-1} \mathbb{1}_{\{N_M^{(j)} \neq N_M^{(j+1)}\}}.$$

Цей функціонал нам знадобиться при аналізі коалесцента Пуассона-Діріхле. Сформулюємо спочатку результат, який описує поведінку нашої моделі незадовго до моменту часу $T([E_n(\rho)])$, коли всі точки серед $\{1, 2, \ldots, [E_n(\rho)]\}$ (крім першої) будуть просіяні. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}$ та покладемо

$$\mathcal{Z}_{p,n}(\rho) \;:=\; \left(N^{(T([E_n(\rho)])-1)}_{[E_n(\rho)]}, N^{(T([E_n(\rho)])-2)}_{[E_n(\rho)]}, \ldots, N^{(T([E_n(\rho)])-p)}_{[E_n(\rho)]}\right).$$

Зауважимо, що перша координата є числом непросіяних в останньому раунді точок серед $1, 2, \ldots, [E_n(\rho)]$, друга координата є числом непросіяних в передостанньому раунді точок серед $1, 2, \ldots, [E_n(\rho)]$ і т.д.

Твердження 129. *Для кожного $p \in \mathbb{N}$,*

$$\Big(T([E_n(\rho)]) - n, \mathcal{Z}_{p,n}(\rho)\Big)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \Big(T^*(\rho), \mathcal{Z}^*_p(\rho)\Big)_{\rho>1}, \quad n \to \infty,$$

де $T^*(\rho)$ визначено в теоремі 119 та

$$\mathcal{Z}^*_p(\rho) \;:=\; \Big(N^*_{T^*(\rho)-1}(\rho), \ldots, N^*_{T^*(\rho)-p}(\rho)\Big).$$

Теорема 130. *Має місце збіжність*

$$(T_0([E_n(\rho)])-n)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (T_0^*(\rho))_{\rho>1}, \quad n\to\infty,$$

де $T_0^*(\rho) := T^*(\rho) - \sum_{j=-\infty}^{T^*(\rho)-1} \mathbb{1}_{\{N_j^*(\rho)=N_{j+1}^*(\rho)\}}$. *Зокрема, для кожного* $\rho>1$,

$$T_0([E_n(\rho)])-n \overset{\text{d}}{\to} T_0^*(\rho), \quad n\to\infty.$$

Випадкові величини $T_0^*(\rho)$, $\rho>1$, *є цілозначними та невиродженими.*

5.2.2 Коалесцент Пуассона-Діріхле. В означенні коалесцентів з множинними злиттями постулюється, що в кожен момент часу можливе злиття лише однієї групи блоків. В роботах [207, 246]було запропоновано концепцію коалесцентів з *одночасними множинними злиттями*. Їх еволюція описується правилом: якщо в деякий момент часу $t\geq 0$ число блоків дорівнює m, то вони зливаються в j блоків, що містять $k_1,k_2,\dots,k_j$ початкових блоків ($k_1+k_2+\dots+k_j=m$ та $k_1\geq k_2\geq\dots\geq k_j$, $k_1\geq 2$) з інтенсивністю

$$\psi_j(k_1,k_2,\dots,k_j) \;=\; \int_{\Delta^*} \sum_{\substack{i_1,\dots,i_j\in\mathbb{N}\\ \text{всі різні}}} x_{i_1}^{k_1}\cdots x_{i_j}^{k_j}\,\frac{\Xi(dx)}{(x,x)}, \tag{5.54}$$

де[2] $\Delta^* := \{x=(x_1,x_2,\dots): x_1\geq x_2\geq\dots\geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i=1\}$ та $(x,x) := \sum_{i=1}^\infty x_i^2$, а $\Xi(\cdot)$ є деякої скінченною мірою на Δ^*.Найвідомішим нетривіальним прикладом ймовірнісних мір на Δ^* є міри Пуассона-Діріхле PD_θ при $\theta>0$, а коалесцент $(\mathfrak{P}_n^\theta(t))_{t\geq 0}$ з мірою

$$\Xi(\mathrm{d}x)/(x,x) \;=\; \mathrm{PD}_\theta(\mathrm{d}x)$$

називається коалесцентом Пуассона-Діріхле.

За допомогою запропонованої процедури вибору лідера вдалось розв’язати відкриту проблему про асимптотику числа X_n злиттів в коалесценті Пуассона-Діріхле при $\theta=1$.

[2]Формула (5.54) не є найзагальнішою, що забезпечує узгодженість. В загальному випадку, міра Ξ може бути зосереждена на більшому симплексі $\Delta := \{x=(x_1,x_2,\dots): x_1\geq x_2\geq\dots\geq 0, \sum_{i=1}^\infty x_i\leq 1\}$, а формула для інтенсивностей ψ_j стає більш складною, див. формулу (11) в [246]. Якщо Ξ зосереджена на Δ^*, то формула (11) в [246] зводиться до (5.54), див. формулу (2) в [206].

Теорема 131. *Для довільного фіксованого $\rho > 1$,*

$$X_{[E_n(\rho)]} - n \stackrel{\mathrm{d}}{\to} T_0^*(\rho), \quad n \to \infty,$$

де $T_0^*(\rho)$, $\rho > 1$ є цілозначною невиродженою в.в., що визначена в теоремі 130.

Доведення. Покажемо, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність розподілів $X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_0(n)$. Відомо, див. с. 2170 в [206], що число блоків $J(n)$ після першого злиття в коалесценті Пуассона-Діріхле має розподіл

$$\mathbb{P}\{J_\theta(n) = k\} \ = \ \frac{s_{n,k}}{n! - 1}, \quad 1 \le k < n, \quad n \ge 2, \tag{5.55}$$

де $s_{n,k}$ є числом Стірлінга першого роду. Отже, маємо рекурсію з випадковим індексом

$$X_1 = 0, \quad X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{X}_{J(n)}, \quad n \ge 2.$$

Покажемо, що послідовність $(T_0(n))_{n \in \mathbb{N}}$ задовольняє таку саму рекурсію. Очевидно, $T_0(1) = 0$. Фіксуючи число точок серед $\{1, 2, \dots, n\}$, які залишились після першого просіювання, яке має розподіл $K(n)$, бачимо, що має місце рівність

$$T_0(n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{1}_{\{K(n) < n\}} + \widehat{T}_0(K(n)), \quad n \ge 2. \tag{5.56}$$

Залишається помітити, що

$$\mathbb{P}\{J(n) = k\} \ = \ \frac{s_{n,k}}{n! - 1} = \mathbb{P}\{K(n) = k | K(n) < n\}, \quad 1 \le k < n, \quad n \ge 2,$$

а тому $T_0(n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} 1 + \widehat{T}_0(J(n))$ при $n \ge 2$, що доводить $X_n \stackrel{\mathrm{d}}{=} T_0(n)$ при $n \in \mathbb{N}$. □

5.2.3 Доведення. Ми розпочнемо з доведення теореми 121, яка є основним результатом про збіжність в цій моделі.

Доведення теореми 121. Для $m, n \in \mathbb{N}$, позначимо $K^{(m)}(n)$ число рекордів серед перших n точок в раунді m та $R^{(m)}(n)$ індекс n-го рекорду в раунді m, формально

$$K^{(m)}(n) \ := \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(m)}, \quad R^{(m)}(n) := \inf\{j \in \mathbb{N} : K^{(m)}(j) = n\}.$$

Помітимо, що

$$(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, S_3^{(n)}, \dots) \; = \; (S_{R^{(n)}(1)}^{(n-1)}, S_{R^{(n)}(2)}^{(n-1)}, S_{R^{(n)}(3)}^{(n-1)}, \dots), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ітеруючи це співвідношення та використавши початкові значення $S_j^{(0)} = j$, маємо

$$S^{(n)} \; := \; \big(S_1^{(n)}, S_2^{(n)}, \dots\big) \; = \; \big(R^{(1\uparrow n)}(1), R^{(1\uparrow n)}(2), \dots\big).$$

Перейшовши до ітерацій назад, отримуємо

$$S^{(n)} \overset{\mathrm{d}}{=} \big(R^{(n\downarrow 1)}(1), R^{(n\downarrow 1)}(2), \dots\big), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.57}$$

Покладемо

$$\eta_j^{(0)} \; := \; j, \quad \eta_j^{(n)} \; := \; R^{(n\downarrow 1)}(j) \quad \text{for } j, n \in \mathbb{N}. \tag{5.58}$$

Наша мета – показати, що для довільного фіксованого $j \in \mathbb{N}$, послідовність

$$\mathcal{X}_{n,\,j} \; := \; L_n(\eta_j^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.59}$$

збігається м.н. при $n \to \infty$. Для цього достатньо показати, що послідовність $\mathcal{X}_{n,\,j}$ має м.н. обмежену варіацію для кожного фіксованого $j \in \mathbb{N}$, тобто

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathcal{X}_{n,\,j} - \mathcal{X}_{n-1,\,j}| < \infty \quad \text{м.н.} \tag{5.60}$$

Це очевидно при $j = 1$, оскільки $\mathcal{X}_{n,\,1} = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}_0$. Припустимо, що $j \in \{2, 3, \dots\}$ та помітимо, що згідно з лемою 196

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\frac{m}{L_1(R(m))} \right)^r \; < \; C_r, \quad \sup_{m \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left| \frac{L_1(R(m)) - m}{\sqrt{m}} \right|^r \; < \; C_r$$

для кожного $r > 0$ та деякої константи C_r, яка залежить тільки від r. Оскільки $\eta_j^{(n-1)}$ не залежить від $R^{(n)}$ та $\eta_j^{(n)} = R^{(n)}(\eta_j^{(n-1)})$, див. (5.58), маємо

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left(\frac{\eta_j^{(n-1)}}{L_1(\eta_j^{(n)})} \right)^r \; < \; C_r, \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left| \frac{L_1(\eta_j^{(n)}) - \eta_j^{(n-1)}}{\sqrt{\eta_j^{(n-1)}}} \right|^r \; < \; C_r. \tag{5.61}$$

З цих співвідношень та теореми про середнє значення для диференційовних функцій, отримуємо

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\mathcal{X}_{n,\,j} - \mathcal{X}_{n-1,\,j}| &= \mathbb{E}\Big| L_n(\eta_j^{(n)}) - L_{n-1}(\eta_j^{(n-1)}) \Big| \\ &= \mathbb{E}\Big| L_{n-1}\Big(L_1(\eta_j^{(n)})\Big) - L_{n-1}(\eta_j^{(n-1)}) \Big| = \mathbb{E}\left(L_{n-1}'(\theta_n(j)) \Big| L_1(\eta_j^{(n)}) - \eta_j^{(n-1)} \Big| \right) \end{aligned}$$

для деякого

$$\theta_n(j) \in \left[L_1(\eta_j^{(n)}) \wedge \eta_j^{(n-1)},\, L_1(\eta_j^{(n)}) \vee \eta_j^{(n-1)}\right].$$

При $n \geq 2$ та $x \in [1, \infty)$, маємо

$$0 < L'_{n-1}(x) \leq \frac{1}{x}, \tag{5.62}$$

а тому за нерівністю Коші-Буняковського-Шварца

$$\mathbb{E}|\mathcal{X}_{n,j} - \mathcal{X}_{n-1,j}| \ \leq \ \left(\mathbb{E}\left(\frac{\eta_j^{(n-1)}}{\theta_n^2(j)}\right)\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left|\frac{L_1(\eta_j^{(n)}) - \eta_j^{(n-1)}}{\sqrt{\eta_j^{(n-1)}}}\right|^2\right)^{1/2}.$$

Друге математичне сподівання в правій частині обмежене з огляду на (5.61), а $\mathbb{E}\left(\eta_j^{(n-1)}\theta_n^{-2}(j)\right)$ можна далі оцінити зверху так

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-1} \mathbb{1}_{\left\{L_1(\eta_j^{(n)}) > \eta_j^{(n-1)}\right\}} \ + \ \frac{\eta_j^{(n-1)}}{L_1^2(\eta_j^{(n)})} \mathbb{1}_{\left\{L_1(\eta_j^{(n)}) \leq \eta_j^{(n-1)}\right\}}\right) \\
&\quad \leq \ \mathbb{E}\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-1} \ + \ \mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta_j^{(n-1)}}\left(\frac{\eta_j^{(n-1)}}{L_1(\eta_j^{(n)})}\right)^2\right) \\
&\quad \leq \ \mathbb{E}\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-1} \ + \ \left(\mathbb{E}\left(\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-2}\right)\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left(\frac{\eta_j^{(n-1)}}{L_1(\eta_j^{(n)})}\right)^4\right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Другий множник другого доданку обмежений зверху, див. (5.61). Поєднуючи отримані оцінки та використовуючи те, що $\eta_j^{(n-1)} \geq 1$, отримуємо

$$\mathbb{E}|\mathcal{X}_{n,j} - \mathcal{X}_{n-1,j}| \leq \mathrm{const}\left(\mathbb{E}\left(\frac{1}{\eta_j^{(n-1)}}\right)\right)^{1/4}, \quad n \geq 2. \tag{5.63}$$

При $n = 1$ ця формула не виконується, оскільки формула (5.62) невірна. В цьому разі $L'_0(x) = 1$ та

$$\mathbb{E}|\mathcal{X}_{1,j} - \mathcal{X}_{0,j}| \ = \ \mathbb{E}\left|L_1(\eta_j^{(1)}) - j\right| \ \leq \ \sqrt{j}\left(\mathbb{E}\left|\frac{L_1(\eta_j^{(1)}) - j}{\sqrt{j}}\right|^2\right)^{1/2} \ \leq \ \mathrm{const}\sqrt{j}, \tag{5.64}$$

використавши нерівність Коші-Буняковського-Шварца та (5.61).

Оскільки $j \ge 2$, то $\eta_j^{(n-1)} \ge 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$. Згадуючи, що $\eta_j^{(n)} = R^{(n)}(\eta_j^{(n-1)})$, див. (5.58), та застосовуючи лему 197 отримуємо

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\eta_j^{(n)}\right)^{-1} &= \sum_{k=2}^{\infty} \mathbb{P}\{\eta_j^{(n-1)} = k\}\, \mathbb{E}\left(R^{(n)}(k)\right)^{-1} \\ &\le \frac{3}{4} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \mathbb{P}\{\eta_j^{(n-1)} = k\} = \frac{3}{4} \mathbb{E}\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-1}\end{aligned}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Ітеруючи цю нерівність та використовуючи $\eta_j^{(0)} = j$, отримуємо

$$\mathbb{E}\left(\eta_j^{(n)}\right)^{-1} \le \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1}{j}$$

при $n \in \mathbb{N}_0$ та $j \ge 2$. Отже, згадуючи (5.63),

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{E}|\mathcal{X}_{n,j} - \mathcal{X}_{n-1,j}| &\le \text{const} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\mathbb{E}\left(\eta_j^{(n-1)}\right)^{-1}\right)^{1/4} \\ &\le \frac{\text{const}}{j^{1/4}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n/4} \le \frac{\text{const}}{j^{1/4}}. \qquad (5.65)\end{aligned}$$

Це завершує доведення (5.60).

Випадкове відображення ψ, визначене в (5.50) є м.н. неперервним на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, тому граничний вектор задовольняє (5.48). Доведення теореми 121 завершено. □

Доведення теореми 123. Спочатку покажемо, що $k^{-1}S_k^* \to 1$ м.н. В доведенні теореми 121 ми показали, що для кожного фіксованого $k \ge 2$, послідовність $(\mathcal{X}_{n,k})_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається м.н. до деякої в.в., яку ми позначимо $\mathcal{X}_k^*$. Оскільки $(\mathcal{X}_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$ має той самий розподіл, що й $(S_k^*)_{k\in\mathbb{N}}$, достатньо показати

$$k^{-1}\mathcal{X}_k^* \to 1, \quad k \to \infty, \quad \text{м.н.} \qquad (5.66)$$

З формули (5.59) нагадаємо, що $\mathcal{X}_{1,k} = L_1(R^{(1)}(k))$. Згідно з посиленим законом великих чисел для індексів рекордів, див. [213], маємо

$$k^{-1}L_1(R^{(1)}(k)) \to 1, \quad k \to \infty, \quad \text{м.н.} \qquad (5.67)$$

Помітимо, що

$$\mathbb{E}\left|\mathcal{X}_k^* - L_1(R^{(1)}(k))\right| \;=\; \mathbb{E}\left|\sum_{n=2}^{\infty}(\mathcal{X}_{n,k} - \mathcal{X}_{n-1,k})\right| \\ \le\; \sum_{n=2}^{\infty}\mathbb{E}\left|\mathcal{X}_{n,k} - \mathcal{X}_{n-1,k}\right| \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{k^{1/4}}, \quad (5.68)$$

де ми використали (5.65) на останньому кроці. З нерівності Маркова випливає, що для кожного $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left\{\left|\frac{\mathcal{X}_k^*}{k} - \frac{L_1(R^{(1)}(k))}{k}\right| > \varepsilon\right\} \;\le\; \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}\left|\frac{\mathcal{X}_k^* - L_1(R^{(1)}(k))}{k}\right| \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{\varepsilon k^{5/4}},$$

а оскільки права частина сумується по k, то лема Бореля-Кантеллі у поєднанні з формулою (5.67) дає (5.66).

Для доведення асимптотичного співвідношення $\mathbb{E}S_k^* \sim k$ запишемо

$$\mathbb{E}\left|\mathcal{X}_k^* - k\right| = \;\mathbb{E}\left|\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{X}_{n,k} - \mathcal{X}_{n-1,k})\right| \\ \le \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}\left|\mathcal{X}_{n,k} - \mathcal{X}_{n-1,k}\right| \;\le\; \mathrm{const}\sqrt{k} + \frac{\mathrm{const}}{k^{1/4}} \;\le\; \mathrm{const}\sqrt{k}, \quad (5.69)$$

де було використано (5.64) та (5.65).

Для доведення центральної граничної теореми достатньо показати, що

$$k^{-1/2}\big(\mathcal{X}_k^* - k\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1), \quad k \to \infty. \quad (5.70)$$

Центральна гранична теорема для індексів рекордів, див. с. 63 в [213], стверджує, що

$$k^{-1/2}\big(L_1(R^{(1)}(k)) - k\big) \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{S}_2(1), \quad k \to \infty, \quad (5.71)$$

а з (5.68) ми знаємо, що

$$\mathbb{E}\left|\frac{\mathcal{X}_k^* - k}{\sqrt{k}} - \frac{L_1(R^{(1)}(k)) - k}{\sqrt{k}}\right| \;=\; \frac{1}{\sqrt{k}}\mathbb{E}\left|\mathcal{X}_k^* - L_1(R^{(1)}(k))\right| \;\le\; \frac{\mathrm{const}}{k^{3/4}}. \quad (5.72)$$

Поєднання (5.71) та (5.72) доводить (5.70). □

Доведення твердження 124. Ми повинні показати, що S_k^* не має атомів при $k \ge 2$. Припустимо протилежне, нехай a є атомом S_k^* найбільшої маси, тобто

$p := \mathbb{P}\{S_k^* = a\} > 0$ та $\mathbb{P}\{S_k^* = b\} \le p$ для всіх $b \in \mathbb{R}$. Стохастичне рівняння нерухомої точки (5.48) дає

$$\begin{aligned} p \;=\; \mathbb{P}\{S_k^* = a\} \;&=\; \mathbb{P}\{S_{R(k)}^* = E_1(a)\} \\ &= \mathbb{P}\{R(k) = k\}\,\mathbb{P}\{S_k^* = E_1(a)\} \;+\; \sum_{l=k+1}^{\infty} \mathbb{P}\{R(k) = l\}\,\mathbb{P}\{S_l^* = E_1(a)\}. \end{aligned}$$

Оскільки $\mathbb{P}\{S_k^* = E_1(a)\} \le p$ та $\mathbb{P}\{R(k) = k\} = 1/k! < 1$, то S_l^*, принаймні для одного $l \ge k+1$, задовольняє $\mathbb{P}\{S_l^* = E_1(a)\} \ge p$, а, отже, має атом маси не менше p. Повторюючи ці міркування, отримуємо послідовність $k < k_1 < k_2 < \ldots$ таку, що $S_{k_i}^*$ має атом маси не менше p. Таку саму властивість матиме й послідовність

$$W_i \;:=\; k_i^{-1/2}\big(S_{k_i}^* - k_i\big), \quad i \in \mathbb{N}.$$

З іншого боку, за теоремою 123 ми знаємо, що W_i слабко збігається до стандартного нормального розподілу, який є абсолютно неперервним. Ця суперечність доводить неперервність S_k^*.

Доведення того, що

$$\mathbb{P}\{\mathcal{X}_2^* \in [\alpha_2, \beta_2], \ldots, \mathcal{X}_m^* \in [\alpha_m, \beta_m]\} \;>\; 0$$

для всіх $1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_m < \beta_m$ ми не наводимо. Його можна знайти в [10]. □

Доведення теореми 125. Нагадаємо позначення $S^{(n)} = (S_j^{(n)})_{j\in\mathbb{N}}$. Нам потрібно показати, що

$$(L_{n+k}(S^{(n+k)}))_{k\in\{-p,\ldots,p\}} \;\xrightarrow{\mathrm{d}}\; (V_k)_{k\in\{-p,\ldots,p\}} \tag{5.73}$$

для кожного $p \in \mathbb{N}$, де L_{n+k} застосовується покоординатно та, нагадаємо, $V_k = (S_{k,j}^*)_{j\in\mathbb{N}}$. Розглядатимемо обидві частини (5.73) як випадкові вектори з координатами в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Нагадаємо, що $(\psi^{(j)})_{j\in\mathbb{Z}}$ є родиною незалежних копій відображення ψ та припустимо, що $S^{(n-p)}$ не залежить від цієї сім'ї. За визначенням ψ, див. (5.50),

$$\Big(L_{p+k}\big(S^{(n+k)}\big)\Big)_{k\in\{-p,\ldots,p\}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \Big(\psi^{(k-1\downarrow -p)}\big(S^{(n-p)}\big)\Big)_{k\in\{-p,\ldots,p\}},$$

де ми використали, що $\psi^{(j)}$ комутує з L_1 при покоординатному застосуванні. Застосовуючи відображення L_{n-p} до обох частин, отримуємо

$$\Big(L_{n+k}(S^{(n+k)})\Big)_{k\in\{-p,\dots,p\}} \overset{\mathrm{d}}{=} \Big(\psi^{(k-1\downarrow-p)}(L_{n-p}(S^{(n-p)}))\Big)_{k\in\{-p,\dots,p\}}.$$

З теореми 121 ми знаємо, що $L_{n-p}(S^{(n-p)}) \overset{\mathrm{d}}{\to} V_{-p}$ при $n\to\infty$. За теоремою про неперервне відображення

$$\Big(L_{n+k}(S^{(n+k)})\Big)_{k\in\{-p,\dots,p\}} \overset{\mathrm{d}}{\to} (\psi^{(k-1\downarrow-p)}(V_{-p}))_{k\in\{-p,\dots,p\}} \;=\; (V_k)_{k\in\{-p,\dots,p\}},$$

що завершує доведення (5.73) та теореми 125. □

Доведення теорем 126 та 128 є простою вправою з огляду на співвідношення двоїстості

$$\{N_M^{(n)}\ge k\} \;=\; \{S_k^{(n)}\le M\},\quad n,k,M\in\mathbb{N}. \tag{5.74}$$

Деталі можна знайти в [10].

Доведення теореми 119. Доведення розбито на п’ять кроків.
КРОК 1. Спочатку доведемо (5.42), тобто

$$(T([E_n(\rho)])-n)_{\rho>1} \overset{\mathrm{f.d.}}{\Rightarrow} (T^*(\rho))_{\rho>1}.$$

Зафіксуємо $m\in\mathbb{N}$, $1<\rho_1<\dots<\rho_m$, $k_1,\dots,k_m\in\mathbb{Z}$. При великих n маємо

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T([E_n(\rho_i)])-n\le k_i,\ i=1,\dots,m\} &= \mathbb{P}\{S_2^{(n+k_i)}>E_n(\rho_i),\ i=1,\dots,m\}\\ &= \mathbb{P}\{L_{n+k_i}(S_2^{(n+k_i)})>L_{k_i}(\rho_i),\ i=1,\dots,m\},\end{aligned}$$

де було використано (5.46) та рівності $L_{-k}=E_k$ при $k\le 0$. Згідно з теоремою 125

$$(L_{n+k_1}(S_2^{(n+k_1)}),\dots,L_{n+k_m}(S_2^{(n+k_m)})) \overset{\mathrm{d}}{\to} (S^*_{k_1,2},\dots,S^*_{k_m,2}),$$

а випадкові величини $S^*_{k_1,2},\dots,S^*_{k_m,2}$ є неперервними згідно з твердженням 124, оскільки мають той самий розподіл, що й S_2^*. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{T([E_n(\rho_i)])-n\le k_i,\ i=1,\dots,m\} \;=\; \mathbb{P}\{S^*_{k_i,2}>L_{k_i}(\rho_i),\ i=1,\dots,m\},$$

що доводить (5.42), якщо покласти

$$T^*(\rho) \;:=\; \inf\{k \in \mathbb{Z} : S^*_{k,2} > L_k(\rho)\} \;=\; \inf\{k \in \mathbb{Z} : E_k(S^*_{k,2}) > \rho\}, \quad \rho > 1. \tag{5.75}$$

Цей інфімум є коректно визначеним, оскільки $S^*_{k,2} \to \infty$ при $k \to \infty$ за теоремою 123 та $E_k(S^*_{k,2})$ не спадає по k:

$$E_{k+1}(S^*_{k+1,2}) \;=\; E_{k+1}(L_1(S^*_{k,R(2)}) \;=\; E_k(S^*_{k,R(2)}) \;\geq\; E_k(S^*_{k,2}),$$

з огляду на $R(2) \geq 2$.

КРОК 2. Те що, $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ та $(T^*(e^{\rho-1}) - 1)_{\rho>1}$ мають однакові скінченновимірні розподіли випливає з (5.42) внаслідок

$$\begin{aligned}(T^*(\rho))_{\rho>1} &\overset{f.d.}{\Leftarrow} (T([E_{n+1}(\rho)]) - (n+1))_{\rho>1} \\ &= (T([E_n(e^{\rho-1})]) - n - 1)_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (T^*(e^{\rho-1}) - 1)_{\rho>1}.\end{aligned}$$

КРОК 3. З формули (5.75) випливає, що траєкторії $(T^*(\rho))_{\rho>1}$ не спадають та лежать в $D(0,\infty)$. Для доведення стохастичної неперервності запишемо

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\{T^*(\rho+\varepsilon) - T^*(\rho-\varepsilon) \geq 1\} \\ &\quad= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{T([E_n(\rho+\varepsilon)]) - T([E_n(\rho-\varepsilon)]) \geq 1\} \\ &\quad= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{E_n(\rho-\varepsilon) < S^{(n)}_k \leq E_n(\rho+\varepsilon) \text{ для деякого } k \in \mathbb{N}\} \\ &\quad\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{E_n(\rho-\varepsilon) < S^{(n)}_k \leq E_n(\rho+\varepsilon)\}.\end{aligned}$$

Нагадаємо, що $L_n(S^{(n)}_k) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathcal{X}_{n,k}$, тоді

$$\mathbb{P}\{T^*(\rho+\varepsilon) - T^*(\rho-\varepsilon) \geq 1\} \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\rho-\varepsilon < \mathcal{X}_{n,k} \leq \rho+\varepsilon\}. \tag{5.76}$$

Для кожного фіксованого $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho-\varepsilon \leq \mathcal{X}_{n,k} \leq \rho+\varepsilon\} \;=\; \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{P}\{\rho-\varepsilon \leq \mathcal{X}^*_k \leq \rho+\varepsilon\} \;=\; 0,$$

оскільки $\mathcal{X}^*_k \overset{\mathrm{d}}{=} S^*_k$ не має атомів, див. твердження 124. Стохастична неперервність тепер випливатиме з (5.76) та теореми про мажоровану збіжність, якщо показати оцінку

$$\mathbb{P}\{\mathcal{X}_{n,k} \leq a\} \leq \frac{\text{const}}{k^{5/4}} \tag{5.77}$$

для всіх a та достатньо великих n, k. Для цього помітимо, що при великих k,

$$\mathbb{P}\{\mathcal{X}_{n,k} \le a\} \ \le\ \mathbb{P}\left\{|\mathcal{X}_{n,k} - L_1(R^{(1)}(k))| > \frac{k}{3}\right\} + \mathbb{P}\left\{|L_1(R^{(1)}(k)) - k| > \frac{k}{3}\right\}.$$

Згадуючи (5.68), отримуємо з нерівності Маркова

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{|\mathcal{X}_{n,k} - L_1(R^{(1)}(k))| > \frac{k}{3}\right\} \ &\le\ \frac{3}{k}\mathbb{E}|\mathcal{X}_{n,k} - L_1(R^{(1)}(k))| \\ &\le\ \frac{3}{k}\sum_{l=2}^{n}\mathbb{E}|\mathcal{X}_{l,k} - \mathcal{X}_{l-1,k}| \ \le\ \frac{\mathrm{const}}{k^{5/4}},\end{aligned}$$

та для другого члена

$$\mathbb{P}\left\{|L_1(R^{(1)}(k)) - k| > \frac{k}{3}\right\} \ \le\ \frac{3^4}{k^2}\,\mathbb{E}\left(\frac{L_1(R^{(1)}(k)) - k}{\sqrt{k}}\right)^4 \ \le\ \frac{\mathrm{const}}{k^2},$$

де ми використали лему 196 в останній оцінці.

Крок 4. Доведемо, що $\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} > 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Помітимо, що

$$\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} \ =\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{T([E_n(\rho)]) = n + k\}.$$

Якщо рівно одна з точок $2, \ldots, [E_n(\rho)]$ є непросіяною в раунді $n + k - 1$ та вона просіюється в раунді $n + k$, то відбувається подія $\{T([E_n(\rho)]) = n + k\}$. Отже,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{T([E_n(\rho)]) = n + k\} \ &\ge\ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left\{S_2^{(n+k-1)} \le E_n(\rho) < S_3^{(n+k-1)}\right\} \\ &=\ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left\{L_{n+k-1}(S_2^{(n+k-1)}) \le L_{k-1}(\rho) < L_{n+k-1}(S_3^{(n+k-1)})\right\}.\end{aligned}$$

Спрямовуючи $n \to \infty$ та використовуючи теорему 121 та твердження 124, отримуємо

$$\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k\} \ =\ \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{T([E_n(\rho)]) = n + k\} \ \ge\ \frac{1}{2}\,\mathbb{P}\left\{S_2^* \le L_{k-1}(\rho) \le S_3^*\right\},$$

де ймовірність у правій частині є строго додатною внаслідок твердження 124.

□

Доведення твердження 129. Ми доведемо збіжність одновимірних розподілів, збіжність скінченновимірних розподілів доводиться аналогічно, але позначення стають громіздкими. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$ та цілі числа

$2 \le l_1 \le \cdots \le l_p$. Маємо

$$\mathbb{P}\left\{T([E_n(\rho)]) - n = k, N_{[E_n(\rho)]}^{(T([E_n(\rho)])-i)} = l_i,\, i = 1, \ldots, p\right\}$$
$$= \mathbb{P}\{N_{[E_n(\rho)]}^{(n+k)} = 1, N_{[E_n(\rho)]}^{(n+k-i)} = l_i,\, i = 1, \ldots, p\}.$$

Згідно з теоремою 128, ймовірність в правій частині збігається до

$$\mathbb{P}\{N_k^*(\rho) = 1, N_{k-i}^*(\rho) = l_i,\, i = 1, \ldots, p\}$$

при $n \to \infty$, а ця ймовірність дорівнює

$$\mathbb{P}\{T^*(\rho) = k, N_{T^*(\rho)-i}^*(\rho) = l_i,\, i = 1, \ldots, p\},$$

оскільки

$$T^*(\rho) = \inf\{i \in \mathbb{Z} \colon N_i^*(\rho) = 1\}, \quad \rho > 1,$$

що є переформулюванням (5.75) згідно з визначенням $N_k^*(\rho)$. □

Доведення теореми 130. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}$. Запишемо розклад

$$\begin{aligned}
T_0([E_n(\rho)]) - n \;&=\; \sum_{j=0}^{T([E_n(\rho)])-1} \mathbb{1}_{\left\{N_{[E_n(\rho)]}^{(j)} \neq N_{[E_n(\rho)]}^{(j+1)}\right\}} - n \\
&= \; T([E_n(\rho)]) - n \;-\; \sum_{j=0}^{T([E_n(\rho)])-1} \mathbb{1}_{\left\{N_{[E_n(\rho)]}^{(j)} = N_{[E_n(\rho)]}^{(j+1)}\right\}} \\
&= \; \left(T([E_n(\rho)]) - n - \sum_{j=(T([E_n(\rho)])-m)\vee 0}^{T([E_n(\rho)])-1} \mathbb{1}_{\left\{N_{[E_n(\rho)]}^{(j)} = N_{[E_n(\rho)]}^{(j+1)}\right\}}\right) \\
&- \sum_{j=0}^{T([E_n(\rho)])-m-1} \mathbb{1}_{\left\{N_{[E_n(\rho)]}^{(j)} = N_{[E_n(\rho)]}^{(j+1)}\right\}} =: \; T_{0,m}([E_n(\rho)]) - V_{0,m}([E_n(\rho)])
\end{aligned}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. Згідно з твердженням 129 при $n \to \infty$

$$(T_{0,m}([E_n(\rho)])_{\rho>1} \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} \left(T^*(\rho) - \sum_{j=1}^{m} \mathbb{1}_{\left\{N_{T^*(\rho)-j}^*(\rho) = N_{T^*(\rho)-j+1}^*(\rho)\right\}}\right)_{\rho>1}$$

При $m \to \infty$, права частина збігається до

$$T_0^*(\rho) \;=\; T^*(\rho) - \sum_{j=-\infty}^{T^*(\rho)-1} \mathbb{1}_{\left\{N_j^*(\rho) = N_{j+1}^*(\rho)\right\}}. \tag{5.78}$$

Для перевірки того, що $T_0^*(\rho)$ є м.н. скінченним, нам потрібно показати збіжність ряду $\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N^*_{-j}(\rho)=N^*_{-j+1}(\rho)\}}$ м.н. Для цього помітимо, що для всіх $j \in \mathbb{N}$ та $\rho > 1$

$$\begin{aligned} N^*_{-j+1}(\rho) &= \#\{k \in \mathbb{N} : S^*_{k,-j+1} \le L_{-j+1}(\rho)\} \\ &= \#\{k \in \mathbb{N} : L_1(S^*_{\nu(k),-j}) \le L_{-j+1}(\rho)\} \ = \ K(N^*_{-j}(\rho)) \end{aligned}$$

де $(K(n))_{n\in\mathbb{N}}$ та $(R(n))_{n\in\mathbb{N}}$ не залежать від $(N^*_{-j}(\rho))_{\rho>1}$. В наслідок цього,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{N^*_{-j}(\rho)=N^*_{-j+1}(\rho)\}} &= \mathbb{E}\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{K(N^*_{-j}(\rho))=N^*_{-j}(\rho)\}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{N^*_{-j}(\rho)=k\}. \end{aligned}$$

Використовуючи рівність розподілів $N^*_{-j}(\rho) \overset{\mathrm{d}}{=} N^*(L_{-j}(\rho)) = N^*(E_j(\rho))$, яка має місце для всіх $j \in \mathbb{N}$, отримуємо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{N^*_{-j}(\rho)\le k\} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{N^*(E_j(\rho))\le k\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{P}\{S^*_{k+1} > E_j(\rho)\} \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{E}S^*_{k+1}}{k!}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{E_j(\rho)} < \infty, \end{aligned}$$

згідно з теоремою 123. Це доводить, що $T_0^*(\rho)$ є м.н. скінченним. Згідно з теоремою 4.2 в [39], залишається довести, що

$$\lim_{m\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{V_{0,m}([E_n(\rho)])\ge 1\} \ = \ 0. \tag{5.79}$$

Використавши нерівність Маркова, запишемо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{V_{0,m}([E_n(\rho)])\ge 1\} &\le \mathbb{E}V_{0,m}([E_n(\rho)]) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]} = N^{(j+1)}_{[E_n(\rho)]}, T([E_n(\rho)]) - m > j\} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]} = N^{(j+1)}_{[E_n(\rho)]}, N^{(m+j)}_{[E_n(\rho)]} > 1\}. \end{aligned}$$

Нехай $(K^{(i)}(M))_{M\in\mathbb{N}}$, $i\in\mathbb{N}$, є копіями $(K(M))_{M\in\mathbb{N}}$, які не залежать від $N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}$, маємо

$$N^{(j+l)}_{[E_n(\rho)]} \overset{\mathrm{d}}{=} K^{(j+l\downarrow j+1)}(N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}),$$

при $l=1,\dots,m$. Отже,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}=K^{(j+1)}(N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}),K^{(j+m\downarrow j+1)}(N^{(j)}_{[E_n(\rho)]})>1\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}\left\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}=k\right\}\mathbb{P}\left\{K^{(j+1)}(k)=k\right\}\mathbb{P}\left\{K^{(j+m\downarrow j+2)}(k)>1\right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty}\mathbb{P}\left\{K^{(1)}(k)=k\right\}\mathbb{P}\left\{K^{(1\uparrow m-1)}(k)>1\right\}\sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\left\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}=k\right\}.$$

Послідовність $(N^{(j)}_{[E_n(\rho)]})_{j\in\mathbb{N}_0}$ є незростаючим ланцюгом Маркова, а величина

$$p(n,k) \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty}\mathbb{P}\{N^{(j)}_{[E_n(\rho)]}=k\}$$

є середнім числом його візитів в стан k. Якщо цей ланцюг потрапляє в стан $k\geq 2$, то він в ньому перебуватиме геометрично розподілену кількість кроків з параметром $1-1/k!$, тому

$$p(n,k)\;\leq\;\mathbb{E}\,\mathrm{Geom}\left(1-\frac{1}{k!}\right)\;\leq\;2.$$

Поєднавши наведені оцінки, маємо

$$\limsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\{V_{0,m}([E_n(\rho)]\geq 1\}\leq 2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbb{P}\{K^{(1\uparrow m-1)}(k)>1\}.$$

Останній ряд збігається рівномірно по m, оскільки домінується $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Отже, можна перейти до границі $m\to\infty$ під знаком суми, що дасть

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbb{P}\{K^{(1\uparrow m-1)}(k)>1\}\;=\;\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\lim_{m\to\infty}\mathbb{P}\{K^{(1\uparrow m-1)}(k)>1\}\;=\;0.$$

Для доведення невиродженості $T_0^*(\rho)$, припустимо, що $T_0^*(\rho)=k$ м.н. Але тоді $T^*(\rho)\geq T_0^*(\rho)=k$, що суперечить $\mathbb{P}\{T^*(\rho)=k-1\}>0$, див. крок 4 в доведенні теореми 119. Це завершує доведення (5.79) і всієї теореми. □

5.3 Висновки до розділу 5

В розділі вперше вводиться поняття випадкового просіювання зліченної множини та досліджуються два типи таких просіювань: просіювання випадковими блуканнями та просіювання процесом рекордів.

Для випадкових просіювань, породжених випадковими блуканнями:

- отримано граничні теореми для числа непросіяних точок (теореми 109 та 114), позицій непросіяних точок (теореми 108 та 113) та числа раундів до просіювання перших M точок (теореми 110 та 116);
- отримано характеризацію стійких відносно просіювання випадковими блуканнями точкових процесів (теореми 112 та 118).

Для випадкових просіювань, породжених процесом рекордів:

- отримано граничні теореми для трьох, згаданих вище функціоналів (теореми 121, 126 та 119), а також для числа результативних раундів просіювання (теорема 130);
- побудовано каплінг з коалесцентом Пуассона-Діріхле, що дозволило отримати граничну теорему для числа злиттів у ньому (теорема 131).

Розділ 6

Стохастичні інтеграли у регенеративних випадкових структурах: властивості розподілів та траєкторій

Розділ розбито на чотири підрозділи. Перший підрозділ присвячено дробово інтегровним процесам Леві $I_{\alpha,\rho}$. Оскільки цей клас процесів тісно пов'язаний з добре відомими в літературі дробовим броунівським рухом (при $\alpha = 2$) та дробовим стійким рухом (при $\alpha \in (1, 2)$), то ми розглянемо лише найважливіші властивості процесів $I_{\alpha,\rho}$, переважна більшість яких є аналогами відомих тверджень про вищезгадані дробові рухи. Другий та третій підрозділи присвячені дробово інтегровним оберненим стійким субординаторам $J_{\alpha,\rho}$ та умовно гауссівським процесам $Z_{\alpha,\beta}$ відповідно. Ці процеси, схоже, вперше з'явились в контексті випадкових процесів з імміграцією та не вивчались раніше, тому дослідженню їх властивостей присвячено більшу часину розділу. В четвертому підрозділі ми повернемось до стохастичних інтегралів по процесам Леві і застосуємо, серед іншого, їх теорію до вивчення питання про нулі випадкових тригонометричних поліномів.

6.1 Узагальнені згортки степеневих функцій та процесів Леві

Нехай $1 < \alpha \le 2$. Нагадаємо, що випадковий процес $(I_{\alpha,\rho})_{u\ge 0}$ визначається рівністю

$$I_{\alpha,\rho}(0) = 0, \quad I_{\alpha,\rho}(u) \ := \ \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho} \mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y), \quad u > 0,$$

де $(\mathcal{S}_\alpha(u))_{u\ge 0}$ є стандартним броунівським рухом, якщо $\alpha = 2$, та спектрально негативним α-стійким процесом Леві таким, що $\mathcal{S}_\alpha(1)$ має характеристичну функцію (2.67), якщо $\alpha \in (1,2)$. У цьому означенні інтеграл визначається потраєкторно за допомогою формули інтегрування частинами

$$I_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^{\rho}\, \mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y) = u^{\rho}\mathcal{S}_\alpha(u) + |\rho| \int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y, \tag{6.1}$$

для $u > 0$ та $\rho > -1/\alpha$. При $\rho > 0$ ця формула еквівалента

$$I_{\alpha,\rho}(u) = \rho \int_0^u \mathcal{S}_\alpha(y)(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y, \quad u > 0.$$

Оскільки $\lim_{y\uparrow u}(u-y)^{\rho-1} = \infty$ при $\rho < 1$, то існування м.н. (потраєкторного) інтеграла Рімана $\int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y$ необхідно перевірити. При $\rho > -1/\alpha$ маємо

$$\begin{aligned}\int_0^u \mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y)|(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y \ &= \ \int_0^u \mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(u-y)|(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y \\ = \mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(1)| \int_0^u (u-y)^{1/\alpha+\rho-1}\mathrm{d}y \ &= \ (1/\alpha+\rho)^{-1}\mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(1)|u^{1/\alpha+\rho},\end{aligned}$$

тому інтеграл існує м.н.

Нехай M_α позначає α-стійку випадкову міру[1] на $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B})$, де $\mathcal{B}$ є борелівською σ-алгеброю на $\mathbb{R}_+$, з контролюючою мірою Лебега (з сталим коефіцієнтом) та постійною інтенсивністю скосу (skewness intensity), рівною -1. Коефіцієнт при мірі Лебега покладемо $1/2$ при $\alpha = 2$ та $\Gamma(1-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)$ при $1 < \alpha < 2$. Згідно з прикладом 3.3.3 в [240],

$$(M_\alpha([0,t]))_{t\ge 0} \ \overset{\text{f.d.}}{=} \ (\mathcal{S}_\alpha(t))_{t\ge 0}.$$

[1]Означення та властивості α-стійких мір можна знайти в розділі 3.3 книги [240].

Нехай $\rho \in (-1/\alpha, 0)$ та, не зменшуючи загальності $\mathcal{S}_\alpha(t) = M_\alpha([0,t])$, $t \geq 0$. Тоді

$$\begin{aligned}
&u^\rho \mathcal{S}_\alpha(u) + |\rho| \int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1} \mathrm{d}y \\
&= u^\rho \mathcal{S}_\alpha(u) + \int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y)) \mathrm{d}\big((u-y)^\rho\big) \\
&= u^{-\beta} \mathcal{S}_\alpha(u) + \lim \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y_{n,k}))\big((u-y_{n,k})^\rho - (u-y_{n,k-1})^\rho\big) \\
&= \lim \left[\mathcal{S}_\alpha(y_{n,1}) u^\rho + M_\alpha((y_{n,n}, u])(u-y_{n,n})^\rho + \sum_{k=1}^{n-1} M_\alpha((y_{n,k}, y_{n,k+1}])(u-y_{n,k})^\rho \right],
\end{aligned}$$

де на останньому кроці було використано сумування частинами. Граничний перехід у цих формулах розуміється у такому сенсі. Зафіксуємо послідовність вкладених розбиттів $\Delta_n = \{y_{n,0}, \ldots, y_{n,n}\}$ інтервалу $[0,u]$ таку, що $0 = y_{n,0} < \ldots < y_{n,n} < u$ та $\|\Delta_n\| = \max\{u - y_{n,n}, y_{n,k} - y_{n,k-1} : k = 1, \ldots, n\} \to 0$ при $n \to \infty$. Перші два доданки збігаються до нуля за ймовірністю при $n \to \infty$, а суму можна інтерпретувати, як інтеграл по простій функції відносно α-стійкої випадкової міри M_α. Цей інтеграл збігається до

$$\int f_\rho(u,y) M_\alpha(\mathrm{d}y) \ =: \ \int_{[0,u]} (u-y)^\rho M_\alpha(\mathrm{d}y)$$

при $n \to \infty$ за ймовірністю згідно з конструкцією стійких інтегралів, див. розділ 3.4 в [240], де

$$f_\rho(u,y) \ = \ \begin{cases} (u-y)^\rho, & \text{якщо } 0 \leq y < u \\ 0, & \text{якщо } 0 \leq u \leq y. \end{cases}$$

Зокрема, $I_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^\rho M_\alpha(\mathrm{d}y)$ м.н. для всіх $u > 0$. Аналогічну конструкцію процесу $I_{\alpha,\rho}$ можна навести також при $\rho > 0$. Згідно з твердженням 3.4.1 в розділі 3.5 в [240], маємо

$$I_{\alpha,\rho}(u) \ \stackrel{\mathrm{d}}{=} \ \frac{u^{1/\alpha+\rho}}{(1+\alpha\rho)^{1/\alpha}} \mathcal{S}_\alpha(1), \tag{6.2}$$

для кожного фіксованого $u \geq 0$. Зокрема, $I_{\alpha,\rho}(u)$ має нормальний розподіл при $\alpha = 2$ та α-стійкий розподіл при $\alpha \in (1,2)$.

З теореми 32 та того, що c та h правильно змінюються з індексами $1/\alpha$ та ρ відповідно, випливає, що $I_{\alpha,\rho}$ є самоподібним з індексом Хюрста $1/\alpha+\rho$, тобто для довільного $a>0$

$$(I_{\alpha,\rho}(au))_{u\ge 0} \overset{\text{f.d.}}{=} (a^{1/\alpha+\rho}I_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}.$$

Можна перевірити, що прирости $I_{\alpha,\rho}$ не є ані стаціонарними, ані незалежними, якщо $\rho\neq 0$, див. розділ 3 в статті [129].

У наступному результаті наведено властивості траєкторій процесу $(I_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}$.

Теорема 132. *Для випадкового процесу $(I_{\alpha,\rho}(u))_{u\ge 0}$, визначеного при $\alpha\in(1,2]$ та $\rho>-1/\alpha$, мають місце такі твердження:*

(а) Якщо $\alpha=2$ або $\rho>0$, то $I_{\alpha,\rho}$ має неперервні траєкторії м.н.

(б) Якщо $1<\alpha<2$ та $\rho\in(-1/\alpha,0)$, то кожна версія I процесу $I_{\alpha,\rho}$ є необмеженою на кожному інтервалі додатної довжини м.н., тобто існує подія Ω_0 ймовірності 1 така, що $\sup_{a<t<b}|I(t)|=\infty$ на Ω_0 для всіх $0\le a<b$.

(в) Для довільного фіксованого $u>0$ процес $I_{\alpha,\rho}$ є неперервним за ймовірністю в точці u.

Доведення. Розглянемо спочатку випадок $\rho>0$ та $\alpha\in(1,2]$. Для довільних $0<v<u$ (детермінованих чи випадкових) маємо

$$\begin{aligned}\rho^{-1}|I_{\alpha,\rho}(u)-I_{\alpha,\rho}(v)| &\le \int_0^v |\mathcal{S}_\alpha(y)||(u-y)^{\rho-1}-(v-y)^{\rho-1}|\mathrm{d}y\\ &+ \rho^{-1}\sup_{v\le y\le u}|\mathcal{S}_\alpha(y)|(u-v)^\rho.\end{aligned}$$

При $v\uparrow u$ права частина збігається до нуля за теоремою про мажоровану збіжність, що дає неперервність траєкторій. Це доводить (а) та (в) у випадку $\rho>0$. Нехай $\rho\in(-1/\alpha,0)$, $0<v<u$ та u фіксоване (невипадкове). Запишемо представлення

$$\begin{aligned}I_{\alpha,\rho}(u) &= u^\rho\mathcal{S}_\alpha(u)+|\rho|\int_0^u(\mathcal{S}_\alpha(u)-\mathcal{S}_\alpha(y))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y\\ &= u^\rho\mathcal{S}_\alpha(u)+|\rho|\int_0^u(\mathcal{S}_\alpha(u)-\mathcal{S}_\alpha(y-))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y,\quad u>0,\end{aligned}$$

де ми використали факт, що множина точок розриву $\mathcal{S}_\alpha$ не більш ніж зліченна. Очевидно, що функція $u \mapsto u^\rho \mathcal{S}_\alpha(u)$ є неперервною в кожній точці $u > 0$ за ймовірністю. Далі,

$$\int_0^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y-))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y - \int_0^v (\mathcal{S}_\alpha(v) - \mathcal{S}_\alpha(y-))(v-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y$$
$$= \int_v^u (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y-))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y + (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(v)) \int_0^v (u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y$$
$$+ \int_0^v (\mathcal{S}_\alpha(v) - \mathcal{S}_\alpha(y-))((v-y)^{\rho-1} - (u-y)^{\rho-1})\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{u-v} \mathcal{S}^*_\alpha(y) y^{\rho-1}\mathrm{d}y + |\rho|^{-1}(\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(v))((u-v)^\rho - u^\rho)$$
$$+ \int_0^v (\mathcal{S}_\alpha(v) - \mathcal{S}_\alpha(y-))((v-y)^{\rho-1} - (u-y)^{\rho-1})\mathrm{d}y,$$

де

$$(\mathcal{S}^*_\alpha(y))_{y\in[0,u]} := (\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha((u-y)-))_{y\in[0,u]} \overset{\mathrm{d}}{=} (\mathcal{S}_\alpha(y))_{y\in[0,u]}. \tag{6.3}$$

Згідно з формулою 3.4 в [221] з ймовірністю один

$$\lim_{y\downarrow 0} y^\gamma |\mathcal{S}_\alpha(y)| = \lim_{y\downarrow 0} y^\gamma |\mathcal{S}^*_\alpha(y)| = 0,$$

для довільного $\gamma > -1/\alpha$. З цього випливає, що функція $y \mapsto y^{\rho-1}\mathcal{S}^*_\alpha(y)$ м.н. інтегровна в правому околі нуля, а, отже, перший доданок прямує до нуля при $v \uparrow u$. З формули

$$0 = \lim_{y\downarrow 0} y^\gamma \mathcal{S}'_\alpha(y) = \lim_{y\uparrow u} |\mathcal{S}_\alpha(u) - \mathcal{S}_\alpha(y)|(u-y)^\gamma, \quad \gamma > -1/\alpha,$$

випливає, що другий доданок прямує до нуля при $v \uparrow u$ м.н. Покажемо, що третій доданок збігається до нуля за ймовірністю. Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^v |\mathcal{S}_\alpha(v) - \mathcal{S}_\alpha(y-)|\,((v-y)^{\rho-1} - (u-y)^{\rho-1})\mathrm{d}y > \varepsilon\right\}$$
$$\le \varepsilon^{-1}\mathbb{E}\int_0^v |\mathcal{S}_\alpha(v) - \mathcal{S}_\alpha(y-)|\,((v-y)^{\rho-1} - (u-y)^{\rho-1})\mathrm{d}y$$
$$= \varepsilon^{-1}\mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(1)| \int_0^v (v-y)^{1/\alpha}((v-y)^{\rho-1} - (u-y)^{\rho-1})\mathrm{d}y$$
$$= \varepsilon^{-1}\mathbb{E}|\mathcal{S}_\alpha(1)| \left((1/\alpha+\rho)^{-1} v^{1/\alpha+\rho} - \int_0^v (v-y)^{1/\alpha}(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y\right).$$

Інтеграл в останній формулі монотонний по v, а тому збігається до $\int_0^u (u-y)^{1/\alpha+\rho-1} = (1/\alpha+\rho)^{-1} u^{1/\alpha+\rho}$ при $v \uparrow u$. Це доводить неперервність за ймовірністю $I_{\alpha,\rho}$ в точці u зліва. Неперервність справа випливає з аналогічних міркувань, що використовують замість (6.3) формулу

$$(\mathcal{S}_\alpha(u+y) - \mathcal{S}_\alpha(u))_{y\geq 0} \overset{f.d.}{=} (\mathcal{S}_\alpha(y))_{y\geq 0}, \quad u \geq 0.$$

Отже, ми довели (в) у випадку $\rho \in (-1/\alpha, 0)$.

Доведемо (а) у випадку $\alpha = 2$ та $\rho > -1/2$. Очевидно, $u \mapsto u^\rho \mathcal{S}_2(u)$ є м.н. неперервною функцією на $(0,\infty)$. Згідно з теоремою 1.14 в [208] (модуль неперервності Леві для броунівського руху), маємо, що для довільного $T > 0$, існує вимірна множина $\Omega' = \Omega'(T) \subseteq \Omega$ така, що $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$ та для всіх $\gamma \in (0, 1/2)$,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{\sup_{u\in[0,T]} |\mathcal{S}_2(u+h,\omega) - \mathcal{S}_2(u,\omega)|}{h^\gamma} = 0, \quad \omega \in \Omega'. \tag{6.4}$$

Зафіксуємо $T > 0$, $\gamma \in (-\rho, 1/2)$ та $\omega \in \Omega'(T)$ і покладемо

$$\phi(y) := y^{\gamma+\rho-1} \quad \text{та} \quad K(u,y) := y^{-\gamma}(\mathcal{S}_2(u,\omega) - \mathcal{S}_2(u-y,\omega))\mathbb{1}_{\{0<y\leq u\}}.$$

Тоді

$$\int_0^u (\mathcal{S}_2(u,\omega) - \mathcal{S}_2(y,\omega))(u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y = \int_0^u K(u,y)\phi(y)\mathrm{d}y.$$

Для $0 < v < u < T$ запишемо

$$\begin{aligned}\Big| \int_0^u & K(u,y)\phi(y)\mathrm{d}y - \int_0^v K(v,y)\phi(y)\mathrm{d}y \Big| \\ &\leq \int_0^t |K(u,y) - K(v,y)|\phi(y)\mathrm{d}y + \sup_{y\in[0,T]} |K(u,y)| \int_v^u \phi(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Оскільки ω є таким, що виконується (6.4), отримуємо

$$\sup_{0\leq y\leq u\leq T} K(u,y) < \infty.$$

Це означає, що кожен з двох доданків в (6.5) прямує до нуля при $v \uparrow u$, де для першого доданка використано теорему про мажоровану збіжність. Це дає неперервність справа, неперервність зліва перевіряється аналогічно. Оскільки $T > 0$ обрано довільним, то $I_{2,\rho}$ є неперервним на $(0,\infty)$ м.н.

Для доведення (б) розглянемо інтегральне представлення.

$$I_{\alpha,\rho}(u) \;=\; \int f_\rho(u,y)M_\alpha(\mathrm{d}y)$$

де f_ρ було введено вище. Покладемо $f_\rho^*(y) := \sup_{t\in\mathbb{Q}} f_\rho(t,y)$, $y\geq 0$. Очевидно, $f_\rho^*(y) \geq \lim_{t\downarrow y, t\in\mathbb{Q}}(t-y)^\rho = \infty$ для кожного $y\geq 0$. Отже, виконується умова (10.2.18) в [240] (нагадаємо, що контролююча міра є кратною міри Лебега), і наслідок 10.2.4 в [240] дає (б). $\square$

6.2 Згортки степеневих функцій та обернених субординаторів

Для $\alpha\in(0,1)$, нехай $(W_\alpha(t))_{t\geq 0}$ є α-стійким субординатором, тобто зростаючим процесом Леві з експонентою Лапласа $-\ln\mathbb{E}e^{-tW_\alpha(1)} = \Gamma(1-\alpha)t^\alpha$ при $t\geq 0$. Узагальнена обернена функція $W_\alpha^\leftarrow := (W_\alpha^\leftarrow(u))_{u\in\mathbb{R}}$, що визначена

$$W_\alpha^\leftarrow(u) \;:=\; \inf\{t\geq 0: W_\alpha(t)>u\}, \quad u\geq 0$$

та $W_\alpha^\leftarrow(u):=0$ при $u<0$, називається оберненим стійким субординатором.

Для $\rho\in\mathbb{R}$, покладемо

$$J_{\alpha,\rho}(0) := 0, \quad J_{\alpha,\,\rho}(u) := \int_{[0,\,u]}(u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^\leftarrow(y), \quad u>0.$$

Оскільки $W_\alpha^\leftarrow$ має м.н. неспадні траєкторії, то цей інтеграл існує потраєкторно в сенсі Лебега-Стілтьєса.

Твердження 133. *Для кожного $\rho\in\mathbb{R}$ та довільного фіксованого $u\geq 0$ маємо $J_{\alpha,\rho}(u)<\infty$ м.н.*

Доведення. Якщо $\rho\geq 0$, то твердження очевидне з нерівності $J_{\alpha,\rho}(u)\leq u^\rho W_\alpha^\leftarrow(u)$, $u\geq 0$. Нехай $\rho<0$ та нехай $\mathcal{R}$ є областю значень субординатора W_α, що визначається так

$$\mathcal{R} := \{t>0: \text{ існує } y>0 \text{ таке, що } W_\alpha(y)=t\}.$$

Якщо $u\notin\mathcal{R}$, то

$$J_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]}(u-y)^\rho\mathrm{d}W_\alpha^\leftarrow(y) = \int_{[0,W_\alpha(W_\alpha^\leftarrow(u)-)]}(u-y)^\rho\mathrm{d}W_\alpha^\leftarrow(y),$$

оскільки $W_\alpha^{\leftarrow}$ є константою на інтервалі $(W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(u)-), u]$ та $W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(u)-) < u$. З цього випливає, що $J_{\alpha,\rho}(u) < \infty$ для всіх $u \notin \mathcal{R}$. Для фіксованого $u > 0$ маємо $\mathbb{P}\{u \in \mathcal{R}\} = 0$, див. твердження 1.9 в [33], а тому $J_{\alpha,\rho}(u) < \infty$ м.н. $\square$

Підкреслимо, що з цього доведення одразу випливає стохастична неперервність $J_{\alpha,\rho}$ в кожній точці $u > 0$.

Інтегруванням частинами можна отримати такі представлення

$$J_{\alpha,\rho}(u) = \rho \int_0^u (u-y)^{\rho-1} W_\alpha^{\leftarrow}(y) \mathrm{d}y, \quad u > 0 \tag{6.6}$$

при $\rho > 0$ та

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\rho}(u) &= u^\rho W_\alpha^{\leftarrow}(u) + |\rho| \int_0^u (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u-y)) y^{\rho-1} \mathrm{d}y \\ &= |\rho| \int_0^\infty (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u-y)) y^{\rho-1} \mathrm{d}y, \quad u > 0 \end{aligned} \tag{6.7}$$

при $-\alpha < \rho < 0$. Ці представлення демонструють, що $J_{\alpha,\rho}$ є з точністю до мультиплікативної константи *дробовою похідною Рімана-Ліувілля* функції W_α у першому випадку та *дробовою похідною Марше (Marchaud fractional derivative)* функції W_α у другому, див. с. 33 та с. 111 в [238].

Нагадаємо деякі властивості обернених стійких субординаторів, з яких випливатимуть властивості процесу $J_{\alpha,\rho}$ та які нам знадобляться в подальшому. Очевидно, $W_\alpha^{\leftarrow}$ має м.н. неперервні та неспадні траєкторії. Також очевидно, що $W_\alpha^{\leftarrow}$ є самоподібним з індексом Хюрста α, тобто

$$(W_\alpha^{\leftarrow}(cu))_{u \geq 0} \overset{f.d.}{=} (c^\alpha W_\alpha^{\leftarrow}(u))_{u \geq 0}$$

для довільного фіксованого $c > 0$. Більш специфічні властивості $W_\alpha^{\leftarrow}$ включають локальну гельдерову неперервність з довільним показником $\gamma < \alpha$, що є наслідком

$$M := \sup_{0 \leq v < u \leq 1/2} \frac{W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(v)}{(u-v)^\alpha |\ln(u-v)|^{1-\alpha}} < \infty \quad \text{м.н.}, \tag{6.8}$$

див. лему 3.4 в [214]; результат про модуль неперервності:

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{\substack{0 \leq t \leq 1 \\ 0 < h < \delta}} \frac{W_\alpha^{\leftarrow}(t+h) - W_\alpha^{\leftarrow}(t)}{h^\alpha |\ln h|^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\alpha^{2\alpha-1}(1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \text{м.н.},$$

див. формулу (6) в [119]; та закон повторного логарифма

$$\varlimsup \frac{W_\alpha^{\leftarrow}(u)}{u^\alpha(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}} \quad \text{м.н.} \tag{6.9}$$

при $u \downarrow 0$ або $u \to \infty$, який виводиться з теореми 4.1 в [33]. Зауважимо, що в.в. M у формулі (6.8) задовольняє

$$\mathbb{E}e^{sM} < \infty \tag{6.10}$$

для всіх $s > 0$, див. лему 3.4 в [214].

6.2.1 Властивості траєкторій $J_{\alpha,\rho}$. Наступний результат демонструє, що при $\rho \le -\alpha$ траєкторії $J_{\alpha,\rho}$ сильно нерегулярні.

Твердження 134. *Нехай $\rho \le -\alpha$, тоді для довільного інтервалу $I \subset (0,\infty)$ маємо $\sup_{u\in I} J_{\alpha,\rho}(u) = \infty$ з додатною ймовірністю. Більш того, з ймовірністю один існує нескінченна кількість (випадкових точок) $u > 0$ таких, що $J_{\alpha,\rho}(u) = \infty$.*

Доведення. Нехай $I = [c,d]$ для деяких $0 < c < d < \infty$. Для довільних $a < b$ маємо

$$\mathbb{P}\{[W_\alpha(a), W_\alpha(b)] \subset [c,d]\} = \mathbb{P}\{c \le W_\alpha(a) < W_\alpha(b) \le d\} > 0.$$

Покажемо, що

$$\sup_{u\in[W_\alpha(a),W_\alpha(b)]} J_{\alpha,\rho}(u) = \infty \quad \text{м.н.}, \tag{6.11}$$

що демонструватиме $\sup_{u\in I} J_{\alpha,\rho}(u) = \infty$ з додатною ймовірністю.

Згідно з теоремою 2 в [80], існує подія Ω' така, що $\mathbb{P}\{\Omega'\} = 1$ та для всіх $\omega \in \Omega'$

$$\varlimsup_{y\uparrow s} \frac{W_\alpha(s,\omega) - W_\alpha(y,\omega)}{(s-y)^{1/\alpha}} \le r \tag{6.12}$$

для деякої невипадкової константи $r \in (0,\infty)$ та деякого $s := s(\omega) \in [a, b]$. Зафіксуємо $\omega \in \Omega'$. Існує $s_1 := s_1(\omega)$ таке, що $s_1 < s$ та

$$\big(W_\alpha(s,\omega) - W_\alpha(y,\omega)\big)^\rho \ge (s-y)^{\rho/\alpha} r^\rho/2$$

для всіх $y \in (s_1, s)$. Покладемо $u := u(\omega) = W_\alpha(s,\omega)$ та запишемо

$$\begin{aligned}
J_{\alpha,\rho}(u) &= \int_{[0,\, W_\alpha(s,\omega)]} (W_\alpha(s,\omega) - y)^\rho \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y,\omega) \\
&= \int_0^s \big(W_\alpha(s,\omega) - W_\alpha(y,\omega)\big)^\rho \, \mathrm{d}y \\
&\geq \int_{s_1}^s \big(W_\alpha(s,\omega) - W_\alpha(y,\omega)\big)^\rho \, \mathrm{d}y \geq 2^{-1} r^\rho \int_{s_1}^s (s-y)^{\rho/\alpha} \, \mathrm{d}y \; = \; +\infty.
\end{aligned}$$

Оскільки $u(\omega) \in [W_\alpha(a), W_\alpha(b)]$ для всіх $\omega \in \Omega'$, отримуємо (6.11).

Очевидно, існує нескінченно багато додатних s таких, що виконується (6.12), а тому $J_{\alpha,\rho}(u) = \infty$ для нескінченної кількості $u > 0$ м.н. Доведення твердження 134 завершено. □

Якщо $\rho > -\alpha$, то траєкторії $J_{\alpha,\rho}$ неперервні. Має місце такий результат, що узагальнює (6.8).

Теорема 135. *Припустимо, що $\alpha + \rho \in (0,1)$. Тоді*

$$\sup_{0 \leq v < u \leq 1/2} \frac{|J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(v)|}{(u-v)^{\alpha+\rho} |\ln(u-v)|^{1-\alpha}} < \infty \quad \text{м.н.} \tag{6.13}$$

Припустимо, що $\alpha + \rho = 1$. Тоді

$$\sup_{0 \leq v < u \leq 1/2} \frac{J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(v)}{(u-v) |\ln(u-v)|^{2-\alpha}} < \infty \quad \text{м.н.} \tag{6.14}$$

Зокрема, в обох випадках $J_{\alpha,\rho}$ є м.н. (локально) гельдеровим з довільним показником $\gamma < \alpha + \rho$. Припустимо, що $\alpha + \rho > 1$. Тоді

$$\sup_{0 \leq v < u \leq 1/2} \frac{J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(v)}{u-v} < \infty \quad \text{м.н.}, \tag{6.15}$$

що означає локальну ліпшицевість $J_{\alpha,\rho}$.

Зауваження 136. У випадку $\alpha + \rho > 1$ процес $J_{\alpha,\rho}$ є, насправді, $[\alpha + \beta]$ раз неперервно-диференційовним на $[0, \infty)$ м.н. Це випливає з представлення

$$J_{\alpha,\rho}(u) = \rho \int_0^u J_{\alpha,\rho-1}(v) \mathrm{d}v, \quad u \geq 0,$$

яке демонструє, що з неперервності $J_{\alpha,\rho-1}$ випливає неперервна диференційовність $J_{\alpha,\rho}$.

Наступний результат – закон повторного логарифму для великих та малих часів.

Теорема 137. *Якщо $\rho > -\alpha$, то*

$$\overline{\lim}\, \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)(\alpha+\rho)^{\alpha}(1-\alpha)^{1-\alpha}} =: c_{\alpha,\rho} \quad \textit{м.н.} \tag{6.16}$$

та

$$\underline{\lim}\, \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} = 0 \quad \textit{м.н.} \tag{6.17}$$

при $u \downarrow 0$ або $u \to \infty$.

Три реалізації оберненого $3/4$-стійкого субординатора разом з відповідними дробово інтегровними оберненими субординаторами $J_{3/4,\rho}$ для різних ρ представлені на рисунку 6.1 і дають наочну демонстрацію твердження 134 та теореми 135.

Доведення теорем 135 та 137 містяться у підрозділі 6.2.3.

6.2.2 Властивості розподілів $J_{\alpha,\rho}$ та зображення Ламперті. Розглянемо родину процесів $X_\alpha^{(u)}(t) := ((u^{1/\alpha} - W_\alpha(t))^\alpha)_{0\le t< W_\alpha^{\leftarrow}(u^{1/\alpha})}$, індексовану початковим значенням $u > 0$. Ця родина утворює напів-стійкий марковський процес з індексом 1, тобто

$$\mathbb{P}\{cX_\alpha^{(u)}(t/c) \in \cdot\} = \mathbb{P}\{X_\alpha^{(cu)}(t) \in \cdot\}$$

для всіх $c > 0$. Згідно з теоремою 4.1 в [175], для фіксованого u маємо

$$(u^{1/\alpha} - W_\alpha(t))^\alpha = u\exp(-Z_\alpha(\tau(t/u))) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le uI \quad \text{м.н.}$$

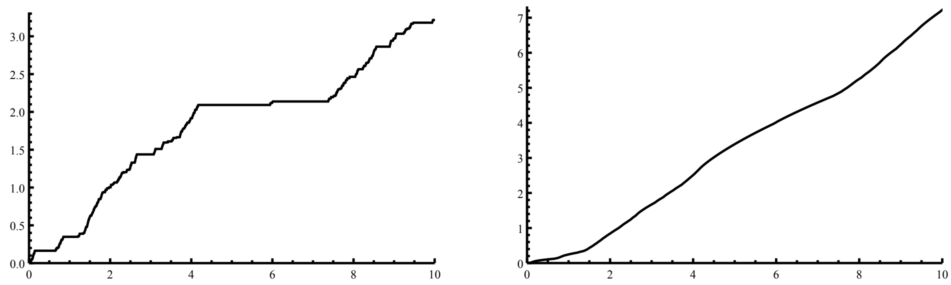
для деякого субординатора $Z_\alpha := (Z_\alpha(t))_{t\ge0} = (Z_\alpha^{(u)}(t))_{t\ge0}$ з поглинанням, де

$$I := \int_0^\infty \exp(-Z_\alpha(t))\mathrm{d}t = u^{-1}\inf\{v : W_\alpha(v) > u^{1/\alpha}\} = u^{-1}W_\alpha^{\leftarrow}(u^{1/\alpha}) \tag{6.18}$$

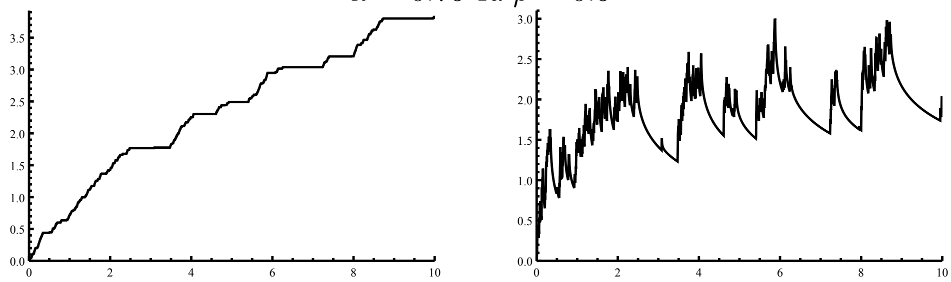
та[2] $\tau(t) := \inf\{s : \int_0^s \exp(-Z_\alpha(v))\mathrm{d}v \ge t\}$ при $0 \le t \le I$. Враховуючи таке представлення, маємо

$$\begin{aligned}
&J_{\alpha,\rho}(u^{1/\alpha})\\
&= \int_0^\infty ((u^{1/\alpha} - W_\alpha(t))^\alpha)^{\rho/\alpha}\mathbb{1}_{\{W_\alpha(t)\le u^{1/\alpha}\}}\mathrm{d}t = u^{\rho/\alpha}\int_0^{uI}\exp(-(\rho/\alpha)Z_\alpha(\tau(t/u)))\mathrm{d}t\\
&= u^{1+\rho/\alpha}\int_0^I \exp(-(\rho/\alpha)Z_\alpha(\tau(t)))\mathrm{d}t = u^{1+\rho/\alpha}\int_0^\infty \exp(-(1+\rho/\alpha)Z_\alpha(t))\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

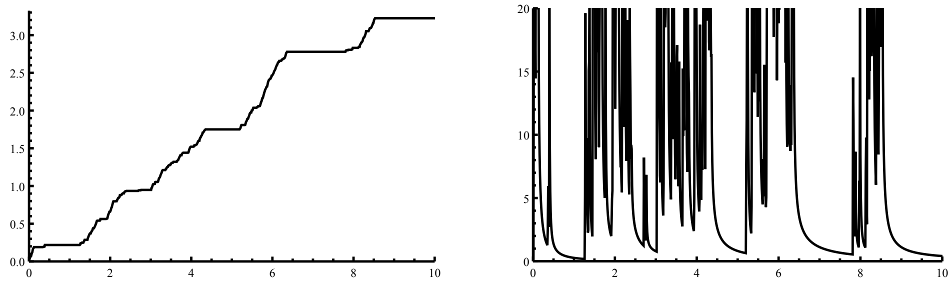
[2] За винятком одного місця нижче, ми не вказуватимемо явно, що Z_α, I та $\tau(t)$ залежать від u.



$\alpha = 0.75$ та $\rho = 0.5$



$\alpha = 0.75$ та $\rho = -0.5$



$\alpha = 0.75$ та $\rho = -1.5$

Рис. 6.1: Обернені стійкі субординатори $W_\alpha^{\leftarrow}$ (зліва) та відповідні процеси $J_{\alpha,\rho}$ (справа).

Замінюючи u на u^α, отримуємо

$$J_{\alpha,\,\rho}(u) = u^{\alpha+\rho}\int_0^\infty \exp(-cZ_\alpha^{(u^\alpha)}(t))\mathrm{d}t \quad \text{м.н.} \tag{6.19}$$

де $c := \alpha^{-1}(\alpha+\rho)$. Останній інтеграл відомий під назвою *експоненційний функціонал від субординатора* $Z_\alpha^{(u^\alpha)}$. Покажемо, що Z_α є субординатором з нульовим зсувом, одиничним поглинанням та мірою Леві

$$\nu_\alpha(\mathrm{d}x) = \frac{e^{-x/\alpha}}{(1-e^{-x/\alpha})^{\alpha+1}}\mathbb{1}_{(0,\,\infty)}(x)\mathrm{d}x.$$

Еквівалентно, покажемо, що експонента Лапласа Z_α дорівнює

$$\Phi_\alpha(s) := -\ln \mathbb{E}e^{-sZ_\alpha(1)} = 1+\int_{[0,\infty)}(1-e^{-st})\nu_\alpha(\mathrm{d}t) = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha s)}{\Gamma(1+\alpha(s-1))}, \quad s \geq 0.$$

Відомо, що $W_\alpha^{\leftarrow}(1)$ має розподіл Міттаг-Леффлера з параметром α. Цей розподіл однозначно визначається моментами

$$\mathbb{E}(W_\alpha^{\leftarrow}(1))^n = \frac{n!}{(\Gamma(1-\alpha))^n\Gamma(1+n\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Використавши (6.18) та самоподібність $W_\alpha^{\leftarrow}$, робимо висновок, що I також має розподіл Міттаг-Леффлера. Моменти I можна записати у вигляді

$$\mathbb{E}I^n = \frac{n!}{(\Gamma(1-\alpha))^n\Gamma(1+n\alpha)} = \frac{n!}{\Phi_\alpha(1)\cdot\ldots\cdot\Phi_\alpha(n)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

що, враховуючи теорему 2 в [36], демонструє, що експонента Лапласаі Z_α співпадає з Φ_α у всіх цілих точках, а, отже, всюди. Згадана теорема 2 в [36] також дає формулу для моментів $J_{\alpha,\rho}(1)$ при $\alpha+\rho \geq 0$:

$$\mathbb{E}(J_{\alpha,\rho}(1))^k = \frac{k!}{\Phi_\alpha(c)\cdots\Phi_\alpha(ck)} = \frac{k!}{\Gamma^k(1-\alpha)}\prod_{j=1}^k \frac{\Gamma(\rho+1+(j-1)(\alpha+\rho))}{\Gamma(j(\alpha+\rho)+1)}. \tag{6.20}$$

З нерівності

$$u^{\alpha+\rho}J_{\alpha,\rho}(u) \overset{\mathrm{d}}{=} \int_0^\infty e^{-cZ_\alpha(t)}\mathrm{d}t \leq \sup\{t \geq 0 : Z_\alpha(t) < \infty\},$$

вірної при $\alpha+\rho \geq 0$, та того що в.в. в правій частині має стандартний показниковий розподіл, робимо висновок, що $J_{\alpha,\rho}(u)$ має скінченні експоненційні моменти додатних порядків < 1, а, отже, однозначно визначається моментами. Зокрема, з формули $\mathbb{E}(J_{\alpha,-\alpha}(1))^k = k!$ випливає, що $J_{\alpha,-\alpha}(u)$ має стандартний показниковий розподіл для всіх $u > 0$.

Корисним є також оцінки на хвіст $J_{\alpha,\rho}(1)$. Згідно з твердженням 2 в [230] та наслідком 2.2 в [217] в.в. $J_{\alpha,\rho}(1)$ має обмежену та незростаючу щільність $f_{\alpha,\beta}$. Оскільки

$$-\ln \mathbb{E}e^{-scZ_\alpha(1)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma((\alpha+\rho)s+1)}{\Gamma((\alpha+\rho)s+1-\alpha)} \sim \Gamma(1-\alpha)(\alpha+\rho)^\alpha s^\alpha, \quad s \to \infty,$$

то ще раз застосовуючи твердження 2 в [230], робимо висновок

$$\begin{aligned} &-\ln \mathbb{P}\{J_{\alpha,\rho}(1) > x\} \sim -\ln f_{\alpha,\rho}(x) \\ &\sim (1-\alpha)((\alpha+\rho)^\alpha\Gamma(1-\alpha))^{(1-\alpha)^{-1}}x^{(1-\alpha)^{-1}} = (x/c_{\alpha,\rho})^{(1-\alpha)^{-1}}, \quad x \to \infty, \end{aligned} \tag{6.21}$$

де $c_{\alpha,\rho}$ визначено в (6.16). Зокрема, для кожного $\delta_1 \in (0,1)$, існує $c_1 = c_1(\delta_1)$ таке, що

$$f_{\alpha,\rho}(x) \le c_1 \exp\big(- (1-\delta_1)(x/c_{\alpha,\rho})^{(1-\alpha)^{-1}}\big) \tag{6.22}$$

для всіх $x \ge 0$.

Інші відомі властивості розподілів $J_{\alpha,\rho}$ такі:

- $J_{\alpha,\rho}$ є самоподібним з індексом Хюрста $\alpha+\rho$. Це випливає з теореми 34 та того, що $t \mapsto \mathbb{P}\{\xi > t\}/h(t)$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $-\alpha-\rho$;

- Якщо $\alpha+\rho \ge 0$, то для довільних $0 < v \le u$,

$$\mathbb{E}J_{\alpha,\rho}(v)J_{\alpha,\rho}(u) = \frac{\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)^2\Gamma(1+\alpha+\rho)} \times \int_0^v (v-y)^\rho(u-y)^\rho y^{\alpha-1}((v-y)^\alpha + (u-y)^\alpha)\mathrm{d}y \tag{6.23}$$

- Якщо $\alpha+\rho \ge 0$, то прирости $J_{\alpha,\rho}$ не є ані стаціонарними, ані незалежними. Відсутність незалежності приростів – це твердження 2.19 в [135]. Відсутність стаціонарності у випадку $\alpha+\rho \ne 1$ випливає з формули (6.20) для $k=1$, та з формули (6.23) при $\rho+\alpha \ne 1$.

6.2.3 Доведення теорем 135 та 137.

Доведення теореми 135. Доведення теореми 135 потраєкторне та не ймовірнісне в тому сенсі, що з огляду на (6.8), існує Ω_1 таке, що $\mathbb{P}\{\Omega_1\} = 1$ та $M = M(\omega) < \infty$ для всіх $\omega \in \Omega_1$. Ми працюватимемо при фіксованому $\omega \in \Omega_1$.

Зазначимо, що локальна гельдерова неперервність випливає з теореми 3.1 на с. 53 та леми 13.1 на с. 239 в [238] у випадках $\rho > 0$ та $-\alpha < \rho < 0$ відповідно. Проте, доведення більш точних результатів (6.13) та (6.14) вимагає додаткових зусиль. Помітимо, що

$$W_\alpha^{\leftarrow}(x) - W_\alpha^{\leftarrow}(y) \le M(x-y)^\alpha |\ln(x-y)|^{1-\alpha} \tag{6.24}$$

для всіх $-\infty < y < x \le 1/2$. Це тривіально, якщо $x \le 0$ та є наслідком (6.8) у випадку $y \ge 0$. Припустимо, що $y \le 0 < x$. Тоді $W_\alpha^{\leftarrow}(x) - W_\alpha^{\leftarrow}(y) =$

$W_\alpha^{\leftarrow}(x-y+y) \le W_\alpha^{\leftarrow}(x-y) \le M(x-y)^\alpha|\ln(x-y)|^{1-\alpha}$, де передостання нерівність випливає з монотонності, а остання є наслідком (6.8).

Якщо $\rho = 0$, то нерівність (6.13) зводиться до (6.8). Розглянемо випадок $-\alpha < \rho < 0$, доведення у випадку $\rho > 0$ можна знайти в розділі 5 статті [133].

Нехай $1/2 \ge u > v > 0$. Використавши (6.7), запишемо

$$\begin{aligned}
&|\rho|^{-1}|J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(v)| \\
&= \left|\int_0^\infty (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u-y) - W_\alpha^{\leftarrow}(v) + W_\alpha^{\leftarrow}(v-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y\right| \\
&\le \int_0^{u-v} (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u-y) + W_\alpha^{\leftarrow}(v) - W_\alpha^{\leftarrow}(v-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\
&+ \int_{u-v}^\infty (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(v))y^{\rho-1}\mathrm{d}y + \int_{u-v}^\infty (W_\alpha^{\leftarrow}(u-y) - W_\alpha^{\leftarrow}(v-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y \\
&\le 2M\left(\int_0^{u-v} y^{\alpha+\rho-1}|\ln y|^{1-\alpha}\mathrm{d}y + (u-v)^\alpha|\ln(u-v)|^{1-\alpha}\int_{u-v}^\infty y^{\rho-1}\mathrm{d}y\right) \\
&= 2M\left(\int_0^{u-v} y^{\alpha+\rho-1}|\ln y|^{1-\alpha}\mathrm{d}y + |\rho|^{-1}(u-v)^{\alpha+\rho}|\ln(u-v)|^{1-\alpha}\right),
\end{aligned}$$

де остання нерівність випливає з (6.24). Далі,

$$\begin{aligned}
\int_0^{u-v} y^{\alpha+\rho-1}|\ln y|^{1-\alpha}\mathrm{d}y &= (u-v)^{\alpha+\rho}\int_0^1 t^{\alpha+\rho-1}|\ln(u-v) + \ln t|^{1-\alpha}\mathrm{d}t \\
&\le (u-v)^{\alpha+\rho}|\ln(u-v)|^{1-\alpha}\int_0^1 t^{\alpha+\rho-1}\mathrm{d}t + (u-v)^{\alpha+\rho}\int_0^1 t^{\alpha+\rho-1}|\ln t|^{1-\alpha}\mathrm{d}t \\
&\le \left(\frac{1}{\alpha+\rho} + \frac{\int_0^1 t^{\alpha+\rho-1}|\ln t|^{1-\alpha}\mathrm{d}t}{(\ln 2)^{1-\alpha}}\right)(u-v)^{\alpha+\rho}|\ln(u-v)|^{1-\alpha} \\
&=: \kappa_{\alpha,\rho}(u-v)^{\alpha+\rho}|\ln(u-v)|^{1-\alpha}. \qquad (6.25)
\end{aligned}$$

Отже, ми довели

$$|J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(v)| \le 2M(|\rho|\kappa_{\alpha,\rho} + 1)(u-v)^{\alpha+\rho}|\ln(u-v)|^{1-\alpha} \qquad (6.26)$$

у випадку $1/2 \ge u > v > 0$.

Доведення у випадку $1/2 \ge u > v = 0$ аналогічне та використовує рівність

$$J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(0) = J_{\alpha,\rho}(u) = u^\rho W_\alpha^{\leftarrow}(u) + |\rho|\int_0^u (W_\alpha^{\leftarrow}(u) - W_\alpha^{\leftarrow}(u-y))y^{\rho-1}\mathrm{d}y.$$

Маємо оцінку

$$J_{\alpha,\rho}(u) \le M(|\rho|\kappa_{\alpha,\rho} + 1)u^{\alpha+\rho}|\ln u|^{1-\alpha} \qquad (6.27)$$

при $1/2 \geq u > 0$. Поєднуючи (6.26) та (6.27), отримуємо (6.13). Доведення теореми 135 у випадку $-\alpha < \rho \leq 0$ завершено. $\square$

Доведення теореми 137. Оскільки $J_{\alpha,\rho}$ самоподібний з індексом $\alpha + \rho$, то

$$\frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln|\ln u|)^{1-\alpha}} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

при $u \downarrow 0$ або $u \to +\infty$. Переходячи до підхожої підпослідовності, отримуємо (6.17).

Перейдемо до доведення для $\overline{\lim}$. Покажемо спочатку, що

$$\overline{\lim_{u\to+\infty}} \frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln\ln u)^{1-\alpha}} \leq c_{\alpha,\beta} \quad \text{м.н.} \tag{6.28}$$

Покладемо $f(u) := u^{\alpha+\rho}(\ln\ln u)^{1-\alpha}$ при $u \geq e$ та $f(u) := +\infty$ при $u < e$.

Випадок $\rho \geq 0$. Зафіксуємо довільне $c > c_{\alpha,\rho}$ та оберемо $r > 1$ таке, що $c > r^{\alpha+\rho}c_{\alpha,\rho}$. Наступна формула є основною для подальшого доведення:

$$\begin{aligned} -\ln\mathbb{P}\{J_{\alpha,\rho}(r^n) > cf(r^{n-1})\} &= -\ln\mathbb{P}\{J_{\alpha,\rho}(1) > cr^{-(\alpha+\rho)n}f(r^{n-1})\} \\ &\sim \left(\frac{c}{r^{\alpha+\rho}c_{\alpha,\rho}}\right)^{(1-\alpha)^{-1}} \ln n, \quad n\to\infty, \end{aligned} \tag{6.29}$$

де рівність є наслідком самоподібності $J_{\alpha,\rho}$, а асимптотичне співвідношення випливає з формули (6.21). Оскільки коефіцієнт при $\ln n$ більший за одиницю, маємо

$$\sum_{n\geq1}\mathbb{P}\{J_{\alpha,\rho}(r^n) > cf(r^{n-1})\} < \infty.$$

Застосування леми Бореля-Кантеллі дає $J_{\alpha,\rho}(r^n) \leq cf(r^{n-1})$ для всіх досить великих n м.н. Оскільки $J_{\alpha,\rho}$ не спадає м.н., якщо $\rho > 0$, та f невід'ємна та зростаюча на $[e,\infty)$, для всіх досить великих n маємо

$$J_{\alpha,\rho}(u) \leq J_{\alpha,\rho}(r^n) \leq cf(r^{n-1}) \leq cf(u) \quad \text{м.н.}$$

якщо $u \in [r^{n-1}, r^n]$. Отже, $\overline{\lim}_{u\to+\infty} J_{\alpha,\rho}(u)/f(u) \leq c$ м.н., що доводить (6.28).

Випадок $\rho \in (-\alpha, 0)$. У цьому разі процес $J_{\alpha,\rho}$ немонотонний, що робить доведення складнішим. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та оберемо $r > 1$ таким, що $c_{\alpha,\rho}+\varepsilon > r^{\alpha+\rho}c_{\alpha,\rho}$. Припустимо, що ми довели

$$I := \sum_{n\geq1}\mathbb{P}\left\{\sup_{u\in[r^{n-1},\,r^n]} J_{\alpha,\rho}(u) > (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon)f(r^{n-1})\right\} < \infty. \tag{6.30}$$

Тоді, застосовуючи лему Бореля-Кантеллі, робимо висновок, що

$$\sup_{v\in[r^{n-1},\, r^n]} J_{\alpha,\rho}(v) \le (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon) f(r^{n-1})$$

для всіх досить великих n м.н. Оскільки f невід'ємна та зростає на $[e,\infty)$, для досить великих n маємо

$$J_{\alpha,\rho}(u) \le \sup_{v\in[r^{n-1},r^n]} J_{\alpha,\rho}(v) \le (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon) f(r^{n-1}) \le (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon) f(u) \quad \text{м.н.}$$

при $u \in [r^{n-1}, r^n]$. Отже, $\varlimsup\limits_{u\to\infty} J_{\alpha,\rho}(u)/f(u) \le c_{\alpha,\rho} + 2\varepsilon$ м.н., звідки отримуємо (6.28).

Нехай $\lambda > 0$ та $n_r := [\ln^{-1} r] + 1$. Переходячи до доведення (6.30), маємо[3]

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{n\ge n_r} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{u\in[1/(2r),\,1/2]} J_{\alpha,\rho}(u) > (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon)(2r)^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\Big\} \\
&\le \sum_{n\ge n_r}\sum_{k=1}^{n^\lambda-1} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{kn^{-\lambda}\le 2u\le (k+1)n^{-\lambda}} J_{\alpha,\rho}(u) \\
&\qquad\qquad > (c_{\alpha,\rho}+2\varepsilon)(2r)^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\Big\} \\
&\le \sum_{n\ge n_r}\sum_{k=1}^{n^\lambda-1} \mathbb{P}\Big\{ \sup_{kn^{-\lambda}\le 2u\le (k+1)n^{-\lambda}} \big|J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(kn^{-\lambda}/2)\big| > \\
&\qquad\qquad \varepsilon(2r)^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\Big\} \\
&+ \sum_{n\ge n_r}\sum_{k=1}^{n^\lambda-1} \mathbb{P}\left\{ J_{\alpha,\rho}(kn^{-\lambda}/2) > (c_{\alpha,\rho}+\varepsilon)(2r)^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\right\} \\
&=: I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Використавши (6.26), бачимо, що для $1 \le k \le n^\lambda - 1$,

$$\sup_{kn^{-\lambda}/2\le u\le (k+1)n^{-\lambda}/2} |J_{\alpha,\rho}(u) - J_{\alpha,\rho}(kn^{-\lambda}/2)| \le C_1 M (n^{-\lambda}/2)^{(\alpha+\rho)/2},$$

де $C_1 := 2|\rho|\kappa_{\alpha,\rho} \sup_{x\in(0,1/2]} \big(x^{(\alpha+\rho)/2}|\ln x|^{1-\alpha}\big)$. Отже, для всіх $\lambda > 0$,

$$I_1 \le \sum_{n\ge n_r} n^\lambda \mathbb{P}\left\{ M > (\varepsilon/C_1)(2r)^{-(\alpha+\rho)}(2n^\lambda)^{(\alpha+\rho)/2}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\right\}.$$

[3] Для зручності запису ми писатимемо n^λ та $n^{-\lambda}$ замість $[n^\lambda]$ та $[n^\lambda]^{-1}$ відповідно.

Вираз у правій частині скінченний внаслідок (6.10) та нерівності Маркова. Далі,

$$I_2 = \sum_{n\geq n_r}\sum_{k=1}^{n^\lambda-1}\mathbb{P}\big\{(kn^{-\lambda}/2)^{\alpha+\rho}J_{\alpha,\rho}(1)\geq(c_{\alpha,\rho}+\varepsilon)(2r)^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\big\}$$
$$\leq\sum_{n\geq n_r}n^\lambda\mathbb{P}\left\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq(c_{\alpha,\rho}+\varepsilon)r^{-(\alpha+\rho)}(\ln((n-1)\ln r))^{1-\alpha}\right\}<\infty$$

для всіх $\lambda<\left(\frac{c_{\alpha,\rho}+\varepsilon}{r^{\alpha+\rho}c_{\alpha,\rho}}\right)^{(1-\alpha)^{-1}}-1$, де вираз в правій частині є додатним згідно з вибором r. В останній формулі для I_2 рівність випливає з самоподібності $J_{\alpha,\rho}$, а скінченність є наслідком (6.29) (з $c_{\alpha,\rho}+\varepsilon$ замість c). Отже, (6.30) виконується і доведення (6.28) завершено.

Перейдемо до доведення

$$\varlimsup_{u\to+\infty}\frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln\ln u)^{1-\alpha}}\geq c_{\alpha,\rho}\quad \text{м.н.} \tag{6.31}$$

Визначимо $\widetilde{W}_\alpha:=(\widetilde{W}_\alpha(y))_{y\geq0}$ рівністю $\widetilde{W}_\alpha(y):=W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1)+y)-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))$ для $y\geq0$. Згідно з сильною марковською властивістю W_α, $\widetilde{W}_\alpha$ є копією W_α, яка не залежить від $(W_\alpha(y))_{0\leq y\leq W_\alpha^{\leftarrow}(1)}$. Зокрема, з цього випливає, що процес $\widetilde{J}_{\alpha,\rho}:=(\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(u))_{u\geq0}$, визначений

$$\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(u):=\int_0^\infty(u-\widetilde{W}_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{\widetilde{W}_\alpha(y)\leq u\}}\mathrm{d}y,\quad u\geq0,$$

є копією $J_{\alpha,\rho}$, яка не залежить від $\big(W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1)),\int_0^\infty(v-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq1\}}\mathrm{d}y\big)$ для всіх $v\geq1$. Ми використаємо розклад

$$\begin{aligned}J_{\alpha,\rho}(u) &= \int_0^\infty(u-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq u\}}\mathrm{d}y=\int_0^\infty(u-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq1\}}\mathrm{d}y\\ &+ \widetilde{J}_{\alpha,\rho}(u-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\mathbb{1}_{\{W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\leq u\}},\end{aligned}\tag{6.32}$$

який має місце для $u>1$ та може бути отриманий так:

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty(u-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{1<W_\alpha(y)\leq u\}}\mathrm{d}y\\ &=\int_0^\infty(u-W_\alpha(y+W_\alpha^{\leftarrow}(1)))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y+W_\alpha^{\leftarrow}(1))\leq u\}}\mathrm{d}y\\ &=\int_0^\infty(u-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))-\widetilde{W}_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{\widetilde{W}_\alpha(y)\leq u-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\}}\mathrm{d}y\mathbb{1}_{\{W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\leq u\}}\\ &=\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(u-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\mathbb{1}_{\{W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\leq u\}}.\end{aligned}$$

Доведення формули (6.31) базуватиметься на узагальненні леми Бореля-Кантеллі, яке відоме під назвою лема Ердеша-Реньї, див. лему C в [75].

Лема 138 (Ердеш-Реньї, 1959)**.** *Нехай* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *є послідовністю подій таких, що* $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{A_k\}=\infty$. *Рівність* $\mathbb{P}\{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, A_k\}=1$ *має місце, якщо*

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\}}{\big(\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\{A_k\}\big)^2}\leq 1.$$

Зафіксуємо $c\in(0,c_{\alpha,\rho})$ та деяке $r>1$, вибір якого буде уточнено пізніше. Поклавши $A_k:=\{J_{\alpha,\rho}(r^k)\geq cf(r^k)\}$ при $k\in\mathbb{N}$ та використавши (6.21), маємо

$$-\ln\mathbb{P}\{A_n\}\quad\sim\quad(c/c_{\alpha,\rho})^{(1-\alpha)^{-1}}\ln n=:c_0\ln n,\quad n\to\infty,$$

звідки випливає $\sum_{k\geq 1}\mathbb{P}\{A_k\}=\infty$ оскільки $c_0<1$. Для довільного $\delta>0$ існує $n_0\in\mathbb{N}$ таке, що

$$n^{-c_0-\delta}\leq\mathbb{P}\{A_n\}\leq n^{-c_0+\delta}\tag{6.33}$$

для всіх $n\geq n_0$. Нам потрібно оцінити праву частину наступного виразу

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{A_i\cap A_{i+n}\}\\
&\quad=\mathbb{P}\Big\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln(i\ln r))^{1-\alpha},J_{\alpha,\rho}(r^n)\geq cr^{n(\alpha+\rho)}(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}\\
&\quad=\mathbb{P}\Big\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln(i\ln r))^{1-\alpha},\int_0^\infty(r^n-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq 1\}}\mathrm{d}y\\
&\quad+\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(r^n-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\mathbb{1}_{\{W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1))\leq r^n\}}\geq cr^{n(\alpha+\rho)}(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}\\
&\quad=\mathbb{P}\Big\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln(i\ln r))^{1-\alpha},\int_0^\infty(r^n-W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq 1\}}\mathrm{d}y\\
&\quad+(r^n-W_\alpha(W_\alpha^{\leftarrow}(1)))_+^{\alpha+\rho}\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(1)\geq cr^{n(\alpha+\rho)}(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}\\
&\quad\leq\mathbb{P}\Big\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln(i\ln r))^{1-\alpha},r^{-\alpha n}\int_0^\infty(1-r^{-n}W_\alpha(y))^\rho\mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\leq 1\}}\mathrm{d}y\\
&\quad+\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}\\
&\quad\leq\mathbb{P}\Big\{J_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln(i\ln r))^{1-\alpha},\Delta_n+\widetilde{J}_{\alpha,\rho}(1)\geq c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}
\end{aligned}$$

для $i\geq[\ln^{-1}r]$ та $n\in\mathbb{N}$, де $\Delta_n:=\gamma_r r^{-\alpha n}W_\alpha^{\leftarrow}(1)$ та $\gamma_r:=(1-r^{-1})^\rho\vee 1$. В першій рівності ми використали самоподібність $J_{\alpha,\rho}$; друга рівність еквівалента

(6.32); третя рівність є наслідком самоподібності $\widetilde{J}_{\alpha,\rho}$ та незалежності $\widetilde{J}_{\alpha,\rho}$ від всіх інших величин в цій рівності; остання нерівність випливає з

$$\int_0^\infty (1-r^{-n}W_\alpha(y))^\rho \mathbb{1}_{\{W_\alpha(y)\le 1\}}\mathrm{d}y \le \gamma_r W_\alpha^{\leftarrow}(1).$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{A_i\cap A_{i+n}\}-\mathbb{P}\{A_i\}\mathbb{P}\{A_{i+n}\}\\
&\le \mathbb{P}\Big\{c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}-\Delta_n\le \widetilde{J}_{\alpha,\rho}(1)<c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha},\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta_n\le c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\Big\}\\
&+\mathbb{P}\{\Delta_n>c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}:=J_1(n,i)+J_2(n,i)=:J(n,i)
\end{aligned}$$

для $i\ge[\ln^{-1} r]$ та $n\in\mathbb{N}$.

Припустимо, що ми довели

$$\phi_i:=\sum_{n\ge1}J(n,i)=O(i^{-c_0+\delta}),\quad i\to\infty \tag{6.34}$$

з δ, як (6.33), та за умови $c_0+3\delta<1$. Тоді

$$\begin{aligned}
\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\}}{\left(\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\{A_k\}\right)^2}&=\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n-i}\mathbb{P}\{A_i\cap A_{i+j}\}}{\left(\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\{A_k\}\right)^2}\\
&\le \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{n-i}\mathbb{P}\{A_i\}\mathbb{P}\{A_{i+j}\}+2\sum_{i=1}^n\phi_i}{\left(\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\{A_k\}\right)^2}\\
&\le 1+2\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n\phi_i}{\left(\sum_{k=1}^n\mathbb{P}\{A_k\}\right)^2}=1,
\end{aligned}$$

що доводить $\mathbb{P}\{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}A_k\}=1$ згідно з лемою 138. Тому,

$$\overline{\lim_{u\to+\infty}}\frac{J_{\alpha,\rho}(u)}{u^{\alpha+\rho}(\ln\ln u)^{1-\alpha}}\ge\overline{\lim_{k\to\infty}}\frac{J_{\alpha,\rho}(r^k)}{r^{k(\alpha+\rho)}(\ln\ln r^k)^{1-\alpha}}\ge c,$$

що демонструє імплікацію (6.34)⇒(6.31).

Доведення (6.34). Оберемо δ_1 в (6.22) та $\varepsilon>0$ такими, що

$$c_0(1-\delta_1)(1-\varepsilon)^{(1-\alpha)^{-1}}=(1-\delta_1)((c/c_{\alpha,\rho})(1-\varepsilon))^{(1-\alpha)^{-1}}\ge c_0-\delta. \tag{6.35}$$

Використаємо (6.22) та той факт, що щільність $f_{\alpha,\rho}$ в.в. $\widetilde{J}_{\alpha,\rho}$ не зростає, щоб отримати

$$\begin{aligned}
& J_1(n,i) \\
\leq\ & \mathbb{E}\left(\Delta_n f_{\alpha,\rho}\left(c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}-\Delta_n\right)\right)\mathbb{1}_{\{\Delta_n\leq c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}} \\
\leq\ & c_1\mathbb{E}\left(\Delta_n\exp\left(-(1-\delta_1)c_{\alpha,\rho}^{-\frac{1}{1-\alpha}}\left(\left(c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}-\Delta_n\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)\right)\right) \\
\times\ & \left(\mathbb{1}_{\{\Delta_n\leq\varepsilon c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}}+\mathbb{1}_{\{\Delta_n>\varepsilon c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}}\right) \\
=\ & J_{11}(n,i)+J_{12}(n,i).
\end{aligned}$$

Застосовуючи (6.35), отримаємо

$$J_{11}(n,i)\leq c_1\mathbb{E}\big(\Delta_n\exp\big(-(c_0-\delta)\ln((n+i)\ln r)\big)\leq\frac{c_1}{(\ln r)^{c_0-\delta}}\frac{\mathbb{E}\Delta_n}{(n+i)^{c_0-\delta}}.$$

З огляду на (6.21) з $\rho=0$ для довільного $\delta_2\in(0,1)$ існує $c_2>0$ таке, що

$$\mathbb{P}\{W_\alpha^{\leftarrow}(1)>x\}\leq c_2\exp\big(-(1-\delta_2)(x/c_{\alpha,\rho})^{(1-\alpha)^{-1}}\big) \tag{6.36}$$

для всіх $x\geq 0$. Нехай $r>1$ таке, що $\varepsilon r^\alpha>1$ з тим же ε, що й в формулі (6.35). При такому виборі r, можемо взяти $\delta_2>0$ настільки малим та $q>1$ настільки близьким до 1, що

$$c_0(1/q)(1-\delta_2)(\varepsilon\gamma_r r^\alpha)^{(1-\alpha)^{-1}}=(1/q)(1-\delta_2)(\varepsilon\gamma_r(c/c_{\alpha,\rho})r^\alpha)^{(1-\alpha)^{-1}}\geq c_0-\delta.$$

Використовуючи нерівність Гельдера з обраним q та $p>1$ таким, що $1/p+1/q=1$, маємо

$$\begin{aligned}
& J_{12}(n,i) \\
\leq\ & c_1\mathbb{E}\Delta_n\mathbb{1}_{\{\Delta_n>\varepsilon c(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}} \\
\leq\ & c_1(\mathbb{E}\Delta_n^p)^{1/p}\left(\mathbb{P}\{W_\alpha^{\leftarrow}(1)>\varepsilon\gamma_r c r^{\alpha n}(\ln((n+i)\ln r))^{1-\alpha}\}\right)^{1/q} \\
\leq\ & c_1c_2^{1/q}(\mathbb{E}\Delta_n^p)^{1/p}\exp\big(-(1/q)(1-\delta_2)(\varepsilon\gamma_r(c/c_{\alpha,\rho})r^{\alpha n})^{\frac{1}{1-\alpha}}\ln((n+i)\ln r)\big) \\
\leq\ & \frac{c_1c_2^{1/q}}{(\ln r)^{c_0-\delta}}\frac{(\mathbb{E}\Delta_n^p)^{1/p}}{(n+i)^{c_0-\delta}}.
\end{aligned}$$

Покладемо $c_3:=c_1(c_2^{1/q}+1)(\ln r)^{-c_0+\delta}$. Оскільки $c_4:=\sum_{n\geq1}(\mathbb{E}\Delta_n^p)^{1/p}<\infty$ маємо

$$\sum_{n\geq1}J_1(n,i)\leq c_3\sum_{n\geq1}\frac{(\mathbb{E}\Delta_n^p)^{1/p}}{(n+i)^{c_0-\delta}}\leq\frac{c_3c_4}{i^{c_0-\delta}}$$

для всіх $i \in \mathbb{N}$. Залишається розглянути член $J_2(n,i)$. Збільшуючи (за потреби) r, можемо припустити, що

$$(1-\delta_2)(\gamma_r(c/c_{\alpha,\rho})r^{\alpha})^{(1-\alpha)^{-1}} \geq 2.$$

З огляду на (6.36),

$$J_2(n,i) \leq c_2 \exp\big(-(1-\delta_2)(\gamma_r(c/c_{\alpha,\rho})r^{\alpha n})^{(1-\alpha)^{-1}} \ln((n+i)\ln r)\big) \\ \leq \frac{c_2}{(\ln r)^2}\frac{1}{(n+i)^2},$$

а тому

$$\sum_{n\geq 1} J_2(n,i) \leq \frac{c_2}{(\ln r)^2}\sum_{n\geq i+1}\frac{1}{n^2} = O(i^{-1}) = O(i^{-c_0+\delta}).$$

Отже, співвідношення (6.34) доведено і закон повторного логарифму для великих часів встановлено.

Доведення для малих часів проходить аналогічно: при означенні послідовності (r^n) потрібно вибирати $r \in (0,1)$, а не $r > 1$. Самоподібність $J_{\alpha,\rho}$ робить решту. Доведення теореми 137 завершено. $\square$

6.3 Умовно гауссівські процеси

Нехай C є граничною функцією для функції $f(u,w) = \mathrm{Cov}[X(u)X(w)]$, яка рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}_+^2$ або фіктивно правильно змінюється в $\mathbb{R}_+^2$ з індексом $\beta \in \mathbb{R}$. При фіксованому оберненому стійкому субординаторі $W_\alpha^{\leftarrow}$ процес $Z_{\alpha,\beta}$ визначається, як центрований (умовно) гауссівський процес з (умовною) коваріацією

$$\mathbb{E}[Z_{\alpha,\beta}(u), Z_{\alpha,\beta}(w)|W_\alpha^{\leftarrow}] = \int_{[0,u]} C(u-y, w-y)\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0 \leq u \leq w.$$

Очевидно, що у випадку фіктивної правильної зміни функції $f(u,w)$, процес $Z_{\alpha,\beta}$ коректно визначений, як (умовний) білий шум. Наступне твердження демонструє, що і у випадку рівномірної правильної зміни означення коректне.

Твердження 139. *Нехай $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1)$ та нехай C є граничною функцією для функції $f(u,w) = \mathrm{Cov}[X(u)X(w)]$, яка рівномірно правильно змінюється* *в смугах в $\mathbb{R}^2_+$ з індексом $\beta \in \mathbb{R}$. Тоді інтеграли*

$$\int_{[0,s]} C(s-y, t-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad \text{та} \quad \int_{[0,s]} (s-y)^\beta\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad s > 0 \tag{6.37}$$

при $0 < s < t < \infty$ існують та скінченні в сенсі потраєкторних інтегралів Лебега-Стілтьєса, а процес $Z_{\alpha,\beta}$ існує та $|Z_{\alpha,\beta}(u)| < \infty$ м.н. для всіх $u \geq 0$.

Доведення. Другий інтеграл в (6.37) існує та скінченний м.н. для довільного фіксованого $u > 0$ з огляду на твердження 133. Перший інтеграл існує і скінченний м.н. внаслідок нерівності (2.66).

Для того, щоб довести, що процес $Z_{\alpha,\beta}$ коректно визначений залишається перевірити, що функція

$$\Pi(s,t) \ := \ \int_{[0,s]} C(s-y, t-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0 < s \leq t$$

невід'ємно-визначена, тобто для довільного $m \in \mathbb{N}$, довільних $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ та $0 < u_1 < \cdots < u_m < \infty$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \Pi(u_j, u_j) + 2 \sum_{1 \leq r < l \leq m} \gamma_r \gamma_l \Pi(u_r, u_l) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \int_{(u_{i-1}, u_i]} \Bigg(\sum_{k=i}^m \gamma_k^2 C(u_k - y, u_k - y) \\
&\qquad\qquad + 2 \sum_{i \leq r < l \leq m} \gamma_r \gamma_l C(u_r - y, u_l - y) \Bigg)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \\
&+ \gamma_m^2 \int_{(u_{m-1}, u_m]} C(u_m - y, u_m - y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \geq 0 \quad \text{м.н.},
\end{aligned}$$

де $u_0 := 0$. Оскільки другий доданок невід'ємний м.н. то достатньо перевірити, що перший також невід'ємний. Функція $(u, w) \mapsto C(u, w)$, $0 < u \leq w$ невід'ємно-визначена, як границя невід'ємно-визначених. Отже, для довільного $1 \leq i \leq m-1$ та $y \in (u_{i-1}, u_i)$,

$$\sum_{k=i}^m \gamma_k^2 C(u_k - y, u_k - y) + 2 \sum_{i \leq r < l \leq m} \gamma_r \gamma_l C(u_r - y, u_l - y) \geq 0.$$

Таким чином, процес $Z_{\alpha,\beta}$ існує як умовно гауссівський з коваріаційною функцією $\Pi(s,t)$, $0 < s \leq t$. $\square$

Наведене далі твердження демонструє, що при $\beta \le -\alpha$ або у разі фіктивної правильної зміни $f(u, w)$, процес $Z_{\alpha,\beta}$ має нерегулярні траєкторії.

Твердження 140. *Припустимо, що $\alpha \in (0, 1)$ та нехай Z – довільна версія $Z_{\alpha,\beta}$. Такі твердження вірні:*

- *якщо $\beta \le -\alpha$, то для довільного інтервалу $I \subset (0, \infty)$ маємо*

$$\mathbb{P}\{|\sup_{t\in I} Z(t)| = \infty\} > 0,$$

  зокрема Z лежить в $D(0, \infty)$ з ймовірністю строго менше одиниці;

- *якщо $C(u, w) = 0$ для всіх $u \ne w$, $u, w > 0$, то Z лежить в $D(0, \infty)$ з ймовірністю нуль.*

Доведення. З твердження 134 ми знаємо, що

$$\sup_{t\in I} \mathbb{E}[Z^2(t)|W_\alpha^{\leftarrow}] = \sup_{t\in I} J_{\alpha,\beta}(t) = \infty \tag{6.38}$$

з додатною ймовірністю, а тому

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{t\in I}|Z(t)|\right)^2\middle|W_\alpha^{\leftarrow}\right] = \mathbb{E}\left[\sup_{t\in I} Z^2(t)\middle|W_\alpha^{\leftarrow}\right] = \infty$$

з додатною ймовірністю. Застосовуючи теорему 3.2 на с. 63 в [4], бачимо, що

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\in I}|Z(t)| = \infty|W_\alpha^{\leftarrow}\} > 0,$$

з додатною ймовірністю, а, отже,

$$\mathbb{P}\{\sup_{t\in I}|Z(t)| = \infty\} > 0,$$

що й треба було довести.

Для доведення другої частини твердження припустимо, що $C(u, w) = 0$ для всіх $u \ne w$, $u, w > 0$. Тоді при заданому $W_\alpha^{\leftarrow}$, гауссівський процес Z має некорельовані, а тому незалежні значення. Для довільного фіксованого $t > 0$ та довільної спадної послідовності $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ з $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ маємо

$$\mathbb{P}\big\{Z(t+) = Z(t)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big\} \le \mathbb{P}\Big\{\overline{\lim_{n\to\infty}} Z(t + h_n) = Z(t)\Big|W_\alpha^{\leftarrow}\Big\} = 0 \ \text{ м.н.} \tag{6.39}$$

Це доводить, що траєкторії Z лежать в $D(0, \infty)$ з ймовірністю 0. Для перевірки (6.39) помітимо, що при заданому $W_\alpha^{\leftarrow}$, розподіл $Z(t)$ нормальний, значить абсолютно неперервний, в той час як границя $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} Z(t + h_n)$ повинна бути константою (можливо, рівною $\pm\infty$) м.н. згідно з законом нуля та одиниці Колмогорова, оскільки $Z(t+h_1), Z(t+h_2), \ldots$ (умовно) незалежні. Доведення твердження 140 завершено. $\square$

Твердження 141. *При $\beta > -\alpha$ процес $Z_{\alpha,\beta}$ є неперервним за ймовірністю в кожній точці $u \geq 0$.*

Доведення. З твердження 135 ми знаємо, що $J_{\alpha,\beta}$ є м.н неперервним в кожній точці $u \geq 0$. З нерівності Чебишева випливає

$$\mathbb{P}\big\{|Z_{\alpha,\beta}(w) - Z_{\alpha,\beta}(u)| > \varepsilon \big| W_\alpha^{\leftarrow}\big\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\bigg(\int_{[0,u]} (u-y)^\beta \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \\ + \int_{[0,w]} (w-y)^\beta \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) - 2\int_{[0,u]} C(u-y, w-y) \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\bigg)$$

при $0 < u < w$ та $\varepsilon > 0$. При $w \downarrow u$, другий доданок збігається м.н. до $J_{\alpha,\beta}(u)$ за вже згаданою неперервністю. З леми Фату отримуємо

$$\liminf_{w \downarrow u} \int_{[0,u]} C(u-y, w-y) \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) \geq \int_{[0,u]} C(u-y, u-y) \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y) = J_{\alpha,\beta}(u)$$

внаслідок неперервності C на $\mathbb{R}_+^2$. Отже, $\lim_{w \downarrow u} \mathbb{P}\big\{|Z_{\alpha,\beta}(u) - Z_{\alpha,\beta}(w)| \geq \varepsilon \big| W_\alpha^{\leftarrow}\big\} = 0$ м.н. Доведення у випадку $w \uparrow u$ аналогічне. Застосовуючи теорему Лебега про мажоровану збіжність, отримуємо, що $Z_{\alpha,\beta}$ є неперервним за ймовірністю. $\square$

Насамкінець, зауважимо, що процес $Z_{\alpha,\beta}$ є самоподібним з індексом Хюрста $(\beta - \alpha)/2$, як одразу випливає з теореми 30 та правильної зміни нормування в цій теоремі.

6.4 Нулі випадкових тригонометричних поліномів

У цьому підрозділі на цікавитимуть випадкові тригонометричні поліноми $\mathcal{T}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вигляду

$$\mathcal{T}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \sin(kt) + \eta_k \cos(kt)\right), \tag{6.40}$$

де коефіцієнти $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ є дійсними в.в. В нещодавній роботі [22] було сформульовано гіпотезу, що за умови $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots$ є незалежними однаково розподіленими випадковими величинами з нульовим середнім та скінченним другим моментом, число дійсних коренів $\mathcal{T}_n$ в інтервалі $[a/n, b/n]$ збігається за розподілом до числа нулів в інтервалі $[a, b]$ стаціонарного центрованого гауссівського процесу $Z := (Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ з коваріацією

$$\mathrm{Cov}(Z(t), Z(s)) = \mathrm{sinc}(t-s), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

де

$$\mathrm{sinc}\, t = \begin{cases} (\sin t)/t, & \text{якщо } t \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } t = 0, \end{cases}$$

див. рисунок 6.2 нижче. Явища такого типу називаються в літературі *локальною універсальністю*. Автори [22] довели цю гіпотезу в припущенні, що ξ_1 має нескінченно диференційовну щільність, яка задовольняє певним умовам інтегровності. Проте, навіть найпростіший випадок $\mathbb{P}\{\xi_1 = \pm 1\} = 1/2$ залишався відкритим. У цьому підрозділі ми доведемо гіпотезу в повній загальності і, понад це, отримаємо відповідні результати у випадку довільної коваріаційної структури пари (ξ_1, η_1) та у випадку, коли вектор (ξ_1, η_1) належить області притягання стійкого розподілу. В цих задачах природнім чином виникають стохастичні інтеграли по процесам Леві, що безпосередньо пов'язує результати даного підрозділу з наведеними вище. Іншою спільною рисою є підхід до доведення результатів – використання теореми про неперервне відображення – засобу, який, як ми бачили, є потужним засобом аналізу асимптотики випадкових процесів з регенерацією.

6.4.1 Основні результати. Для дійсної аналітичної функції f, яка не дорівнює нулю тотожно, позначимо через $N_f[a, b]$ число нулів f в інтервалі $[a, b]$. З доведення основних результатів буде зрозуміло, що кратність коренів можна, як враховувати, так і ні.

Випадок скінченних других моментів коефіцієнтів

Теорема 142. *Нехай* $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ *є незалежними однаково розподіленими випадковими векторами з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею, тобто*

$$\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0, \quad \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\eta_1^2 = 1, \quad \mathbb{E}\xi_1\eta_1 = 0.$$

Для довільного $s \in \mathbb{R}$ *та* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *маємо*

$$N_{\mathcal{T}_n}\left[s + \frac{a}{n}, s + \frac{b}{n}\right] \xrightarrow{\mathrm{d}} N_Z[a, b], \quad n \to \infty,$$

де $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *є стаціонарним гауссівським процесом, що був введений вище.*

Зауваження 143. Безпосереднім підрахунком коваріації, можна переконатись, що має місце інтегральне представлення $Z(t) = \int_0^1 \sin(tu)\mathrm{d}\mathcal{S}_2^{(1)}(u) + \int_0^1 \cos(tu)\mathrm{d}\mathcal{S}_2^{(2)}(u)$, $t \geq 0$, де $\mathcal{S}_2^{(1)}$, $\mathcal{S}_2^{(2)}$ є незалежними стандартними броунівськими рухами.

Для дійсної аналітичної функції f, яка не дорівнює нулю тотожно, позначимо через $\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ локально скінченну точкову міру на $\mathbb{R}$, яка рахує дійсні нулі f з кратностями. Наступний результат є сильнішим за теорему 142 з огляду на теорему про неперервне відображення та лему 156, наведену далі.

Теорема 144. *В умовах теореми 142 маємо*

$$\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{T}_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Rightarrow \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(Z(\cdot)), \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p(\mathbb{R})$ *локально скінченних точкових мір на* $\mathbb{R}$ *з грубою топологією.*

У наступній теоремі розглядається випадок, коли вектор (ξ_1, η_1) має довільну коваріаційну структуру. Зокрема, нею покриваються випадки тригонометричних поліномів вигляду $\sum_{k=1}^n \xi_k \sin(kt)$ та $\sum_{k=1}^n \eta_k \cos(kt)$.

Теорема 145. *Нехай* $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ *є незалежними однаково розподіленими випадковими векторами з*

$$\mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}\eta_k = 0, \quad \mathbb{E}\xi_k^2 = \sigma_1^2 < \infty, \quad \mathbb{E}\eta_k^2 = \sigma_2^2 < \infty, \quad \mathbb{E}\xi_k\eta_k = \rho,$$

де $0 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 < \infty$. *Тоді для довільного фіксованого* $s \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{T}_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Rightarrow \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(G(\cdot)) \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p(\mathbb{R})$ *з грубою топологією, де* $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ *є центрованим гауссівським процесом з коваріацією*

$$\mathbb{E}[G(t_1)G(t_2)] = \begin{cases} \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\operatorname{sinc}(t_1 - t_2), & s \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}\operatorname{sinc}(t_1 - t_2) - \frac{\sigma_1^2-\sigma_2^2}{2}\operatorname{sinc}(t_1 + t_2) + \rho\frac{1-\cos(t_1+t_2)}{t_1+t_2}, & s \in \pi\mathbb{Z}, \end{cases} \tag{6.41}$$

де $(1 - \cos x)/x$ *покладається рівним* 0 *при* $x = 0$.

Випадок притягання до стійких розподілів

Нехай $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots$ є незалежними однаково розподіленими векторами зі *строгої* області притягання деякого двовимірного α-стійкого розподілу, $0 < \alpha < 2$. Це означає, що існує послідовність $b_n > 0$ така, що

$$\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \sum_{k=1}^{n}\eta_k\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathbf{S}_{\alpha,\nu}, \quad n \to \infty, \tag{6.42}$$

де $\mathbf{S}_{\alpha,\nu}$ є невиродженим α-стійким випадковим вектором з мірою Леві ν, без зсуву та без гауссівської компоненти. Прикметник «строгий» вживається у розумінні, що збіжність (6.42) має місце без центрування. Зокрема, припускається, що $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0$ у випадку $\alpha > 1$. Докладну інформацію про багатовимірні стійкі розподіли можна знайти в книзі [240]. Зауважимо, що міра ν за визначенням локально скінченна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ та задовольняє умові однорідності

$$\nu(\lambda B) = \lambda^{-\alpha}\nu(B)$$

для всіх $\lambda > 0$ та всіх борелівських $B \subset \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. У подальшому ми ототожнюватимемо $\mathbb{R}^2$ та $\mathbb{C}$ через канонічний ізоморфізм та розглядатимемо $\mathbb{R}^2$-значні процеси, як $\mathbb{C}$-значні та навпаки.

Теорема 146. *Припустимо, що виконується умова* (6.42) *та* $s \in \mathbb{R}$ *фіксоване. Тоді*

$$\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}\left(\mathcal{T}_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Rightarrow \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(Z_\nu(\cdot)), \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p(\mathbb{R})$ з грубою топологією, де $(Z_\nu(t))_{t\in\mathbb{R}}$ визначається рівністю

$$Z_\nu(t) = \operatorname{Im}\int_0^1 e^{itu}\mathrm{d}L(u) = \int_0^1 \sin(tu)\mathrm{d}\operatorname{Re}L(u) + \int_0^1 \cos(tu)\mathrm{d}\operatorname{Im}L(u) \quad (6.43)$$

при $t \in \mathbb{R}$, а $(L(u))_{u\in[0,1]}$ є $\mathbb{C}$-значним α-стійким процесом Леві з нульовим зсувом, без гауссівської компоненти та з мірою Леві $\tilde{\nu}$, що визначається рівністю

$$\tilde{\nu}(B) := \begin{cases} \int_0^1 \nu(e^{2\pi iy}B)\mathrm{d}y, & s \notin \pi\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}\sum_{k=1}^q \nu(e^{2\pi ik/q}B), & s = 2\pi p/q, \text{ з } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ взаємно прості}, \end{cases} \quad (6.44)$$

для всіх борелівських $B \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, а ν є мірою Леві $\mathbf{S}_{\alpha,\nu}$ в (6.42).

Зауваження 147. Інтеграл в формулі (6.43), який може не існувати в сенсі Лебега-Стілтьєса внаслідок необмеженої варіації L у випадку $\alpha \in [1,2]$, визначається, як і раніше, інтегруванням частинами:

$$\int_0^1 e^{itu}\mathrm{d}L(u) := L(1)e^{it} - it\int_0^1 L(u)e^{itu}\mathrm{d}u. \quad (6.45)$$

Зауваження 148. Цікавою особливістю теореми 146 є чутливість поведінки нулів поблизу s до арифметичних властивостей $\tilde{s} := s/(2\pi)$. Щоб пояснити цей феномен, припустимо, що ξ_k та η_k є незалежними та симетричними α-стійкими в.в. Тоді $\mathcal{T}_n(s)$ також має симетричний α-стійкий розподіл з параметром масштабування σ_n, де

$$\sigma_n^\alpha = \sum_{k=1}^n |\cos(2\pi\{k\tilde{s}\})|^\alpha + \sum_{k=1}^n |\sin(2\pi\{k\tilde{s}\})|^\alpha$$

та $\{\cdot\}$ позначає дробову частину. Якщо $\tilde{s}$ ірраціональне, то послідовність $(\{k\tilde{s}\})_{k\in\mathbb{N}}$ рівномірно розподілена на інтервалі $[0,1]$ за теоремою Вейля, див. наприклад теорему 2.1 та приклад 2.1 в [173], в той час, як для раціональних $\tilde{s} = p/q$ вона є рівномірно розподіленою на скінченній множині $\{0, \frac{1}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}\}$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sigma_n^\alpha = \begin{cases} \int_0^1 (|\cos(2\pi u)|^\alpha + |\sin(2\pi u)|^\alpha)\mathrm{d}u, & s \notin \pi\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}\sum_{k=1}^q (|\cos(2\pi k/q)|^\alpha + |\sin(2\pi k/q)|^\alpha), & s = 2\pi p/q. \end{cases}$$

Зазначимо, що при $\alpha = 2$ таке розділення відсутнє, оскільки $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$.

6.4.2 Збіжність випадкових тригонометричних поліномів. Нехай $\mathcal{H}$ є простором функцій, аналітичних в усій комплексній площині. Наділимо простір $\mathcal{H}$ топологією локально рівномірної збіжності, яка метризується повною сепарабельною метрикою

$$d(f,g) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2^k} \frac{\|f-g\|_{\bar{\mathbb{D}}_k}}{1+\|f-g\|_{\bar{\mathbb{D}}_k}},$$

де $\bar{\mathbb{D}}_r = \{|z| \leq r\}$ позначає замкнений круг радіуса $r > 0$ з центром в початку координат та $\|f\|_K = \sup_{z\in K} |f(z)|$ є звичайною супремум-нормою f на компакті $K \subset \mathbb{C}$, див. сс. 151–152 в книзі [53]. Випадкова аналітична функція – це випадковий елемент простору $\mathcal{H}$ з борелевською σ-алгеброю. Теорія випадкових аналітичних функцій докладно висвітлена в книзі [121], див. також [252].

Нехай $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ є замкненим підпростором $\mathcal{H}$, що складається з функцій $f \in \mathcal{H}$, які набувають дійсних значень на $\mathbb{R}$. Для кожної $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ маємо $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ для всіх $z \in \mathbb{C}$. Дійсно, функції $f(z)$ та $\overline{f(\bar{z})}$ аналітичні та рівні на $\mathbb{R}$, а, отже, рівні всюди на $\mathbb{C}$ за теоремою єдиності для аналітичних функцій. Простір $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ наділимо індукованою топологією та метрикою.

Наш підхід до доведення теорем 142, 145 та 146 базується на доведенні функціональних граничних теорем для тригонометричних поліномів $\mathcal{T}_n(t)$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. Після того, як такі теореми встановлено, ми застосуємо теорему про неперервне відображення, щоб отримати збіжність точкових процесів нулів. Фундаментальний результат, що лежить в основі другого кроку – теорема Гурвіца, яка, фактично, стверджує, що відображення, яке ставить у відповідність аналітичній функції точковий процес її нулів є неперервним. Леми 155 та 156, що наведені нижче, роблять це твердження строгим.

Спершу ми побудуємо аналітичні продовження процесів Z, G та Z_ν, що з'являються в теоремах 142, 145 та 146.

Процес Z. Стаціонарний гауссівський процес $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ в теоремі 142 можна аналітично продовжити на всю комплексну площину, використавши представлення

$$Z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(t-\pi k) N_k, \quad t \in \mathbb{C}, \tag{6.46}$$

де є $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ незалежними стандартними нормальними величинами. Ряд в

(6.46) збігається локально рівномірно м.н. на $\mathbb{C}$, оскільки локально рівномірно збігається ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\operatorname{sinc}(t-\pi k)|^2$, див. лему 2.2.3 в [121]. Це означає, що $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ є аналітичною на $\mathbb{C}$ з ймовірністю 1. Далі, $\mathbb{R}^2$-значний процес $((\operatorname{Re} Z(t), \operatorname{Im} Z(t)))_{t\in\mathbb{C}}$ є гауссівським в сенсі, що для всіх $t_1,\dots,t_d \in \mathbb{C}$, випадковий вектор

$$(\operatorname{Re} Z(t_1), \operatorname{Im} Z(t_1), \dots, \operatorname{Re} Z(t_d), \operatorname{Im} Z(t_d))$$

є гауссівським. Очевидно, $\mathbb{E}Z(t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{C}$. Коваріаційна структура $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ задається рівностями

$$\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] = \operatorname{sinc}(t-s), \quad \mathbb{E}[Z(t)\overline{Z(s)}] = \operatorname{sinc}(t-\bar{s}), \quad t,s\in\mathbb{C}, \tag{6.47}$$

Наприклад, якщо $t, s \notin \pi\mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(t)\overline{Z(s)}] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(t-\pi k)}{t-\pi k} \overline{\left(\frac{\sin(s-\pi k)}{s-\pi k}\right)} \\
&= (\sin t)(\sin \bar{s}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-\pi k)(\bar{s}-\pi k)} \\
&= \frac{(\sin t)(\sin \bar{s})}{\bar{s}-t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{t-\pi k} - \frac{1}{\bar{s}-\pi k}\right) \\
&= \frac{(\sin t)(\sin \bar{s})}{\bar{s}-t} (\cot t - \cot \bar{s}) = \frac{\sin(t-\bar{s})}{t-\bar{s}},
\end{aligned}$$

де ми використали розклад котангенса на прості дроби. Якщо $t = \pi j$ для деякого $j \in \mathbb{Z}$, то

$$\mathbb{E}[Z(t)\overline{Z(s)}] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{sinc}(t-\pi k)\overline{\operatorname{sinc}(s-\pi k)} = \overline{\operatorname{sinc}(s-\pi j)} = \operatorname{sinc}(t-\bar{s}),$$

оскільки $\operatorname{sinc}(t-\pi k) = 1$ при $k = j$ та 0 при $k \neq j$. Доведення першого співвідношення в (6.47) аналогічне.

Представлення (6.46) виникало й у інших роботах, див. [14]. Зауважимо, що аналітично продовжений процес $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ є стаціонарним відносно зсувів вздовж дійсної осі, але не є стаціонарним відносно зсувів вздовж уявної осі. Вибіркова траєкторія дійснозначного процесу $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ представлена на рисунку 6.2.

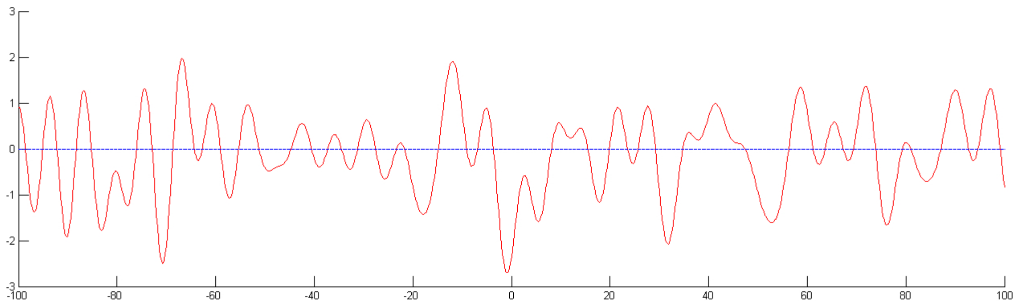


Рис. 6.2: Вибіркова траєкторія стаціонарного процесу $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ на проміжку $[-100, 100]$.

Процес G. Якщо $s \notin \pi\mathbb{Z}$ можемо покласти

$$G(t) := \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2}} Z(t), \quad t \in \mathbb{C},$$

з вже побудованим процесом $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$. У випадку $s \in \pi\mathbb{Z}$ візьмемо центрований $\mathbb{C}$-значний броунівський рух $(\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(u))_{u\in[0,1]}$ з коваріаційною структурою

$$\mathbb{E}[(\operatorname{Re}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))^2] = \sigma_1^2, \quad \mathbb{E}[(\operatorname{Im}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))^2] = \sigma_2^2, \quad \mathbb{E}[(\operatorname{Im}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))(\operatorname{Re}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))] = \rho,$$

та покладемо

$$U(t) = \int_0^1 e^{itu} \mathrm{d}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(u), \quad t \in \mathbb{C},$$

де інтеграл визначається формулою інтегрування частинами, як в (6.45). Очевидно, що так визначена U є випадковою аналітичною функцією на $\mathbb{C}$. Визначимо[4]

$$G(t) = \frac{U(t) - \overline{U(\bar{t})}}{2i} = \int_0^1 \sin(tu)\mathrm{d}\operatorname{Re}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(u) + \int_0^1 \cos(tu)\mathrm{d}\operatorname{Im}\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(u), \quad t \in \mathbb{C}.$$

Інтегруючи частинами та використовуючи формули

$$\int_0^1 \sin(t_1 u)\sin(t_2 u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(t_1-t_2) - \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(t_1+t_2),$$
$$\int_0^1 \cos(t_1 u)\cos(t_2 u)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(t_1-t_2) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(t_1+t_2),$$
$$\int_0^1 \sin(t_1 u)\cos(t_2 u)\mathrm{d}u = \frac{1-\cos(t_1+t_2)}{2(t_1+t_2)} + \frac{1-\cos(t_1-t_2)}{2(t_1-t_2)},$$

[4]Тут використано таке спостереження: якщо f аналітична, то $g(z) := (f(z) - \overline{f(\bar{z})})/(2i)$ також аналітична. Більш того, якщо $g \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ та $t \in \mathbb{R}$, то $g(t) = \operatorname{Im} f(t)$. Зокрема, $G(t) = \operatorname{Im} U(t)$ при $t \in \mathbb{R}$, але, в загальному випадку, це співвідношення не виконується при $t \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

можна перевірити, що коваріація $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ задається другим рядком формули (6.41).

Процес Z_ν. Нехай $(L(u))_{u\in[0,1]}$ є $\mathbb{C}$-значним α-стійким процесом Леві, що визначений в теоремі 146. Так само, як при побудові G, покладемо

$$U_\nu(t) = \int_0^1 e^{itu}\mathrm{d}L(u), \quad t\in\mathbb{C}, \tag{6.48}$$

де інтегрування розуміється в сенсі (6.45). Очевидно, що U_ν є випадковою аналітичною функцією на $\mathbb{C}$ і можемо взяти

$$Z_\nu(t) = \frac{U_\nu(t) - \overline{U_\nu(\bar{t})}}{2i} = \int_0^1 \sin(tu)\mathrm{d}\operatorname{Re}L(u) + \int_0^1 \cos(tu)\mathrm{d}\operatorname{Im}L(u), \quad t\in\mathbb{C}.$$

Тепер ми сформулюємо та доведемо функціональні граничні теореми для випадкових тригонометричних поліномів.

Теорема 149. *Нехай $(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2),\dots$ є незалежними однаково розподіленими центрованими випадковими векторами з одиничною коваріаційною матрицею. Для довільного фіксованого $s\in\mathbb{R}$ покладемо*

$$\begin{aligned} Y_n(t) &:= \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{T}_n\left(s+\frac{t}{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\left(\xi_k\sin\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right)+\eta_k\cos\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right)\right). \end{aligned} \tag{6.49}$$

Тоді $Y_n\Rightarrow Z$ при $n\to\infty$ у просторі $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ з локально рівномірною топологією.

Доведення. Доведення складається з двох кроків: доведення збіжності скінченновимірних розподілів та доведення щільності.

Збіжність скінченновимірних розподілів. Зафіксуємо довільні $t_1,\dots,t_d\in\mathbb{C}$. Маємо представлення $Y_n(t) = V_{n,1}(t)+\dots+V_{n,n}(t)$, де

$$V_{n,k}(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_k\sin\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right)+\eta_k\cos\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right)\right).$$

Комплексний випадковий вектор $\mathbf{Y}_n := (Y_n(t_1),\dots,Y_n(t_d))$ може бути представлений у вигляді суми незалежних центрованих векторів $(V_{n,k}(t_1),\dots,V_{n,k}(t_d))$ по $k=1,\dots,n$. Для доведення збіжності за розподілом $\mathbf{Y}_n$ до $\mathbf{Y} := (Z(t_1),\dots,Z(t_d))$, скористаємось центральною граничною теоремою Ліндеберга. Спочатку перевіримо, що при $i, j = 1, \dots, d$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n(t_i)Y_n(t_j)] = \mathbb{E}[Z(t_i)Z(t_j)] = \operatorname{sinc}(t_i - t_j),$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n(t_i)\overline{Y_n(t_j)}] = \mathbb{E}[Z(t_i)\overline{Z(t_j)}] = \operatorname{sinc}(t_i - \bar{t}_j).$$

З формули (6.49) випливає

$$\mathbb{E}[Y_n(t_i)Y_n(t_j)] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k(t_i - t_j)}{n} \to \int_0^1 \cos(u(t_i - t_j))\mathrm{d}u = \operatorname{sinc}(t_i - t_j)$$

та, аналогічно,

$$\mathbb{E}[Y_n(t_i)\overline{Y_n(t_j)}] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k(t_i - \bar{t}_j)}{n} \to \int_0^1 \cos(u(t_i - \bar{t}_j))\mathrm{d}u = \operatorname{sinc}(t_i - \bar{t}_j),$$

при $n \to \infty$. Перевіримо умову Ліндеберга. Зафіксуємо $t \in \mathbb{C}$. Для довільного $\varepsilon > 0$ потрібно перевірити, що

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|V_{n,k}(t)|^2 \mathbb{1}_{\{|V_{n,k}(t)|\geq\varepsilon\}}\right] = 0.$$

Використовуючи нерівності $|z_1 + z_2|^2 \leq 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ та $|\sin z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$, $|\cos z| \leq \cosh(\operatorname{Im} z)$, отримуємо для $k = 1, \dots, n$,

$$|V_{n,k}(t)|^2 \leq \frac{2}{n}(\cosh^2(\operatorname{Im} t)) \cdot (\xi_k^2 + \eta_k^2).$$

Поклавши $C = 2\cosh^2(\operatorname{Im} t)$, маємо

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|V_{n,k}(t)|^2 \mathbb{1}_{\{|V_{n,k}(t)|\geq\varepsilon\}}\right] &\leq \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\xi_k^2 + \eta_k^2)\mathbb{1}_{\{C(\xi_k^2+\eta_k^2)\geq n\varepsilon^2\}}\right] \\ &= C\mathbb{E}\left[(\xi_1^2 + \eta_1^2)\mathbb{1}_{\{\xi_1^2+\eta_1^2\geq n\varepsilon^2/C\}}\right].\end{aligned}$$

Права частина збігається до нуля при $n \to \infty$ внаслідок припущення $\mathbb{E}[\xi_1^2 + \eta_1^2] < \infty$.

Щільність. Для перевірки щільності $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі $\mathcal{H}$ достатньо показати, що для довільного $R > 0$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{|t|\leq R} \mathbb{E}|Y_n(t)|^2 < \infty, \tag{6.50}$$

див лему 4.2 в [154] або зауваження після леми 2.6 в [252]. Для всіх $|t| \le R$ та $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathbb{E}|Y_n(t)|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k(t-\bar{t})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cosh\frac{2k(\operatorname{Im} t)}{n} \le \cosh(2R) < \infty,$$

оскільки $-R \le \frac{k}{n}\operatorname{Im} t \le R$ для всіх $k = 1, \dots, n$.

Таким чином, Y_n слабко збігається до Z у просторі $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$. Оскільки $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ є замкненим в $\mathcal{H}$ та всі наші процеси мають траєкторії в $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ м.н., то має місце слабка збіжність у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$. □

Наша наступна теорема дає збіжність випадкових тригонометричних поліномів у умовах теореми 145. Її доведення використовує такі ж міркування, як і попередня теорема і тому не наводиться, його можна знайти в статті [131].

Теорема 150. *Зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$ та визначимо випадковий процес $(Y_n(t))_{t\in\mathbb{C}}$ рівністю*

$$Y_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}}\mathcal{T}_n\left(s + \frac{t}{n}\right).$$

В умовах теореми 145 маємо $Y_n \Rightarrow G$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

У випадку, коли вектор (ξ_1, η_1) належить області притягання деякого стійкого закону, функціональна гранична теорема для тригонометричних поліномів має такий вигляд.

Теорема 151. *Зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$. В умовах теореми 146,*

$$\frac{1}{b_n}\mathcal{T}_n\left(s + \frac{t}{n}\right) \Rightarrow Z_\nu(t), \quad n \to \infty$$

у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Доведення теореми 151 представлено у вигляді послідовності лем.

Розпочнемо з відомого факту, див. [225], що з умови (6.42) випливає, що хвіст розподілу (ξ_1, η_1) правильно змінюється в $\mathbb{R}^2$ з граничною мірою ν, що, в свою чергу, еквівалентно

$$n\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi + i\eta) \in \cdot\} \to \nu(\cdot), \quad n \to \infty \tag{6.51}$$

у просторі $M_p(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\})$ з грубою топологією. Тут $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ позначає сферу Рімана, а $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ є сферою Рімана з виколотим південним полюсом. Ці простори можна ототожнити з $\overline{\mathbb{R}^2} := \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ (одноточкова компактифікація $\mathbb{R}^2$) та $\overline{\mathbb{R}^2} \setminus \{0\}$ відповідно. Вважатимемо ν мірою на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$, поклавши $\nu(\{\infty\}) = 0$.

Лема 152. *Зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$ та визначимо послідовність точкових процесів на $[0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ так:*

$$N_n := \sum_{k\geq 1} \delta_{\left(\frac{k}{n}, \frac{\xi_k + i\eta_k}{b_n} e^{iks}\right)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$N_n \Rightarrow N_\infty, \quad n \to \infty, \tag{6.52}$$

у просторі $M_p([0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}))$ з грубою топологією, де N_∞ є процесом Пуассона на $[0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ з мірою інтенсивності $\mathbb{LEB} \times \tilde{\nu}$ та мірою $\tilde{\nu}$ визначеною в (6.44).

Доведення. Визначимо послідовність $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ мір на $[0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$ так:

$$\lambda_n(\mathrm{d}x, \mathrm{d}z) := \sum_{k\geq 1} \delta_{k/n}(\mathrm{d}x)\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi_k + i\eta_k)e^{iks} \in \mathrm{d}z\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

і покажемо, що

$$\lambda_n \to \mathbb{LEB} \times \tilde{\nu}, \quad n \to \infty$$

у просторі $M_p([0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}))$. Для цього зафіксуємо неперервну функцію $f : [0,\infty) \times (\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}_+$ з компактним носієм та нехай $a, r > 0$ такі, що $f(x,z) = 0$ при $x > a$ або $|z| < r$.

Випадок $s \notin \pi\mathbb{Q}$. Ми маємо перевірити, що

$$\sum_{k\geq 1} \int_{|z|\geq r} f(k/n, z)\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi_k + i\eta_k)e^{iks} \in \mathrm{d}z\} \to \int_{|z|\geq r} \int_0^a f(x,z)\mathrm{d}x\tilde{\nu}(\mathrm{d}z),$$

при $n \to \infty$. Ліва частина останньої формули дорівнює

$$\int_{|z|\geq r} \left(\frac{1}{n}\sum_{k\geq 1} f(k/n, e^{iks}z)\right) \left(n\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi_1 + i\eta_1) \in \mathrm{d}z\}\right),$$

та з огляду на співвідношення (A.39) в твердженні 185 і формулу (6.51), збігається до

$$\int_{|z|\geq r}\int_0^a\int_0^1 f(x,e^{2\pi iy}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\nu(\mathrm{d}z)=\int_0^1\int_{|z|\geq r}\int_0^a f(x,z)\mathrm{d}x\nu(e^{-2\pi iy}\mathrm{d}z)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{|z|\geq r}\int_0^a f(x,z)\mathrm{d}x\tilde{\nu}(\mathrm{d}z).$$

Випадок $s=2\pi p/q$ випливає зі співвідношення (A.40) в лемі 185.

Решта доведення повторює доведення твердження 3.1 в [225]. Єдине місце, яке потребує перевірки, це співвідношення (3.3) цитованої роботи. У наших позначеннях воно зводиться до

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq 1}\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi_1+i\eta_1)e^{iks}\in A\}=0,$$

де A є компактом в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$. Це співвідношення очевидне з огляду на (6.51):

$$\sup_{k\geq 1}\mathbb{P}\{b_n^{-1}(\xi_1+i\eta_1)e^{iks}\in A\}\leq\mathbb{P}\{b_n^{-1}|\xi_1+i\eta_1|\in\{|z|\colon z\in A\}\}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Доведення леми 152 завершено. □

У подальшому ми позначатимемо $D([0,\,1],\mathbb{C})$ простір комплекснозначних функцій, визначених на інтервалі $[0,\,1]$, неперервних справа на $[0,\,1)$ та зі скінченними границями зліва на $(0,\,1]$. Простір $D([0,\,1],\mathbb{C})$ наділяється стандартною J_1-топологією, див підрозділ B.1..

Лема 153. *Зафіксуємо $s\in\mathbb{R}$ та визначимо послідовність $\mathbb{C}$-значних процесів*

$$L_n(t):=\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{[nt]}(\xi_k+i\eta_k)e^{iks},\quad t\in[0,\,1]. \tag{6.53}$$

Нехай процес Леві L визначений як в теоремі 146. Тоді у просторі $D([0,\,1],\mathbb{C})$

$$L_n(t)\Rightarrow L(t),\quad n\to\infty. \tag{6.54}$$

Доведення. Якщо $s\in 2\pi\mathbb{Z}$, то (6.54) це просто функціональна гранична теорема для суми незалежних однаково розподілених комплексно-значних випадкових величин, що узагальнює (6.42). Припустимо, що $s\notin 2\pi\mathbb{Z}$. Ми використаємо критерій функціональної збіжності, сформульований в теоремі 3.1 роботи

[258]. З огляду на лему 152 нам потрібно перевірити, що для кожного $\delta > 0$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\sup_{0\le t\le 1}\Big|b_n^{-1}\sum_{k=1}^{[nt]}(\xi_k+i\eta_k)e^{iks}\mathbb{1}_{\{|\xi_k+i\eta_k|\le b_n\varepsilon\}}+t\int_{\varepsilon<|z|\le 1}z\tilde{\nu}(\mathrm{d}z)\Big|\ge\delta\Big\}=0. \tag{6.55}$$

З визначення міри $\tilde{\nu}$ випливає, що вона інваріантна відносно групи перетворень $z\mapsto ze^{2\pi i\theta}$, де $\theta\in\mathbb{R}$ (якщо $s\notin\pi\mathbb{Q}$) та $\theta\in q^{-1}\mathbb{Z}$ (якщо $s=2\pi p/q$). Оскільки ми припускаємо, що $s\notin 2\pi\mathbb{Z}$, то ця група перетворень містить принаймні одне нетривіальне обертання, а тому $\int_{\{\varepsilon<|z|\le 1\}}z\tilde{\nu}(\mathrm{d}z)=0$. Покажемо тепер, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\sup_{1\le m\le n}\left|\sum_{k=1}^{m}\Delta_{n,k}\right|\ge b_n\delta\right\}=0, \tag{6.56}$$

де $\Delta_{n,k}=\Delta_{n,k}(s):=\big((\xi_k+i\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\xi_k+i\eta_k|\le b_n\varepsilon\}}-\mathbb{E}[(\xi_k+i\eta_k)\mathbb{1}_{\{|\xi_k+i\eta_k|\le b_n\varepsilon\}}]\big)\,e^{iks}$. Зазначимо, що $\mathbb{E}\Delta_{n,k}=0$, а тому $(|\sum_{k=1}^{m}\Delta_{n,k}|)_{m\in\mathbb{N}}$ є невід'ємним субмартингалом. З максимальної нерівності Дуба, див. (A.71), отримуємо

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{1\le m\le n}\left|\sum_{k=1}^{m}\Delta_{n,k}\right|\ge b_n\delta\right\}\le(\delta b_n)^{-2}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}\right|^2.$$

Далі,

$$\begin{aligned}(\delta b_n)^{-2}\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\Delta_{n,k}\right|^2&=(\delta b_n)^{-2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}[\Delta_{n,k}]\\&\le(\delta b_n)^{-2}n\mathbb{E}\left[(\xi^2+\eta^2)\mathbb{1}_{\{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}\le b_n\varepsilon\}}\right].\end{aligned}$$

Припущення (6.51) гарантує, що функція $x\mapsto\mathbb{P}\{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}>x\}$ правильно змінюється. Отже, за теоремою Карамати в формі, наведеній в формулі (5.22) на с. 579 в [77], маємо

$$(\delta^2 b_n^{-2})n\mathbb{E}\left[(\xi_1^2+\eta_1^2)\mathbb{1}_{\{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}\le b_n\varepsilon\}}\right]\sim c\delta^{-2}\varepsilon^2 n\mathbb{P}\{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}>\varepsilon b_n\},\quad n\to\infty,$$

для деякої $c>0$. Отже,

$$\begin{aligned}&\varlimsup_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{\sup_{1\le m\le n}\left|\sum_{k=1}^{m}\Delta_{n,k}\right|\ge b_n\delta\right\}\\&\qquad\le c\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\lim_{n\to\infty}n\mathbb{P}\{\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2}>\varepsilon b_n\}=c\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}\int_{|z|>\varepsilon}\tilde{\nu}(\mathrm{d}z).\end{aligned}$$

Останній вираз прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$, оскільки $\tilde{\nu}$ є мірою Леві, звідки отримуємо (6.56).

Поєднуючи (6.56) та тривіальну оцінку

$$\sup_{0 \le t \le 1} \left| \mathbb{E}\left[(\xi + i\eta)\mathbb{1}_{\{|\xi+i\eta| \le b_n\varepsilon\}}\right] \sum_{k=1}^{[nt]} e^{iks} \right| \le \frac{2\varepsilon b_n}{|1 - e^{is}|},$$

бачимо, що (6.55) виконується. □

Лема 154. *Зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$ та визначимо послідовність*

$$Y_n(t) := \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k + i\eta_k) \exp\left(ik\left(s + \frac{t}{n}\right)\right), \quad t \in \mathbb{C}. \tag{6.57}$$

В умовах теореми 146 маємо

$$Y_n(t) \Rightarrow U_\nu(t) \tag{6.58}$$

у просторі $\mathcal{H}$ з локально рівномірною топологією, де процес U_ν визначений формулою (6.48).

Доведення. Визначимо відображення $\mathcal{F} : D([0,\,1], \mathbb{C}) \to \mathcal{H}$ рівністю

$$(\mathcal{F}(f))(z) := \int_{[0,\,1]} e^{izx} \mathrm{d}f(x) \overset{\text{def}}{=} f(1)e^{iz} - f(0) - iz \int_0^1 f(x) e^{izx} \mathrm{d}x, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{6.59}$$

Оскільки $f \in D([0,\,1], \mathbb{C})$ гарантує, що $\sup_{t \in [0,\,1]} |f(t)| < \infty$, функція $\mathcal{F}(f)$ аналітична у всій комплексній площині. Отже, $\mathcal{F}$ коректно визначене відображення $D([0,\,1], \mathbb{C})$ в $\mathcal{H}$. Згідно з лемою 175 відображення $\mathcal{F}$ всюди неперервне на $D([0,\,1], \mathbb{C})$.

З огляду на представлення $Y_n = \mathcal{F}(L_n)$, де L_n визначено формулою (6.53), збіжність (6.58) випливає з теореми про неперервне відображення. □

Поєднуючи наведені вище три леми, ми можемо довести теорему 151.

Доведення теореми 151. Згадуючи визначення $\mathcal{T}_n$, запишемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_n} \mathcal{T}_n\left(s + \frac{t}{n}\right) &= \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \sin\left(k\left(s + \frac{t}{n}\right)\right) + \eta_k \cos\left(k\left(s + \frac{t}{n}\right)\right)\right) \\ &= \frac{Y_n(t) - \overline{Y_n(\bar{t})}}{2i} \end{aligned}$$

де Y_n такий же, як в (6.57). З леми 154 випливає

$$\frac{1}{b_n}\mathcal{T}_n\left(s+\frac{t}{n}\right) \Rightarrow \frac{U_\nu(t)-\overline{U_\nu(\bar{t})}}{2i} = \int_0^1 \sin(tu)\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\,L(u) + \int_0^1 \cos(tu)\mathrm{d}\,\mathrm{Im}\,L(u)$$

у просторі $\mathcal{H}$, а, отже, й у просторі $\mathcal{H}_\mathbb{R}$. Доведення теореми 151 завершено. □

6.4.3 Збіжність нулів. Для довільного фіксованого інтервалу $[a,b] \subset \mathbb{R}$ розглянемо відображення $N : \mathcal{H}_\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{0,1,\ldots\}$, яке ставить у відповідність функції $f \in \mathcal{H}_\mathbb{R}$ кількість її дійсних нулів в $[a,b]$. Хоча це й не принципово, вважатимемо, що нулі підраховуються з врахуванням кратностей.

Лема 155. *Нехай $A = A[a,b] \subset \mathcal{H}_\mathbb{R}$ є множиною таких $f \in \mathcal{H}_\mathbb{R}$, які не мають кратних дійсних нулів на $[a,b]$ та $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. Тоді, множина A відкрита в $\mathcal{H}_\mathbb{R}$, а відображення N є локально постійним на A, тобто для кожної $f \in A$ існує відкритий окіл f в $\mathcal{H}_\mathbb{R}$ у якому N константа.*

Доведення. Розглянемо довільну послідовність $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_\mathbb{R}$, яка збігається до $f \in A$ локально рівномірно. Нам порібно показати, що для великих n маємо $f_n \in A$ та $N(f_n) = N(f)$. Нехай $R > 0$ вибрано настільки великим, що $[a,b]$ міститься у відкритому крузі $\mathbb{D}_R = \{|z| < R\}$. Нехай $z_1,\ldots,z_d$ є нулями f в $\mathbb{D}_R$ з відповідними кратностями $m_1,\ldots,m_d$. Припустимо, не зменшуючи загальності, що f не має нулів на границі $\mathbb{D}_R$. Нехай $\varepsilon > 0$ настільки мале, що відкриті круги $z_1+\mathbb{D}_\varepsilon,\ldots,z_d+\mathbb{D}_\varepsilon$ не перетинаються, не перетинають границю $\mathbb{D}_R$ та дійсну вісь (крім випадку, коли сам корінь дійсний). За теоремою Гурвіца, див. с 152 в [53], для всіх досить великих n, функція f_n має рівно m_k нулів (з кратностями) в крузі $z_k+\mathbb{D}_\varepsilon$ для всіх $k=1,\ldots,d$, а інших нулів f_n в крузі $\mathbb{D}_R$ немає. Якщо $z_k \in (a,b)$, то $m_k = 1$ за припущенням, а відповідний нуль f_n в крузі $z_k+\mathbb{D}_\varepsilon$ також дійсний, оскільки в протилежному випадку f_n мала б два комплексних спряжених корені (внаслідок рівності $f_n(\bar{z}) = \overline{f_n(z)}$), що є суперечністю. Таким чином всі дійсні корені f_n в (a,b) прості, а їх число дорівнює $N(f)$. Очевидно, $f_n(a) \neq 0$ та $f_n(b) \neq 0$ для всіх досить великих n. Отже, $f_n \in A$ та $N(f_n) = N(f)$ для великих n. □

Нагадаємо, що $\mathbf{Zeros}_\mathbb{R}(f)$ є локально скінченною мірою на $\mathbb{R}$, яка рахує дійсні нулі $f \in \mathcal{H}_\mathbb{R} \setminus \{0\}$ з кратностями.

Лема 156. *Нехай $A(\mathbb{R})$ є множиною таких $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, які не мають кратних дійсних нулів. Відображення $f \mapsto \mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ з $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ в простір $M_p(\mathbb{R})$ є неперервним на $A(\mathbb{R})$.*

Доведення. Нехай $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ є послідовністю, збіжною до $f \in A(\mathbb{R})$ локально рівномірно. Зафіксуємо $R > 0$. Нехай $z_1, \dots, z_l$ є дійсними нулями f в $[-R, R]$ та припустимо, що $-R$ та R не є нулями f. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Міркуючи, як в доведенні леми 155, можна показати, що для досить великих n функція f_n має рівно по одному дійсному нулю в кожному з кругів $z_1 + \mathbb{D}_\varepsilon, \dots, z_l + \mathbb{D}_\varepsilon$ та не має інших дійсних нулів в $[-R, R]$. Це означає, що $\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f_n)$ збігається до $\mathbf{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ у грубій топології. □

Доведення теорем 142, 144, 145 та 146. З огляду на наведені вище дві леми, теореми 149, 150 та 151, а також теорему про неперервне відображення, збіжність нулів в теоремах 144, 145 та 146 випливатиме, якщо ми зможемо перевірити, що граничні процеси Z, G та Z_ν не мають кратних дійсних нулів, тобто

$$\mathbb{P}\{Z \in A(\mathbb{R})\} = \mathbb{P}\{G \in A(\mathbb{R})\} = \mathbb{P}\{Z_\nu \in A(\mathbb{R})\} = 1. \tag{6.60}$$

Аналогічно, теорема 142 буде наслідком

$$\mathbb{P}\{Z \in A([a, b])\} = 1, \tag{6.61}$$

для всіх $a < b$. Для перевірки цих тверджень нам знадобиться відомий результат Булінської [50], який дає загальні умови того, що стохастичний процес (не обов'язково гауссівський) не має кратних нулів з ймовірністю один.

Лема 157 (Булінська, 1962)**.** *Нехай $(Q(t))_{t\in[a,b]}$ є стохастичним процесом з неперервно диференційовними траєкторіями. Припустимо, що розподіл випадкової величини $Q(t)$ є абсолютно неперервним з щільністю, яка рівномірно обмежена по $t \in [a, b]$. Тоді з ймовірністю один не існує такого $t \in [a, b]$, що $Q(t) = Q'(t) = 0$.*

Частини тверджень (6.60) та (6.61) відносно гауссівських процесів Z та G (у випадку $s \notin \pi\mathbb{Z}$) відразу випливають з леми 157, див. також роботи [272] та [273] в яких більш докладно досліджувались кратні нулі гауссівських процесів. Дійсно, дисперсії Z та G є ненульовими константами. Це означає, що щільності $Z(t)$ та $G(t)$ є рівномірно обмеженими. Просте доведення того, що G не має кратних нулів у випадку $s \in \pi\mathbb{Z}$ можна знайти в лемі 4.4 роботи [131].

Залишається перевірити, що $\mathbb{P}\{Z_\nu \in A(\mathbb{R})\} = 1$, використавши лему 157.

Лема 158. *З ймовірністю один не існує $t \in \mathbb{R}$ такого, що $Z_\nu(t) = Z'_\nu(t) = 0$.*

Доведення. Нагадаємо, що Z_ν є випадковою аналітичною функцією. Ми покажемо, що $Z_\nu(t)$ має щільність, яка рівномірно обмежена по $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}$ для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$. З леми 157 випливатиме, що процес Z_ν м.н. не має кратних коренів в довільному інтервалі, що не містить початок координат. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Достатньо перевірити, що

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \mathbb{E} e^{iaZ_\nu(t)} \right| \mathrm{d}a \le C, \tag{6.62}$$

де константа C не залежить від $\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}$. Це означатиме, що х.ф. $Z_\nu(t)$ має обмежену норму в L^1, а тому за формулою обернення для перетворень Фур'є щільність p_t в.в. $Z_\nu(t)$ задовольняє

$$p_t(x) = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{-iax} \mathbb{E} e^{iaZ_\nu(t)} \mathrm{d}a \right| \le \frac{C}{2\pi}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}.$$

Для доведення (6.62) нагадаємо, що

$$aZ_\nu(t) = \int_0^1 a \sin(tu) \mathrm{d} \operatorname{Re} L(u) + \int_0^1 a \cos(tu) \mathrm{d} \operatorname{Im} L(u).$$

За формулою для розподілів таких інтегралів, див. наприклад формулу (6) в [129], маємо

$$\ln \mathbb{E} e^{iaZ_\nu(t)} = \int_0^1 \psi(a \sin(tu), a \cos(tu)) \mathrm{d}u, \tag{6.63}$$

де $\psi(x, y) = \ln \mathbb{E} e^{i(x \operatorname{Re} L(1) + y \operatorname{Im} L(1))}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Випадковий вектор $(\operatorname{Re} L(1), \operatorname{Im} L(1))$ є α-стійким і нехай Π є його (скінченною) спектральною мірою на одиничному крузі $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, яку можна легко виразити в термінах $\tilde{\nu}$). Згідно з теоремою 2.3.1 книги [240],

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\psi(a\sin(tu), a\cos(tu)) &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} |\operatorname{Im} e^{i(tu+\phi)}|^\alpha \Pi(\mathrm{d}\phi)\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} |\sin(tu+\phi)|^\alpha \Pi(\mathrm{d}\phi).\end{aligned}$$

Підставляючи це в формулу (6.63), отримуємо

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\ln \mathbb{E}e^{iaZ_\nu(t)} &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} \int_0^1 |\sin(tu+\phi)|^\alpha \mathrm{d}u\Pi(\mathrm{d}\phi)\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} t^{-1} \int_\phi^{t+\phi} |\sin v|^\alpha \mathrm{d}v\Pi(\mathrm{d}\phi).\end{aligned}$$

Функція $(\phi, t) \mapsto t^{-1}\int_\phi^{t+\phi} |\sin v|^\alpha \mathrm{d}v$ є неперервною і додатною на компакті $[0, 2\pi] \times [\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$, отже набуває мінімальне значення, скажімо $\delta > 0$. Тоді,

$$\operatorname{Re}\ln \mathbb{E}e^{iaZ_\nu(t)} \leq -\delta\Pi([0, 2\pi))|a|^\alpha, \quad a \in \mathbb{R},$$

що дає (6.62) та доводить відсутність кратних нулів в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Залишається показати, що $t = 0$ не є кратним коренем. Якщо міра Π зосереджена в точках $\{0, \pi\}$, то $\operatorname{Im} L(u) = 0$, а тому $Z_\nu(0) = 0$ м.н. В протилежному випадку $Z_\nu(0) = \operatorname{Im} L(1)$ має невироджений стійкий розподіл, а тому $\mathbb{P}\{Z_\nu(0) = 0\} = 0$. Отже, припустимо, що Π зосереджена в точках $\{0, \pi\}$. Маємо

$$Z'_\nu(0) = \int_0^1 u\mathrm{d}\operatorname{Re} L(u),$$

а тому $Z'_\nu(0)$ має невироджений стійкий розподіл, звідки $\mathbb{P}\{Z'_\nu(0) = 0\} = 0$. $\square$

6.5 Висновки до розділу 6

У розділі досліджено властивості траєкторій та властивості розподілів трьох типів процесів:

$$I_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}\mathcal{S}_\alpha(y), \quad u>0, \quad \rho > -1/\alpha, \quad \alpha \in (1,2];$$

$$J_{\alpha,\rho}(u) = \int_{[0,u]} (u-y)^\rho \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad u>0, \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in (0,1);$$

$Z_{\alpha,\beta}(u)$ – центрованого умовно гауссівського процесу з умовною коваріацією

$$\mathbb{E}\big[Z_{\alpha,\beta}(u)Z_{\alpha,\beta}(w)\big|W_\alpha^{\leftarrow}\big] = \int_{[0,u]} C(u-y,w-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y), \quad 0<u\le w.$$

Для перших двох класів випадкових процесів встановлено дихотомію: або ці процеси мають неперервні траєкторії, або є необмеженими з додатною ймовірністю на кожному інтервалі $(a,b) \subset (0,\infty)$ (за умови $\rho \neq 0$ для $I_{\alpha,\rho}$). Крім того:

- встановлено стохастичну неперервність всіх трьох класів;
- показано локальну гельдеровість $J_{\alpha,\rho}$ (теорема 135);
- доведено закон повторного логарифма для $J_{\alpha,\rho}$ (теорема 137).
- вивчено властивості розподілів згаданих процесів: знайдено їх одновимірні розподіли, моменти (для $J_{\alpha,\rho}$), перевірено відсутність стаціонарності або незалежності приростів, доведено самоподібність.

У підрозділі 6.4 в повній загальності доведено локальну універсальність дійсних нулів тригонометричних поліномів (теореми 144, 145 та 146).

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі побудовано елементи асимптотичної теорії випадкових процесів з регенерацією як класу стохастичних процесів, що визначені на випадкових самоподібних структурах регенеративної природи. Розроблена у даному комплексному дослідженні теорія слабкої збіжності випадкових процесів з імміграцією та процесів дробового ефекту, виявилась потужним апаратом вивчення випадкових процесів з регенерацією та, зокрема, процесів зі значеннями на розбиттях, що виникають при аналізі випадкових композицій та в теорії коалесцентів з множинними злиттями. Створена теорія істотно ґрунтується на вперше встановлених в цій роботі взаємозв'язках між процесами з імміграцією, збуреними випадковими блуканнями, регенеративними композиціями, коалесцентами з множинними злиттями та процедурами випадкового просіювання.

Основні результати, отримані в дисертації такі:

1. Введено поняття випадкового процесу з імміграцією в моменти стрибків процесу відновлення та побудовано класифікацію режимів слабкої збіжності деяких випадкових процесів з імміграцією. Зокрема,

   - отримано умови збіжності до стаціонарних процесів з імміграцією;
   - встановлено умови збіжності з центруванням процесів дробового ефекту;
   - доведено граничні теореми для процесів дробового ефекту з функціями відповіді, що не зростають, у випадках правильної зміни та повільної зміни нормування;
   - отримано граничні теореми для випадкових процесів з імміграцією у випадку правильної зміни нормування.

2. Доведено граничні теореми для низки функціоналів, що діють на збурених випадкових блуканнях. Зокрема,

   - встановлено функціональну граничну теорему для числа візитів збуреного випадково блукання в інтервал $[0, x]$, при $x \to \infty$;
   - встановлено ряд граничних теорем для різниці між числом візитів в інтервал $[0, x]$ збуреним та звичайним випадковими блуканнями.

3. Отримано низку результатів для випадкових регенеративних композицій, породжених узагальненими процесами Пуассона. Зокрема,

   - отримано функціональну граничну теорему для числа ненульових блоків регенеративних композицій;
   - описано режими слабкої збіжності числа нульових блоків регенеративних композицій,
   - отримано граничні теореми для логарифмічної сепарабельної статистики.

4. Введено поняття регенеративної випадкової перестановки та отримано граничні теореми для порядку таких перестановок, що узагальнило відомий результат П. Ердеша та П. Турана 1967 року.

5. Запропоновано конструкцію каплінгу випадкових регенеративних композицій та переставних коалесцентів з множинними злиттями. За його допомогою розв'язано низку відкритих проблем теорії коалесцентів та встановлено ряд граничних теорем для коалесцентів з пиловою компонентою. Зокрема,

   - доведено критерій слабкої збіжності часу поглинання в коалесцентах з пиловою компонентою;
   - отримано умови слабкої збіжності числа злиттів в коалесцентах з пиловою компонентою;
   - встановлено ряд граничних теорем, які характеризують еволюцію пилової компоненти.

6. З використанням техніки ймовірнісних метрик, отримано достатні умови слабкої збіжності часу поглинання у спадних ланцюгах Маркова до стійких розподілів. За допомогою отриманих результатів розв'язано низку відкритих проблем:

   - встановлено граничну теорему для числа злиттів у бета-коалесцентах без пилової компоненти;
   - доведено збіжність повної довжини дерева бета$(1, b)$-коалесцентів до 1-стійкого розподілу;
   - отримано центральну граничну теорему для числа нульових декрементів у випадковому блуканні з бар'єром.

7. Запропоновано та досліджено процедури випадкового просіювання. Встановлено їх зв'язок з процесами Гальтона-Ватсона та переставними коалесцентами. Зокрема,

   - вперше введено поняття точкового процесу, стійкого відносно просіювання, та отримано характеризацію точкових процесів, стійких відносно просіювання випадковими блуканнями;
   - досліджено узагальнені процедури вибору лідера та встановлено граничні теореми для числа раундів, початкових позицій гравців та числа гравців після n раундів;
   - вивчено процедуру випадкового просіювання процесом рекордів та побудовано каплінг з коалесцентом Пуассона-Діріхле, що дозволило розв'язати відкриту проблему про асимптотику числа злиттів у згаданому коалесценті.

8. Досліджено властивості розподілів та властивості траєкторій процесів, що є граничними для випадкових процесів з регенерацією. Зокрема, досліджено гельдеровість та встановлено локальні закони повторного логарифма для дробово інтегровних обернених стійких субординаторів.

9. Доведено локальну універсальність для дійсних коренів тригонометричних поліномів.

10. Доведено збіжність моментів у граничних теоремах для процесів відновлення (теореми 178, 181 та 182 додатку А).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

[1] R. Abraham and J.-F. Delmas. A construction of a β-coalescent via the pruning of binary trees. *J. Appl. Probab.*, 50(3):772–790, 2013.

[2] R. Abraham and J.-F. Delmas. β-coalescents and stable Galton-Watson trees. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 12(1):451–476, 2015.

[3] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55 of *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. For sale by the Superintendent of Documents, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1964.

[4] R. Adler. *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 12. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1990.

[5] D. Aldous. Deterministic and stochastic models for coalescence (aggregation and coagulation): a review of the mean-field theory for probabilists. *Bernoulli*, 5(1):3–48, 1999.

[6] G. Alsmeyer. The smoothing transform: a review of contraction results. In *Random matrices and iterated random functions*, volume 53 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 189–228. Springer, Heidelberg, 2013.

[7] G. Alsmeyer, A. Iksanov, and A. Marynych. Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the bernoulli sieve. *Stochastic Process. Appl.*, 127(3):995–1017, 2017.

[8] G. Alsmeyer, A. Iksanov, and M. Meiners. Power and exponential moments of the number of visits and related quantities for perturbed random walks. *J. Theoret. Probab.*, 28(1):1–40, 2015.

[9] G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, and A. Marynych. Leader election using random walks. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 13:1095–1122, 2016.

[10] G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, and A. Marynych. A leader-election procedure using records. *Ann. Probab.*, 2017. У друці. Препринт за посиланням `http://www.imstat.org/aop/future_papers.htm`.

[11] G. Alsmeyer and A. Marynych. Renewal approximation for the absorption time of a decreasing markov chain. *J. Appl. Probab.*, 53(3):765–782, 2016.

[12] G. Alsmeyer and M. Slavtchova-Bojkova. Limit theorems for subcritical age-dependent branching processes with two types of immigration. *Stoch. Models*, 21(1):133–147, 2005.

[13] K. Anderson and K. Athreya. A renewal theorem in the infinite mean case. *Ann. Probab.*, 15(1):388–393, 1987.

[14] J. Antezana, J. Buckley, J. Marzo, and J.-F. Olsen. Gap probabilities for the cardinal sine. *J. Math. Anal. Appl.*, 396(2):466–472, 2012.

[15] R. Arratia, A. Barbour, and S. Tavaré. *Logarithmic combinatorial structures: a probabilistic approach*. EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2003.

[16] R. Arratia, A. Barbour, and S. Tavaré. A tale of three couplings: Poisson-Dirichlet and GEM approximations for random permutations. *Combin. Probab. Comput.*, 15(1-2):31–62, 2006.

[17] R. Arratia and S. Tavaré. The cycle structure of random permutations. *Ann. Probab.*, 20(3):1567–1591, 1992.

[18] R. Arratia and S. Tavaré. Limit theorems for combinatorial structures via discrete process approximations. *Random Structures Algorithms*, 3(3):321–345, 1992.

[19] S. Asmussen. *Applied probability and queues*, volume 51 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, second edition, 2003.

[20] K. Athreya. Coalescence in the recent past in rapidly growing populations. *Stochastic Process. Appl.*, 122(11):3757–3766, 2012.

[21] K. Athreya and P. Ney. *Branching processes*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.

[22] J.-M. Azaïs, F. Dalmao, J. León, I. Nourdin, and G. Poly. Local universality of the number of zeros of random trigonometric polynomials with continuous coefficients. *E-Print archive arXiv.org*, 2017. Режим доступу: `http://arxiv.org/abs/1512.05583`.

[23] G. Babu and E. Manstavičius. Limit processes with independent increments for the Ewens sampling formula. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 54(3):607–620, 2002.

[24] B. Baeumer, M. Meerschaert, and E. Nane. Space-time duality for fractional diffusion. *J. Appl. Probab.*, 46(4):1100–1115, 2009.

[25] A. Barbour and A. Gnedin. Regenerative compositions in the case of slow variation. *Stochastic Process. Appl.*, 116(7):1012–1047, 2006.

[26] Yu. Baryshnikov. Supporting-points processes and some of their applications. *Probab. Theory Related Fields*, 117(2):163–182, 2000.

[27] A.-L. Basdevant and C. Goldschmidt. Asymptotics of the allele frequency spectrum associated with the Bolthausen-Sznitman coalescent. *Electron. J. Probab.*, 13:486–512, 2008.

[28] J. Berestycki, N. Berestycki, and V. Limic. The Λ-coalescent speed of coming down from infinity. *Ann. Probab.*, 38(1):207–233, 2010.

[29] J. Berestycki, N. Berestycki, and V. Limic. Asymptotic sampling formulae for Λ-coalescents. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 50(3):715–731, 2014.

[30] J. Berestycki, N. Berestycki, and J. Schweinsberg. Beta-coalescents and continuous stable random trees. *Ann. Probab.*, 35(5):1835–1887, 2007.

[31] J. Berestycki, N. Berestycki, and J. Schweinsberg. Small-time behavior of beta coalescents. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(2):214–238, 2008.

[32] N. Berestycki. *Recent progress in coalescent theory*, volume 16 of *Ensaios Matemáticos [Mathematical Surveys]*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2009.

[33] J. Bertoin. Subordinators: examples and applications. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1997)*, volume 1717 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–91. Springer, Berlin, 1999.

[34] J. Bertoin. Exchangeable coalescents. Nachdiplom Lectures, ETH Zürich, 2010.

[35] J. Bertoin and I. Kortchemski. Self-similar scaling limits of Markov chains on the positive integers. *Ann. Appl. Probab.*, 26(4):2556–2595, 2016.

[36] J. Bertoin and M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes. *Probab. Surv.*, 2:191–212, 2005.

[37] V. Betz, D. Ueltschi, and Y. Velenik. Random permutations with cycle weights. *Ann. Appl. Probab.*, 21(1):312–331, 2011.

[38] P. Bickel and D. Freedman. Some asymptotic theory for the bootstrap. *Ann. Statist.*, 9(6):1196–1217, 1981.

[39] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1968.

[40] P. Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2012.

[41] N. Bingham. Limit theorems for occupation times of Markov processes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 17:1–22, 1971.

[42] N. Bingham, C. Goldie, and J. Teugels. *Regular variation*, volume 27 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[43] S. Bochner. *Harmonic analysis and the theory of probability*. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1960.

[44] L. Bogachev and Z. Su. Gaussian fluctuations of Young diagrams under the Plancherel measure. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 463(2080):1069–1080, 2007.

[45] E. Bolthausen and A.-S. Sznitman. On Ruelle's probability cascades and an abstract cavity method. *Comm. Math. Phys.*, 197(2):247–276, 1998.

[46] A. Borovkov. *Asymptotic methods in queuing theory*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1984. Translated from the Russian by Dan Newton.

[47] P. Bourgade. Mesoscopic fluctuations of the zeta zeros. *Probab. Theory Related Fields*, 148(3-4):479–500, 2010.

[48] F. Bruss and R. Grübel. On the multiplicity of the maximum in a discrete random sample. *Ann. Appl. Probab.*, 13(4):1252–1263, 2003.

[49] F. Bruss and C. O'Cinneide. On the maximum and its uniqueness for geometric random samples. *J. Appl. Probab.*, 27:598–610, 1990.

[50] E. Bulinskaya. On the mean number of crossing of a level by a stationary gaussian process. *Theory Probab. Appl.*, 6:435–438, 1962.

[51] Y. Chow and H. Teicher. *Probability theory: Independence, interchangeability, martingales*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag, New York, third edition, 1997.

[52] E. Çinlar. *Introduction to stochastic processes*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1975.

[53] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.

[54] M. Csörgő, L. Horváth, and J. Steinebach. Invariance principles for renewal processes. *Ann. Probab.*, 15(4):1441–1460, 1987.

[55] D. Darling. The influence of the maximum term in the addition of independent random variables. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 73:95–107, 1952.

[56] D. Darling. The Galton-Watson process with infinite mean. *J. Appl. Probab.*, 7:455–456, 1970.

[57] P. Davies. The simple branching process: a note on convergence when the mean is infinite. *J. Appl. Probab.*, 15(3):466–480, 1978.

[58] Yu. Davydov, I. Molchanov, and S. Zuyev. Strictly stable distributions on convex cones. *Electron. J. Probab.*, 13:259–321, 2008.

[59] Yu. Davydov, I. Molchanov, and S. Zuyev. Stability for random measures, point processes and discrete semigroups. *Bernoulli*, 17(3):1015–1043, 2011.

[60] N. de Bruijn and P. Erdös. On a recursion formula and on some Tauberian theorems. *J. Research Nat. Bur. Standards*, 50:161–164, 1953.

[61] L. de Haan and S. Resnick. Derivatives of regularly varying functions in $\mathbf{R}^d$ and domains of attraction of stable distributions. *Stochastic Process. Appl.*, 8(3):349–355, 1978/79.

[62] J. M. DeLaurentis and B. G. Pittel. Random permutations and Brownian motion. *Pacific J. Math.*, 119(2):287–301, 1985.

[63] J.-F. Delmas, J.-S. Dhersin, and A. Siri-Jegousse. Asymptotic results on the length of coalescent trees. *Ann. Appl. Probab.*, 18(3):997–1025, 2008.

[64] P. Diaconis. *Group representations in probability and statistics*. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes—Monograph Series, 11. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1988.

[65] P. Donnelly, T. Kurtz, and S. Tavaré. On the functional central limit theorem for the Ewens sampling formula. *Ann. Appl. Probab.*, 1(4):539–545, 1991.

[66] M. Drmota. *Random trees: An interplay between combinatorics and probability*. Springer, Wien- NewYork-Vienna, 2009.

[67] M. Drmota, A. Iksanov, M. Moehle, and U. Roesler. Asymptotic results concerning the total branch length of the Bolthausen-Sznitman coalescent. *Stochastic Process. Appl.*, 117(10):1404–1421, 2007.

[68] M. Drmota, A. Iksanov, M. Moehle, and U. Roesler. A limiting distribution for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree. *Random Structures Algorithms*, 34(3):319–336, 2009.

[69] D. Dufresne. Algebraic properties of beta and gamma distributions, and applications. *Adv. in Appl. Math.*, 20(3):285–299, 1998.

[70] R. Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.

[71] R. Durrett and T. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64(3):275–301, 1983.

[72] M. Dutko. Central limit theorems for infinite urn models. *Ann. Probab.*, 17(3):1255–1263, 1989.

[73] A. Dvoretzky and P. Erdös. Some problems on random walk in space. In *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*, pages 353–367. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951.

[74] M. Dwass. Extremal processes. *Ann. Math. Statist*, 35:1718–1725, 1964.

[75] P. Erdős and A. Rényi. On Cantor's series with convergent $\sum 1/q_n$. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös. Sect. Math.*, 2:93–109, 1959.

[76] P. Erdős and P. Turán. On some problems of a statistical group-theory. III. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 18:309–320, 1967.

[77] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1971.

[78] J. Fill, H. Mahmoud, and W. Szpankowski. On the distribution for the duration of a randomized leader election algorithm. *Ann. Appl. Probab.*, 6(4):1260–1283, 1996.

[79] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[80] B. Fristedt. Uniform local behavior of stable subordinators. *Ann. Probab.*, 7(6):1003–1013, 1979.

[81] M. Fuchs, H.-K. Hwang, and Y. Itoch. From coin-tossing to rock-paper-scissors and beyond: a log-exp gap theorem for selecting a leader. *J. Appl. Probab.*, ??:???–???, 2017.

[82] A. Garsia and J. Lamperti. A discrete renewal theorem with infinite mean. *Comment. Math. Helv.*, 37:221–234, 1962/1963.

[83] L. Giraitis and D. Surgailis. On shot noise processes with long range dependence. In *Probability theory and mathematical statistics, Vol. I (Vilnius, 1989)*, pages 401–408. "Mokslas", Vilnius, 1990.

[84] L. Giraitis and D. Surgailis. On shot noise processes attracted to fractional Lévy motion. In *Stable processes and related topics (Ithaca, NY, 1990)*, volume 25 of *Progr. Probab.*, pages 261–273. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1991.

[85] C. Givens and R. Shortt. A class of Wasserstein metrics for probability distributions. *Michigan Math. J.*, 31(2):231–240, 1984.

[86] P. Glynn and W. Whitt. Ordinary CLT and WLLN versions of $L = \lambda W$. *Math. Oper. Res.*, 13(4):674–692, 1988.

[87] A. Gnedin. The Bernoulli sieve. *Bernoulli*, 10(1):79–96, 2004.

[88] A. Gnedin. Best choice from the planar Poisson process. *Stochastic Process. Appl.*, 111(2):317–354, 2004.

[89] A. Gnedin. Corners and records of the Poisson process in quadrant. *Electron. Commun. Probab.*, 13:187–193, 2008.

[90] A. Gnedin. Regeneration in random combinatorial structures. *Probab. Surv.*, 7:105–156, 2010.

[91] A. Gnedin. Coherent random permutations with biased record statistics. *Discrete Math.*, 311(1):80–91, 2011.

[92] A. Gnedin, B. Hansen, and J. Pitman. Notes on the occupancy problem with infinitely many boxes: general asymptotics and power laws. *Probab. Surv.*, 4:146–171, 2007.

[93] A. Gnedin and A. Iksanov. Regenerative compositions in the case of slow variation: a renewal theory approach. *Electron. J. Probab.*, 17:1–19, 2012.

[94] A. Gnedin, A. Iksanov, and A. Marynych. The Bernoulli sieve: an overview. In *21st International Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods in the Analysis of Algorithms (AofA'10)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AM, pages 329–341. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2010.

[95] A. Gnedin, A. Iksanov, and A. Marynych. Limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve. *Theory Stoch. Process.*, 16(2):44–57, 2010.

[96] A. Gnedin, A. Iksanov, and A. Marynych. On Λ-coalescents with dust component. *J. Appl. Probab.*, 48(4):1133–1151, 2011.

[97] A. Gnedin, A. Iksanov, and A. Marynych. A generalization of the Erdős-Turán law for the order of random permutation. *Combin. Probab. Comput.*, 21(5):715–733, 2012.

[98] A. Gnedin, A. Iksanov, and A. Marynych. Λ-coalescents: a survey. *J. Appl. Probab.*, 51A(Celebrating 50 Years of The Applied Probability Trust):23–40, 2014.

[99] A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych, and M. Möhle. On asymptotics of the beta coalescents. *Adv. Appl. Probab.*, 46(2):496–515, 2014.

[100] A. Gnedin, A. Iksanov, and M. Möhle. On asymptotics of exchangeable coalescents with multiple collisions. *J. Appl. Probab.*, 45(4):1186–1195, 2008.

[101] A. Gnedin, A. Iksanov, P. Negadajlov, and U. Rösler. The Bernoulli sieve revisited. *Ann. Appl. Probab.*, 19(4):1634–1655, 2009.

[102] A. Gnedin, A. Iksanov, and U. Roesler. Small parts in the Bernoulli sieve. In *Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AI, pages 235–242. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2008.

[103] A. Gnedin and A. Marynych. Exponential-uniform identities related to records. *Electron. Commun. Probab.*, 17:1–5, 2012.

[104] A. Gnedin and G. Olshanski. Coherent permutations with descent statistic and the boundary problem for the graph of zigzag diagrams. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 51968, 39, 2006.

[105] A. Gnedin and J. Pitman. Regenerative composition structures. *Ann. Probab.*, 33(2):445–479, 2005.

[106] A. Gnedin, J. Pitman, and M. Yor. Asymptotic laws for compositions derived from transformed subordinators. *Ann. Probab.*, 34(2):468–492, 2006.

[107] A. Gnedin, J. Pitman, and M. Yor. Asymptotic laws for regenerative compositions: gamma subordinators and the like. *Probab. Theory Related Fields*, 135(4):576–602, 2006.

[108] A. Gnedin and Yu. Yakubovich. On the number of collisions in Λ-coalescents. *Electron. J. Probab.*, 12:1547–1567, 2007.

[109] C. Goldie and R. Maller. Stability of perpetuities. *Ann. Probab.*, 28(3):1195–1218, 2000.

[110] C. Goldie and L. Rogers. The k-record processes are i.i.d. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 67(2):197–211, 1984.

[111] C. Goldschmidt and J. Martin. Random recursive trees and the Bolthausen-Sznitman coalescent. *Electron. J. Probab.*, 10:718–745, 2005.

[112] D. Grey. Almost sure convergence in Markov branching processes with infinite mean. *J. Appl. Probab.*, 14(4):702–716, 1977.

[113] R. Grübel and K. Hagemann. Leader election: A Markov chain approach. *Mathematica Applicanda*, 44(1):113–134, 2016.

[114] A. Gut. Convergence rates for record times and the associated counting process. *Stochastic Process. Appl.*, 36(1):135–151, 1990.

[115] A. Gut. *Stopped random walks*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, second edition, 2009. Limit theorems and applications.

[116] B. Haas and G. Miermont. Self-similar scaling limits of non-increasing Markov chains. *Bernoulli*, 17(4):1217–1247, 2011.

[117] P. Hall and C. Heyde. *Martingale limit theory and its application*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1980. Probability and Mathematical Statistics.

[118] J. Hansen. A functional central limit theorem for the Ewens sampling formula. *J. Appl. Probab.*, 27(1):28–43, 1990.

[119] J. Hawkes. A lower Lipschitz condition for the stable subordinator. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 17:23–32, 1971.

[120] L. Heinrich and V. Schmidt. Normal convergence of multidimensional shot noise and rates of this convergence. *Adv. Appl. Probab.*, 17(4):709–730, 1985.

[121] J. Hough, M. Krishnapur, Y. Peres, and B. Virág. *Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes*, volume 51 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.

[122] T. Hsing and J. Teugels. Extremal properties of shot noise processes. *Adv. Appl. Probab.*, 21(3):513–525, 1989.

[123] T. Huillet. Pareto genealogies arising from a Poisson branching evolution model with selection. *J. Math. Biol.*, 68(3):727–761, 2014.

[124] H.-K. Hwang and S. Janson. Local limit theorems for finite and infinite urn models. *Ann. Probab.*, 36(3):992–1022, 2008.

[125] I. Ibragimov and Yu. Linnik. *Independent and stationary sequences of random variables*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1971.

[126] D. Iglehart. Weak convergence of compound stochastic process. I. *Stochastic Processes Appl.*, 1:11–31; corrigendum, ibid. 1 (1973), 185–186, 1973.

[127] D. L. Iglehart and D. P. Kennedy. Weak convergence of the average of flag processes. *J. Appl. Probab.*, 7:747–753, 1970.

[128] A. Iksanov. On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve II. *Stochastic Process. Appl.*, 122(7):2701–2729, 2012.

[129] A. Iksanov. Functional limit theorems for renewal shot noise processes with increasing response functions. *Stochastic Process. Appl.*, 123(6):1987–2010, 2013.

[130] A. Iksanov. On the number of empty boxes in the Bernoulli sieve I. *Stochastics*, 85(6):946–959, 2013.

[131] A. Iksanov, Z. Kabluchko, and A. Marynych. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials. *Electron. J. Probab.*, 21:1–19, 2016.

[132] A. Iksanov, Z. Kabluchko, and A. Marynych. Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization. *Statist. Probab. Lett.*, 114:67–77, 2016.

[133] A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, and G. Shevchenko. Fractionally integrated inverse stable subordinators. *Stochastic Process. Appl.*, 127(1):80–106, 2016.

[134] A. Iksanov and A. Marynych. A note on non-regular martingales. *Statist. Probab. Lett.*, 78(17):3014–3017, 2008.

[135] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Meiners. Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions. Розширений препринт за посиланням `http://arxiv.org/abs/arXiv:1212.1583v2`, 2012.

[136] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Meiners. Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions. *Stochastic Process. Appl.*, 124(6):2132–2170, 2014.

[137] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Meiners. Moment convergence of first-passage times in renewal theory. *Statist. Probab. Lett.*, 119:134–143, 2016.

[138] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Meiners. Asymptotics of random processes with immigration I: scaling limits. *Bernoulli*, 23(2):1233–1278, 2017.

[139] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Meiners. Asymptotics of random processes with immigration II: convergence to stationarity. *Bernoulli*, 23(2):1279–1298, 2017.

[140] A. Iksanov, A. Marynych, and M. Möhle. On the number of collisions in $\mathrm{beta}(2, b)$-coalescents. *Bernoulli*, 15(3):829–845, 2009.

[141] A. Iksanov, A. Marynych, and V. Vatutin. Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve. *Theory Probab. Appl.*, 59(1):87–113, 2015.

[142] A. Iksanov and M. Möhle. A probabilistic proof of a weak limit law for the number of cuts needed to isolate the root of a random recursive tree. *Electron. Comm. Probab.*, 12:28–35, 2007.

[143] A. Iksanov and M. Möhle. On the number of jumps of random walks with a barrier. *Adv. Appl. Probab.*, 40(1):206–228, 2008.

[144] A. Iksanov and P. Negadajlov. On the number of zero increments of random walks with a barrier. In *Fifth Colloquium on Mathematics and Computer Science*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AI, pages 243–250. Assoc. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Nancy, 2008.

[145] A. Iksanov and Yu. Terletsky. On asymptotic behavior of certain recursions with random indices of linear growth. *ProbStat Forum*, 1:62–67, 2008.

[146] J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes*, volume 288 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2003.

[147] P. Jacquet and W. Szpankowski. Entropy computations via analytic de-Poissonization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 45(4):1072–1081, 1999.

[148] P. Jagers. Age-dependent branching processes allowing immigration. *Teor. Verojatnost. i Primenen*, 13:230–242, 1968.

[149] S. Janson, C. Lavault, and G. Louchard. Convergence of some leader election algorithms. *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 10(3):171–196, 2008.

[150] S. Janson and W. Szpankowski. Analysis of an asymmetric leader election algorithm. *Electron. J. Combin.*, 4(1):1–16, 1997.

[151] W. Jedidi, J. Almhana, V. Choulakian, and R. McGorman. General shot noise processes and functional convergence to stable processes. In *Stochastic differential equations and processes*, volume 7 of *Springer Proc. Math.*, pages 151–178. Springer, Heidelberg, 2012.

[152] F. Johansson and A. Sola. Rescaled Lévy–Loewner hulls and random growth. *Bull. Sci. Math.*, 133(3):238–256, 2009.

[153] O. Johnson and R. Samworth. Central limit theorem and convergence to stable laws in Mallows distance. *Bernoulli*, 11(5):829–845, 2005.

[154] Z. Kabluchko and A. Klimovsky. Complex random energy model: zeros and fluctuations. *Probab. Th. Related Fields*, 158(1–2):159–196, 2014.

[155] Z. Kabluchko and A. Marynych. Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails. *Theory Stoch. Process.*, 21(37)(2):??–??, 2016.

[156] O. Kallenberg. *Random measures*. Akademie-Verlag, Berlin; Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London, 3^{rd} edition, 1983.

[157] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 1997.

[158] R. Kalpathy, H. Mahmoud, and M. Ward. Asymptotic properties of a leader election algorithm. *J. Appl. Probab.*, 48(2):569–575, 2011.

[159] N. Kaplan. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue. *Ann. Probab.*, 3(5):780–789, 1975.

[160] S. Karlin. Central limit theorems for certain infinite urn schemes. *J. Math. Mech.*, 17:373–401, 1967.

[161] S. Karlin and H. Taylor. *A first course in stochastic processes*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, second edition, 1975.

[162] Y. Kasahara. Extremal process as a substitution for "one-sided stable process with index 0". In *Stochastic processes and their applications (Nagoya, 1985)*, volume 1203 of *Lecture Notes in Math.*, pages 90–100. Springer, Berlin, 1986.

[163] G. Kersting. The asymptotic distribution of the length of beta-coalescent trees. *Ann. Appl. Probab.*, 22(5):2086–2107, 2012.

[164] J. F. C. Kingman. The coalescent. *Stochastic Process. Appl.*, 13(3):235–248, 1982.

[165] J. F. C. Kingman. On the genealogy of large populations. *J. Appl. Probab.*, (Special Vol. 19A):27–43, 1982. Essays in statistical science.

[166] P. Kirschenhofer and H. Prodinger. The number of winners in a discrete geometrically distributed sample. *Ann. Appl. Probab.*, 6:687–694, 1996.

[167] C. Klüppelberg and C. Kühn. Fractional Brownian motion as a weak limit of Poisson shot noise processes—with applications to finance. *Stochastic Process. Appl.*, 113(2):333–351, 2004.

[168] C. Klüppelberg and T. Mikosch. Delay in claim settlement and ruin probability approximations. *Scand. Actuar. J.*, (2):154–168, 1995.

[169] C. Klüppelberg and T. Mikosch. Explosive Poisson shot noise processes with applications to risk reserves. *Bernoulli*, 1(1-2):125–147, 1995.

[170] C. Klüppelberg, T. Mikosch, and A. Schärf. Regular variation in the mean and stable limits for Poisson shot noise. *Bernoulli*, 9(3):467–496, 2003.

[171] V. Kolchin, B. Sevastʹyanov, and V. Chistyakov. *Random allocations*. V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; distributed by Halsted Press [John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.-London, 1978.

[172] T. Konstantopoulos and S.-J. Lin. Macroscopic models for long-range dependent network traffic. *Queueing Systems Theory Appl.*, 28(1-3):215–243, 1998.

[173] L. Kuipers and H. Niederreiter. *Uniform distribution of sequences*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974.

[174] T. Kurtz and P. Protter. Weak limit theorems for stochastic integrals and stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 19(3):1035–1070, 1991.

[175] J. Lamperti. Semi-stable Markov processes. I. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 22:205–225, 1972.

[176] J. Lane. The central limit theorem for the Poisson shot-noise process. *J. Appl. Probab.*, 21(2):287–301, 1984.

[177] P. Läuger. Shot noise in ion channels. *Biochimica et Biophysica Acta (BBA) - Biomembranes*, 413(1):1–10, 1975.

[178] A. Lawrance and N. Kottegoda. Stochastic modelling of riverflow time series. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 140(1):1–47, 1977.

[179] P. Lévy. Random functions: General theory with special reference to Laplacian random functions. *Univ. California Publ. Statist.*, 1:331–390, 1953.

[180] P. Lewis. A branching Poisson process model for the analysis of computer failure patterns (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 26:398–456, 1964.

[181] T. Lindvall. Weak convergence of probability measures and random functions in the function space $D(0, \infty)$. *J. Appl. Probab.*, 10:109–121, 1973.

[182] E. Lukacs. *Characteristic functions*. Hafner Publishing Co., New York, 1970. Second edition, revised and enlarged.

[183] M. Magdziarz and R. Schilling. Asymptotic properties of Brownian motion delayed by inverse subordinators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 143(10):4485–4501, 2015.

[184] M. Magdziarz and A. Weron. Ergodic properties of anomalous diffusion processes. *Ann. Physics*, 326(9):2431–2443, 2011.

[185] B. Mandelbrot and J. Van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Rev.*, 10:422–437, 1968.

[186] E. Manstavičius. An analytic method in probabilistic combinatorics. *Osaka J. Math.*, 46(1):273–290, 2009.

[187] A. Marcus. Some exact distributions in traffic noise theory. *Adv. Appl. Probab.*, 7(3):593–606, 1975.

[188] A. Marynych. On the asymptotics of moments of linear random recurrences. *Theory Stoch. Process.*, 16(2):106–119, 2010.

[189] A. Marynych. A note on convergence to stationarity of random processes with immigration. *Theory Stoch. Process.*, 20(36)(1):84–100, 2015.

[190] A. Marynych and G. Verovkin. Weak convergence of the number of zero increments in the random walk with barrier. *Electron. Commun. Probab.*, 19:1–11, 2014.

[191] O. Marynych. *Stochastic Recurrences and their Applications to the Analysis of Partition-Valued Processes*. Utrecht University, 2011.

[192] K. Matthes, J. Kerstan, and J. Mecke. *Infinitely divisible point processes*. John Wiley & Sons, Chichester-New York-Brisbane, 1978. Translated from the German by B. Simon, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[193] Yu. Medvedev. Decomposable statistics in a multinomial scheme. II. *Teor. Verojatnost. i Primenen.*, 22(3):623–631, 1977.

[194] M. Meerschaert, D. Benson, H.-P. Scheffler, and B. Baeumer. Stochastic solution of space-time fractional diffusion equations. *Phys. Rev. E (3)*, 65(4):041103, 4, 2002.

[195] M. Meerschaert, E. Nane, and P. Vellaisamy. Fractional Cauchy problems on bounded domains. *Ann. Probab.*, 37(3):979–1007, 2009.

[196] M. Meerschaert and H.-P. Scheffler. Limit theorems for continuous-time random walks with infinite mean waiting times. *J. Appl. Probab.*, 41(3):623–638, 2004.

[197] M. Meerschaert and H.-P. Scheffler. Limit theorems for continuous time random walks with slowly varying waiting times. *Stat. Probab. Lett.*, 71(1):15–22, 2005.

[198] M. Meerschaert and P. Straka. Inverse stable subordinators. *Math. Model. Nat. Phenom.*, 8(2):1–16, 2013.

[199] R. Metzler and J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach. *Phys. Rep.*, 339(1):77, 2000.

[200] V. Mikhaĭlov. The central limit theorem for a scheme of independent allocation of particles by cells. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 157:138–152, 236, 1981.

[201] T. Mikosch and S. Resnick. Activity rates with very heavy tails. *Stochastic Process. Appl.*, 116(2):131–155, 2006.

[202] Sh. Mirakhmedov. Randomized decomposable statistics in a generalized allocation scheme over a countable set of cells. *Diskret. Mat.*, 1(4):46–62, 1989.

[203] Sh. Mirakhmedov. Randomized decomposable statistics in a scheme of independent allocation of particles into cells. *Diskret. Mat.*, 2(2):97–111, 1990.

[204] N. Mohan. Teugels' renewal theorem and stable laws. *Ann. Probab.*, 4(5):863–868, 1976.

[205] M. Möhle. On the number of segregating sites for populations with large family sizes. *Adv. Appl. Probab.*, 38(3):750–767, 2006.

[206] M. Möhle. Asymptotic results for coalescent processes without proper frequencies and applications to the two-parameter Poisson-Dirichlet coalescent. *Stochastic Process. Appl.*, 120(11):2159–2173, 2010.

[207] M. Möhle and S. Sagitov. A classification of coalescent processes for haploid exchangeable population models. *Ann. Probab.*, 29(4):1547–1562, 2001.

[208] P. Mörters and Y. Peres. *Brownian motion*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[209] S. Nagaev. Renewal theorems in the case of attraction to the stable law with characteristic exponent smaller than unity. *Ann. Math. Inform.*, 39:173–191, 2012.

[210] E. Nane. Laws of the iterated logarithm for a class of iterated processes. *Statist. Probab. Lett.*, 79(16):1744–1751, 2009.

[211] P. Negadaĭlov. Asymptotic results for the absorption times of random walks with a barrier. *Teor. Ĭmovīr. Mat. Stat.*, (79):114–124, 2008.

[212] R. Neininger. On a multivariate contraction method for random recursive structures with applications to Quicksort. *Random Struct. Algor.*, 19:498–524, 2001.

[213] V. Nevzorov. *Records: mathematical theory*, volume 194 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[214] T. Owada and G. Samorodnitsky. Functional central limit theorem for heavy tailed stationary infinitely divisible processes generated by conservative flows. *Ann. Probab.*, 43(1):240–285, 2015.

[215] A. Pakes. Remarks on the maxima of a martingale sequence with application to the simple critical branching process. *J. Appl. Probab.*, 24(3):768–772, 1987.

[216] A. Pakes and N. Kaplan. On the subcritical Bellman-Harris process with immigration. *J. Appl. Probab.*, 11:652–668, 1974.

[217] J. Pardo, V. Rivero, and K. van Schaik. On the density of exponential functionals of Lévy processes. *Bernoulli*, 19(5A):1938–1964, 2013.

[218] J. Pickands. Moment convergence of sample extremes. *Ann. Math. Statist.*, 39:881–889, 1968.

[219] J. Pitman. Coalescents with multiple collisions. *Ann. Probab.*, 27(4):1870–1902, 1999.

[220] H. Prodinger. How to select a loser. *Discrete Math.*, 120(1-3):149–159, 1993.

[221] W. Pruitt. The growth of random walks and Lévy processes. *Ann. Probab.*, 9(6):948–956, 1981.

[222] S. Rachev. *Probability metrics and the stability of stochastic models*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Applied Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1991.

[223] S. Rachev and L. Rüschendorf. Probability metrics and recursive algorithms. *Adv. Appl. Probab.*, 27:770–799, 1995.

[224] S. Resnick. Inverses of extremal processes. *Adv. Appl. Probab.*, 6:392–406, 1974.

[225] S. Resnick. Point processes, regular variation and weak convergence. *Adv. Appl. Probab.*, 18(1):66–138, 1986.

[226] S. Resnick. *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992.

[227] S. Resnick. *Extreme values, regular variation and point processes*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, New York, 2008. Reprint of the 1987 original.

[228] S. Resnick and H. Rootzén. Self-similar communication models and very heavy tails. *Ann. Appl. Probab.*, 10(3):753–778, 2000.

[229] S. Resnick and E. van den Berg. Weak convergence of high-speed network traffic models. *J. Appl. Probab.*, 37(2):575–597, 2000.

[230] V. Rivero. A law of iterated logarithm for increasing self-similar Markov processes. *Stoch. Stoch. Rep.*, 75(6):443–472, 2003.

[231] I. Rodriguez-Iturbe, D. Cox, and V. Isham. Some models for rainfall based on stochastic point processes. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 410(1839):269–288, 1987.

[232] U. Rösler. A limit theorem for "Quicksort". *RAIRO, Inform. Theor. Appl.*, 25:85–100, 1991.

[233] U. Rösler. A fixed point theorem for distributions. *Stoch. Proc. Appl.*, 42:195–214, 1992.

[234] U. Rösler. On the analysis of stochastic divide and conquer algorithms. *Algorithmica*, 29:238–261, 2001.

[235] U. Rösler and L. Rüschendorf. The contraction method for recursive algorithms. *Algorithmica*, 29:3–33, 2001.

[236] S. Sagitov. The general coalescent with asynchronous mergers of ancestral lines. *J. Appl. Probab.*, 36(4):1116–1125, 1999.

[237] S. Sagitov. Convergence to the coalescent with simultaneous multiple mergers. *J. Appl. Probab.*, 40(4):839–854, 2003.

[238] S. Samko, A. Kilbas, and O. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[239] G. Samorodnitsky. A class of shot noise models for financial applications. In *Athens Conference on Applied Probability and Time Series Analysis, Vol. I (1995)*, volume 114 of *Lecture Notes in Statist.*, pages 332–353. Springer, New York, 1996.

[240] G. Samorodnitsky and M. Taqqu. *Stable non-Gaussian random processes: Stochastic models with infinite variance*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1994.

[241] S. Samuels. Why do these quite different best-choice problems have the same solutions? *Adv. Appl. Probab.*, 36(2):398–416, 2004.

[242] K.-I. Sato. *Lévy processes and infinitely divisible distributions*, volume 68 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[243] E. Scalas and N. Viles. A functional limit theorem for stochastic integrals driven by a time-changed symmetric α-stable Lévy process. *Stochastic Process. Appl.*, 124(1):385–410, 2014.

[244] W. Schottky. Spontaneous current fluctuations in electron streams. *Ann. Physics*, 57:541–567., 1918.

[245] H.-J. Schuh and A. Barbour. On the asymptotic behaviour of branching processes with infinite mean. *Adv. Appl. Probab.*, 9(4):681–723, 1977.

[246] J. Schweinsberg. Coalescents with simultaneous multiple collisions. *Electron. J. Probab.*, 5:1–50, 2000.

[247] J. Schweinsberg. A necessary and sufficient condition for the Λ-coalescent to come down from infinity. *Electron. Comm. Probab.*, 5:1–11, 2000.

[248] J. Schweinsberg. Coalescent processes obtained from supercritical Galton-Watson processes. *Stochastic Process. Appl.*, 106(1):107–139, 2003.

[249] J. Schweinsberg. The number of small blocks in exchangeable random partitions. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 7:217–242, 2010.

[250] E. Seneta. The simple branching process with infinite mean. I. *J. Appl. Probab.*, 10:206–212, 1973.

[251] M. Sgibnev. Renewal theorem in the case of an infinite variance. *Siberian Mathematical Journal*, 22(5):787–796, 1981.

[252] T. Shirai. Limit theorems for random analytic functions and their zeros. In *Functions in number theory and their probabilistic aspects*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B34, pages 335–359. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2012.

[253] K. Sigman. *Stationary marked point processes*. Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York, 1995.

[254] A. Skorohod. Limit theorems for stochastic processes. *Theory Probab. Appl.*, 1:261–290, 1956.

[255] A. Stanislavsky, K. Weron, and A. Weron. Diffusion and relaxation controlled by tempered α-stable processes. *Phys. Rev. E*, 78:051106, 2008.

[256] S. Tavaré. Ancestral inference in population genetics. In *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1837 of *Lecture Notes in Math.*, pages 1–188. Springer, Berlin, 2004.

[257] H. Thorisson. *Coupling, stationarity, and regeneration*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2000.

[258] M. Tyran-Kamińska. Convergence to Lévy stable processes under some weak dependence conditions. *Stochastic Process. Appl.*, 120(9):1629–1650, 2010.

[259] B. Van Cutsem and B. Ycart. Renewal-type behavior of absorption times in Markov chains. *Adv. Appl. Probab.*, 26(4):988–1005, 1994.

[260] R. van der Hofstad, G. Hooghiemstra, and D. Znamenski. Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees. *Electron. J. Probab.*, 12:703–766, 2007.

[261] D. Vere-Jones. Stochastic models for earthquake occurrence. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 32:1–62, 1970.

[262] W. Vervaat. On a stochastic difference equation and a representation of nonnegative infinitely divisible random variables. *Adv. Appl. Probab.*, 11(4):750–783, 1979.

[263] B. von Bahr and C.-G. Esseen. Inequalities for the rth absolute moment of a sum of random variables, $1 \leq r \leq 2$. *Ann. Math. Statist.*, 36:299–303, 1965.

[264] E. Waymire and V. Gupta. The mathematical structure of rainfall representations: 1. a review of the stochastic rainfall models. *Water Resources Research*, 17(5):1261–1272, 1981.

[265] G. Weiss. Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data. *Water Resources Research*, 13(1):101–108, 1977.

[266] W. Whitt. Weak convergence of first passage time processes. *J. Appl. Probab.*, 8:417–422, 1971.

[267] W. Whitt. Some useful functions for functional limit theorems. *Math. Oper. Res.*, 5(1):67–85, 1980.

[268] W. Whitt. *Stochastic-process limits: An introduction to stochastic-process limits and their application to queues*. Springer Series in Operations Research. Springer-Verlag, New York, 2002.

[269] J. Williamson. Random walks and Riesz kernels. *Pacific J. Math.*, 25:393–415, 1968.

[270] A. Yakimiv. *Probabilistic applications of Tauberian theorems*. Modern Probability and Statistics. VSP, Leiden, 2005.

[271] M. Yamazato. On a J_1-convergence theorem for stochastic processes on $D[0, \infty)$ having monotone sample paths and its applications (The 8th workshop on stochastic numerics). *RIMS Kôkyûroku*, 1620:109–118, 2009.

[272] D. Ylvisaker. The expected number of zeros of a stationary Gaussian process. *Ann. Math. Statist.*, 36:1043–1046, 1965.

[273] D. Ylvisaker. A note on the absence of tangencies in Gaussian sample paths. *Ann. Math. Statist.*, 39:261–262, 1968.

[274] G. Zanella and S. Zuyev. Branching-stable point processes. *Electron. J. Probab.*, 20:1–26, 2015.

[275] V. Zolotarev. *Modern theory of summation of random variables*. Modern Probability and Statistics. VSP, Utrecht, 1997.

[276] О. В. Маринич. Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з імміграцією. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки*, 2:108–113, 2016.

Додаток А

A.1. Функції, що правильно змінюються

Лема 159. *Нехай g є функцією, що правильно змінюється на нескінченності з індексом ρ та є локально обмеженою. Тоді:*

(а) для довільних $0 < a < b < \infty$, маємо

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{a\le s\le b} \left| \frac{g(st)}{g(t)} - s^\rho \right| \;=\; 0;$$

(б) якщо $\rho \neq 0$, то існує монотонна функція u така, що $g(t) \sim u(t)$ при $t \to \infty$;

(в) якщо $\rho > -1$ та $a > 0$, то $\int_a^t g(y)\mathrm{d}y \sim (\rho+1)^{-1} t g(t)$ при $t \to \infty$;

(г) якщо $\rho = -1$ та $a > 0$, то $t \mapsto \int_a^t g(y)\mathrm{d}y$ повільно змінюється на нескінченності та $\lim_{t\to\infty} \frac{tg(t)}{\int_a^t g(y)\mathrm{d}y} = 0$;

Всі чотири твердження наведеної леми є добре відомими властивостями функцій, що правильно змінюються, і можуть бути знайдені в Розділі 1 книги [42].

Лема 160. *Функція нормування c, що фігурує у функціональній граничній теоремі* (2.76)*, правильно змінюється з індексом $1/\alpha$, де $\alpha = 2$ у випадках (R1) та (R2). Як наслідок, для довільних $A > 1$ та $\delta \in (0, 1/\alpha)$ існує $t_0 > 0$ таке, що*

$$\frac{c(tv)}{c(t)} \;\le\; Av^{1/\alpha-\delta}, \tag{A.1}$$

для всіх $0 < v \le 1$ та $t > 0$ таких, що $tv \ge t_0$.

Доведення. Твердження леми очевидне у випадку (R1). Покажемо, що воно виконується у випадку (R2), випадок (R3) доводиться аналогічно.

Як відомо, функція c є асимптотично оберненою до

$$t^2\big(\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi\le t\}}]\big)^{-1} \ \sim\ t^2/\ell^*(t).$$

Згідно з твердженням 1.5.15 в [42], $c(t) \sim t^{1/2}(L^{\#}(t))^{1/2}$, де функція $L^{\#}(t)$ є спряженою за де Брейном, до функції $L(t) = 1/\ell^*(t^{1/2})$. Функція, спряжена за де Брейном, є функцією повільної зміни, тому c правильно змінюється з індексом $1/2$. Формула (A.1) є класичною нерівністю Поттера для функцій, що правильно змінюється, див. теорему 1.5.6 в [42]. $\square$

Лема 161. *Нехай $L : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є строго зростаючою неперервною функцією, що повільно змінюється на нескінченності та $L(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} L(t) = \infty$. Припустимо, що $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є такою, що $h \circ L^{\leftarrow}$ правильно змінюється на нескінченності з індексом $\rho \in \mathbb{R}$. Тоді*

- *h повільно змінюється на нескінченності;*
- *для кожного $u > 0$ та $\varepsilon \in (0,u)$ має місце*

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in[0,\,u-\varepsilon]} \left| \frac{h(L^{\leftarrow}(tu) - L^{\leftarrow}(ty))}{h(L^{\leftarrow}(t))} - u^{\rho} \right| = 0. \tag{A.2}$$

Доведення. Повільна зміна h випливає безпосередньо з правильної зміни $h \circ L^{\leftarrow}$, повільної зміни L та рівності

$$\frac{h(ut)}{h(t)} = \frac{h(L^{\leftarrow}(L(tu)))}{h(L^{\leftarrow}(L(t)))}, \quad u > 0.$$

Для доведення (A.2) міркуємо так: оскільки L повільно змінюється та зростає, то при $0 < a < b$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L^{\leftarrow}(ta)}{L^{\leftarrow}(tb)} = 0. \tag{A.3}$$

З формули (A.3) отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{y\in[0,\,u-\varepsilon]} \left| \frac{L^{\leftarrow}(tu) - L^{\leftarrow}(ty)}{L^{\leftarrow}(tu)} - 1 \right| = 0, \quad u > 0, \quad \varepsilon \in (0,u) \tag{A.4}$$

З нерівності трикутника

$$\left|\frac{h(L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty))}{h(L^{\leftarrow}(t))}-u^{\rho}\right| \le \frac{h(L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty))}{h(L^{\leftarrow}(tu))}\left|\frac{h(L^{\leftarrow}(tu))}{h(L^{\leftarrow}(t))}-u^{\rho}\right| + u^{\rho}\left|\frac{h(L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty))}{h(L^{\leftarrow}(tu))}-1\right|.$$

Залишається перевірити, що

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{y\in[0,u-\varepsilon]}\left|\frac{h(L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty))}{h(L^{\leftarrow}(tu))}-1\right|=0 \tag{A.5}$$

З леми 159(a) випливає, що для довільного $\delta>0$ існує $s_0>0$ таке, що

$$1-\delta\le\frac{h(\lambda s)}{h(s)}\le 1+\delta, \tag{A.6}$$

для всіх $s\ge s_0$ та всіх $\lambda\in[1/2,2]$. З (A.4) випливає існування такого $t_1>0$, що

$$\frac{1}{2}\le\frac{L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty)}{L^{\leftarrow}(tu)}\le 2 \quad \text{та} \quad L^{\leftarrow}(tu)\ge s_0,$$

для всіх $t\ge t_1$ та $y\in[0,u-\varepsilon]$. Поєднуючи наведені оцінки, бачимо, що (A.5) випливає з (A.6) при $s:=L^{\leftarrow}(tu)$ та $\lambda:=\frac{L^{\leftarrow}(tu)-L^{\leftarrow}(ty)}{L^{\leftarrow}(tu)}$. Доведення леми завершено. □

A.2. Безпосередня інтегровність за Ріманом

Лема 162. *Нехай θ – випадкова величина, що набуває значень в $(0,1]$. Тоді функції $g_0(y):=\mathbb{E}\exp(-e^y\theta)-\mathbb{E}\exp(-2e^y\theta)$ та $g_4(y):=e^y\mathbb{E}\theta\exp(-e^y\theta)$ є безпосередньо інтегровними за Ріманом на $\mathbb{R}$, функція $g_1(y):=\mathbb{E}\big(1-\exp\big(-e^y\theta\big)\big)$ – на півосі $(-\infty,0]$; а функції $g_2(y):=\mathbb{E}\exp\big(-e^y\theta\big)\mathbb{1}_{\{\theta>e^{-y}\}}$ та $g_3(y):=\mathbb{E}\big(1-\exp(-e^y\theta)\big)\mathbb{1}_{\{\theta\le e^{-y}\}}$ – на півосі $[0,\infty)$.*

Доведення. Оскільки функції g_i, $i=0,4$ та g_3 невід'ємні, достатньо перевірити, що вони інтегровні за Лебегом на $\mathbb{R}$ та $[0,\infty)$ відповідно, а також те, що функції $e^{-y}g_i(y)$, $i=0,3,4$ не зростають, див. наприклад доведення наслідку 2.17 в [71]. Перша властивість випливає з рівностей

$$\int_{\mathbb{R}}g_0(y)\mathrm{d}y=\int_0^\infty y^{-1}\big(\mathbb{E}e^{-y\theta}-\mathbb{E}e^{-2y\theta}\big)\mathrm{d}y=\mathbb{E}\int_0^\infty y^{-1}\big(e^{-y\theta}-e^{-2y\theta}\big)\mathrm{d}y=\ln 2,$$

$$\int_{\mathbb{R}}g_4(y)\mathrm{d}y=\mathbb{E}\int_0^\infty \theta e^{-y\theta}\mathrm{d}y=1$$

та оцінок

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g_3(y)\mathrm{d}y &= \mathbb{E}\int_1^\infty y^{-1}\big(1-\exp(-y\theta)\big)\mathbb{1}_{\{\theta\le y^{-1}\}}\mathrm{d}y\\ &= \mathbb{E}\int_\theta^1 y^{-1}\big(1-e^{-y}\big)\mathrm{d}y \le \int_0^1 y^{-1}\big(1-e^{-y}\big)\mathrm{d}y<\infty.\end{aligned}$$

Для перевірки останнього ланцюжка потрібно зробити заміну змінної та використати умову $\theta\in[0,1]$ м.н. Далі, для фіксованого $z\in(0,1]$ функція $y^{-1}(1-e^{-yz})e^{-yz}$ не зростає на $[0,\infty)$, а значить $e^{-y}g_0(y)$ також не зростає. З тих же міркувань, при фіксованому $z\in(0,1]$, функції $y^{-1}(1-e^{-yz})$ та $\mathbb{1}_{\{z\le y^{-1}\}}$ не зростають на $(0,\infty)$, а, отже, не зростає їх добуток. Таким чином, функція $e^{-y}g_3(y)$ не зростає. Для функції g_4 необхідна умова монотонності, очевидно, виконується.

Оскільки g_1 невід'ємна та не спадає, достатньо перевірити її інтегровність за Лебегом на $(-\infty,0]$:

$$\int_{-\infty}^0 g_1(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y^{-1}\mathbb{E}\big(1-e^{-y\theta}\big)\mathrm{d}y\le\int_0^1\mathbb{E}\theta\mathrm{d}y\in(0,1].$$

Додатна функція $h(y):=\exp(-e^y)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Оскільки функція g_2 є згорткою h та функції розподілу в.в. $|\ln\theta|$, то функція g_2 є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$ згідно з твердженням 2.16(d) на с. 297 в [52]. □

A.3. Ключова теорема відновлення та правильна зміна

У наступних результатах U є функцією відновлення деякого випадкового блукання $(S_k)_{k\ge0}$ з додатними кроками:

$$U(x):=\sum_{k\ge0}\mathbb{P}\{S_k\le x\},\quad x\ge0.$$

Лема 163. *Припустимо, що функція $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $[0,\infty)$. Тоді*

$$\varlimsup_{t\to\infty}\int_{[0,\,t]}f(t-y)\mathrm{d}U(y)<\infty.$$

Якщо f є безпосередньо інтегровною за Ріманом на $(-\infty, 0]$, то

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \int_{[t,\infty)} f(t-y)\mathrm{d}U(y) < \infty.$$

Доведення. Якщо розподіл ξ неарифметичний, то (сильніше) твердження випливає з ключової теореми відновлення. Припустимо, що розподіл ξ є d-арифметичним, $d > 0$. Ми доведемо лему у випадку безпосередньої інтегровності на $[0, \infty)$. Оскільки

$$f(t) \le \sum_{n\ge1} \sup_{(n-1)d\le s<nd} f(s)\mathbb{1}_{[(n-1)d,\, nd)}(t), \quad t \ge 0,$$

маємо

$$\begin{aligned}\int_{[0,t]} f(t-y)\mathrm{d}U(y) &\le \sum_{n\ge1} \sup_{(n-1)d\le s<nd} f(s)\big(U(t-nd) - U(t-(n-1)d)\big)\\ &\le U(d)\sum_{n\ge1} \sup_{(n-1)d\le s<nd} f(s),\end{aligned}$$

використавши субадитивність U в останній нерівності. Залишається помітити, що ряд у правій частині збігається внаслідок безпосередньої інтегровності f. □

Лема 164. *Нехай $G : [0, \infty) \to [0, \infty)$ є локально обмеженою та $l \in \mathbb{N}$. Тоді*

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\ge0} G(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\right)^l = O\left(\left(\sum_{j=0}^{[t]} \sup_{y\in[j,\,j+1)} G(y)\right)^l\right), \quad t\to\infty. \quad \text{(A.7)}$$

Якщо G не зростає, то

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k\ge0} G(t-S_k)\mathbb{1}_{\{S_k\le t\}}\right)^l = O\left(\left(\int_0^t G(y)\mathrm{d}y\right)^l\right), \quad t\to\infty. \quad \text{(A.8)}$$

Доведення. Результат тривіальний, якщо $G \equiv 0$. Припустимо, що G не дорівнює нулю тотожно. Маємо

$$G(t) \le \sum_{n=0}^{[t]} \left(\sup_{y\in[n,\,n+1)} G(y)\right)\mathbb{1}_{[n,\,n+1)}(t), \quad t \ge 0.$$

Для достатньо великих t таких, що права частина додатна, маємо

$$\left(\sum_{k\geq 0}(G(t-S_k))\mathbb{1}_{\{S_k\leq t\}}\right)^l \leq \left(\sum_{n=0}^{[t]}\left(\sup_{y\in[n,n+1)} G(y)\right)(\nu(t-n)-\nu(t-n-1))\right)^l$$
$$\leq \left(\sum_{k=0}^{[t]}\sup_{y\in[k,\,k+1)} G(y)\right)^l \sum_{n=0}^{[t]}\frac{\sup_{y\in[n,\,n+1)} G(y)}{\sum_{k=0}^{[t]}\sup_{y\in[k,\,k+1)} G(y)}(\nu(t-n)-\nu(t-n-1))^l, \tag{A.9}$$

використавши $\sum_{j\geq 0}\mathbb{1}_{\{a<S_j\leq b\}}=\nu(b)-\nu(a)$ м.н. для $a<b$ та опуклість $x\mapsto x^l$. Очевидно, що

$$\nu(t-[t])-\nu(t-[t]-1)=\nu(t-[t])\leq\nu(1)\quad\text{м.н.}$$

та внаслідок субадитивності ν за розподілом, що

$$\mathbb{E}(\nu(t-n)-\nu(t-(n+1)))^l\leq\mathbb{E}\nu^l(1)<\infty\quad\text{при}\quad n=0,\ldots,[t]. \tag{A.10}$$

Переходячи до математичних сподівань в (A.9) та використовуючи (A.10), бачимо

$$\mathbb{E}\left(\sum_{j\geq 0}G(t-S_j)\mathbb{1}_{\{S_j\leq t\}}\right)^l\leq\left(\sum_{n=0}^{[t]}\sup_{y\in[n,\,n+1)} G(y)\right)^l\mathbb{E}\nu^l(1),$$

що доводить (A.7). Якщо G не зростає, то

$$\sum_{n=0}^{[t]}\sup_{y\in[n,\,n+1)} G(y)\;=\;\sum_{n=0}^{[t]}G(n)=\int_0^t G(y)\mathrm{d}y+O(1),\quad t\to\infty,$$

звідки випливає (A.8). □

Лема 165. *Нехай* $0\leq r_1<r_2\leq 1$. *Припустимо, що* $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *є або неспадною та* $\lim_{t\to\infty}(\phi(t)/\int_0^t\phi(y)\mathrm{d}y)=0$, *або незростаючою та у випадку* $r_2=1$, *локально інтегровною. Якщо* $\mathbb{E}\xi<\infty$ *та* $\lim_{t\to\infty}\int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t}\phi(y)\mathrm{d}y=\infty$, *то*

$$\int_{[r_1t,r_2t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)\;\sim\;\frac{1}{\mathbb{E}\xi}\int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t}\phi(y)\,\mathrm{d}y,\quad t\to\infty.$$

Доведення. Якщо розподіл ξ неарифметичний або 1-арифметичний, доведення теореми 4 в [251] для випадку $r_1=0$, $r_2=1$ переноситься з мінімальними змінами. Якщо ж розподіл ξ є d-арифметичним, то розподіл $d^{-1}\xi$ є 1-арифметичним, тому, поклавши $\phi_d(t) := \phi(dt)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\int_{[r_1t,r_2t]}\phi(t-y)\mathrm{d}U(y) &= \int_{[r_1d^{-1}t,r_2d^{-1}t]}\phi_d(d^{-1}t-y)\mathrm{d}\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}\{d^{-1}S_n\leq y\}\\ &\sim (\mathbb{E}\xi)^{-1}d\int_{(1-r_2)d^{-1}t}^{(1-r_1)d^{-1}t}\phi_d(y)\mathrm{d}y = (\mathbb{E}\xi)^{-1}\int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t}\phi(y)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

□

Зауваження 166. Наведемо приклад, який демонструє, що лема 165 може не виконуватись для нерегулярних ϕ. Нехай, наприклад, $\phi(t) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}_+^c}(t)$, де $\mathbb{Q}_+^c$ є множиною додатних ірраціональних чисел. Тоді$\int_0^t\phi(y)\mathrm{d}y = t$. Припустимо, що розподіл ξ зосереджений у раціональних точках $(0,1)$ (вибором цих точок можна зробити розподіл ξ арифметичним або неарифметичним). Точками росту функції відновлення $U(y)$ є лише раціональні точки, тому $\int_{[0,t]}\phi(t-y)\mathrm{d}U(y) = 0$ для $t\in\mathbb{Q}$.

Лема 167. *Нехай $\mathbb{E}\xi < \infty$, а $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ є локально обмеженою та вимірною функцією.*

(а) Нехай $0 \leq r_1 < r_2 \leq 1$. Якщо існує монотонна функція $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ така, що $\phi(t) \sim \psi(t)$ при $t\to\infty$, то

$$\int_{[r_1t,r_2t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \sim \int_{[r_1t,r_2t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y), \quad t\to\infty,$$

за додаткового припущення, що у випадку $r_2 = 1$, маємо $\lim_{t\to\infty}\int_0^t\phi(y)\mathrm{d}y = \infty$ та $\lim_{t\to\infty}(\phi(t)/\int_0^t\phi(y)\mathrm{d}y) = 0$.

(б) Якщо існує локально обмежена та вимірна функція $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ така, що $\phi(t) = o(\psi(t))$ при $t\to\infty$ та $\lim_{t\to\infty}\int_0^t\psi(t-y)\mathrm{d}U(y) = +\infty$, то

$$\int_{[0,t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) = o\bigg(\int_{[0,t]}\psi(t-y)\mathrm{d}U(y)\bigg), \quad t\to\infty.$$

Доведення. Доведемо (а). Для довільного $\delta\in(0,1)$ існує $t_0>0$ таке, що

$$1-\delta \leq \phi(t)/\psi(t) \leq 1+\delta \tag{A.11}$$

для всіх $t \geq t_0$.

ВИПАДОК $r_2 < 1$. При $t \geq (1-r_2)^{-1}t_0$ маємо

$$(1-\delta)\int_{[r_1t,r_2t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \leq \int_{[r_1t,r_2t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \leq (1+\delta)\int_{[r_1t,r_2t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y).$$

Поділивши обидві частини на $\int_{[r_1t,r_2t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)$ та спрямувавши спочатку $t\to\infty$, а потім $\delta\downarrow 0$, отримуємо потрібне твердження.

ВИПАДОК $r_2 = 1$. Оскільки ψ монотонна, вона є локально інтегровною. Більш того, $\lim_{t\to\infty}\int_0^t\psi(y)\mathrm{d}y = \infty$ та $\lim_{t\to\infty}(\psi(t)/\int_0^t\psi(y)\mathrm{d}y) = 0$. Застосовуючи лему 165, отримуємо

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[r_1t,t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) = \infty.$$

Враховуючи (A.11), маємо

$$\begin{aligned}\int_{[r_1t,t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) &\leq (1+\delta)\int_{[r_1t,t-t_0]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) + \int_{(t-t_0,t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)\\ &\leq (1+\delta)\int_{[r_1t,t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) + U(t_0)\sup_{0\leq y\leq t_0}\phi(y)\end{aligned}$$

при $t \geq (1-r_1)^{-1}t_0$, де ми використали субадитивність U в останньому рядку. Поділивши обидві частини на $\int_{[r_1t,t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)$ та спрямувавши $t\to\infty$, отримаємо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\int_{[r_1t,t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)}{\int_{[r_1t,t]}\psi(t-y)\,\mathrm{d}U(y)} \leq 1+\delta.$$

Протилежна нерівність для нижньої границі доводиться аналогічно.

Доведемо (б). Для кожного $\delta\in(0,1)$ існує $t_0>0$ таке, що $\phi(t)/\psi(t)\leq\delta$ для всіх $t\geq t_0$. Решта доведення така ж як і випадку $r_2=1$ частини (а). □

У доведеннях в розділі 2 ми також використовували такий наслідок леми 165.

Лема 168. *Нехай* $\mathbb{E}\xi<\infty$ *та* $\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ *є локально обмеженою, вимірною функцією, що правильно змінюється на нескінченності з індексом* $\beta\in(-1,\infty)$. *Якщо* $\beta=0$ *припустимо також, що існує монотонна функція* u *така, що* $\phi(t)\sim u(t)$ *при* $t\to\infty$. *Тоді для довільних* $0\leq r_1<r_2\leq 1$ *маємо*

$$\int_{[r_1t,r_2t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \sim \frac{t\phi(t)}{(1+\beta)\mathbb{E}\xi}((1-r_1)^{1+\beta}-(1-r_2)^{1+\beta}),\quad t\to\infty.$$

Цей результат відомий у випадку, коли ϕ не спадає, $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $\beta \neq 0$, а розподіл ξ неарифметичний, див. теорему 2.1 в [204].

Доведення. Якщо $\beta \neq 0$, то згідно з лемою 159(б) існує монотонна функція u така, що $\phi(t) \sim u(t)$ при $t \to \infty$. Якщо $\beta = 0$ така функція існує за припущенням. Модифікуючи, за потреби, u в правому околі нуля, можемо припустити, що u монотонна та локально інтегровна. Отже,

$$\int_{[r_1 t, r_2 t]} \phi(t-y)\, \mathrm{d}U(y) \;\sim\; \int_{[r_1 t, r_2 t]} u(t-y)\, \mathrm{d}U(y) \;\sim\; \frac{1}{\mathbb{E}\xi} \int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t} u(y)\, \mathrm{d}y$$

де перша еквівалентність випливає з леми 167(а), а друга є наслідком леми 165 (помітимо, що з $g = \phi$ або $g = u$, співвідношення $\lim_{t\to\infty}(g(t)/\int_0^t g(y)\mathrm{d}y) = 0$ та $\lim_{t\to\infty} \int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t} g(y)\mathrm{d}y = \infty$ виконуються внаслідок леми 159(в), оскільки g правильно змінюється з індексом $\beta > -1$). Застосувавши лему 159(в), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbb{E}\xi} \int_{(1-r_2)t}^{(1-r_1)t} u(y)\mathrm{d}y \;&\sim\; \frac{tu(t)}{(1+\beta)\mathbb{E}\xi}((1-r_1)^{1+\beta} - (1-r_2)^{1+\beta}) \\ &\sim\; \frac{t\phi(t)}{(1+\beta)\mathbb{E}\xi}((1-r_1)^{1+\beta} - (1-r_2)^{1+\beta}). \end{aligned}$$

Доведення завершено. □

Лема 169. *Нехай локально обмежені незростаючі функції* $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *задовольняють* $f_1(t) \geq f_2(t)$ *для всіх* $t \in \mathbb{R}_+$ *та* $\int_0^{t_0}(f_1(y) - f_2(y))\mathrm{d}y > 0$ *для деякого* $t_0 > 0$. *Тоді*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\int_{[0,\,t]}(f_1(t-y) - f_2(t-y))\,\mathrm{d}U(y)}{\int_0^t (f_1(y) - f_2(y))\mathrm{d}y} \;<\; \infty.$$

Доведення. Запишемо

$$\int_{[0,\,t]} (f_1(t-y) - f_2(t-y))\mathrm{d}U(y) = \int_{[0,\,[t]]} + \int_{([t],\,t]} := I_1(t) + I_2(t).$$

Внаслідок субадитивності U, маємо оцінку для I_2

$$I_2(t) \leq \int_{([t],\,t]} f_1(t-y)\mathrm{d}U(y) \leq f_1(0)(U(t) - U([t])) \leq f_1(0)U(1).$$

Для оцінки I_1 запишемо

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= f_1(t) - f_2(t) + \sum_{j=0}^{[t]-1} \int_{(j,j+1]} (f_1(t-y) - f_2(t-y)) \mathrm{d}U(y) \\
&\le f_1(t) - f_2(t) + \sum_{j=0}^{[t]-1} (f_1(t-j-1) - f_2(t-j)) \left(U(j+1) - U(j)\right) \\
&\le f_1(t) + U(1) \left(\sum_{j=0}^{[t]-1} (f_1([t]-j-1) - f_2([t]+1-j)) \right) \\
&= U(1) \int_0^t (f_1(y) - f_2(y)) \mathrm{d}y + O(1).
\end{aligned}$$

Доведення завершено. $\square$

Лема 170. *Припустимо, що* $\mathbb{P}\{\xi > t\} = t^{-\alpha}\ell^*(t)$ *для деякого* $\alpha \in (0,1)$. *Нехай* $\phi(t) \sim t^{\gamma}\ell(t)$ *є локально обмеженою функцією та* $\gamma \ge -\alpha$. *Якщо* $\gamma = -\alpha$ *та* $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}} = \infty$ *припустимо, що існує додатна неспадна функція* q *така, що* $\lim_{t\to\infty} \frac{\phi(t)}{\mathbb{P}\{\xi>t\}q(t)} = 1$. *Тоді*

(а)
$$\lim_{\rho\uparrow 1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\phi(t)} \int_{[\rho t, t]} \phi(t-y)\, \mathrm{d}U(y) \;=\; 0;$$
зокрема,
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{\phi(t)} \int_{[0,t]} \phi(t-y)\, \mathrm{d}U(y) \;=\; \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha+\gamma)};$$

(б) $\int_{[0,t]} \phi_1(t-x)\, \mathrm{d}U(x) = o(\phi(t)/\mathbb{P}\{\xi > t\})$ *при* $t \to \infty$ *для довільної додатної локально обмеженої функції* ϕ_1 *такої, що* $\phi_1(t) = o(\phi(t))$ *при* $t \to \infty$.

Доведення. Нагадаємо позначення $\nu(t) := \inf\{k \ge 0 : S_k > t\}$. Покладемо $f(t) := \phi(t)/\mathbb{P}\{\xi > t\}$ для $t \ge 0$. Вираз під знаком першої подвійної границі дорівнює $\mathbb{E} f(t - S_{\nu(t)-1}) \mathbb{1}_{\{t - S_{\nu(t)-1} \le (1-\rho)t\}} / r(t)$. Розглянемо два випадки.

Випадок $\gamma > -\alpha$ або $\gamma = -\alpha$ та $f(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Згідно з лемою 159(б) у випадку $\gamma > -\alpha$ та за припущенням у випадку $\gamma = -\alpha$, існує неспадна функція q така, що $q(t) \sim f(t)$ при $t \to \infty$. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ та нехай t_0 обрано так, що $(1-\varepsilon)q(t) \le f(t) \le (1+\varepsilon)q(t)$ для всіх $t \ge t_0$. Тоді

$$\frac{\mathbb{E} f(t - S_{\nu(t)-1}) \mathbb{1}_{\{t - S_{\nu(t)-1} \le t_0\}}}{f(t)} \le \frac{\sup_{0 \le y \le t_0} f(y)}{f(t)} \to 0, \quad t \to \infty,$$

внаслідок локальної обмеженості f. Якщо $(1-\rho)t \geq t_0$, то

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}f(t-S_{\nu(t)-1})\mathbb{1}_{\{t_0\leq t-S_{\nu(t)-1}\leq (1-\rho)t\}}}{f(t)} &\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\mathbb{E}q(t-S_{\nu(t)-1})\mathbb{1}_{\{t-S_{\nu(t)-1}\leq (1-\rho)t\}}}{q(t)} \\ &\leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\mathbb{P}\{t-S_{\nu(t)-1}\leq (1-\rho)t\}.\end{aligned}$$

Згідно з відомим результатом Динкіна-Ламперті, див. теорему 8.6.3 в [42]

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{t-S_{\nu(t)-1}\leq (1-\rho)t\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{1-\rho} y^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y.$$

Спрямовуючи $\rho\uparrow 1$, отримуємо (а).

Випадок $\gamma = -\alpha$ та f обмежена. У вказаній ситуації маємо $\mathbb{E}f(t-S_{\nu(t)-1})\mathbb{1}_{\{t-S_{\nu(t)-1}\leq t_0\}} \leq \mathrm{const}\mathbb{P}\{t-S_{\nu(t)-1}\leq (1-\rho)t\}$ при $t\geq 0$. Решта доведення аналогічна попередньому випадку.

Для доведення другого твердження частини (а), запишемо

$$\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{\phi(t)}\int_{[0,\,\rho t]}\phi(t-y)U(\mathrm{d}y) = \mathbb{P}\{\xi>t\}U(t)\int_{[0,\,\rho]}\frac{f(t(1-y))}{f(t)}U_t(\mathrm{d}y),$$

де $U_t[0,x] := U(tx)/U(t)$, $0\leq x\leq 1$. З формули (8.6.4) в [42] маємо

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{\xi>t\}U(t) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)},$$

а тому міри $U_t(\mathrm{d}y)$ слабко збігаються до міри $\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}y$ при $t\to\infty$. У поєднанні з лемою 159(а) це дає

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{\phi(t)}\int_{[0,\,\rho t]}\phi(t-y)U(\mathrm{d}y) = \frac{\alpha}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\rho}(1-y)^{\gamma}y^{\alpha-1}\mathrm{d}y.$$

Спрямовуючи $\rho\uparrow 1$ та використавши першу частину твердження (а), отримуємо потрібне.

(б) Для довільного $\delta>0$ існує $t_0>0$ таке, що $\phi_1(t)/\phi(t)\leq\delta$ при $t\geq t_0$. Отже,

$$\int_{[0,t]}\phi_1(t-y)\,\mathrm{d}U(y) \;\leq\; \delta\int_{[0,t]}\phi(t-y)\,\mathrm{d}U(y) + (U(t)-U(t-t_0))\sup_{0\leq y\leq t_0}\phi_1(y).$$

при $t\geq t_0$. Згідно з частиною (а), перший доданок в правій частині асимптотично еквівалентний $\mathrm{const}\,\phi(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}$ при $t\to\infty$. За теоремою Блекуелла, $\lim_{t\to\infty}(U(t)-U(t-t_0))=0$. Поділивши обидві частини на $\phi(t)/\mathbb{P}\{\xi>t\}$ та спрямувавши спочатку $t\to\infty$, а потім $\delta\downarrow 0$, отримаємо твердження частини (б). $\square$

A.4. Неперервність деяких функціоналів та відображень

Лема 171 випливає з леми A.5 в [129] та теореми про неперервне відображення. Зауважимо, що книга [174] та розділ VI, §6c в [146] є класичними посиланнями щодо збіжності стохастичних інтегралів.

Лема 171. *Нехай* $0 \le a < b < \infty$.

(а) Припустимо, що для кожного $t > 0$, $f_t \in D[a,b]$, *а випадковий процес* $(\mathcal{V}_t(y))_{a \le y \le b}$ *має майже напевно неспадні траєкторії. Припустимо, далі, що* $\lim_{t\to\infty} f_t(y) = f(y)$ *рівномірно по* $y \in [a,b]$ *та* $\mathcal{V}_t \Rightarrow \mathcal{V}$, $t \to \infty$ *в* J_1*-топології на* $D[a,b]$, *де траєкторії* $(\mathcal{V}(y))_{a \le y \le b}$ *є майже напевно неперервними. Тоді*

$$\int_{[a,b]} f_t(y)\,\mathrm{d}\mathcal{V}_t(y) \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \int_{[a,b]} f(y)\,\mathrm{d}\mathcal{V}(y), \quad t \to \infty.$$

(б) Припустимо, що $\mathcal{V}_t \Rightarrow \mathcal{V}$, $t \to \infty$, *в* J_1*- або* M_1*-топології на* $D[a,b]$ *та, що при* $t \to \infty$ *скінченні міри* ρ_t *на* $[a,b]$ *збігаються слабко до скінченної міри* ρ, *неперервної відносно міри Лебега. Тоді*

$$\int_{[a,\,b]} \mathcal{V}_t(y)\rho_t(\mathrm{d}y) \overset{\mathrm{d}}{\to} \int_{[a,\,b]} \mathcal{V}(y)\rho(\mathrm{d}y), \quad t \to \infty.$$

Якщо $\rho = \delta_c$ *та* $\mathcal{V}$ *є майже напевно неперервним в* c, *то*

$$\int_{[a,b]} \mathcal{V}_t(y)\,\rho_t(\mathrm{d}y) \ \overset{\mathrm{d}}{\to}\ \mathcal{V}(c), \quad t \to \infty.$$

Наступна лема використовується при доведенні теореми 3.

Лема 172. *Відображення* $T : \mathbb{R} \times D(\mathbb{R}) \to D(\mathbb{R})$, *що визначено рівністю*

$$T(t_0, f(\cdot)) = f(t_0 + \cdot)$$

є вимірним відносно сигма-алгебр $\mathcal{B}(\mathbb{R} \times D(\mathbb{R}))$ *та* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *та неперервним в просторі* $\mathbb{R} \times D(\mathbb{R})$ *з продакт-топологією.*

Доведення. Згідно з лемою 2.7 в [267] для доведення вимірності достатньо показати, що $(t_0, f(\cdot)) \mapsto f(t_0 + t)$ є вимірним для кожного $t \in \mathbb{R}$, але це очевидно, оскільки це є композиція двох вимірних відображень $(t_0, t) \mapsto t_0 + t$

та $f \mapsto f(t)$. Для доведення неперервності достатньо розглянути випадок $t = 0$. Згідно з твердженням 203 достатньо побудувати $\lambda_n \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що для довільних $-\infty < a < b < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{ \sup_{u\in[a,\,b]} |\lambda_n(u) - u|, \sup_{u\in[a,\,b]} |f_n(t_n + \lambda_n(u)) - f(u)|\Big\} = 0. \qquad \text{(A.12)}$$

За припущенням, $f_n \to f$ в $D(\mathbb{R})$. Отже, існують $\mu_n \in \Lambda_{\mathbb{R}}$, $n \in \mathbb{N}$, такі, що для довільних $-\infty < a < b < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{ \sup_{u\in[a,\,b]} |\mu_n(u) - u|, \sup_{u\in[a,\,b]} |f_n(\mu_n(u)) - f(u)|\Big\} = 0. \qquad \text{(A.13)}$$

Покладемо $\lambda_n(u) := \mu_n(u) - t_n$ та помітимо, що $\lambda_n \in \Lambda_{\mathbb{R}}$. Тоді (A.13) можна переписати так:

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{ \sup_{u\in[a,\,b]} |\lambda_n(u) - u + t_n|, \sup_{u\in[a,\,b]} |f_n(t_n + \lambda_n(u)) - f(u)|\Big\} = 0,$$

що еквівалентно (A.12) внаслідок співвідношення $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Лема 172 доведена. □

Зауваження 173. Твердження леми 172 в просторі $D[0, \infty)$ може не виконуватись. Наприклад, якщо покласти $f_n(t) := f(t) := \mathbb{1}_{[1,\infty)}(t)$ та $t_n := 1 - n^{-1}$, то $f_n(t_n) = 0$ не збігається до $f(1) = 1$ при $n \to \infty$, звідки випливає, що $f_n(t_n + \cdot)$ не збігається до $f(1 + \cdot)$ в $D[0, \infty)$.

Наступна лема використовується в доведення теореми 34.

Лема 174. *Припустимо, що f_n є неперервною справа, неспадною функцією для кожного $n \in \mathbb{N}_0$ та $\lim_{n\to\infty} f_n = f_0$ локально рівномірно в $[0, \infty)$. Тоді для кожного $\varepsilon \in (0, 1)$ та довільного $\rho \in \mathbb{R}$ маємо*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\,\varepsilon u]} (u - y)^\rho \mathrm{d} f_n(y) = \int_{[0,\,\varepsilon u]} (u - y)^\rho \mathrm{d} f_0(y)$$

локально рівномірно в $(0, \infty)$.

Доведення. Зафіксуємо додатні $a < b$. Інтегруючи частинами, маємо

$$\int_{[0,\,\varepsilon u]} (u - y)^\rho \mathrm{d} f_n(y) = (1 - \varepsilon)^\rho u^\rho f_n(\varepsilon u) - u^\rho f_n(0) + \rho \int_0^{\varepsilon u} (u - y)^{\rho - 1} f_n(y) \mathrm{d} y$$

для $n \in \mathbb{N}_0$. Твердження випливає зі співвідношень

$$\begin{aligned}\sup_{u\in[a,\,b]} |u^\rho f_n(\varepsilon u) - u^\rho f_0(\varepsilon u)| \;&\le\; (a^\rho \vee b^\rho) \sup_{u\in[0,\,b]} |f_n(u) - f_0(u)| \to 0;\\ \sup_{u\in[a,\,b]} |u^\rho f_n(0) - u^\rho f_0(0)| \;&\le\; (a^\rho \vee b^\rho)\,|f_n(0) - f_0(0)| \to 0\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}&\sup_{u\in[a,\,b]} \left| \int_0^{\varepsilon u} (u-y)^{\rho-1} f_n(y)\mathrm{d}y - \int_0^{\varepsilon u} (u-y)^{\rho-1} f_0(y)\mathrm{d}y \right|\\ &\quad\le\; \sup_{u\in[a,\,b]} \int_0^{\varepsilon u} (u-y)^{\rho-1}\,|f_n(y) - f_0(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\quad\le\; \sup_{u\in[0,\,b]} |f_n(u) - f_0(u)| \sup_{u\in[a,\,b]} \int_0^{\varepsilon u} (u-y)^{\rho-1}\mathrm{d}y\\ &\quad=\; \sup_{u\in[0,\,b]} |f_n(u) - f_0(u)|\,(a^\rho \vee b^\rho)|\rho|^{-1}|1-(1-\varepsilon)^\rho| \to 0,\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. □

Наступна лема використовувалась в доведеннях підрозділу 6.4. Нагадаємо, що $\mathcal{H}$ позначає простір аналітичних на $\mathbb{C}$ функцій з топологією локально рівномірної збіжності.

Лема 175. *Відображення $\mathcal{F} : D([0,\,1],\mathbb{C}) \to \mathcal{H}$, визначене* (6.59)*, є всюди неперервним на $D([0,\,1],\mathbb{C})$ з J_1-топологією.*

Доведення. Нехай $f_n \to f$ при $n \to \infty$ у просторі $D([0,\,1],\mathbb{C})$. Зафіксуємо компакт $K \subset \mathbb{C}$ та покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} |(\mathcal{F}(f_n))(z) - (\mathcal{F}(f))(z)| = 0. \tag{A.14}$$

За визначенням J_1-топології, $f_n(1) \to f(1)$ та $f_n(0) \to f(0)$ при $n \to \infty$. Отже, формула (A.14) еквівалентна

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in K} \left| \int_0^1 f_n(x)e^{izx}\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)e^{izx}\mathrm{d}x \right| = 0. \tag{A.15}$$

Відомо, що зі збіжності в $D([0,\,1],\mathbb{C})$ випливає збіжність в $L_1([0,\,1])$, див. наприклад лему 2.2 в [152]. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

та (A.15) випливає з нерівностей

$$\sup_{z\in K}\left|\int_0^1 f_n(x)e^{izx}\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)e^{izx}\mathrm{d}x\right| \le \int_0^1 \left(\sup_{z\in K}|e^{izx}|\right)|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$
$$\le \left(1+\sup_{z\in K} e^{-\operatorname{Im} z}\right)\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x.$$

Доведення леми 175 завершено. □

Наступні дві леми використовувались в доведеннях в розділі 5.

Лема 176. *Нехай $M_p := M_p([0,\infty))$ є множиною локально скінченних мір на $[0,\infty)$ з грубою топологією та нехай $\phi : M_p \times [0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ визначається рівністю*

$$\phi(\mu, x) = \mu([0,x]).$$

Відображення ϕ є неперервним відносно продакт-топології на $M_p \times [0,\infty)$ у всіх точках (μ, x) таких, що $\mu(\{x\}) = 0$.

Доведення. Нехай $\mu_n \to \mu_0$ в M_p та $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Покладемо $f_0(s) := \mathbb{1}_{\{s\le x_0\}}$, $B_0 := (0,\infty)\setminus\{x_0\}$, $f_n(s) := \mathbb{1}_{\{s\le x_n\}}$, $B_n := [0,\infty)$ при $n\in\mathbb{N}$. Твердження випливає з леми 15.7.3 в [156]. □

Лема 177. *Для кожного $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ нехай $0\le X_1^{(n)} \le X_2^{(n)} \le \dots$ є випадковою послідовністю такою, що $\lim_{k\to\infty} X_k^{(n)} = \infty$ м.н. та*

$$(X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots) \overset{\text{f.d.}}{\Rightarrow} (X_1^{(\infty)}, X_2^{(\infty)}, \dots), \quad n\to\infty. \tag{A.16}$$

Визначимо лічильні процеси $N^{(n)}(x) := \#\{k\in\mathbb{N} : X_k^{(n)} \le x\}$, $x\ge 0$, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$. Тоді

$$N^{(n)}(x) \Rightarrow N^{(\infty)}(x), \quad n\to\infty$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ з M_1-топологією. Якщо послідовність $(X_k^{(\infty)})_{k\ge1}$ строго зростає м.н., то збіжність в M_1-топології можна посилити до збіжності в J_1-топології.

Доведення. Розглянемо множину $L_\le$ послідовностей $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ таких, що $0\le y_1\le y_2\le\cdots$ та $\lim_{k\to\infty} y_k = \infty$. Множину $L_\le$ наділимо топологією покоординатної збіжності. Розглянемо відображення $\Psi : L_{\le} \to D[0,\infty)$, яке кожній послідовності $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ставить у відповідність лічильний процес

$$\Psi(y)(x) = \#\{k \in \mathbb{N} : y_k \le x\}, \quad x \ge 0.$$

Відображення Ψ є неперервним на $L_{\le}$ в M_1-топології та неперервним в J_1-топології в кожній точці множини $L_{<}$, яка складається зі строго зростаючих послідовностей. Розглядаючи $(X_k^{(n)})_{k\ge1}$, $n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$, як випадкові елементи в $L_{\le}$ (в $L_{<}$, при використанні J_1-топології), бачимо, що твердження випливає з теореми про неперервне відображення. □

A.5. Збіжність моментів у теорії відновлення

У цьому підрозділі ми доведемо збіжність степеневих та показникових моментів у граничних теоремах (2.75) та (2.76). Ці результати використовувались у доведеннях в розділах 2 та 4, проте є важливими самі по собі. Вони є основними результатами статті [137]. Нагадаємо, що

$$\nu(t) = \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k > t\}, \quad t \ge 0,$$

та позначення $\mu = \mathbb{E}\xi$, $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi$ та $g(t) := \mu^{-1-1/\alpha}c(t)$, де $c(t)$ – нормуюча функція в (2.76), що визначається окремо у випадках (R1)-(R3), перелічених на с. 119.

Теорема 178. *Припустимо, що виконується умова (R1) або (R2), тобто $\mu = \mathbb{E}\xi < \infty$ та має місце одна з двох умов: $\sigma^2 < \infty$ або $\sigma^2 = \infty$ та $\mathbb{E}[\xi^2 \mathbb{1}_{\{\xi\le t\}}]$ повільно змінюється на нескінченності. Тоді*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\frac{\nu(t) - t/\mu}{g(t)}\right)\right] = \mathbb{E}[e^{\theta \mathcal{S}_2(1)}] = e^{\frac{\theta^2}{2}} \tag{A.17}$$

для кожного $\theta > 0$. Зокрема,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\nu(t) - t/\mu}{g(t)}\right)_+^p\right] = \mathbb{E}[(\mathcal{S}_2(1))_+^p] = \frac{2^{p/2-1}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \tag{A.18}$$

для кожного $p > 0$. Понад це, у випадку (R1)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\nu(t) - t/\mu}{g(t)}\right)_-^p\right] = \mathbb{E}[(\mathcal{S}_2(1))_-^p] = \frac{2^{p/2-1}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}}, \tag{A.19}$$

для кожного $p \in [0,2]$. *У випадку (R2) збіжність* (A.19) *виконується при* $p \in [0,2)$ *та*

$$\mathbb{E}[(\nu(t)-t/\mu)^2] \ \sim \ \frac{2t}{\mu^3}\int_0^t \left(\int_x^\infty \mathbb{P}\{\xi > z\}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x, \quad t \to \infty. \tag{A.20}$$

Зауваження 179. Без додаткових припущень про ξ, результат теореми 178 не можна покращити в сенсі, що існує розподіл ξ такий, що $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ та

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\left(\frac{\nu(t)-t/\mu}{\sqrt{t}}\right)_-^p\right] = \infty, \tag{A.21}$$

для кожного $p > 2$. Наприклад, можна взяти

$$\mathbb{P}\{\xi > t\} = \frac{1}{(t+1)^2\ln^2(t+e)}, \quad t \geq 0,$$

тоді $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$, але

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{S_n > \gamma n\} \ &\geq \ \mathbb{P}\{\max\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n\} > \gamma n\} \\ &= \ 1-(1-\mathbb{P}\{\xi > \gamma n\})^n \sim n\mathbb{P}\{\xi > \gamma n\}, \quad n \to \infty \end{aligned}$$

для кожного фіксованого $\gamma > 0$. Отже,

$$\mathbb{E}[(\nu(2\mu n)-2n)_-^p] \geq n^p\mathbb{P}\{(\nu(2\mu n) \leq n\} = n^p\mathbb{P}\{S_n > 2\mu n\} \geq cn^{p+1}\mathbb{P}\{\xi > n\}$$

для деякого $c > 0$ та достатньо великих n і виконується (A.21).

Зауваження 180. Збіжність (A.19) добре відома у випадку (R1), див. наприклад теорему 3.8.4 в [115]. Асимптотика (A.20) випливає з теорем 2.3 та 2.4 роботи [204].

Теорема 181. *Припустимо, що виконується (R3), тобто* $\mathbb{P}\{\xi > t\} = t^{-\alpha}\ell^*(t)$ *для деякого* $\alpha \in (1,2)$. *Тоді для довільного* $\theta \geq 0$ *маємо*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\exp\left(\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{g(t)}\right)\right] = \mathbb{E}[e^{\theta\mathcal{S}_\alpha(1)}] = e^{-\Gamma(1-\alpha)\theta^\alpha}. \tag{A.22}$$

Далі,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathbb{E}[(\nu(t)-t/\mu)_\pm^p]}{g^p(t)} = \mathbb{E}[(\mathcal{S}_\alpha(1))_\pm^p] \tag{A.23}$$

для всіх $p > 0$, *де* $\mathbb{E}[(\mathcal{S}_\alpha(1))_+^p] < \infty$ *при* $p > 0$ *та* $\mathbb{E}[(\mathcal{S}_\alpha(1))_-^p] < \infty$ *тоді і тільки тоді, коли* $p < \alpha$. *Зокрема,*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{E}[|\nu(t)-t/\mu|^p]}{g^p(t)} = \mathbb{E}[|\mathcal{S}_\alpha(1)|^p]$$
$$= \begin{cases} \frac{2\Gamma(p+1)}{\pi p}\sin\left(\frac{\pi p}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{p}{\alpha}\right)|\Gamma(1-\alpha)|^{\frac{p}{\alpha}}\cos\left(\frac{\pi p}{2}-\frac{\pi p}{\alpha}\right), & \textit{якщо } 0 < p < \alpha, \\ \infty, & \textit{якщо } p \geq \alpha. \end{cases}$$

Наступна теорема демонструє, що у випадку $\mu = \infty$, має місце збіжність всіх показникових моментів в граничній теоремі (2.75).

Теорема 182. *Припустимо, що* $\mathbb{P}\{\xi > t\} = t^{-\alpha}\ell^*(t)$ *для деякого* $\alpha \in (0,1)$. *Тоді*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}\nu(t)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\theta W_\alpha^{\leftarrow}(1)}\right] = E_\alpha\left(\frac{\theta}{\Gamma(1-\alpha)}\right) < \infty, \tag{A.24}$$

для кожного $\theta \in \mathbb{R}$, *де* E_α *є функцією Міттаг-Леффлера з параметром* α, *що задається формулою* $E_\alpha(z) := \sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{\Gamma(k\alpha+1)}$, $z \in \mathbb{R}$. *Зокрема,*

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[(\mathbb{P}\{\xi > t\}\nu(t))^p\right] = \mathbb{E}\left[(W_\alpha^{\leftarrow}(1))^p\right] = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(1+\alpha)^p\Gamma(p\alpha+1)} < \infty \tag{A.25}$$

для кожного $p \geq 0$.

Зауваження 183. Нехай $(X_t)_{t\geq 0}$ є неспадним процесом Леві (субординатором), що стартує в нулі, має нульовий зсув та міру Леві, яка зосереджена на $\mathbb{R}_+$. Покладемо

$$T_r := \inf\{t \geq 0 : X_t > r\}, \quad r \geq 0.$$

Випадковий процес $(T_r)_{r\geq 0}$ називається *моментом першого проходження* для субординатора $(X_t)_{t\geq 0}$. Для процесу $(T_r)_{r\geq 0}$ можна легко записати аналог функціональних граничних теорем (2.75) та (2.76) і довести збіжність степеневих та показникових моментів, як в теоремах 178, 181 та 182, див. наслідок 1.6 в [137].

А.5.1. Доведення теорем 178 та 181. Нижче ми позначатимемо через φ перетворення Лапласа ξ, тобто $\varphi(\lambda) = \mathbb{E}[e^{-\lambda\xi}]$, $\lambda \geq 0$.

Збіжність показникових моментів додатного порядку та степеневих моментів додатних частин. В кожному з випадків (R1), (R2) та (R3) маємо

$$e^{\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{g(t)}} \overset{\mathrm{d}}{\to} e^{\theta\mathcal{S}_\alpha(1)}, \quad t\to\infty$$

для кожного $\theta \geq 0$. Таким чином, достатньо перевірити рівномірну інтегровність сім'ї $(\exp(\theta g(t)^{-1}(N(t)-t/\mu)))_{t\geq t_0}$ для кожного $\theta>0$ та деякого $t_0>0$. Для цього скористаємось критерієм Валле-Пуссена рівномірної інтегровності і покажемо, що

$$\sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}\Big[e^{\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{g(t)}}\Big]<\infty \tag{A.26}$$

для кожного $\theta>0$. Замість $g(t)$ в знаменнику будемо писати $c(t)$. За нерівністю Маркова

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[e^{\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{c(t)}}\Big] &= \int_0^\infty \mathbb{P}\Big\{e^{\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{c(t)}}>x\Big\}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty e^x\,\mathbb{P}\Big\{\theta\frac{\nu(t)-t/\mu}{c(t)}>x\Big\}\,\mathrm{d}x \\
&\leq 1+\int_0^\infty e^x\,\mathbb{P}\big\{\nu(t)>xc(t)/\theta+t/\mu\big\}\,\mathrm{d}x \\
&= 1+\int_0^\infty e^x\,\mathbb{P}\big\{S_{\lfloor xc(t)/\theta+t/\mu\rfloor}\leq t\big\}\,\mathrm{d}x \\
&\leq 1+\int_0^\infty e^x\,e^{\lambda t}(\varphi(\lambda))^{xc(t)/\theta+t/\mu-1}\,\mathrm{d}x \\
&\leq 1+(e^{\lambda\mu}\varphi(\lambda))^{t/\mu}\int_0^\infty e^x\,(\varphi(\lambda))^{xc(t)/\theta-1}\,\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{A.27}$$

для кожного $\lambda>0$. Ми покажемо, що (A.26) є наслідком

$$\sup_{t\geq t_0}\int_0^\infty e^x\,\varphi(\lambda/c(t))^{xc(t)/\theta-1}\,\mathrm{d}x<\infty \tag{A.28}$$

для деякого $\lambda>0$.

Випадок (R1) у якому $c(t)=\sigma\sqrt{t}$. Застосовуючи формулу

$$\varphi(\lambda)=1-\mu\lambda+\frac{\mu^2+\sigma^2}{2}\lambda^2+o(\lambda^2), \quad \lambda\downarrow 0, \tag{A.29}$$

яка випливає з розкладу Тейлора, робимо висновок, що

$$\varphi(\lambda/(\sigma\sqrt{t}))=1-\frac{\mu\lambda}{\sigma\sqrt{t}}+\frac{\mu^2+\sigma^2}{2\sigma^2}\frac{\lambda^2}{t}+o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t\to\infty,$$

звідки

$$e^{\lambda\mu/(\sigma\sqrt{t})}\varphi(\lambda/(\sigma\sqrt{t}))=1+\frac{\lambda^2}{2t}+o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t\to\infty.$$

Замінюючи λ на $\lambda/(\sigma\sqrt{t})$ в (A.27), бачимо, що (A.28) є достатнім для (A.26).

ВИПАДОК (R2). В цьому випадку, як випливає з імплікації (8.1.11c)$\Rightarrow$ (8.1.9) в теоремі 8.1.6 в [42], маємо

$$\varphi(\lambda) - (1 - \mu\lambda) \sim \frac{1}{2}\lambda^2\ell^*(1/\lambda), \quad \lambda \downarrow 0, \tag{A.30}$$

звідки, використовуючи співвідношення $\lim_{t\to\infty} t\ell^*(t)/c^2(t) = 1$, отримуємо

$$\varphi(\lambda/c(t)) = 1 - \frac{\mu\lambda}{c(t)} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{t} + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t \to \infty$$

та, оскільки $c^2(t) = o(t^{-1})$ при $t \to \infty$,

$$e^{\lambda\mu/c(t)}\varphi(\lambda/c(t)) = 1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{t} + o\Big(\frac{1}{t}\Big), \quad t \to \infty.$$

Замінюючи λ на $\lambda/c(t)$ в (A.27), бачимо, що (A.28) є достатнім для (A.26).

ВИПАДОК (R3). Згідно з теоремою 8.1.6 в [42], маємо

$$\varphi(\lambda) - (1 - \mu\lambda) \sim c_\alpha \mathbb{P}\{\xi > 1/\lambda\}, \quad \lambda \downarrow 0, \tag{A.31}$$

де $c_\alpha := \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}$. Звідки, внаслідок $c(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, випливає

$$\varphi(\lambda/c(t)) = 1 - \frac{\mu\lambda}{c(t)} + \frac{\lambda^\alpha c_\alpha}{t} + o(1/t), \tag{A.32}$$

а тому

$$e^{\lambda\mu/c(t)}\varphi(\lambda/c(t)) = 1 + \frac{\lambda^\alpha c_\alpha}{t} + o(1/t)$$

при $t \to \infty$. Звідси випливає потрібне твердження.

Залишається довести (A.28). З формул (A.29), (A.30) та (A.31) робимо висновок, що для довільних фіксованих $\varepsilon \in (0, \mu)$, $\lambda > 0$ та достатньо великих t

$$\varphi\Big(\frac{\lambda}{c(t)}\Big) \le 1 - \frac{(\mu-\varepsilon)\lambda}{c(t)} \le e^{-(\mu-\varepsilon)\lambda/c(t)}.$$

Отже,

$$\int_0^\infty e^x\,\varphi(\lambda/c(t))^{xc(t)/\theta - 1}\,\mathrm{d}x \le e^{(\mu-\varepsilon)\lambda/c(t)} \int_0^\infty e^{x(1-(\mu-\varepsilon)\lambda/\theta)}\,\mathrm{d}x,$$

і цей інтеграл є скінченним, якщо λ обрано досить великим.

Таким чином, перші рівності у співвідношеннях (A.17) та (A.22) перевірено. Друга рівність в (A.17) є добре відомою формулою для показникових моментів стандартного нормального розподілу. Друга рівність в (A.22), а саме $\mathbb{E}[e^{\theta \mathcal{S}_\alpha(1)}] = e^{-\Gamma(1-\alpha)\theta^\alpha}$ для всіх $\theta \geq 0$, є відомою, див. наприклад вправу 29.15 в [242]. Отже, перші частини теорем 178 та 181 про показникові моменти повністю доведено. Співвідношення (A.18) та (A.23) (останнє лише для додатних частин) випливають з нерівності $x_+^p \leq e^{px}$, яка демонструє рівномірну інтегровність відповідних родин.

Збіжність степеневих моментів від'ємних частин. Ми розглянемо випадки (R2) та (R3) одночасно. Спочатку зафіксуємо $0 < p < \alpha$ (де $\alpha = 2$ у випадку (R2)) та $r \in (p \vee 1, \alpha)$. Як і раніше, достатньо показати, що для деякого $t_0 > 0$

$$\sup_{t \geq t_0} \frac{\mathbb{E}[(\nu(t) - t/\mu)_-^r]}{c^r(t)} < \infty.$$

Внаслідок правильної зміни c, це буде наслідком

$$\mathbb{E}[(\nu(\mu n) - n)_-^r] = O(c(n)^r), \quad n \to \infty. \tag{A.33}$$

Маємо

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(\nu(\mu n) - n)_-^r] \\
&\quad = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{(\nu(\mu n) - n)_-^r \geq k\} = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}\{\nu(\mu n) \leq n - k^{1/r}\} \\
&\quad = \sum_{k=1}^{[n^r]} \mathbb{P}\{S_{\lfloor n - k^{1/r} \rfloor} > \mu n\} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \in (j^r, (j+1)^r]} \mathbb{P}\{S_{[n-k^{1/r}]} > \mu n\} \\
&\quad \leq \sum_{j=0}^{n-1} ((j+1)^r - j^r) \mathbb{P}\{S_{n-j-1} > \mu n\} \leq r \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^{r-1} \mathbb{P}\{S_{n-j-1} > \mu n\} \\
&\quad = r \sum_{j=1}^{n} j^{r-1} \mathbb{P}\{S_{n-j} - (n-j)\mu > \mu j\} \leq r \sum_{j=1}^{n} j^{r-1} \mathbb{P}\Big\{\max_{0 \leq i < n} (S_i - i\mu) > \mu j\Big\} \\
&\quad \leq r + \mathrm{const} \cdot \mathbb{E}\Big[\max_{0 \leq i \leq n} |S_i - i\mu|^r\Big] \leq r + \mathrm{const} \cdot \mathbb{E}\Big[|S_n - n\mu|^r\Big] = O(c(n)^r)
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$, де у передостанньому переході використано L_r-нерівність Дуба, див. (A.72), а останній крок випливає з леми 5.2.2 в [125], яка гарантує збіжність моментів у класичній граничній теоремі для випадкових блукань. Формула для $\mathbb{E}[|\mathcal{S}_\alpha(1)|^p]$, $0 < p < \alpha$ у випадку (R3) доведена в лемі A.1 роботи [137].

Залишається показати, що у випадку (R3)

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[\frac{(\nu(t)-t/\mu)_-^p}{g(t)^p}\right]=\infty=\mathbb{E}[(\mathcal{S}_\alpha(1))_-^p]$$

для $p\geq\alpha$. Друга рівність випливає з відомого співвідношення $\mathbb{P}\{\mathcal{S}_\alpha(1)_->x\}\sim cx^{-\alpha}$ при $x\to+\infty$ для деякого $c>0$. Враховуючи це, перша рівність є наслідком (2.76) та леми Фату. Доведення теорем 178 та 181 завершено.

A.5.2. Доведення теореми 182. Міркуючи так само, як при доведенні теорем 178 та 181, бачимо, що достатньо перевірити

$$\sup_{t\geq t_0}\mathbb{E}[e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}\nu(t)}]<\infty$$

для кожного $\theta>0$ та деякого $t_0\geq 0$. Запишемо

$$\frac{\mathbb{E}[e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}\nu(t)}]-1}{e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}-1}=\sum_{k\geq 0}e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}k}\mathbb{P}\{S_k\leq t\}$$

$$\leq e^{\lambda t}\sum_{k\geq 0}e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}k}\varphi(\lambda)^k=\frac{e^{\lambda t}}{1-e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}\varphi(\lambda)} \qquad (A.34)$$

для кожного $\lambda>0$ такого, що $e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}\varphi(\lambda)<1$. Оберемо довільне $c>(\theta/\Gamma(1-\alpha))^{1/\alpha}$ та помітимо, що

$$\frac{1-e^{-\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}}{1-\varphi(c/t)}\sim\frac{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}{\Gamma(1-\alpha)\mathbb{P}\{\xi>t/c\}}\to\frac{\theta c^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}<1, \qquad (A.35)$$

при $t\to\infty$, де ми використали розклад

$$1-\varphi(\lambda)\sim\Gamma(1-\alpha)\mathbb{P}\{\xi>1/\lambda\},\quad \lambda\downarrow 0, \qquad (A.36)$$

який випливає з наслідку 8.1.7 в [42].

Співвідношення (A.35) дає

$$e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}\varphi(c/t)<1$$

для всіх досить великих $t>0$. Поклавши $\lambda=c/t$ в (A.34) та використавши знову (A.35), отримуємо

$$\mathbb{E}[e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}\nu(t)}]-1\leq e^c\frac{e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}-1}{1-e^{\theta\mathbb{P}\{\xi>t\}}\varphi(c/t)}\to\frac{e^c\theta}{\Gamma(1-\alpha)c^\alpha-\theta},\quad t\to\infty.$$

Це завершує доведення перших рівностей в (A.24) та (A.25). Друга рівність в (A.24) очевидна. Друга рівність в (A.25) (степеневі моменти $W^{\leftarrow}(1)$) випливає з леми A.2 в [137]. Доведення теореми 182 завершено.

A.6. Збіжність точкових процесів в грубій топології

Нагадаємо, що $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ позначає множину локально скінченних точкових мір на $[0,\infty)\times(0,\infty]$ з грубою топологією. Збіжність в грубій топології характеризується так: $m_n\to m$ в грубій топології тоді і тільки тоді, коли $\int f(x)m_n(\mathrm{d}x)\to\int f(x)m(\mathrm{d}x)$ для кожної $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$ – множини невід'ємних додатних функцій на $[0,\infty)\times(0,\infty]$ з компактним носієм.

Лема 184. *Нехай X та X_n для кожного $n\in\mathbb{N}$ є випадковими елементами в просторі $D:=D[0,\infty)$ з J_1-топологією, і нехай m та m_n для кожного $n\in\mathbb{N}$ є випадковими точковими процесами зі значеннями в $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Слабка збіжність*

$$\big(X_n,m_n\big)\Rightarrow\big(X,m\big),\quad n\to\infty,\tag{A.37}$$

у просторі $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$ з продакт-топологією виконується тоді і тільки тоді, коли для кожної $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$,

$$\big(X_n,m_n(f)\big)\Rightarrow\big(X,m(f)\big),\quad n\to\infty,\tag{A.38}$$

в продакт-топології $D\times[0,\infty)$.

Доведення. Припустимо, що (A.37) виконується. Тоді для кожної фіксованої функції $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$, відображення $T_f:D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])\to D\times[0,\infty)$, визначене рівністю $T_f(X,m)=\big(X,m(f)\big)$, є неперервним в продакт-топології, звідки випливає (A.38) внаслідок теореми про неперервне відображення.

В інший бік, припустимо, що виконується (A.38). Тоді $X_n\Rightarrow X$ в просторі D, та $m_n(f)\overset{\mathrm{d}}{\to}m(f)$ при $n\to\infty$. Таким чином, сім'ї $\big(X_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ та $\big(m_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ є щільними в D та в $[0,\infty)$ відповідно. За теоремою Прохорова вони також відносно компактні. Згідно з лемою 3.20 [227], родина $\big(m_n\big)$ є щільною і відносно компактною в $M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Декартів добуток $\big(X_n,m_k\big)_{n,k\in\mathbb{N}}$ є відносно компактним в $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$, а тому родина $\big(X_n,m_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ щільна в $D\times M_p([0,\infty)\times(0,\infty])$. Залишається помітити, що границі по всім підпослідовностям набору $\big(X_n,m_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ мають однаковий розподіл внаслідок того, що (A.38) виконується для довільної $f\in C_K([0,\infty)\times(0,\infty])$. $\square$

A.7. Теорема Вейля про рівномірну розподіленість послідовності $(\{k\alpha\})$

Наведене нижче твердження є наслідком теореми Вейля про рівномірну розподіленість послідовності $(\{k\alpha\})_{k\in\mathbb{N}}$ і є ключовим інгредієнтом у доведенні результатів підрозділу 6.4.

Нагадаємо, що згадана теорема Вейля, див. наприклад [173], стверджує, що для кожного ірраціонального α,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{1\le k\le n : (k\alpha) \bmod 1 \le y\} = y, \quad y\in[0,1].$$

Нагадаємо також, що $\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$ позначає сферу Рімана з виколотим південним полюсом.

Твердження 185. *Нехай $f : [0,\infty)\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\})\to\mathbb{R}_+$ є неперервною функцією з компактним носієм.*

(i) Якщо $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Q}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k\ge1}f(k/n,e^{ik\alpha}z)-\int_0^\infty\int_0^1 f(x,e^{2\pi iy}z)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right| = 0. \quad \text{(A.39)}$$

(ii) Якщо $\alpha = 2\pi p/q$ для взаємно простих $p\in\mathbb{Z}$ та $q\in\mathbb{N}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}}\left|\frac{1}{n}\sum_{k\ge1}f(k/n,e^{ik\alpha}z)-\frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q}\int_0^\infty f(x,e^{2\pi ik/q}z)\mathrm{d}x\right| = 0. \quad \text{(A.40)}$$

Доведення. Зафіксуємо $a, r>0$ такі, що $f(x,z)=0$ при $x>a$ або $|z|<r$. Розглянемо родину $(f_z)\subset C([0,\,a]\times[0,\,2\pi])$, де $f_z(x,y) := f(x, ze^{iy})$, $y\in[0,2\pi]$, $x\in[0,\,a]$, індексовану комплексною змінною z такою, що$|z|\ge r$. Ця родина, очевидно, рівномірно обмежена. Покажемо, що (f_z) рівностепенево неперервна, а тому за теоремою Арцела-Асколі, є відносно компактною в $C([0,\,a]\times[0,\,2\pi])$.

Зафіксуємо $\varepsilon>0$. Оскільки f рівномірно неперервна на $[0,\infty)\times(\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\})$, можна знайти $\delta>0$ таке, що для довільних $z_1,z_2\in\overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$, $|z_1-z_2|<\delta$ та довільних $x_1, x_2 \in [0,\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta$, маємо $|f(x_1, z_1) - f(x_2, z_2)| < \varepsilon/3$. З рівномірної неперервності f також випливає, що існує границя

$$f(x,\infty) = \lim_{|z|\to+\infty} f(x,z)$$

і вона рівномірна по $x \in [0,\, a]$. Візьмемо $R = R(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x, z_1) - f(x, z_2)| < \varepsilon/3$ при $|z_1| > R$, $|z_2| > R$ та всіх $x \in [0,\,\infty)$. Маємо для всіх $y_1, y_2 \in [0,\, 2\pi]$ та $x_1, x_2 \in [0,\, a]$,

$$\begin{aligned}
&\sup_{|z|\ge r} |f_z(x_1,y_1) - f_z(x_2,y_2)| \\
&\qquad = \sup_{|z|\ge r} |f(x_1, ze^{iy_1}) - f(x_2, ze^{iy_2})| \le \sup_{r\le|z|\le R} |f(x_1, ze^{iy_1}) - f(x_1, ze^{iy_2})| \\
&\qquad + \sup_{|z|>R} |f(x_1, ze^{iy_1}) - f(x_1, ze^{iy_2})| + \sup_{|z|\ge r} |f(x_1, ze^{iy_2}) - f(x_2, ze^{iy_2})|.
\end{aligned}$$

Перший та третій доданки $< \varepsilon/3$ при $|y_1 - y_2| < \delta/R$ та $|x_1 - x_2| < \delta$ відповідно. Другий доданок $< \varepsilon/3$ згідно з вибором R. Отже,

$$\sup_{|z|\ge r} |f_z(x_1,y_1) - f_z(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

при $|y_1 - y_2| < \delta/R$ та $|x_1 - x_2| < \delta$, звідки випливає рівностепенева неперервність.

Для перевірки (A.39), розглянемо міру на $[0,a] \times [0,\, 2\pi]$, що визначена рівністю

$$\mu'_n := \frac{1}{[na]} \sum_{k\ge1} \delta_{(k/n,(k\alpha)\mathrm{mod}(2\pi))}$$

та помітимо, що для кожного $x \in (0,\, a]$ та $y \in [0,\, 2\pi]$ при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}
\mu'_n([0,\, x] \times [0,\, y]) &= \frac{\#\{k \in \mathbb{N} : k/n \le x, (k\alpha)\mathrm{mod}(2\pi) \le y\}}{[na]} \\
&\sim \frac{x}{a}\frac{\#\{k \le nx : (k\alpha)\mathrm{mod}(2\pi) \le y\}}{nx} \to \frac{xy}{2\pi a},
\end{aligned} \tag{A.41}$$

де останній перехід випливає з теореми Вейля. Отже, має місце слабка збіжність мір

$$\mu'_n \to \mu' := (2\pi a)^{-1}\mathbb{LEB}_{[0,\,a]\times[0,\,2\pi]}, \quad n \to \infty, \tag{A.42}$$

оскільки функції розподілу μ'_n збігаються до функції розподілу μ'.

Згідно з теоремою Скорохода про представлення існує ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ та випадкові вектори X_n та X на цьому просторі такі, що X_n має розподіл μ'_n, X має розподіл μ', та $X_n \to X$ при $n \to \infty$ м.н. У цих позначеннях можемо переписати (A.39) у такий спосіб:

$$\lim_{n\to\infty} a \sup_{|z|\geq r} |\mathbb{E}_{\mathbb{P}} f_z(X_n) - \mathbb{E}_{\mathbb{P}} f_z(X)| = 0. \tag{A.43}$$

Використовуючи відносну компактність сім'ї (f_z), отримуємо

$$\sup_{|z|\geq r} |f_z(X_n) - f_z(X)| \to 0 \quad \text{м.н.}$$

Оскільки (f_z) рівномірно обмежена, отримуємо (A.43) з теореми про мажоровану збіжність.

Співвідношення (A.40) випливає зі слабкої збіжності

$$\mu''_n := \frac{1}{na} \sum_{k\geq 1} \delta_{(k/n,(2\pi pk/q)\mathrm{mod}(2\pi)\})} \to \mu'' := a^{-1}\mathbb{LEB} \times \mathbb{U}_q, \quad n \to \infty,$$

де $\mathbb{U}_q$ має рівномірний розподіл на $\{0, 2\pi/q, 4\pi/q, \ldots, 2\pi(q-1)/q\}$. Доведення твердження 185 завершено. $\square$

A.8. Лінійні рекурентні співвідношення

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ нехай $(p_{n,k})_{0\leq k\leq n}$ є довільним розподілом ймовірностей таким, що $p_{n,n} < 1$. Визначимо послідовність $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, як (єдиний) розв'язок рекурентного співвідношення

$$a_n = r_n + \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} a_k, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{A.44}$$

для заданої послідовності $r_n \geq 0$ та заданого початкового значення $a_0 = a \geq 0$.

Лема 186. *Припустимо, що існує послідовність $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ така, що*

(L1) $\underline{\lim}_{n\to\infty} \psi_n \sum_{k=0}^{n} (1 - k/n) p_{n,k} > 0$,

(L2) послідовність $(r_k \psi_k / k)_{k\in\mathbb{N}}$ не зростає.

Тоді (a_n)*, визначена* (A.44)*, задовольняє*

$$a_n = O\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k\psi_k}{k}\Big), \quad n\to\infty. \tag{A.45}$$

Доведення. Покладемо $\pi_{n,k} := \sum_{j=0}^{k} p_{n,j}$. Використовуючи (L2), маємо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k\psi_k}{k}\pi_{n,k-1} \geq \frac{r_n\psi_n}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi_{n,k-1} = r_n\psi_n\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{j}{n}\right)p_{n,j}.$$

Згідно з (L1) знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ та $c > 0$ такі, що

$$c\sum_{k=1}^{n}\frac{r_k\psi_k}{k}\pi_{n,k-1} \geq r_n \quad n \geq n_0. \tag{A.46}$$

Покажемо, що $x_n := c\sum_{k=1}^{n} r_k\psi_k/k$ задовольняє

$$x_n \geq r_n + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k}x_k, \quad n \geq n_0. \tag{A.47}$$

Для цього запишемо

$$\begin{aligned}
r_n + \sum_{k=1}^{n} p_{n,k}x_k &= r_n + c\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{r_j\psi_j}{j}p_{n,k} = r_n + c\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j\psi_j}{j}(1-\pi_{n,j-1})\\
&= r_n + c\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j\psi_j}{j} - c\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j\psi_j}{j}\pi_{n,j-1}\\
&= x_n + r_n - c\sum_{j=1}^{n}\frac{r_j\psi_j}{j}\pi_{n,j-1} \overset{\text{(A.46)}}{\leq} x_n.
\end{aligned}$$

Покладемо $x_0 := 0$. Віднімаючи (A.44) від (A.47), бачимо, що $y_n := x_n + c_0 - a_n$ задовольняє $y_n \geq \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}y_k$ при $n \geq n_0$ для довільного c_0. Обравши $c_0 \geq \max_{n\leq n_0} a_n$, отримуємо $y_n \geq 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ за індукцією. Звідси випливає потрібна оцінка на a_n. □

Лема 187. *Припустимо, що існує послідовність* $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *така, що*

(L1) $\underline{\lim}_{n\to\infty}\psi_n\sum_{k=0}^{n}(1-k/n)p_{n,k} > 0$*,*

(L2) послідовність $(r_k\psi_k/k)_{k\in\mathbb{N}}$ *є обмеженою.*

Тоді $(a_n)_{n\geq 0}$ *задовольняє*

$$a_n \;=\; O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k^* \psi_k}{k}\right), \quad n\to\infty, \tag{A.48}$$

де $r_k^* = \dfrac{k}{\psi_k} \sup_{j\geq k} \dfrac{r_j \psi_j}{j}$ *при* $k\geq 1$.

Доведення. Визначимо послідовність $(a_n^*)_{n\geq 0}$ так: $a_0^* := a_0$ та $a_n^* = r_n^* + \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} a_k^*$ при $n\in\mathbb{N}$. Оскільки $r_n^* \geq r_n$ для кожного n та

$$a_n^* - a_n \geq r_n^* - r_n \;+\; \sum_{k=0}^{n-1} p_{n,k}(a_k^* - a_k), \quad n\in\mathbb{N},$$

проста індукція дає $a_n \leq a_n^*$ для всіх $n\geq 0$. Застосовуючи лему 186, бачимо, що

$$a_n^* \;=\; O\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{r_k^* \psi_k}{k}\right), \quad n\to\infty.$$

У поєднанні з вищесказаним, це доводить (A.48). □

З наведених вище лем (з $\psi_n \equiv 1$) випливає

Лема 188. *Припустимо, що послідовність* $(a_n)_{n\geq 0}$ *задовольняє рекурентному співвідношенню*

$$a_0 = 0, \;\; a_n = b_n + \sum_{k=0}^{n} q(n,k) a_{n-k}, \;\; n\in\mathbb{N},$$

де (b_n) *є послідовністю дійсних чисел, а* $(q(n,k))_{1\leq k\leq n}$ *є для кожного* $n\in\mathbb{N}$ *розподілом ймовірностей*

$$q(n,k) := C_n^k \frac{\mathbb{E}W^{n-k}(1-W)^k}{1-\mathbb{E}W^n}, \quad 1\leq k\leq n,$$

для деякої в.в. W*, що набуває значень в інтервалі* $(0,1)$*. Тоді:*

(i) якщо $b_n = O(1)$*, то* $a_n = O(\ln n)$ *при* $n\to\infty$*,*

(ii) якщо $b_n = O(\ln n)$*, то* $a_n = O(\ln^2 n)$ *при* $n\to\infty$.

Лема 189. *Нехай* $(b_n(k))_{n\in\mathbb{N},1\le k\le n}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *та* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *є масивами невід'ємних чисел. Визначимо послідовності* $(a_n(k))_{n\in\mathbb{N}_0,\,k\in\mathbb{N}}$ *та* $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *рекурсивно формулами*

$$a_0(k)=a_1(k)=\ldots=a_{k-1}(k)=0,\quad k\in\mathbb{N};$$
$$a_n(k)=b_n(k)+\sum_{i=k}^{n-1}p_{n,i}a_i(k),\quad k\le n,\ k\in\mathbb{N};$$

та

$$a'_0=0,\quad a'_n=d_n+\sum_{i=0}^{n-1}p_{n,i}a'_i,\quad n\in\mathbb{N}$$

відповідно, де $(p_{n,k})_{0\le k\le n-1}$ *є розподілом ймовірностей для кожного фіксованого* $n\in\mathbb{N}$. *Якщо*

$$c_kb_n(k)\le d_n,\quad n\in\mathbb{N},\quad k\le n,\ k\in\mathbb{N}, \tag{A.49}$$

то

$$c_ka_n(k)\le a'_n,\quad n\in\mathbb{N},\quad k\le n,\ k\in\mathbb{N}. \tag{A.50}$$

Доведення. Ми доведемо лему індукцією по n. База індукції очевидна. Припустимо, що (A.50) виконується для довільних цілих $n\le N$ та $k\le n$. Нам потрібно довести, що нерівність (A.50) вірна при $n=N+1$ та $k\le N+1$, $k\in\mathbb{N}$. Розглянемо спочатку випадок $k\le N$. Маємо

$$\begin{aligned}
c_ka_{N+1}(k) &= c_kb_{N+1}(k)+\sum_{i=k}^{N}p_{N+1,\,i}c_ka_i(k)\\
&\overset{\text{(A.49)}}{\le} d_{N+1}+\sum_{i=k}^{N}p_{N+1,\,i}c_ka_i(k)\\
&\overset{\text{індукція}}{\le} d_{N+1}+\sum_{i=k}^{N}p_{N+1,\,i}a'_i\le d_{N+1}+\sum_{i=0}^{N}p_{N+1,\,i}a'_i=a'_{N+1}.
\end{aligned}$$

При $k=N+1$ маємо

$$qc_{N+1}a_{N+1}(N+1)=c_{N+1}b_{N+1}(N+1)\le d_{N+1}\le a'_{N+1}.$$

Доведення завершено. □

А.9. Допоміжні результати для випадкових блукань та процесів Гальтона-Ватсона

А.9.1. Випадкові блукання зі скінченним середнім. Результати цього підрозділу використовуються у доведеннях результатів підрозділу 5.1.

Лема 190. *Нехай θ є додатною в.в. з $\mu := \mathbb{E}\theta \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\theta \ln^+ \theta < \infty$. Тоді для кожного $p \in [1, 2)$ маємо*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathbb{E}|\theta - \mu| \mathbb{1}_{\{\mu^{k-1} < |\theta - \mu| \le \mu^k\}} \Big)^{1/p} < \infty.$$

Доведення. Твердження очевидне при $p = 1$, оскільки ряд в лівій частині є просто $\mathbb{E}|\theta - \mu| \mathbb{1}_{\{|\theta - \mu| > 1\}}$. Зафіксуємо $p \in (1, 2)$ та оберемо $q > 2 > p$ таке, що $1/p + 1/q = 1$. Використавши нерівність Гельдера, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\mathbb{E}|\theta - \mu| \mathbb{1}_{\{\mu^{k-1} < |\theta - \mu| \le \mu^k\}} \Big)^{1/p} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} k\, \mathbb{E}|\theta - \mu| \mathbb{1}_{\{\mu^{k-1} < |\theta - \mu| \le \mu^k\}} \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-q/p} \right)^{1/q}.$$

Другий ряд збігається, оскільки $q > p$, а перший ряд мажорується виразом

$$\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\ln|\theta - \mu|}{\ln \mu} + 1 \Big) |\theta - \mu| \mathbb{1}_{\{\mu^{k-1} < |\theta - \mu| \le \mu^k\}} \right),$$

яка скінченна внаслідок припущення $\mathbb{E}\theta \ln^+ \theta < \infty$. □

Лема 191. *Нехай $(\theta_k^{(n)})_{n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}}$ є масивом незалежних копій додатної випадкової величини θ з $\mu = \mathbb{E}\theta \in (1, \infty)$ та $\mathbb{E}\theta \ln^+ \theta < \infty$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ визначимо випадкові блукання*

$$R^{(n)}(0) := 0, \quad R^{(n)}(k) := \theta_1^{(n)} + \cdots + \theta_k^{(n)}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тоді для кожного $T > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{t \in [0, T]} \Big| \mu^{-n} R^{(n)}(\lfloor t \mu^{n-1} \rfloor) - t \Big| < \infty \quad \text{м.н.}$$

Доведення. Введемо урізані в.в. $\theta^{(n)}_{\leqslant,k} := (\theta^{(n)}_k - \mu)\mathbb{1}_{\{|\theta^{(n)}_k-\mu|\le\mu^n\}}$ та $\theta^{(n)}_{>,k} := (\theta^{(n)}_k - \mu)\mathbb{1}_{\{|\theta^{(n)}_k-\mu|>\mu^n\}}$, маємо

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,\,T]}\left|\mu^{-n}R^{(n)}(\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor)-t\right| \;&\le\; \mu^{-n}\sup_{t\in[0,\,T]}|R^{(n)}(\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor)-\mu\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor| \\ &\quad +\;\mu^{-n}\sup_{t\in[0,T]}|\mu\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor - t\mu^n| \\ &\le\;\mu^{-n}\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor}\theta^{(n)}_{\leqslant,k}\right| + \sup_{t\in[0,T]}\left|\sum_{k=1}^{\lfloor t\mu^{n-1}\rfloor}\theta^{(n)}_{>,k}\right|\right)+\mu^{-n}.\end{aligned}$$

Отже, достатньо перевірити, що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\sup_{0\le m\le\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\theta^{(n)}_{\leqslant,k}\right| \quad\text{та}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\sup_{0\le m\le\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\theta^{(n)}_{>,k}\right| \tag{A.51}$$

є скінченними м.н. Для другого ряду це випливатиме з леми Бореля-Кантеллі, якщо показати

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\text{існує } k=1,\dots,\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor : \theta^{(n)}_{>,k}\neq 0\right\} \;<\;\infty. \tag{A.52}$$

Щоб показати це, використаємо нерівність Буля та запишемо

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left\{\text{існує } k=1,\dots,\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor : \theta^{(n)}_{>,k}\neq 0\right\} \;\le\; \sum_{n=1}^{\infty}(T\mu^{n-1})\mathbb{P}\left\{\theta^{(n)}_{>,1}\neq 0\right\} \\ &\quad=\;\sum_{n=1}^{\infty}(T\mu^{n-1})\,\mathbb{P}\{|\theta-\mu|>\mu^n\} \;=\;\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(T\mu^{n-1})\mathbb{1}_{\{|\theta-\mu|>\mu^n\}}\right) \\ &\quad\le\;\frac{T}{\mu}\,\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{|\theta-\mu|>\mu^n\}}\right)\;\le\;\frac{T}{\mu}\,\mathbb{E}\left((\theta+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\theta\ge\mu^n\}}\right) \\ &\quad\le\;\frac{T}{\mu}\,\mathbb{E}\left((\theta+\mu)\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{\{\ln^+\theta\ge n\ln\mu\}}\right)\;\le\;\frac{T}{\mu}\,\mathbb{E}\left((\theta+\mu)\frac{\ln^+\theta}{\ln\mu}\right)\;<\;\infty,\end{aligned}$$

де скінченність останнього виразу випливає з умови $\mathbb{E}\theta\ln^+\theta<\infty$. Покажемо, що перший ряд в (A.51) збігається. Маємо

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\sup_{0\le m\le\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\theta^{(n)}_{\leqslant,k}\right| \\ &\qquad\le\;\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\sup_{0\le m\le\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-m\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right| \;+\;\frac{T}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty}|\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}|.\end{aligned}$$

Останній член в правій частині скінченний тому, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}| \; = \; \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}\theta^{(n)}_{>,1}| \; \leq \; \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{|\theta-\mu|>\mu^n\}} \; < \; \infty,$$

де скінченність останньої суми була показана вище. Для оцінки першого члена помітимо, що $\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ є L_p-мартингалом для кожного $p\in(1,2]$, тому

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{0\leq m\leq\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right)\right|\right) \; &\leq \; \left\|\sup_{0\leq m\leq\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\left(\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right)\right|\right\|_p \\
\leq \; \frac{p}{p-1}\left\|\sum_{k=1}^{\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left(\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right)\right\|_p \; &\leq \; \frac{2p}{p-1}T^{1/p}\mu^{(n-1)/p}\left\|\theta^{(n)}_{\leqslant,1}-\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right\|_p \\
\leq \; \frac{4p}{p-1}T^{1/p}\mu^{n/p}\left\|\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right\|_p,
\end{aligned}$$

використавши нерівності Дуба, див. (A.72), та фон Бара-Ессена, див. формулу (4) в [263]. Покладемо $q := \frac{p}{p-1}$ так, що $1/p+1/q=1$, та використаємо нерівність $|\sum_i x_i|^{1/p}\leq\sum_i|x_i|^{1/p}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n/q}\left\|\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right\|_p \; &\leq \; \sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n/q}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}|\theta-\mu|^p\mathbb{1}_{\{\mu^{k-1}<|\theta-\mu|\leq\mu^k\}}\right)^{1/p} \\
&\leq \; \sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n/q}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\mu^{k/q}\left(\mathbb{E}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{\mu^{k-1}<|\theta-\mu|\leq\mu^k\}}\right)^{1/p}\right).
\end{aligned}$$

Далі,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n/q}\sum_{k=1}^{n}\mu^{k/q}\left(\mathbb{E}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{\mu^{k-1}<|\theta-\mu|\leq\mu^k\}}\right)^{1/p} \\
&\qquad = \; \sum_{k=1}^{\infty}\mu^{k/q}\left(\mathbb{E}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{\mu^{k-1}<|\theta-\mu|\leq\mu^k\}}\right)^{1/p}\sum_{n=k}^{\infty}\mu^{-n/q} \\
&\qquad \leq \; \mathrm{const}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mathbb{E}|\theta-\mu|\mathbb{1}_{\{\mu^{k-1}<|\theta-\mu|\leq\mu^k\}}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Сума в правій частині є скінченною внаслідок леми 190 при $p\in(1,2)$. Отже,

$$\mathbb{E}\sum_{n=1}^{\infty}\mu^{-n}\sup_{0\leq m\leq\lfloor T\mu^{n-1}\rfloor}\left|\sum_{k=1}^{m}\theta^{(n)}_{\leqslant,k}-m\mathbb{E}\theta^{(n)}_{\leqslant,1}\right| \; < \; \infty,$$

що завершує доведення леми. $\square$

З щойно доведеної леми 191 можна отримати наступний результат, який є основним в доведенні теореми 112.

Твердження 192. *Нехай* $(R^{(n)}(k))_{k\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}}$ *є такими, як в лемі 191, але з* θ*, що набуває значень в* $\mathbb{N}$*. Покладемо*

$$g_n(t) \ := \ \mu^{-n}R^{(n)}(\lfloor\mu^{n-1}t\rfloor) \tag{A.53}$$

для $n\in\mathbb{N}$ *та* $t\geq 0$*.*

(F1) Існує випадковий процес $(Z_\infty(t))_{t\geq 0}$ *зі значеннями в* $D[0,\infty)$ *такий, що*

$$g^{(n\downarrow 1)}(t)\to Z_\infty(t), \quad n\to\infty$$

м.н. у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією. Процес* $(Z_\infty(t))_{t\geq 0}$ *є границею нормованого числа нащадків індивідів* $1,\ldots,\lfloor t\rfloor$ *у процесі Гальтона-Ватсона з розподілом числа нащадків одного індивіда* θ *та зліченним числом предків* $1,2,\ldots$*, тобто*

$$Z_\infty(t)=Z_\infty^{(1)}+\cdots+Z_\infty^{(\lfloor t\rfloor)}, \quad t\geq 0,$$

де $Z_\infty^{(j)}$*,* $j\in\mathbb{N}$ *є незалежними копіями* Z_∞ *– границі нормованого процесу Гальтона-Ватсона з одним предком.*

(F2) Для кожного $k\in\mathbb{N}_0$*, існує копія* $(Z_{k,\infty}(t))_{t\geq 0}$ *процесу* $(Z_\infty(t))_{t\geq 0}$ *така, що*

$$g^{(n\downarrow k+1)}(t)\to\mu^{-k}Z_{k,\infty}(t\mu^k) \quad n\to\infty,$$

м.н. у просторі $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією.*

(F3) При $t\to\infty$*,*

$$\inf_{k\geq 1} g^{(k\downarrow 1)}(t) \ \to \ \infty \quad \text{м.н.}$$

(F4) Для довільного фіксованого $T>0$*,*

$$\sup_{k\geq 1}\sup_{t\in[0,T]}\left|g^{(n+k\downarrow n+1)}(t)-t\right|\to 0, \quad n\to\infty \quad \text{м.н.}$$

(F5) Множина $\left\{\mu^{-k}Z_{k,\infty}(t\mu^k)\ :\ t\geq 0, k\in\mathbb{N}\right\}$ *є майже напевно щільною в* $[0,\infty)$*.*

Доведення. ДОВЕДЕННЯ (F1). Оскільки $g^{(n\downarrow 1)}(t) = \mu^{-n} R^{(n\downarrow 1)}(\lfloor t \rfloor)$, то твердження еквівалентне

$$\left(\mu^{-n} R^{(n\downarrow 1)}(j)\right)_{j\in\mathbb{N}_0} \to (Z_\infty(j))_{j\in\mathbb{N}_0}, \quad n\to\infty \quad \text{м.н.} \tag{A.54}$$

Для кожного n, послідовність у правій частині є випадковим блуканням (має незалежні прирости), оскільки композиція незалежних зростаючих $\mathbb{N}$-значних випадкових блукань є випадковим блуканням (це є аналогом твердження з теорії процесів Леві, яке називається субординацією Бохнера). Отже, для доведення (A.54) достатньо показати, що

$$\mu^{-n} R^{(n\downarrow 1)}(1) \to \ Z_\infty^{(1)} \quad \text{м.н.} \tag{A.55}$$

Вираз в лівій частині є нормованим числом індивідів в поколінні n у процесі Гальтона-Ватсона з розподілом числа нащадків θ та одним предком, а тому (A.55) випливає з класичної збіжності мартингалів у процесах Гальтона-Ватсона.

ДОВЕДЕННЯ (F2). Це випливає з (F1) та представлення

$$g^{(n\downarrow k+1)}(t) \ = \ \mu^{-k}\mu^{-(n-k)} R^{(n\downarrow k+1)}(\lfloor t\mu^k \rfloor), \quad t\geq 0,$$

яке виконується при $n > k$.

ДОВЕДЕННЯ (F3). Маємо

$$g^{(k\downarrow 1)}(t) \ = \ \sum_{j=1}^{\lfloor t\rfloor} \mu^{-k} Z_k^{(j)}, \quad t\geq 0,$$

де $(Z_k^{(j)})_{k\geq 0}$, $j\in\mathbb{N}$ є незалежними копіями процесів Гальтона-Ватсона $(Z_k)_{k\geq 0}$ з $Z_0 = 1$. Переходячи до інфімумів, маємо

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} g^{(k\downarrow 1)}(t) \ \geq \ \sum_{j=1}^{\lfloor t\rfloor} \inf_{k\geq 1}(\mu^{-k} Z_k^{(j)}), \quad t\geq 0$$

і результат випливає є того, що $\mathbb{P}\Big\{\inf_{k\geq 1}(\mu^{-k} Z_k^{(1)}) = 0\Big\} = 0$.

ДОВЕДЕННЯ (F4). Зафіксуємо $T > 0$. З частини (F3) ми знаємо, що існує $T_1 > 0$ таке, що

$$\inf_{k\geq 1} g^{(k\downarrow 1)}(T_1) \ \geq \ T \quad \text{м.н.}$$

Отже,

$$\begin{aligned} A_1 \;&:=\; \sup_{k\geq 0}\sup_{n>k}\sup_{t\in[0,T]} g^{(n\downarrow k+1)}(t) \;=\; \sup_{k\geq 0}\sup_{n>k} g^{(n\downarrow k+1)}(T) \\ &\leq\; \sup_{k\geq 0}\sup_{n>k} g^{(n\downarrow 1)}(T_1) \;=\; \sup_{n\geq 1} g^{(n\downarrow 1)}(T_1) \;<\; \infty \quad \text{м.н.}, \end{aligned}$$

де скінченність є наслідком (F1). Також

$$\begin{aligned} &\left|g^{(n+k\downarrow n+1)}(t) - t\right| \\ &\quad\leq\; \left|g_{n+1}(t) - t\right| \;+\; \sum_{j=2}^{k}\left|g^{(n+j\downarrow n+1)}(t) - g^{(n+j-1\downarrow n+1)}(t)\right| \end{aligned}$$

внаслідок нерівності трикутника. Таким чином,

$$\begin{aligned} &\sup_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,T]}\left|g^{(n+k\downarrow n+1)}(t) - t\right| \\ &\quad\leq\; \sup_{t\in[0,T]}\left|g_{n+1}(t) - t\right| \\ &\quad+\; \sum_{j=2}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}\left|g^{(n+j\downarrow n+1)}(t) - g^{(n+j-1\downarrow n+1)}(t)\right| \\ &\quad\leq\; \sup_{t\in[0,T]}\left|g_{n+1}(t) - t\right| \;+\; \sum_{j=2}^{\infty}\sup_{s\in[0,A_1]}\left|g_{n+j}(s) - s\right| \;\to\; 0, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.} \end{aligned}$$

за лемою 191.

Доведення (F5). Згідно з частиною (F4), для довільного $s\in[0,\infty)$ та $\varepsilon>0$ існує випадкове $m\in\mathbb{N}$ таке, що

$$s - \varepsilon/2 \;\leq\; g^{(m+k\downarrow m+1)}(s) \;\leq\; s + \varepsilon/2 \tag{A.56}$$

для всіх $k\in\mathbb{N}$. Обираючи k достатньо великим та застосовуючи (F2), маємо

$$\mu^{-m}Z_{m,\infty}(s\mu^m) - \varepsilon/2 \;\leq\; g^{(m+k\downarrow m+1)}(s) \;\leq\; \mu^{-m}Z_{m,\infty}(s\mu^m) + \varepsilon/2. \tag{A.57}$$

З формул (A.56) та (A.57) випливає

$$s - \varepsilon \;\leq\; \mu^{-m}Z_{m,\infty}(s\mu^m) \;\leq\; s + \varepsilon,$$

що завершує доведення. □

A.9.2. Випадкові блукання з нескінченним середнім.

Лема 193. *Нехай θ є $\mathbb{N}$-значною в.в., яка задовольняє умову Девіса:*

$$x^{-\alpha-\gamma(x)} \le \mathbb{P}\{\theta > x\} \le x^{-\alpha+\gamma(x)}, \quad x \ge x_0$$

для деяких $x_0 > 0$, $\alpha \in (0,1)$ та незростаючої функції $\gamma(x)$ такої, що $x^{\gamma(x)}$ не спадає та $\int_{x_0}^{\infty} \gamma(\exp(e^x))\,dx < \infty$. Нехай $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ є послідовністю незалежних копій θ. Покладемо

$$R(0) := 0, \quad R(n) := \theta_1 + \cdots + \theta_n, \quad M(n) := \max_{k=1,\dots,n} \theta_k, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тоді, для кожного $\varepsilon > 0$ та кожного $\beta \in (0,\alpha)$, існують $c, C > 0$ такі, що для всіх $n \in \mathbb{N}$,

$$cn^{-(1/\alpha+\varepsilon)\beta\alpha^{-1}\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})} \;\le\; \mathbb{E}\left(\frac{R(n)}{n^{1/\alpha}}\right)^{\beta} \;\le\; Cn^{(1/\alpha+\varepsilon)\beta\alpha^{-1}\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})}, \tag{A.58}$$

та

$$cn^{-(1/\alpha+\varepsilon)\beta\alpha^{-1}\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})} \;\le\; \mathbb{E}\left(\frac{M(n)}{n^{1/\alpha}}\right)^{-\beta} \;\le\; Cn^{(1/\alpha+\varepsilon)\beta\alpha^{-1}\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})}. \tag{A.59}$$

Доведення. Якщо θ належить області притягання α-стійкого розподілу, $\alpha \in (0,1)$, то моменти порядку β величин $R(n)/c(n)$, де $(c(n))_{n\in\mathbb{N}}$ така, що $\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\{\theta > c(n)\} = 1$, збігаються до моменту порядку β граничного α-стійкого розподілу для всіх $\beta \in (0,\alpha)$. На жаль, умова Девіса не гарантує того, що θ належить області притягання α-стійкого розподілу. Тим не менш, θ обмежується зверху та знизу випадковими величинами з хвостами, що правильно змінюються. Це спостереження є основною ідеєю подальшого доведення.

Згідно з лемою 3 в [57] функція $x \mapsto x^{\gamma(x)}$ повільно змінюється на нескінченності. Візьмемо $x_1 > x_0$ настільки великим, що $x^{-\alpha+\gamma(x)} \le 1$ при $x \ge x_1$ та нехай $\overline{\theta} \ge 1$ і $\underline{\theta} \ge 1$ є випадковими величинами з розподілами

$$\mathbb{P}\{\overline{\theta} > x\} \;:=\; \begin{cases} 1, & \text{якщо } 1 \le x < x_1, \\ \sup_{y>x} y^{-\alpha+\gamma(y)}, & \text{якщо } x \ge x_1; \end{cases}$$

та

$$\mathbb{P}\{\underline{\theta} > x\} \;:=\; \begin{cases} \mathbb{P}\{\theta > x\}, & \text{якщо } 1 \le x < x_1, \\ \inf_{x_1 \le y \le x} y^{-\alpha-\gamma(y)}, & \text{якщо } x \ge x_1. \end{cases}$$

З побудови зрозуміло, що
$$\underline{\theta} \overset{\mathrm{d}}{\le} \theta \overset{\mathrm{d}}{\le} \overline{\theta}.$$
Згідно з теоремою 1.5.3 в [42], функції $x \mapsto \mathbb{P}\{\overline{\theta} > x\}$ та $x \mapsto \mathbb{P}\{\underline{\theta} > x\}$ правильно змінюються з індексом $-\alpha$, а, отже, розподіли $\overline{\theta}$ та $\underline{\theta}$ належать області притягання α-стійкого розподілу.

Нехай $(\overline{\theta}_k)_{k\ge1}$ та $(\underline{\theta}_k)_{k\ge1}$ є послідовностями незалежних копій $\overline{\theta}$ та $\underline{\theta}$ відповідно, та нехай $(\overline{R}(k))_{k\ge0}$ та $(\underline{R}(k))_{k\ge0}$ є відповідними випадковими блуканнями, нехай $(\overline{c}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ та $(\underline{c}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ такі, що
$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\{\underline{\theta} > \underline{c}(n)\} \;=\; \lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}\{\overline{\theta} > \overline{c}(n)\} \;=\; 1.$$
З леми 5.2.2 в [125] маємо
$$0 \;<\; \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\underline{R}^{\beta}(n)}{\underline{c}^{\beta}(n)} \;<\; \infty \quad \text{та} \quad 0 \;<\; \lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\overline{R}^{\beta}(n)}{\overline{c}^{\beta}(n)} \;<\; \infty.$$
Оскільки
$$\mathbb{E}\underline{R}^{\beta}(n) \;\le\; \mathbb{E}R^{\beta}(n) \;\le\; \mathbb{E}\overline{R}^{\beta}(n),$$
то співвідношення (A.58) випливатиме, якщо нам вдасться показати, що для деяких $c_1, C_1 > 0$ та всіх $n \in \mathbb{N}$,
$$c_1 n^{-(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})/\alpha} \;\le\; \frac{\underline{c}(n)}{n^{1/\alpha}} \quad \text{та} \quad \frac{\overline{c}(n)}{n^{1/\alpha}} \;\le\; C_1 n^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})/\alpha}. \tag{A.60}$$
Доведемо першу нерівність в (A.60), друга доводиться аналогічно. Оскільки $(\underline{c}(n))$ правильно змінюється з показником $1/\alpha$, то для великих n маємо $\underline{c}(n) \le n^{1/\alpha+\varepsilon}$. З іншого боку, з монотонності $x \mapsto x^{\gamma(x)}$ випливає
$$n\,\mathbb{P}\{\underline{\theta} > \underline{c}(n)\} \;\sim\; n\,\underline{c}(n)^{-\alpha-\gamma(\underline{c}(n))} \;\ge\; (n^{-1/\alpha}\underline{c}(n))^{-\alpha}(n^{1/\alpha+\varepsilon})^{-\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})},$$
а тому
$$\varlimsup_{n\to\infty} (n^{-1/\alpha}\underline{c}(n))^{-\alpha}(n^{1/\alpha+\varepsilon})^{-\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})} \;\le\; 1,$$
звідки
$$c_1 n^{-(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(n^{1/\alpha+\varepsilon})/\alpha} \;\le\; \frac{\underline{c}(n)}{n^{1/\alpha}}$$
для деякого $c_1 > 0$.

Для доведення (A.59) міркуємо аналогічно. Покладемо
$$\overline{M}(n) := \max_{1\le k\le n}(-\overline{\theta}_k^{-1}), \quad \underline{M}(n) := \max_{1\le k\le n}(-\underline{\theta}_k^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Згідно з класичною теоремою Фішера-Тіппета-Гнєденка кожна з послідовностей $(-\overline{c}(n)\overline{M}(n))$ та $(-\underline{c}(n)\underline{M}(n))$ слабко збігаються до розподілу Вейбула. Понад це, згідно з теоремою 2.1 в [218], має місце також збіжність моментів порядку β, тому

$$0 \;<\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(-\overline{c}(n)\overline{M}(n)\Big)^{\beta} \;<\; \infty \quad \text{та} \quad 0 \;<\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\Big(-\underline{c}(n)\underline{M}(n)\Big)^{\beta} \;<\; \infty.$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(-\underline{c}(n)\underline{M}(n)\Big)^{\beta} \;&=\; \mathbb{E}\Big(\underline{c}(n)\min_{1\le k\le n}\underline{\theta}_k^{-1}\Big)^{\beta}\\ &=\; \mathbb{E}\left(\frac{\underline{c}(n)}{\max_{1\le k\le n}\underline{\theta}_k}\right)^{\beta} \;\ge\; \mathbb{E}\left(\frac{\underline{c}(n)}{\max_{1\le k\le n}\theta_k}\right)^{\beta}.\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(-\overline{c}(n)\overline{M}(n)\Big)^{\beta} \;&=\; \mathbb{E}\Big(\overline{c}(n)\min_{1\le k\le n}\overline{\theta}_k^{-1}\Big)^{\beta}\\ &=\; \mathbb{E}\left(\frac{\overline{c}(n)}{\max_{1\le k\le n}\overline{\theta}_k}\right)^{\beta} \;\le\; \mathbb{E}\left(\frac{\overline{c}(n)}{\max_{1\le k\le n}\theta_k}\right)^{\beta}.\end{aligned}$$

Поєднавши це з (A.60), отримуємо (A.59). □

Наступна лема є аналогом леми 191 у випадку нескінченного середнього.

Лема 194. *Нехай* $(\theta_k^{(n)})_{n\in\mathbb{N},\,k\in\mathbb{N}}$ *є масивом незалежних копій додатної в.в.* θ*, яка задовольняє умови леми 193. Для кожного* $n\in\mathbb{N}$ *визначимо випадкові блукання*

$$R^{(n)}(0) := 0, \quad R^{(n)}(k) := \theta_1^{(n)} + \cdots + \theta_k^{(n)}, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді для довільного $T>0$ *маємо*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{t\in[0,T]}\Big|\alpha^n \ln R^{(n)}(\lfloor e^{t\alpha^{-(n-1)}}\rfloor) - t\Big| < \infty \quad \textit{м.н.}$$

Доведення. Покладемо $m_n(t) := \lfloor e^{t\alpha^{-(n-1)}}\rfloor$ та $N_n := m_n(T)$. Тоді

$$\alpha^{n-1}\ln m_n(t) \;\le\; t \;<\; \alpha^{n-1}\ln(m_n(t)+1),$$

а тому

$$
\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} & \left|\alpha^n \ln R^{(n)}(\lfloor e^{t\alpha^{-(n-1)}}\rfloor) - t\right| \\
& \le \sup_{t\in[0,T]} \left|\alpha^n \ln R^{(n)}(m_n(t)) - \alpha^n \ln(m_n(t))^{1/\alpha}\right| + \sup_{t\in[0,T]} \left|\alpha^{n-1} \ln m_n(t) - t\right| \\
& \le \alpha^n \sup_{1\le k\le N_n} \left|\ln \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right| + \alpha^{n-1}\ln(1+(m_n(t))^{-1}) \\
& \le \alpha^n \sup_{1\le k\le N_n} \left|\ln \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right| + \alpha^{n-1}\ln 2.
\end{aligned}
$$

Отже, нам потрібно показати, що

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sup_{1\le k\le N_n} \Big|\ln \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\Big| < \infty \quad \text{м.н.}
$$

Це зводиться до перевірки двох співвідношень:

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sup_{1\le k\le N_n} \Big(\ln^+ \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\Big) < \infty \quad \text{м.н.} \tag{A.61}
$$

та

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \sup_{1\le k\le N_n} \Big(\ln^- \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\Big) < \infty \quad \text{м.н.} \tag{A.62}
$$

Фіксуючи $\beta\in(0,\alpha)$, отримуємо

$$
\begin{aligned}
\beta\,\mathbb{E}\left(\sup_{1\le k\le N_n} \ln^+ \frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right) &= \mathbb{E}\left(\ln \sup_{1\le k\le N_n} \frac{(R^{(n)}(k))^\beta}{k^{\beta/\alpha}}\right) \\
&\le \mathbb{E}\left(\ln \sum_{j=0}^{\lfloor \ln N_n\rfloor} \sup_{k\in(e^{-(j+1)}N_n,\, e^{-j}N_n]} \frac{(R^{(n)}(k))^\beta}{k^{\beta/\alpha}}\right) \\
&\le \ln \sum_{j=0}^{\lfloor T\alpha^{-(n-1)}\rfloor} \mathbb{E}\left(\sup_{k\in(e^{-(j+1)}N_n,\, e^{-j}N_n]} \frac{(R^{(n)}(k))^\beta}{k^{\beta/\alpha}}\right),
\end{aligned}
$$

де останній рядок випливає з нерівності Йєнсена. Для довільного $\varepsilon>0$, використовуючи лему 193 та (A.58)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{k\in(e^{-(j+1)}N_n,\, e^{-j}N_n]} \frac{R^{(n)}(k)^\beta}{k^{\beta/\alpha}}\right) &\le \mathrm{const}\,\mathbb{E}\left(\frac{R^{(n)}(\lceil e^{-j}N_n\rceil)}{\lceil e^{-j}N_n\rceil^{1/\alpha}}\right)^\beta \\
&\le \mathrm{const}\Big(\lceil e^{-j}N_n\rceil^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(\lceil e^{-j}N_n\rceil^{1/\alpha+\varepsilon})}\Big)^{\beta/\alpha}.
\end{aligned}
$$

Поєднавши отримані оцінки та використавши монотонність $x \mapsto x^{\gamma(x)}$, маємо

$$\beta\,\mathbb{E}\left(\sup_{1\le k\le N_n}\ln\frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right) \le \mathrm{const} + \ln\sum_{j=0}^{\lceil T\alpha^{-(n-1)}\rceil}\left(\lceil e^{-j}N_n\rceil^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(\lceil e^{-j}N_n\rceil^{1/\alpha+\varepsilon})}\right)^{\beta/\alpha}$$

$$\le \mathrm{const} + \ln\left(\left(\lceil T\alpha^{-(n-1)}\rceil + 1\right)\left(N_n^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(N_n^{1/\alpha+\varepsilon})}\right)^{\beta/\alpha}\right).$$

Отже, (A.61) випливає з нерівності

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n \ln\left(N_n^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(N_n^{1/\alpha+\varepsilon})}\right) \;\le\; \mathrm{const}\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(N_n^{1/\alpha+\varepsilon})$$

та того факту, що умова $\int_{x_0}^{\infty}\gamma(\exp(e^x))\,dx < \infty$ гарантує, див. обчислення на с. 473 в [57], що

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma(e^{u\alpha^{-n}}) \;<\; \infty.$$

для кожного $u > 0$.

Формула (A.62) перевіряється аналогічно. Використавши нерівність $\ln^- x = \ln(x^{-1}\wedge 1) \le \ln(1+x^{-1})$, маємо для довільного $\beta \in (0,\alpha)$

$$\beta\,\mathbb{E}\left(\sup_{1\le k\le N_n}\ln^-\frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right) \;\le\; \beta\,\mathbb{E}\left(\ln\left(1+\sup_{1\le k\le N_n}\left(\frac{k^{1/\alpha}}{R^{(n)}(k)}\right)\right)\right)$$

$$\le\; \mathbb{E}\ln\left(1+\sum_{j=0}^{\lfloor\ln N_n\rfloor}\sup_{k\in(e^{-(j+1)}N_n,\,e^{-j}N_n]}\left(\frac{k^{\beta/\alpha}}{R^{(n)}(k)^{\beta}}\right)\right)$$

$$\le\; \ln\left(1+\sum_{j=0}^{\lfloor\ln N_n\rfloor}\mathbb{E}\left(\sup_{k\in(e^{-(j+1)}N_n,\,e^{-j}N_n]}\left(\frac{k^{\beta/\alpha}}{R^{(n)}(k)^{\beta}}\right)\right)\right)$$

$$\le\; \ln\left(1+\sum_{j=0}^{\lfloor\ln N_n\rfloor}\mathbb{E}\left(\frac{\lceil e^{-j}N_n\rceil^{\beta/\alpha}}{(R^{(n)}(\lceil e^{-(j+1)}N_n\rceil))^{\beta}}\right)\right)$$

$$\le\; \ln\left(1+\sum_{j=0}^{\lfloor\ln N_n\rfloor}\mathbb{E}\left(\frac{\lceil e^{-j}N_n\rceil^{1/\alpha}}{\max_{k=1,\dots,\lceil e^{-(j+1)}N_n\rceil}\theta_k^{(n)}}\right)^{\beta}\right).$$

Згідно з оцінкою (A.59) в лемі 193,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\lceil e^{-j}N_n\rceil^{1/\alpha}}{\max_{k=1,\dots,\lceil e^{-(j+1)}N_n\rceil}\theta_k^{(n)}}\right)^{\beta} \;\le\; \mathrm{const}\left(\lceil e^{-(j+1)}N_n\rceil^{(1/\alpha+\varepsilon)\gamma(\lceil e^{-(j+1)}N_n\rceil^{1/\alpha+\varepsilon})}\right)^{\beta/\alpha},$$

звідки випливає

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\mathbb{E}\sup_{1\le k\le N_n}\left(\ln^-\frac{R^{(n)}(k)}{k^{1/\alpha}}\right) < \infty$$

з тих же міркувань, що були використані вище. Доведення леми 194 завершено. $\square$

Сформулюємо і доведемо тепер аналог твердження 192.

Твердження 195. *Нехай* $(R^{(n)}(k))_{k\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}}$ *є такими, як в лемі 194. Покладемо*

$$h_n(t) \ := \ \alpha^n \ln R^{(n)}(\lfloor e^{t\alpha^{-(n-1)}}\rfloor)$$

при $n \in \mathbb{N}$ *та* $t \geq 0$.

(G1) Існує випадковий процес $(Z^*_\infty(t))_{t\geq 0}$ *зі значеннями в* $D[0,\infty)$ *такий, що*

$$\big(h^{(n\downarrow 1)}(t)\big)_{t\geq 0} \to \big(Z^*_\infty(t)\big)_{t\geq 0}, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією. Процес* $(Z^*_\infty(t))_{t\geq 0}$ *є границею м.н.* $(\alpha^n \ln Z_n(t))_{t\geq 0}$ *при* $n\to\infty$*, де* $Z_n(t)$ *є числом індивідів в поколінні* n *предків* $1,\dots,\lfloor e^t\rfloor$ *у процесі Гальтона-Ватсона зі зліченним числом предків* $1,2,\dots$ *в поколінні* 0 *та розподілом* θ *числа нащадків одного індивіда. Процес* $(Z^*_\infty(t))_{t\geq 0}$ *має таке представлення:*

$$Z^*_\infty(t) \ := \ Z^{(*,1)}_\infty \vee Z^{(*,2)}_\infty \vee \dots \vee Z^{(*,\lfloor e^t\rfloor)}_\infty, \quad t\geq 0,$$

де $(Z^{(*,j)}_\infty)_{j\in\mathbb{N}}$ *є незалежними копіями* Z^*_∞ *– границі м.н. в* (5.13).

(G2) Для кожного $k\in\mathbb{N}_0$ *існує копія* $(Z^*_{k,\infty}(t))_{t\geq 0}$ *процесу* $(Z^*_\infty(t))_{t\geq 0}$ *така, що*

$$\left(h^{(n\downarrow k+1)}(t)\right)_{t\geq 0} \to \left(\alpha^k Z^*_{k,\infty}(t\alpha^{-k})\right)_{t\geq 0}, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$

у просторі Скорохода $D[0,\infty)$ *з* J_1*-топологією.*

(G3) При $t\to\infty$ *маємо*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k\downarrow 1)}(t) \to \infty \quad \text{м.н.}$$

(G4) Для кожного $T>0$ *маємо*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} \left| h^{(n+k\downarrow n+1)}(t) - t \right| \to 0, \quad n\to\infty, \quad \text{м.н.}$$

(G5) Множина $\left\{\alpha^k Z^*_{k,\infty}(t\alpha^{-k}) : t\geq 0, k\in\mathbb{N}\right\}$ *є м.н. щільною в* $[0,\infty)$.

Доведення. ДОВЕДЕННЯ (G1). Це твердження еквівалентне

$$\left(\alpha^n \ln R^{(n\downarrow 1)}(j)\right)_{j\in\mathbb{N}} \to (Z_\infty^*(j))_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{м.н.}$$

Поклавши

$$Z_{n,1} := R^{(n\downarrow 1)}(1), \quad Z_{n,j} := R^{(n\downarrow 1)}(j) - R^{(n\downarrow 1)}(j-1), \quad j = 2, 3, \ldots,$$

отримуємо незалежні процеси Гальтона-Ватсона $(Z_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}, (Z_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}, \ldots$. Згідно з (5.13), границі

$$Z_\infty^{(*,j)} := \lim_{n\to\infty} \alpha^n \ln Z_{n,j}, \quad j \in \mathbb{N}$$

існують м.н. в $(0,\infty)$ та є незалежними копіями Z_∞^*. Зі співвідношення

$$\alpha^n \ln R^{(n\downarrow 1)}(j) = \alpha^n \ln(Z_{n,1} + \ldots + Z_{n,j}) \to Z_\infty^{(*,1)} \vee \ldots \vee Z_\infty^{(*,j)}, \quad n \to \infty, \quad \text{м.н.}$$

для кожного $j \in \mathbb{N}$ випливає (G1).

ДОВЕДЕННЯ (G2). Це випливає безпосередньо з (G1) та рівності

$$h^{(n\downarrow k+1)}(t) = \alpha^k \alpha^{(n-k)} R^{(n\downarrow k+1)}(\lceil e^{t\alpha^{-k}} \rceil), \quad t \geq 0,$$

яка виконується при $n > k$.

ДОВЕДЕННЯ (G3). Використовуючи позначення з (G1), маємо

$$h^{(k\downarrow 1)}(t) = \alpha^k \ln\left(\sum_{j=1}^{\lfloor e^t \rfloor} Z_{k,j}\right), \quad t \geq 0,$$

а тому для всіх $t \geq 0$ та довільного $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\inf_{k\in\mathbb{N}} h^{(k\downarrow 1)}(t) &\geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \max_{1\leq j\leq \lfloor e^t \rfloor} (\alpha^k \ln Z_{k,j}) \\
&= \left(\inf_{k>n_0} \max_{1\leq j\leq \lfloor e^t \rfloor} (\alpha^k \ln Z_{k,j})\right) \wedge \left(\inf_{k\leq n_0} \max_{1\leq j\leq \lfloor e^t \rfloor} (\alpha^k \ln Z_{k,j})\right) \\
&\geq \left(\max_{1\leq j\leq \lfloor e^t \rfloor} \inf_{k>n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,j})\right) \wedge \left(\max_{1\leq j\leq \lfloor e^t \rfloor} \inf_{k\leq n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,j})\right)
\end{aligned}$$

за мінімакс-нерівністю. Оскільки $\inf_{k\leq n_0}(\alpha^k \ln Z_{k,j})$, $j \in \mathbb{N}$, є незалежними та однаково розподіленими з необмеженим носієм[1], тобто

$$\mathbb{P}\left\{\inf_{k\leq n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,1}) > z\right\} > 0$$

[1]Останній факт випливає з того, що θ має необмежений носій з огляду на $\mathbb{E}\theta = \infty$.

для кожного $z > 0$, маємо

$$\max_{1 \le j \le \lfloor e^t \rfloor} \inf_{k \le n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,j}) \to \infty, \quad t \to \infty, \quad \text{м.н.}$$

Аналогічно, збіжність

$$\max_{1 \le j \le \lfloor e^t \rfloor} \inf_{k > n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,j}) \to \infty, \quad t \to \infty, \quad \text{м.н.}$$

випливатиме, якщо ми зможемо показати існування $n_0 \in \mathbb{N}$ такого, що

$$\mathbb{P}\{\inf_{k \ge n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,1}) > z\} > 0 \tag{A.63}$$

для всіх $z > 0$. Для цього зафіксуємо $z > 0$ та помітимо, що згідно з теоремою 2 в [57], маємо $a := \mathbb{P}\{Z_\infty^* > z + 1\} < 1$. З іншого боку, з (G1) випливає

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left\{\sup_{k \ge n} |\alpha^k \ln Z_{k,1} - Z_\infty^*| \ge 1\right\} \; = \; 0.$$

Зокрема, для кожного $0 < \delta < a$ знайдеться $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$\mathbb{P}\left\{\sup_{k \ge n_0} |\alpha^k \ln Z_{k,1} - Z_\infty^*| \ge 1\right\} \; < \; \delta,$$

а, отже,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left\{\inf_{k \ge n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,1}) \le z\right\} \; &= \; \mathbb{P}\left\{\inf_{k \ge n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,1}) \le z, \, Z_\infty^* \le z + 1\right\} \\
&+ \; \mathbb{P}\left\{\inf_{k \ge n_0} (\alpha^k \ln Z_{k,1}) \le z, \, Z_\infty^* > z + 1\right\} \\
&\le \; 1 - a + \mathbb{P}\left\{\sup_{k \ge n_0} |\alpha^k Z_{k,1} - Z_\infty^*| \ge 1\right\} \\
&\le 1 - a + \delta < 1,
\end{aligned}$$

що доводить (A.63).

Доведення частин (G4) та (G5) не наводиться, воно дослівно повторює доведення частин (F4) та (F5) в твердженні 192 (з лемою 194 для частини (G4) замість леми 191 для частини (F4) в твердженні 192). □

A.10. Процеси рекордів

A.10.1. Процес рекордів у послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин. Нехай $R(n)$ позначає індекс n-го рекорду в послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин з неперервним розподілом. Класичний результат Реньї стверджує, що $\ln R(n)$ задовольняє закон великих чисел та центральну граничну теорему

$$\frac{\ln R(n)}{n} \to 1 \text{ м.н.} \quad \text{та} \quad \frac{\ln R(n) - n}{\sqrt{n}} \overset{\mathrm{d}}{\to} \mathcal{S}_2(1).$$

Нижче зібрані деякі допоміжні твердження про процес $(R(n))_{n\in\mathbb{N}}$, як ми використовуємо в аналізі випадкових просіювань процесом рекордів.

Лема 196. *Для кожного* $r > 0$ *маємо*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\frac{\ln R(n)}{n}\right)^r < \infty, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left|\frac{\ln R(n) - n}{\sqrt{n}}\right|^r < \infty,$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\left(\frac{n}{1+\ln R(n)}\right)^r < \infty.$$

Доведення. Перші два твердження доведено в теоремі 2 роботи [114]. Для доведення третьої властивості скористаємось представленням Вільямса для індексів рекордів, див. с. 60 в [213]. Нехай $U_1, U_2, \ldots$ є незалежними в.в. з рівномірним розподілом на інтервалі $[0,1]$. Покладемо $\mathfrak{R}(1) = 1$ та $\mathfrak{R}(n+1) = \lceil \mathfrak{R}(n)/U_n \rceil$ при $n \in \mathbb{N}$. Представлення Вільямса стверджує, що послідовності $(R(n))_{n\in\mathbb{N}}$ та $(\mathfrak{R}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ мають однаковий розподіл. Маємо $\mathfrak{R}(n+1) \geq \mathfrak{R}(n)/U_n$, а тому

$$\mathfrak{R}(n) \ \geq \ \frac{1}{U_1 \cdot \ldots \cdot U_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{A.64}$$

Випадкові величини $\mathcal{E}_k := -\ln U_k$ мають стандартний експоненційний розподіл. Зафіксуємо $r > 0$ та нехай $n > r$. Згідно з (A.64), маємо

$$\mathbb{E}\left(\frac{n}{1+\ln R(n)}\right)^r \ = \ \mathbb{E}\left(\frac{n}{1+\ln \mathfrak{R}(n)}\right)^r \ \leq \ \mathbb{E}\left(\frac{n}{1+\sum_{k=1}^{n-1}\mathcal{E}_k}\right)^r$$
$$\leq \ \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\mathcal{E}_k^{-1/n}\right)^r \ = \ \Big(\mathbb{E}(\mathcal{E}_1^{-r/n})\Big)^{n-1},$$

де було використано нерівність Коші для середніх арифметичних. Залишається помітити, що

$$\Big(\mathbb{E}(\mathcal{E}_1^{-r/n})\Big)^{n-1} \ = \ \left(\int_0^\infty y^{-r/n}e^{-y}\mathrm{d}y\right)^{n-1} \ = \ \Gamma^{n-1}\left(1-\frac{r}{n}\right) \to \ e^{r\gamma}, \quad n \to \infty,$$

де γ є константою Ейлера-Маскероні. □

Лема 197. *Для всіх $n \geq 2$ маємо*

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R(n)}\right) \leq \frac{3}{4n}.$$

Доведення. Якщо $n = 2$, то $\mathbb{P}\{R(2) = k\} = \frac{1}{(k-1)k}$ при $k \geq 2$. Тому

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R(2)}\right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2(k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2 - \frac{\pi^2}{6} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}.$$

При $n \geq 3$ використаємо представлення Вільямса. Застосовуючи (A.64), маємо

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{R(n)}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\mathfrak{R}(n)}\right) \leq \mathbb{E}(U_1 \cdot \ldots \cdot U_{n-1}) = 2^{-(n-1)}$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Оскільки $2^{-(n-1)} \leq \frac{3}{4n}$ при $n \geq 3$, то лема доведена. □

A.10.2. Процес рекордів у процесі Пуассона на площині. У цьому короткому підрозділі ми отримаємо цікаві та несподівані тотожності для рівномірних та експоненційних випадкових величин, які є наслідками нетривіальних властивостей інваріантності процесу рекордів в однорідному процесі Пуассона в додатному квадранті. Ці результати викладені в короткій замітці [103].

Нехай $E_1, E_2, \ldots$ та $U_1, U_2, \ldots$ є незалежними вибірками незалежних стандартних експоненційних та незалежних стандартних рівномірних випадкових величин. Прототипом тотожностей, про які буде йти мова нижче є рівність

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_1}{U_1} + \frac{E_2}{U_1U_2} + \ldots + \frac{E_n}{U_1 \cdots U_n}\right)&(1 - U_1 \cdots U_{n+1}) \\ &\stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1} + \ldots + \frac{E_{n+1}}{U_1 \cdots U_n}\right)(1 - U_1 \cdots U_n), \quad \text{(A.65)}\end{aligned}$$

яка була використана в роботі [88] для пояснення збігу величин виплат при оптимальних стратегіях в двох зовсім різних задачах оптимальної зупинки. У своєму найпростішому вигляді тотожність (A.65) має вигляд

$$\frac{E_1}{U_1}(1 - U_1U_2) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1}\right)(1 - U_1) \tag{A.66}$$

та була отримана в [241]. Зауважимо, що безпосередня перевірка навіть простої тотожності (A.66) вже є нетривіальною задачею. Зокрема, нам не вдалось довести (A.65) підрахуком щільностей або інтегральних перетворень, чи використанням інших відомих тотожностей з «бета-гамма алгебри» [69].

Ми покажемо, що співвідношення (A.65) поряд з більш загальними рівностями матричних функцій від експоненційних та рівномірних величин, випливають з властивостей симетрії множини рекордів (також відомих [26] під назвою Парето-оптимальних точок) процесу Пуассона в додатному квадранті. Це ще раз підтверджує тезис [89] про те, що процес Пуассона на площині є природною структурою для двох перлин комбінаторної ймовірності: теореми Ігнатова [110] та леми про масштабно-інваріанті процеси Пуассона на $\mathbb{R}_+$ [16]. Підкреслимо, що другий з вказаних результатів є потужним засобом вивчення перестановок Юенса.

Ми обчислимо площі прямокутників, породжених сіткою на множині рекордів. Отримані співвідношення, хоча й породжені масивами з однаковими маргінальними розподілами, є за своєю природою багатовимірними. Наприклад, (A.66) отримується сумуванням елементів другого стовпчика матричної рівності

$$\begin{pmatrix} (1-U_1)E_1 & (1-U_1)\frac{E_2}{U_1} \\ \\ U_1(1-U_2)E_1 & (1-U_2)E_2 \end{pmatrix} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \begin{pmatrix} (1-U_2)E_2 & (1-U_1)\frac{E_2}{U_1} \\ \\ U_1(1-U_2)E_1 & (1-U_1)E_1 \end{pmatrix}, \quad \text{(A.67)}$$

яка є тривіальною, якщо на неї дивитись покоординатно.

Випадкове покриття $\mathbb{R}_+^2$, породжене рекордами

Ми використовуватимемо очевидні позначення $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$, $\nwarrow$ для чотирьох покоординатних часткових порядків в додатному квадранті. Наприклад, $a \nearrow b$ та $b \swarrow a$ при $a, b \in \mathbb{R}_+^2$ означають, що b знаходиться на північному сході від a. Нехай $\mathcal{P}$ є однорідним процесом Пуассона з одиничною інтенсивністю в $\mathbb{R}_+^2$. Атом $\mathcal{P}$ в точці (t, x) інтерпретується, як значення x, що спостерігається в момент часу t. Очевидно що, з ймовірністю один жодні два атоми $\mathcal{P}$ не лежать на одній вертикальній або горизонтальній прямій. Атом $r \in \mathcal{P}$ називається нижнім *рекордом*, якщо не існує $a \in \mathcal{P}$ такого, що $a \nearrow r$. Множина рекордів, яку ми позначатимемо $\mathfrak{R}$ є точковим процесом з інтенсивністю e^{-tx}. Множина рекордів утворює нескінченний в дві сторони ланцюжок впорядкованих за

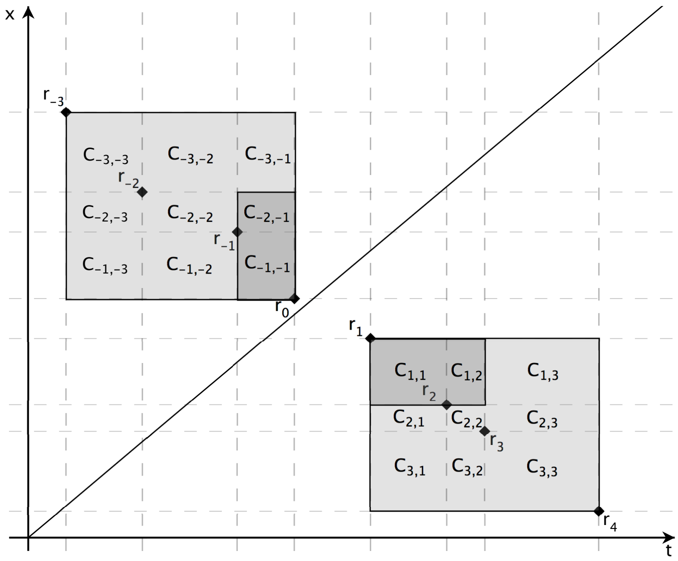


Рис. A.1: Покриття прямокутниками та області з рівними за розподілом площами.

часовою компонентою атомів $\mathfrak{R}$:

$$\ldots \searrow r_{-2} \searrow r_{-1} \searrow r_0 \searrow r_1 \searrow r_2 \searrow \ldots,$$

де нумерація вибрана так, що рекорди r_0 та r_1 розділені бісектрисою $t = x$.

В кожній точці множини $\mathfrak{R}$ проведемо горизонтальну та вертикальну лінії, що дає розбиття (покриття) додатного квадранта прямокутниками. Позначимо C_{ij} площу прямокутника з північно-західною вершиною, яка є перетином горизонтальної лінії через r_i та вертикальної лінії через r_j, див. рисунок A.1. Зокрема, C_{ii} при $i \in \mathbb{Z}$ є площею прямокутника, натягнутого на рекорди r_i, r_{i+1}.

Для заданого рекорду в точці (t, x), наступний рекорд є наступною точкою $\mathcal{P}$ на південний схід від (t, x), а тому її координати будуть $(t + E/x, xU)$, як легко бачити з властивостей однорідності та незалежності $\mathcal{P}$. Таким чином, послідовність $r_1, r_2, \ldots$ є марковським ланцюгом з щойно описаним перехідними ймовірностями, тому

$$(C_{ij}\,;\, i,j = 1,2,\ldots) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \left(U_1 \cdots U_{i-1}(1-U_i)\, \frac{E_j}{U_1 \cdots U_{j-1}}, \quad i,j = 1,2,\ldots \right). \tag{A.68}$$

Зазначимо, що (A.68) не залежить від r_1. Оскільки розподіл $\mathfrak{R}$ є інваріантним по відношенню до симетрії відносно бісектриси, маємо також рівність

$$(C_{i,j}\,;\,i,j=1,2,\ldots)\stackrel{\mathrm{d}}{=}(C_{-j-1,-i-1}\,;\,i,j=1,2,\ldots). \tag{A.69}$$

Для ілюстрації, площі двох прямокутників на рисунку A.1, натягнутих на r_1, r_4 та r_{-3}, r_0 відповідно, мають однакові розподіл.

Для $n \in \mathbb{N}$ та $k \in \mathbb{Z}$ нехай $M_{k,n} = (C_{k+i-1,k+j-1},\ \ i,j=1,\ldots,n)$ є $n \times n$ матрицею, асоційованою з рекордами $r_k, r_{k+1}, \ldots, r_{k+n}$. З вищесказаного очевидно, що $M_{k,n}$ не залежить від r_k та задовольняє $M_{k,n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} M_{1,n}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Для $k \leq 0$, $M_{k,n}$ не є незалежним від r_k, оскільки перехідна ймовірність від $r_k = (t, x)$ до r_{k+1} має враховувати ймовірність того, що над бісектрисою лежать $-k$ рекордів на південний схід від (t, x). Також рівність $M_{k,n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} M_{1,n}$ не виконується при $-n < k \leq 0$: наприклад, $C_{0,0}$ та $C_{1,1}$ мають різні розподіли. Тим не менш, ми покажемо, що $M_{k,n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} M_{1,n}$ виконується при $k \leq -n$, що з огляду на (A.69), еквівалентно властивості $M_{1,n}$, сформульованій у наступному твердженні.

Нехай $M^*_{1,n}$ є матрицею, отриманою відображенням $M_{1,n}$ відносно побічної діагоналі, тобто перестановкою елементів (i, j) та $(n-j+1, n-i+1)$.

Твердження 198. *Для довільного фіксованого $n \in \mathbb{N}$ маємо*

$$M^{\star}_{1,n} \stackrel{\mathrm{d}}{=} M_{1,n}. \tag{A.70}$$

Рівність (A.67) є окремим випадком ($n = 2$) рівності (A.70). Тотожність (A.65) виникає після сумування всіх елементів $M_{1,n+1}$ за винятком елементів $(n+1)$-го рядка. Подальші тотожність можна отримувати, застосовуючи різноманітні функції до рівності (A.70). Наприклад, взявши добуток елементів у першому рядку $M_{1,n}$, матимемо:

$$\frac{E_1 \cdots E_n (1-U_1)^n}{U_1^{n-1} U_2^{n-2} \cdots U_{n-1}} \stackrel{\mathrm{d}}{=} \frac{E_n^n (1-U_1) \cdots (1-U_n)}{U_1 U_2^2 \cdots U_{n-1}^{n-1}}.$$

Рекорди в прямокутнику

Для доведення (A.70) розглянемо процес рекордів у скінченному прямокутнику. Нехай $A \subset \mathbb{R}^2_+$ є скінченним відкритим прямокутником з паралельними осям координат сторонами. Атом $a \in \mathcal{P} \cap A$ назвемо A-рекордом, якщо не існує $b \in \mathcal{P} \cap A$ такого, що $b \nearrow a$. Множина A-рекордів породжує розбиття A на прямокутники. Позначимо $N = (N_{i,j})$ випадкову матрицю їх площ. Число рядків та стовпчиків N є випадковим і є на одиницю більшим, ніж число A-рекордів. Нехай $N^\star = (N^*_{i,j})$ є матрицею, отриманою з N відображенням відносно побічної діагоналі, що визначається умовно при фіксації числа A-рекордів.

Лема 199. *Для довільного прямокутника A маємо*

(i) $N \stackrel{\mathrm{d}}{=} N^\star$*;*

(ii) *також $N \stackrel{\mathrm{d}}{=} N^\star$ умовно на події $\{$число A-рекордів $= n\}$ для довільного $n \geq 0$;*

(iii) *розподіл N залежить лише від площі A і не залежить від форми A.*

Доведення. Застосуванням гіперболічного зсуву $(t, x) \mapsto (\lambda t, x/\lambda)$ з деяким $\lambda > 0$, прямокутник A можна відобразити на квадрат. Це перетворення зберігає площу та покоординатний порядок, а тому зберігає розподіл N. Якщо A є квадратом, то (i) та (ii) випливають з симетрії процесу A-рекордів по відношенню до симетрії квадрату відносно північно-східної діагоналі, див. рисунок А.2. □

Лема 200. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ такі умовні розподіли рівні:*

(а) розподіл $M_{k,n}$ при заданій площі прямокутника v, натягнутого на рекорди r_k та r_{n+k}, де $k \geq 1$ або $k \leq -n-1$;

(б) розподіл N для прямокутника A з площею v за умови, що число A-рекордів дорівнює $n-1$.

Доведення. Для довільного прямокутника A множина A-рекордів не залежить від пуассонівського процесу поза A. З іншого боку, за умови, що північно-західна та південно-східна вершини A є рекордами, $\mathcal{P}$ не має точок на південному-заході від цих вершин, а тому множина A-рекордів збігається з

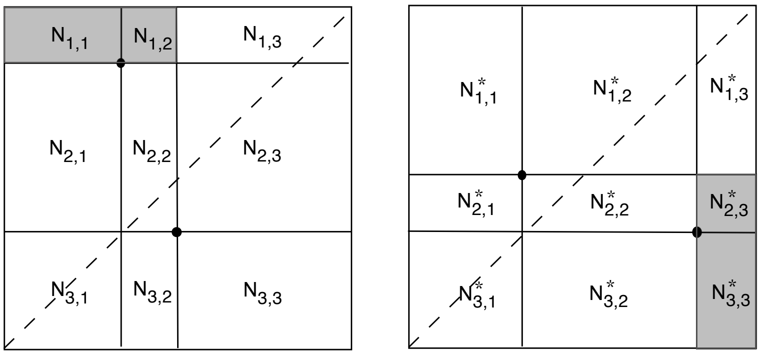


Рис. A.2: Рекорди в квадраті

$\mathfrak{R} \cap A$. Іншими словами, за умови, що два рекорди розташовані у вершинах A, рекорди $\mathcal{P}$ в A розподілені, як A-рекорди. Аналогічно, взявши $k = 1$, за умови, що r_1 та r_{n+1} є вершинами прямокутника A, маємо, що множина $\{r_2, \ldots, r_n\}$ має той самий розподіл, як і множина A-рекордів за умови, що їх $n - 1$. Твердження випливає тепер з леми 199(iii). $\square$

Доведення 198 тепер елементарне. Поєднавши лему 200 та лему 199(ii), бачимо, що рівність розподілів (A.70) виконується умовно при фіксації площі прямокутника, натягнутого на рекорди r_1 та r_{n+1}, а, отже, й безумовно. Зазначимо, що ця площа дорівнює сумі всіх елементів матриці і розподілена, як

$$(1 - U_1 \cdots U_n) \left(E_1 + \frac{E_2}{U_1} + \frac{E_3}{U_1 U_2} + \cdots + \frac{E_n}{U_1 \cdots U_{n-1}} \right).$$

На завершення скажемо, що можна отримати аналогічні рівності, що включають в себе бета-розподіл замість рівномірного розподілу. Для цього замість процесу рекордів потрібно розглядати так звані процеси k-кутів [89].

A.11. Нерівності Дуба та Пейкса для мартингалів

Для довільної послідовності випадкових величин $(X_n)_{n\geq 0}$ покладемо

$$X_n^* := \sup_{0\leq k\leq n} X_k, \qquad X^* := \sup_{k\geq 0} X_n.$$

Класична *максимальна нерівність Дуба* стверджує, якщо $(X_n)_{n\geq 0}$ є невід'ємним субмартингалом відносно природної фільтрації, то для довільних $C>0$ та $p\geq 1$

$$\mathbb{P}\{X_n^* \geq C\} \leq \frac{\mathbb{E}X_n^p \mathbb{1}_{\{X_n^*\geq C\}}}{C^p}. \tag{A.71}$$

З цієї нерівності випливає L_p*-нерівність Дуба*: якщо $(X_n)_{n\geq 0}$ є обмеженим в L_p субмартингалом для деякого $p>1$, то

$$\|X_n^*\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|X_n\|_p. \tag{A.72}$$

При $p=1$ має місце нерівність

$$\|X_n^*\|_1 \leq \frac{e}{e-1}\left(1+\|X_n \ln^+ X_n\|_1\right).$$

У припущенні, що (X_n) є невід'ємним субмартингалом з $X_0 = a > 0$, $|\mathbb{E}X_n \ln X_n| < \infty$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \ln X_n = \infty$, в роботі Пейкса [215] доведено, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathbb{E}X_n^*}{\mathbb{E}X_n \ln X_n} \leq 1.$$

Наведене нижче твердження є невеликим узагальненням цього факту для випадку невід'ємних мартингалів. Його доведення є дуже простим і є одним з результатів роботи [134].

Твердження 201. *Нехай $(X_n)_{n\geq 0}$ є невід'ємним мартингалом з $X_0 = a > 0$, $\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n < \infty$ та $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n \ln^+ X_n = \infty$, тоді*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathbb{E}X_n^*}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n} \leq 1. \tag{A.73}$$

Доведення. Ми використаємо просту нерівність, яка одразу випливає з нерівності $\ln x \leq x-1$, $x>0$: для довільних $u,v>0$ та $x_0>e$ маємо

$$v\ln^+ u \leq v\ln^+ v + ux_0^{-1} + v(\ln x_0 - 1). \tag{A.74}$$

Інтегруючи максимальну нерівність Дуба

$$\mathbb{P}\{X_n^* > c\} \le \frac{\mathbb{E}X_n \mathbb{1}_{\{X_n^* > c\}}}{c}, \quad c > 0,$$

по проміжку $[a, \infty)$, застосовуючи (A.74) з $u = X_n^*$ та $v = X_n$ та взявши математичні сподівання, отримуємо для довільного $x_0 > e$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_n^* - a &\le \mathbb{E}X_n \int_a^{X_n^*} c^{-1}\mathrm{d}c = \mathbb{E}X_n \ln^+ \left(\frac{X_n^*}{a}\right) \\ &\le \mathbb{E}X_n \ln^+ X_n + \frac{\mathbb{E}X_n^*}{ax_0} + \mathbb{E}X_n(\ln x_0 - 1), \end{aligned}$$

звідки

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}X_n^*}{\mathbb{E}X_n \ln^+ X_n} \le \frac{ax_0}{ax_0 - 1},$$

якщо $x_0 > a^{-1}$. Спрямовуючи $x_0 \to \infty$, отримуємо (A.73). $\square$

Додаток В

В.1. Простори Скорохода та топології на них

Вичерпну інформацію про простори Скорохода та типи збіжності у них можна знайти, наприклад, в книгах [39] та [268]. Оскільки в нашій роботі розглядаються збіжності у різних топологіях на просторах Скорохода, а також процеси з різними областями зміни аргументів, нижче стисло описано конструкції потрібних топологій.

В.1.1. Збіжність у просторі $D[a, b]$. Нехай $-\infty < a < b < \infty$. Простір $D[a, b]$ складається з дійснозначних, неперервних справа функцій, визначених на $[a, b]$, які мають скінченні границі зліва в кожній точці $(a, b]$. Дві стандартні топології на просторі $D[a, b]$ були введені в роботі Скорохода [254]. Класична J_1-топологія породжується метрикою

$$d^{a,b}(f, g) \ := \inf_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} \max \Big\{ \sup_{t \in [a,b]} |f(\lambda(t)) - g(t)|, \sup_{t \in [a,b]} |\lambda(t) - t| \Big\},$$

або, еквівалентною їй, метрикою

$$d_0^{a,b}(f, g) \ := \inf_{\lambda \in \Lambda_{a,b}} \max \Big\{ \sup_{t \in [a,b]} |f(\lambda(t)) - g(t)|, \sup_{t \neq s} \left| \ln \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \Big\},$$

де $\Lambda_{a,b}$ є множиною строго зростаючих, неперервних відображень сегмента $[a, b]$ на себе з $\lambda(a) = a$ та $\lambda(b) = b$. Збіжність послідовності функцій f_n до функції f в J_1-топології означає, що кожна з функцій f_n може мати єдиний стрибок в околі стрибка граничної функції, а позиції та величини стрибків f_n повинні збігатись до позиції та величини відповідного стрибка f. Нагадаємо, що для локально рівномірної збіжності f_n до f, позиції стрибків f_n повинні бути рівними (а не збігатись) з позиціями стрибків f.

Наведене означення J_1-топології Скорохода моментально переноситься на простори $D([a,b],\mathbb{R}^k)$ при $k \in \mathbb{N}$ та, зокрема, на простір комплекснозначних функцій $D([a,b],\mathbb{C})$, який використовується у підрозділі 6.4.

Збіжність у M_1-топології слабша за збіжність у J_1-топології і може бути означена як збіжність замкнених графіків f_n до замкненого графіка f в сенсі метрики Гаусдорфа на множині компактних підмножин $\mathbb{R} \times [a,b]$. Замкненим графіком функції $f \in D[a,b]$ називається компактна множина

$$\Gamma_f := \{(z,t) \in \mathbb{R} \times [a,b] : z = \alpha f(t-) + (1-\alpha) f(t) \text{ для деякого } \alpha \in [0,1]\},$$

яка складається з точок графіка функції f та вертикальних відрізків, що сполучають точки $(t, f(t))$ та $(t, f(t-))$, якщо t є точкою розриву f. M_1-топологія зазвичай використовується у ситуаціях, коли стрибки граничної функції виникають внаслідок накопичення стрибків допграничних функцій або в ситуаціях, коли має місце збіжність неперервних функцій до розривної. Стандартним прикладом є такий, нехай $f_n(t) := \mathbb{1}_{[1-1/n,\, 1+1/n)}(t) + 2 \cdot \mathbb{1}_{[1+1/n,\, 2]}(t)$ та $f(t) := 2 \cdot \mathbb{1}_{[1,\, 2]}(t)$, тоді f_n збігається до f в M_1-топології, але не в J_1-топології на $D[0,2]$: стрибок величини 2 в точці 1 граничної функції виникає внаслідок суперпозиції двох стрибків величини 1 допграничних функцій.

Схожа ситуація виникає у функціональній граничній теоремі для процесу $(\nu(u))_{u \geq 0}$ – моменту першого потрапляння в (t,∞) – у випадку збіжності до стійкого процесу Леві (режим (R3) в формулі (2.76)). Процес $(\nu(u))_{u \geq 0}$ має стрибки величини 1, тому для кожного фіксованого t процес $((\nu(ut) - \mu^{-1}ut)/c(t))_{u \geq 0}$ має стрибки величини $1/c(t)$, і ці величини прямують до нуля зі збільшенням t, в той же час граничний стійкий процес є майже напевно розривним. Це виключає можливість збіжності у J_1-топології і пояснює, чому в режимі (R3) ми використовуємо саме M_1-топологію.

B.1.2. J_1-топологія у просторі $D[0,\infty)$. Конструкція, наведена нижче, належить Ліндвалу, див. [181]. Нехай D_0 є підмножиною простору $D[0,\infty)$, що складається з функцій $f \in D[0,\infty)$, які мають скінченну границю $f(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} f(t)$. Для $T > 0$ нехай $d_0^{0,T}$ є звичайною J_1-метрикою Скорохода на

$D[0,T]$:

$$d_0^{0,T}(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda_{0,T}} \max\Big\{ \sup_{t\in[0,T]} |x(\lambda(t)) - y(t)|, \sup_{s\neq t} \Big| \ln \frac{\lambda(t)-\lambda(s)}{t-s} \Big| \Big\}.$$

Для $f, g \in D_0$, покладемо

$$d_0(f,g) := d_0^{0,1}(\overline{\phi}(f), \overline{\phi}(g)),$$

де

$$\phi(t) := -\ln t, \ \ t\in(0,1), \ \ \phi(0) = +\infty$$

та

$$\overline{\phi} : D_0 \to D[0,1], \ \ \overline{\phi}(x)(\cdot) := x(\phi(\cdot)), \ \ x\in D_0.$$

Простір (D_0, d_0) є повним сепарабельним метричним простором. В розділі 4 роботи [181] на основі метрики d_0 побудовано метрику $d^{[0,\infty)}$ (її явний вигляд для нас неважливий) на $D[0,\infty)$ таку, що $(D[0,\infty), d^{[0,\infty)})$ є повним сепарабельним метричним простором. Ми використовуємо таку характеризацію збіжності в цій метриці (теорема 1(b) в [181]).

Твердження 202. *Нехай $f_n, f \in D[0,\infty)$, $n\in\mathbb{N}$. Такі твердження еквівалентні:*

(i) $f_n \to f$ в просторі $(D[0,\infty), d^{[0,\infty)})$ при $n\to\infty$;

(ii) існують

$$\lambda_n \in \Lambda_{0,\infty} := \{\lambda : \lambda \text{ є неперервною, строго зростаючою функцією на } [0,\infty) \text{ з } \lambda(0)=0, \lambda(+\infty)=+\infty\}$$

такі, що для довільного $T>0$

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{ \sup_{u\in[0,T]} |f_n(\lambda_n(u)) - f(u)|, \sup_{u\in[0,T]} |\lambda_n(u) - u| \Big\} = 0;$$

(iii) для довільної точки $T>0$, такої, що f неперервна в T, має місце $f_n|_{[0,T]} \to f|_{[0,T]}$ в $(D[0,T], d^{0,T})$ при $n\to\infty$, де $g|_{[0,T]}$ позначає звуження g на $[a,b]$.

Збіжність в просторі $(D[0,\infty), d^{[0,\infty)})$ ми називаємо збіжністю у просторі $D[0,\infty)$ з J_1-топологією.

B.1.3. J_1-топологія у просторі $D(\mathbb{R})$. Аналогічно до того, як це зроблено у випадку[1] $D[0,\infty)$, можна побудувати метрику $d^{\mathbb{R}}$ на $D(\mathbb{R})$ таку, що $(D(\mathbb{R}), d^{\mathbb{R}})$ є повним сепарабельним метричним простором та отримати характеризацію збіжності в ньому, аналогічну до твердження 202.

Твердження 203. *Нехай $f_n, f \in D(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. Такі твердження еквівалентні:*

(i) *$f_n \to f$ в просторі $(D(\mathbb{R}), d^{\mathbb{R}})$ при $n \to \infty$;*

(ii) *існують*

$$\lambda_n \in \Lambda_{\mathbb{R}} := \{\lambda : \lambda \text{ є неперервною, строго зростаючою функцією на } \mathbb{R} \text{ з } \lambda(\pm\infty) = \pm\infty\}$$

такі, що для довільних $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \max\left\{ \sup_{u\in[a,\,b]} |f_n(\lambda_n(u)) - f(u)|,\ \sup_{u\in[a,\,b]} |\lambda_n(u) - u| \right\} = 0;$$

(iii) *для довільних $-\infty < a < b < \infty$, таких, що f неперервна в a та b, має місце $f_n|_{[a,\,b]} \to f|_{[a,\,b]}$ в $(D[a,b], d^{a,b})$ при $n \to \infty$.*

Збіжність в просторі $(D(\mathbb{R}), d^{\mathbb{R}})$ ми називаємо збіжність у просторі $D(\mathbb{R})$ з J_1-топологією.

B.2. Марковані точкові процеси

У цьому підрозділі ми розглянемо поняття маркованого точкового процесу та відповідних канонічних просторів. Розділ базується на двох книгах [192] та [253], в яких відповідна теорія досить повно висвітлена.

Нехай (K, ρ_K) – повний сепарабельний метричний простір та нехай $(\mathbb{R} \times K, \rho)$ – декартів добуток $\mathbb{R}$ та K з продакт-топологією:

$$\rho((x_1,k_1),(x_2,k_2)) = |x_1 - x_2| + \rho_K(k_1,k_2), \quad x_1,x_2 \in \mathbb{R}, \quad k_1,k_2 \in K.$$

[1] В якості підмножини D_0 слід взяти множину функцій, що мають обидві границі $f(\pm\infty) := \lim_{t\to\pm\infty} f(t)$, а замість функції ϕ можна взяти функцію $\psi(t) := \ln(t/(1-t))$.

Нехай M_K є множиною цілозначних мір на $(\mathbb{R} \times K, \mathcal{B}(\mathbb{R} \times K))$ таких, що $m(\mathbb{R} \times K) = \infty$ та для довільної обмеженої множини $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$m(A \times K) < \infty,$$

де $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ позначає борелівську сигма-алгебру метричного простору $\mathbb{X}$. Довільний елемент $m \in M_K$ може бути представлений у вигляді зліченної суми мір Дірака на $\mathbb{R} \times K$:

$$m = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{(t_n, k_n)}, \tag{B.1}$$

де перші координати можна впорядкувати у неспадному порядку:

$$\cdots \leq t_{-2} \leq t_{-1} < 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq t_2 \cdots . \tag{B.2}$$

Елементи множини M_K називаються *маркованими точковими процесами* (в подальшому «мтп»). Мтп m називається простим, якщо відповідна послідовність $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ є строго зростаючою. У цьому випадку представлення (B.1) за умови (B.2) єдине. Послідовність $(t_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ інтерпретується як моменти прибуття, а послідовність (k_n) як мітки. Таким чином k_n є міткою, принесеною прибуттям в момент часу t_n. Простір K називається *простором міток*.

Відомо, див. розділ 1.15 в [192], що на множині M_K можна задати структуру повного сепарабельного метричного простору. Більш точно, на множині M_K існує метрика ρ_{M_K} така, що:

- (M_K, ρ_{M_K}) є повним сепарабельним метричним простором;
- $\rho_{M_K}(m_n, m) \to 0$ при $n \to \infty$ тоді і тільки тоді, коли
  $$\int f(x) m_n(\mathrm{dx}) \to \int f(x) m(\mathrm{dx}), \quad n \to \infty$$
  для довільної неперервної функції $f : \mathbb{R} \times K \to \mathbb{R}_+$ з компактним носієм.

Наступне твердження є іншою характеризацією збіжності у просторі (M_K, ρ_{M_K}) (див. теорему D.1 та наслідок D.2 в додатку D в [253]).

Твердження 204. *Послідовність* $m_n := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{(t_j^{(n)}, k_j^{(n)})}$, $n \in \mathbb{N}$, *простих мтп зі зростаючою нумерацією моментів прибуття:*

$$\cdots < t_{-2}^{(n)} < t_{-1}^{(n)} < 0 \leq t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots , \quad n \in \mathbb{N},$$

збігається в (M_K, ρ_{M_K}) *до простого мтп* $m := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta_{(t_j,k_j)}$, *що задовольняє* (B.2), *тоді і тільки тоді, коли*

$$((t_{-q}^{(n)}, k_{-q}^{(n)}), \dots, (t_p^{(n)}, k_p^{(n)})) \to ((t_{-q}, k_{-q}), \dots, (t_p, k_p)), \quad n \to \infty,$$

для довільних $p, q \in \mathbb{N}$.

B.3. Сильна апроксимація випадкових блукань

Наведена нижче лема використовувалась в доведенні теореми 51 в розділі 2. Нагадаємо, що стаціонарний процес відновлення $(\nu^*(u))_{u\geq 0}$ визначається рівністю

$$\nu(t) := \inf\{k \in \mathbb{N} : S_k^* > t\}, \quad t \geq 0,$$

де $(S_k^*)_{k\geq 0}$ є випадковим блуканням з затримкою S_0^*, див. підрозділ 2.1.

Лема 205. *Припустимо, що* $\mathbb{E}\xi^r < \infty$ *для деякого* $r > 2$. *Тоді існує броунівський рух* $\mathcal{S}_2$ *такий, що для деякого м.н. скінченного* $t_0 > 0$ *та невипадкової константи* $A > 0$,

$$|\nu^*(t) - \mu^{-1}t - \sigma\mu^{-3/2}\mathcal{S}_2(t)| \leq At^{1/r}$$

для всіх $t \geq t_0$, *де* $\sigma^2 = \mathbb{D}\xi$ *та* $\mu = \mathbb{E}\xi$.

Доведення. Згідно з формулою (3.13) в [54], існує броунівський рух $\mathcal{S}_2$ такий, що

$$\sup_{0\leq u\leq t} |S_{[u]} - \mu u - \sigma\mathcal{S}_2(u)| = O(t^{1/r}) \quad \text{м.н.}$$

З цього випливає

$$\sup_{0\leq u\leq t} |S_{[u]}^* - \mu u - \sigma\mathcal{S}_2(u)| = O(t^{1/r}) \quad \text{м.н.},$$

а тому

$$\sup_{0\leq u\leq t} |\nu^*(u) - \mu^{-1}u - \sigma\mu^{-3/2}\mathcal{S}_2(u)| = O(t^{1/r}) \quad \text{м.н.}$$

за теоремою 3.1 в [54]. Це доводить лему з, можливо, випадковим A. Як зазначено в зауваженні 3.1 згаданої роботи, закон нуля і одиниці Блюменталя гарантує, що константа A може бути обрана невипадковою. $\square$

B.4. Мінімальні L_p-метрики

У наведеному нижче твердженні підсумовуються властивості d_p при $p > 0$. Більшість з них є добре відомими, див. наприклад [6, 85, 153, 222, 275].

Твердження 206. *Нехай $p > 0$ та X, Y є випадковими величинами такими, що $F, G \in \mathcal{D}^p$, тобто мають скінченні абсолютні моменти порядку $p > 0$. Функція $d_p(\cdot, \cdot)$ має такі властивості:*

(Dist) *$d_p(X, Y)$ залежить лише від маргінальних розподілів X та Y.*

(Inf) *Точна нижня грань у співвідношенні* (4.10) *досягається на деякому (F, G)-каплінгу.*

(Rep) *При $p \in (0, 1]$ має місце представлення Канторовича-Рубінштейна*[2]

$$d_p(X, Y) = \sup_{f \in \mathcal{F}_p} |\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(Y)|,$$

де $\mathcal{F}_p$ є множиною гельдерових функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з константою один, тобто $|f(x) - f(y)| \le |x - y|^p$ для всіх $x, y \in \mathbb{R}$.

(Reg) *$d_p(X + Z, Y + Z) \le d_p(X, Y)$ для довільної в.в. $Z \in \mathcal{D}^p$, що не залежить від (X, Y).*

(Lin) *$d_p(aX + b, aY + b) = |a|^{p \wedge 1} d_p(X, Y)$ для всіх $a, b \in \mathbb{R}$.*

(Conv) *Якщо $(X_n)_{n \ge 1}$ є послідовністю випадкових величин з розподілами в $\mathcal{D}^p$, то збіжність $d_p(X_n, X) \to 0$ при $n \to \infty$ еквівалентна збіжностям $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ та $\mathbb{E}|X_n|^p \to \mathbb{E}|X|^p$ при $n \to \infty$.*

Доведення. Перша властивість (Dist) очевидна з означення. Властивість (Inf) у випадку $p \ge 1$ є твердженням 1 в [85]. У випадку $p < 1$ (Inf) випливає з цього ж твердження, застосованого до простору $(S, d) = (\mathbb{R}, \rho_p)$, де $\rho_p(x, y) := |x - y|^p$ є метрикою на $\mathbb{R}$. Класичне ($p = 1$) представлення Канторовича-Рубінштейна (Rep) є добре відомим, див. наприклад формулу

[2]Такого представлення немає при $p > 1$, див. лему 4.3.2 в [222].

(5.3.16) в [222], при $p < 1$ воно випливає з класичного представлення у просторі $(\mathbb{R}, \rho_p)$. Для доведення (Reg) візьмемо (F, G)-каплінг (X', Y'), на якому досягається інфімум в $d_p(X, Y)$ та який не залежить від Z. Тоді $X + Z \overset{\mathrm{d}}{=} X' + Z$, $Y + Z \overset{\mathrm{d}}{=} Y' + Z$ і з визначення випливає, що

$$d_p(X + Z, Y + Z) \leq \left(\mathbb{E}|X' + Z - (Y' + Z)|^p\right)^{1 \wedge 1/p} \\ = \left(\mathbb{E}|X' - Y'|^p\right)^{1 \wedge 1/p} = d_p(X, Y).$$

Умова (Lin) випливає з означення. Властивість (Conv) при $p \geq 1$ сформульована і доведена в лемі 8.3 роботи [38]. У випадку $p < 1$ твердження одразу випливає з вже використаного прийому: метрику d_p можна розглядати, як метрику d_1 на просторі розподілів на $(\mathbb{R}, \rho_p)$. $\square$

Додаток C

Деякі допоміжні обчислення та доведення

Лема 44. *Нехай $(Z_{k,t})_{k\in\mathbb{N},\,t>0}$ є родиною випадкових величин, заданих на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbb{P})$ та нехай $\mathcal{G}$ є під-σ-алгеброю $\mathfrak{S}$. Припустимо, що при фіксованій $\mathcal{G}$ для кожного фіксованого $t > 0$, випадкові величини $Z_{k,t}$, $k \in \mathbb{N}$, незалежні. Якщо*

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z^2_{k+1,t}] \ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\ D, \quad t \to \infty \tag{C.1}$$

для деякої в.в. D та

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z^2_{k+1,t} \mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>y\}}] \ \stackrel{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \quad t \to \infty \tag{C.2}$$

для всіх $y > 0$, то для кожного $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] \ \stackrel{\mathrm{d}}{\to}\ \exp(-Dz^2/2), \quad t \to \infty, \tag{C.3}$$

$$\mathbb{E}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] \to \mathbb{E}\bigg[\exp\big(-Dz^2/2\big)\bigg], \quad t \to \infty \tag{C.4}$$

та

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}\bigg)\bigg] - \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\bigg[\exp\bigg(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0} \widehat{Z}_{k+1,t}\bigg)\bigg] \ \stackrel{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \ \ t \to \infty, \tag{C.5}$$

де, при фіксованій $\mathcal{G}$, $\widehat{Z}_{1,t}, \widehat{Z}_{2,t}, \ldots$ є умовно незалежними нормальними в.в. з середнім 0 та дисперсією $\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z^2_{k+1,t}]$, тобто

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[\exp(\mathrm{i}z\widehat{Z}_{k+1,t})] = \exp(-\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z^2_{k+1,t}]z^2/2), \ k \in \mathbb{N}_0.$$

Доведення леми 44. Доведення базується на ідеях доведення теореми 4.12 в [157], де вивчається слабка збіжність в схемах серій. Для кожного $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2] \leq \varepsilon^2 + \sup_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2\mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>\varepsilon\}}] \leq \varepsilon^2 + \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2\mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>\varepsilon\}}].$$

Використовуючи (C.2) та спрямовуючи $t \to \infty$, а потім $\varepsilon \downarrow 0$, отримуємо

$$\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2] \overset{\mathbb{P}}{\to} 0. \tag{C.6}$$

З огляду на (C.1), маємо

$$\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0}\widehat{Z}_{k+1,t}\right)\right] = \exp\left(-\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2]z^2/2\right) \overset{\mathrm{d}}{\to} \exp(-Dz^2/2) \tag{C.7}$$

для кожного $z \in \mathbb{R}$. Покажемо, що граничний розподіл $\sum_{k\geq 0} Z_{k+1,t}$ такий же як граничний розподіл $\sum_{k\geq 0}\widehat{Z}_{k+1,t}$ при $t \to \infty$. З цією метою, для $z \in \mathbb{R}$ запишемо

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0}Z_{k+1,t}\right)\right] - \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\left[\exp\left(\mathrm{i}z\sum_{k\geq 0}\widehat{Z}_{k+1,t}\right)\right]\right| \\
&\quad = \left|\prod_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}zZ_{k+1,t}\big)\big] - \prod_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}z\widehat{Z}_{k+1,t}\big)\big]\right| \\
&\quad \leq \sum_{k\geq 0}\left|\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}zZ_{k+1,t}\big)\big] - \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}z\widehat{Z}_{k+1,t}\big)\big]\right| \\
&\quad \leq \sum_{k\geq 0}\left|\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}zZ_{k+1,t}\big)\big] - 1 + \frac{z^2}{2}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[Z_{k+1,t}^2\big]\right| \\
&\quad + \sum_{k\geq 0}\left|\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\exp\big(\mathrm{i}z\widehat{Z}_{k+1,t}\big)\big] - 1 + \frac{z^2}{2}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\widehat{Z}_{k+1,t}^2\big]\right| \\
&\quad \leq z^2\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[Z_{k+1,t}^2\big(1\wedge 6^{-1}|zZ_{k+1,t}|\big)\big] + z^2\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\widehat{Z}_{k+1,t}^2\big(1\wedge 6^{-1}|z\widehat{Z}_{k+1,t}|\big)\big],
\end{aligned}$$

де для отримання останнього рядка ми скористались $|\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[\cdot]| \leq \mathbb{E}_{\mathcal{G}}[|\cdot|]$ та нерівністю

$$|e^{\mathrm{i}z} - 1 - \mathrm{i}z + z^2/2| \leq z^2 \wedge 6^{-1}|z|^3, \quad z \in \mathbb{R},$$

яка може бути знайдена, наприклад, в лемі 4.14 книги [157]. Для довільного $\varepsilon \in (0,1)$ та $z \neq 0$

$$\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[Z_{k+1,t}^2\big(1\wedge 6^{-1}|zZ_{k+1,t}|\big)\big] \leq \varepsilon\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}[Z_{k+1,t}^2] + \sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[Z_{k+1,t}^2\mathbb{1}_{\{|Z_{k+1,t}|>6\varepsilon/|z|\}}\big].$$

Згадуючи (C.2) та спрямовуючи $t \to \infty$, а потім $\varepsilon \downarrow 0$, отримаємо

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[Z_{k+1,t}^2\big(1 \wedge 6^{-1}|zZ_{k+1,t}|\big)\big] \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0, \quad t \to \infty.$$

Далі,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\widehat{Z}_{k+1,t}^2\big(1 \wedge 6^{-1}|z\widehat{Z}_{k+1,t}|\big)\big] \ &\leq\ \frac{|z|}{6}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[|\widehat{Z}_{k+1,t}|^3\big] \\ = \frac{\sqrt{2}|z|}{3\sqrt{\pi}}\sum_{k\geq 0}(\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2])^{3/2} \ &\leq\ \frac{\sqrt{2}|z|}{3\sqrt{\pi}}\Big(\sup_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2]\Big)^{1/2}\sum_{k\geq 0}\mathbb{E}_{\mathcal{G}}[Z_{k+1,t}^2].\end{aligned}$$

Співвідношення (C.1) та (C.6) дають

$$\sum_{k\geq 0} \mathbb{E}_{\mathcal{G}}\big[\widehat{Z}_{k+1,t}^2\big(1 \wedge 6^{-1}|z\widehat{Z}_{k+1,t}|\big)\big] \ \overset{\mathbb{P}}{\to}\ 0.$$

Отже, ми довели (C.5), що в поєднанні з (C.7) дає (C.3). Формула (C.4) випливає з (C.3) та рівномірної інтегровності. Доведення леми 44 завершено. □

Лема 45. *Припустимо, що умова* (2.70) *виконується для деякого* $\alpha \in (0,1)$ *та* $f(u,w) = \mathrm{Cov}[X(u)X(w)]$ *рівномірно правильно змінюється в смугах в* $\mathbb{R}_+^2$ *або фіктивно правильно змінюється в* $\mathbb{R}_+^2$ *з індексом* $\beta \geq -\alpha$ *та граничною функцією* C*. Якщо*

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}\int_{(\rho z, z]} v(t(z-y))\,\mathrm{d}U(ty) \ =\ 0 \tag{C.8}$$

для всіх $z > 0$*, то*

$$\begin{aligned}&\lambda_1\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}}\int_{[0,u_m]}\sum_{j=1}^m \gamma_j h((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_j]}(y)\,\mathrm{d}\nu(ty) \\ &+\lambda_2\frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)}\int_{[0,u_m]}\Bigg(\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 v((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_j]}(y) \\ &\qquad\qquad + 2\sum_{1\leq i<j\leq m}\gamma_i\gamma_j f((u_i-y)t,(u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,u_i]}(y)\Bigg)\mathrm{d}\nu(ty) \\ &\overset{\mathrm{d}}{\to}\ \lambda_1 b^{-1/2}\sum_{j=1}^m\gamma_j\int_{[0,u_j]}(u_j-y)^{(\beta-\alpha)/2}\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\end{aligned} \tag{C.9}$$

$$+ \lambda_2\bigg(\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 \int_{[0,u_j]} (u_j-y)^\beta \, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)$$
$$+ 2\sum_{1\le i<j\le m} \gamma_i\gamma_j \int_{[0,u_i]} C(u_i-y,u_j-y)\, \mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\bigg)$$

для довільного $m \in \mathbb{N}$, *довільних* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, *довільних* $0 < u_1 < \cdots < u_m < \infty$ *та довільних* λ_1 *і* λ_2 *за додаткового припущення, що у випадку* $\lambda_1 > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{v(t)\mathbb{P}\{\xi > t\}}{h^2(t)} = b \in (0,\infty) \tag{C.10}$$

та

$$\lim_{\rho\uparrow 1} \varlimsup_{t\to\infty} \sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}} \int_{(\rho z, z]} h((z-y)t)\, \mathrm{d}U(ty) \;=\; 0 \tag{C.11}$$

для всіх $z > 0$.

Доведення леми 45. Ми доведемо теорему в припущеннях $\lambda_2 \neq 0$ та $C(u,w) > 0$ для деяких $u \neq w$. Зафіксуємо $\rho \in (0,1)$ таке, що $\rho u_m > u_{m-1}$ ($u_0 := 0$). Оскільки v правильно змінюється на нескінченності з індексом β, маємо

$$\lim_{t\to\infty} v((u-y)t)/v(t) = (u-y)^\beta,$$
$$\lim_{t\to\infty} h((u-y)t)/\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi>t\}} = b^{-1/2}(u-y)^{(\beta-\alpha)/2}$$

для кожного $y \in [0,u)$, використавши (C.10) у другій формулі. Збіжність в обох цих співвідношеннях є рівномірною по $y \in [0,\rho u]$ згідно з лемою 159(a). Оскільки $f(u,w)$ рівномірно правильно змінюється в смугах в $\mathbb{R}_+^2$, маємо при $r < l$ рівномірну по $y \in [0, \rho u_r]$ збіжність $\lim_{t\to\infty} f((u_r-y)t, (u_l-y)t)/v(t) = C(u_r-y, u_l-y)$. Отже,

$$\lim_{t\to\infty}\bigg(\lambda_1 \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j h((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y)}{\sqrt{v(t)\mathbb{P}\{\xi>t\}}} + \lambda_2 \frac{\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 v((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y)}{v(t)}$$
$$+ 2\lambda_2 \frac{\sum_{1\le r<l\le m} \gamma_r\gamma_l f((u_r-y)t,(u_l-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_r]}(y)}{v(t)}\bigg)$$
$$= \lambda_1 b^{-1/2} \sum_{j=1}^m \gamma_j (u_j-y)^{(\beta-\alpha)/2} \mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y)$$
$$+ \lambda_2\bigg(\sum_{j=1}^m \gamma_j^2 (u_j-y)^\beta \mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y) + 2\sum_{1\le r<l\le m} \gamma_r\gamma_l C(u_r-y,u_l-y)\mathbb{1}_{[0,\rho u_r]}(y)\bigg)$$

рівномірно по $y \in [0,\rho u_m]$. Випадкова функція $W_\alpha^{\leftarrow}$ є майже напевно неперервною. Таким чином, з огляду на (2.75)

$$\lambda_1\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\int_{[0,\rho u_m]}\sum_{j=1}^m \gamma_j h((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y)\,\mathrm{d}\nu(ty)$$
$$+\lambda_2\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}\int_{[0,\rho u_m]}\Bigg(\sum_{j=1}^m\gamma_j^2 v((u_j-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_j]}(y)$$
$$+2\sum_{1\le r<l\le m}\gamma_r\gamma_l f((u_r-y)t,(u_l-y)t)\mathbb{1}_{[0,\rho u_r]}(y)\Bigg)\,\mathrm{d}\nu(ty)$$
$$\overset{\mathrm{d}}{\to}\lambda_1 b^{-1/2}\sum_{j=1}^m\gamma_j\int_{[0,\rho u_j]}(u_j-y)^{(\beta-\alpha)/2}\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)$$
$$+\lambda_2\Bigg(\sum_{j=1}^m\gamma_j^2\int_{[0,\rho u_j]}(u_j-y)^\beta\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)$$
$$+\ 2\sum_{1\le r<l\le m}\gamma_r\gamma_l\int_{[0,\rho u_r]}C(u_r-y,u_l-y)\,\mathrm{d}W_\alpha^{\leftarrow}(y)\Bigg) \qquad (C.12)$$

згідно з лемою 171(a). В подальшому нам знадобиться формула

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}\int_{(\rho u_r,u_r]}v((u_l-y)t)\,\mathrm{d}U(ty)\ =\ 0,\quad r<l, \qquad (C.13)$$

яку можна довести аналогічно, оскільки $v(t(u_l-y))/v(t)$ збігається до $(u_l-y)^\beta$ рівномірно на $(\rho u_r,u_r]$ при $t\to\infty$ та (замість (2.75)) виконується граничне співвідношення

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\{\xi>t\}U(ty)\ =\ \frac{y^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1+\alpha)},$$

див. формулу (8.6.4) на с. 361 в [42].

Згідно з теоремою 4.2 в [39], співвідношення (C.9) буде доведено, якщо ми перевіримо, що при $\rho\uparrow 1$, права частина (C.12) збігається до правої частини (C.9) та

$$\lim_{\rho\uparrow 1}\overline{\lim_{t\to\infty}}\mathbb{P}\Bigg\{\Bigg|\lambda_1\sqrt{\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}}\sum_{j=1}^m\gamma_j\int_{(\rho u_j,u_j]}h(t(u_j-y))\,\mathrm{d}\nu(ty)$$
$$+\lambda_2\frac{\mathbb{P}\{\xi>t\}}{v(t)}\Bigg(\sum_{j=1}^m\gamma_j^2\int_{(\rho u_j,u_j]}v(t(u_j-y))\,\mathrm{d}\nu(ty)$$
$$+2\sum_{1\le r<l\le m}\gamma_r\gamma_l\int_{(\rho u_r,u_r]}f((u_r-y)t,(u_l-y)t)\,\mathrm{d}\nu(ty)\Bigg)\Bigg|>\delta\Bigg\}\ =\ 0 \quad (C.14)$$

для всіх $\delta > 0$. Перше твердження виконується навіть в сенсі збіжності майже непевно внаслідок теореми про монотонну збіжність та скінченності інтегралів в (C.9). Для доведення (C.14) використаємо (2.65), щоб побачити, що (C.8) у поєднанні з (C.13) дає

$$\lim_{\rho\uparrow 1} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\mathbb{P}\{\xi > t\}}{v(t)} \int_{(\rho u_r, u_r]} |f((u_r - y)t, (u_l - y)t)| \, \mathrm{d}U(ty) \;=\; 0, \quad r < l.$$

Застосовуючи нерівність Маркова, робимо висновок, що (C.14) випливає з останнього асимптотичного співвідношення та формул (C.8) і (C.11). Доведення (C.9) і всієї леми завершено. $\square$

Лема 207. *Нехай* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *є незростаючою функцією такою, що* $\lim_{t\to\infty} f(t) \geq 0$. *Тоді для кожного* $\theta > 0$

$$\int_0^n f(\theta y)\mathrm{d}y \;=\; \sum_{k=0}^{n} f(\theta k) + \delta_n(\theta), \quad n \in \mathbb{N},$$

де $\delta_n(\theta)$ *збігається при* $n \to \infty$ *до деякого* $\delta(\theta) \leq 0$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, припустимо, що $\theta = 1$. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(y)\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(y)\mathrm{d}y \right) + f(n).$$

Оскільки f не зростає, кожен доданок в сумі невід’ємний. Отже, сума не спадає по n. З іншого боку, вона є обмеженою зверху

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(y)\mathrm{d}y \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) - f(k+1)) \leq f(0) < \infty,$$

а тому ряд $\sum_{k\geq 0} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(y)\mathrm{d}y \right)$ збігається. З припущення, що границя $\lim_{n\to\infty} f(n)$ існує, отримуємо твердження леми. $\square$

Лема 208. *Співвідношення* (3.48) *виконується, якщо щільність* f *в.в.* W *задовольняє одну з двох умов:*

(i) *виконується умова* (3.42) *з деяким* $\alpha \in [0, 1)$*;*

(ii) *існують* $\delta_1 \geq 0$ *та* $\delta_2 \geq 0$ *такі, що* f *не зростає на* $(0, \delta_1)$, *обмежена на* $[\delta_1, 1 - \delta_2]$ *та не спадає на* $(1 - \delta_2, 1)$.

Доведення. Розпочнемо з доведення більш простого твердження (i). Нагадаємо, що розподіл A_n задається формулою (3.46). Твердження (i) випливає з ланцюжка нерівностей

$$\begin{aligned}
& k\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\mathbb{P}\{A_n=rk\} \\
&\quad = \frac{k}{1-\mathbb{E}W^n}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}C_n^{rk}\int_0^1 x^{n-rk}(1-x)^{rk}f(x)\mathrm{d}x \\
&\quad \le \mathrm{const}\,\frac{k}{1-\mathbb{E}W^n}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}C_n^{rk}\int_0^1 x^{n-rk-\alpha}(1-x)^{rk-\alpha}\mathrm{d}x \\
&\quad = \mathrm{const}\,\frac{k}{1-\mathbb{E}W^n}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n-rk-\alpha+1)\Gamma(rk-\alpha+1)}{\Gamma(n-2\alpha+2)\Gamma(n-rk+1)\Gamma(rk+1)} \\
&\quad \le \mathrm{const}\,\frac{1}{1-\mathbb{E}W^n}\frac{k}{n^{1-2\alpha}}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}((n-rk)rk)^{-\alpha} \\
&\quad \le \mathrm{const}\,\frac{1}{1-\mathbb{E}W^n}\frac{k^{1-2\alpha}}{n^{1-2\alpha}}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}((\lfloor n/k\rfloor-r)r)^{-\alpha}=O(1),
\end{aligned}$$

П'ятий рядок є наслідком нерівності: для $c,d>-2$ існує $M_{c,d}>0$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{N}$

$$\left|\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n+d)}-n^{c-d}\right|\le M_{c,d}n^{c-d-1}, \tag{C.15}$$

див. формулу (6.1.47) в [3]. Рівність в останньому рядку випливає з нерівності $\sum_{j=1}^{m-1}((m-j)j)^{-\alpha}\le \mathrm{const}\, m^{1-2\alpha}$, яка має місце при $\alpha<1$ та $m\in\mathbb{N}$. Частина (i) доведена.

Переходячи до доведення другої частини, оберемо $\delta_1\ge 0$ та $\delta_2\ge 0$ такі, що f не зростає на $(0,\delta_1)$, обмежена на $[\delta_1,1-\delta_2]$ та не спадає на $(1-\delta_2,1)$. Можемо представити f у вигляді:

$$f(x)=\mathbb{P}\{W<\delta_1\}f_1(x)+\mathbb{P}\{\delta_1\le W\le 1-\delta_2\}f_2(x)+\mathbb{P}\{W>1-\delta_2\}f_3(x), \tag{C.16}$$

де f_1, f_2 та f_3 є деякими щільностями такими, що f_1 не зростає на $(0,1)$, f_3 на спадає на $(0,1)$, а f_2 обмежена на $[0,1]$. Відомо, див. [182], що для в.в. X, яка зосереджена на $[0,1]$ та має щільність h, що не зростає (відповідно не спадає), існує функція розподілу G така, що

$$h(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}G(y)}{y} \quad \left(\text{відповідно} \quad h(x) = \int_{1-x}^1 \frac{\mathrm{d}G(y)}{y}\right).$$

Використавши цей факт, можемо записати (C.16) у вигляді:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathbb{P}\{W < \delta_1\}\Big(\int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{\{x\in[0,y)\}}}{y}\mathrm{d}G_1(y)\Big) + \mathbb{P}\{\delta_1 \le W \le 1-\delta_2\} f_2(x) \\ &+ \mathbb{P}\{W > 1-\delta_2\}\Big(\int_0^1 \frac{\mathbb{1}_{\{x\in[1-y,1)\}}}{y}\mathrm{d}G_2(y)\Big), \end{aligned}$$

де G_1, G_2 є деякими функціями розподілу, що зосереджені на $[0, \delta_1]$ та $[1-\delta_2, 1]$ відповідно.

Останню формулу можна розглядати як представлення f у вигляду опуклої лінійної оболонки щільностей трьох типів: $g_\varepsilon(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{x\in[0,\varepsilon)\}}}{\varepsilon}$, $h_\varepsilon(x) = \frac{\mathbb{1}_{\{x\in[1-\varepsilon,1)\}}}{\varepsilon}$ та обмежених щільностей. Отже, для доведення (ii) достатньо перевірити співвідношення (3.48) для щільностей трьох вказаних типів рівномірно по $\varepsilon \in (0,1)$. Правильність (3.48) для обмежених щільностей випливає з вже доведеної частини (i) з $\alpha = 0$. Покажемо, що (3.48) виконується для g_ε, міркування для h_ε симетричні. Маємо

$$\mathbb{P}\{A_n = k\} = C_n^k \varepsilon^{-1} \int_0^\varepsilon p^k (1-p)^{n-k} \mathrm{d}p = \frac{1}{(n+1)\varepsilon} I_\varepsilon(k+1, n-k+1),$$

де $I_\varepsilon(k+1, n-k+1)$ є нормованою урізаною бета-функцією, див. формулу (6.6.2) в [3]. Використавши формули (6.6.5) та (6.6.4) за цим же посиланням, маємо

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{A_n = k\} &= \frac{1}{n+1} I_\varepsilon(k, n-k+1) + \frac{1-\varepsilon}{(n+1)\varepsilon}\mathbb{P}\{B \ge k+1\} \\ &\le \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\varepsilon}\mathbb{P}\{B \ge k+1\}, \end{aligned}$$

де B є випадковою величиною з біноміальним розподілом з параметрами

(n,ε). Це дає

$$k\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\mathbb{P}\{A_n=rk\}\le k\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\Big(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)\varepsilon}\mathbb{P}\{B\ge rk+1\}\Big)$$
$$\le 1+\frac{k}{(n+1)\varepsilon}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\mathbb{P}\{B\ge rk+1\}\le 1+\frac{k}{(n+1)\varepsilon}\sum_{r=1}^{\lfloor n/k\rfloor-1}\sum_{j=rk+1}^{n}\mathbb{P}\{B=j\}$$
$$\le 1+\frac{k}{(n+1)\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{\lfloor j/k\rfloor}\mathbb{P}\{B=j\}\le 1+\frac{1}{(n+1)\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}j\mathbb{P}\{B=j\}\le 2,$$

що завершує доведення частини (ii) і всієї леми. □

Лема 209. *Нехай I_n є величиною першого стрибка процесу $(N_n(t))_{t\ge0}$ у бета-коалесцентах з $a\in(0,1]$ та $b>0$ та нехай ξ є випадковою величиною з розподілом*

$$\mathbb{P}\{\xi=k\}=\frac{(2-a)\Gamma(k+a-1)}{\Gamma(a)(k+1)!}=p_k^{(a)},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді для довільного $0<q\le1$ такого, що $q+a>1$, маємо

$$\sum_{k=1}^{n-1}k^q|\mathbb{P}\{I_n=k\}-\mathbb{P}\{\xi=k\}|=O(n^{a+q-2}),\quad n\to\infty. \tag{C.17}$$

Доведення. Для бета-коалесцентів формула (1.7) дає

$$\lambda_{n,\,k+1}=\int_0^1x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\Lambda(\mathrm{d}x)=\frac{\mathrm{B}(a+k-1,n-k+b-1)}{\mathrm{B}(a,b)}.$$

Використовуючи оцінку (C.15) для гамма-функції, отримуємо

$$\begin{aligned}C_n^{k+1}\lambda_{n,\,k+1} &= C_n^{k+1}\frac{\mathrm{B}(a+k-1,n-k+b-1)}{\mathrm{B}(a,b)} \qquad\qquad (C.18)\\ &= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(a+k-1)\Gamma(n-k+b-1)}{\Gamma(k+2)\Gamma(n-k)\Gamma(n+a+b-2)\mathrm{B}(a,b)}\\ &= \frac{\Gamma(a+k-1)}{(k+1)!\mathrm{B}(a,b)}\Big(n^{3-a-b}+O(n^{2-a-b})\Big)\Big((n-k)^{b-1}+O\big((n-k)^{b-2}\big)\Big),\end{aligned}$$

рівномірно по $1\le k\le n-1$ та $n\ge2$.

Підрахувавши інтеграл в (1.8), бачимо, що

$$\lambda_n=\frac{\Gamma(a)}{(2-a)\mathrm{B}(a,b)}n^{2-a}+O(n^{1-a})=\frac{\Gamma(a)}{(2-a)\mathrm{B}(a,b)}n^{2-a}\Big(1+O(n^{-1})\Big) \tag{C.19}$$

при $a \in (0,1)$ та $b > 0$, та

$$\lambda_n = bn + O(\ln n), \tag{C.20}$$

при $a = 1$ та $b > 0$. Отже, при $0 < a < 1$, $b > 0$, $n \geq 2$ та $k = 1, \ldots, n-1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{I_n = k\} &= p^{(a)}_{n,n-k} \\
&= \frac{(2-a)\Gamma(a+k-1)}{\Gamma(a)(k+1)!} n^{1-b}\Big((n-k)^{b-1} + O\Big((n-k)^{b-2}\Big)\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\
&= p^{(a)}_k \Big(\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(\frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big)\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big) \\
&= p^{(a)}_k \Big(\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(\frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big)\Big) \\
&= p^{(a)}_k \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(p^{(a)}_k \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big).
\end{aligned}$$

Аналогічно, при $a = 1$ маємо

$$\begin{aligned}
p^{(1)}_{n,n-k} &= p^{(1)}_k \Big(\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(\frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big)\Big)\Big(1 + O(n^{-1}\ln n)\Big) \\
&= p^{(1)}_k \Big(\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(\frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big) + O\Big(\frac{1}{n}\ln n\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1}\Big)\Big) \\
&= p^{(1)}_k \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} + O\Big(p^{(1)}_k \frac{1}{n}\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2}\Big) + O\Big(p^{(1)}_k \frac{1}{n}\ln n\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1}\Big).
\end{aligned}$$

Підставляючи це в ліву частину формули (C.17), отримаємо

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k^q |\mathbb{P}\{I_n = k\} - \mathbb{P}\{\xi = k\}| &\leq \sum_{k=1}^{n-1} p^{(a)}_k k^q \Big|\Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1\Big| \\
&\quad + \frac{c_1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} p^{(a)}_k k^q \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} =: S_1(a,n) + S_2(a,n),
\end{aligned}$$

при $0 < a < 1$, та

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} k^q |\mathbb{P}\{I_n = k\} - \mathbb{P}\{\xi = k\}| \\
&\qquad \leq S_1(1,n) + S_2(1,n) + \frac{c_2 \ln n}{n}\sum_{k=1}^{n-1} p^{(1)}_k k^q \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} \\
&\qquad =: S_1(1,n) + S_2(1,n) + S_3(1,n),
\end{aligned}$$

при $a = 1$. Як завжди, позначатимемо $c_1, c_2, \ldots$ деякі додатні константи, точні значення яких неважливі. Нам потрібно показати, що $S_i(a,n) = O(n^{q+a-2})$ при

$i = 1,2$ та $S_3(1,n) = O(n^{q-1})$. З огляду на нерівність $p_k^{(a)} \leq c_3 k^{a-3}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, маємо

$$\begin{aligned}
S_1(a,n) &\leq c_3 \sum_{k=1}^{n-1} k^{a+q-3} \Big| \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1 \Big| \\
&= c_3 \sum_{k=1}^{[n/2]} k^{a+q-3} \Big| \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1 \Big| + c_3 \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} k^{a+q-3} \Big| \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1 \Big| \\
&\leq \frac{c_4}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} k^{a+q-2} + c_3 n^{a+q-2} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \Big(\frac{k}{n}\Big)^{a+q-3} \Big| \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1 \Big| \Big),
\end{aligned}$$

де ми використали нерівність $|(1-x)^{b-1} - 1| \leq c_5 x$, $x \in [0, 1/2]$. Вираз у дужках збігається до $\int_{1/2}^1 x^{a+q-3} |(1-x)^{b-1} - 1| \mathrm{d}x < \infty$. Отже, $S_1(a,n) = O(n^{q+a-2})$. Аналогічно,

$$\begin{aligned}
S_2(a,n) &\leq \frac{c_6}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} \\
&= \frac{c_6}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} + \frac{c_6}{n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} \\
&\leq \frac{c_6}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} + c_6 \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} \\
&= \frac{c_6}{n} \sum_{k=1}^{[n/2]} k^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-2} + c_6 n^{a+q-2} \Big(\frac{1}{n} \sum_{k=[n/2]+1}^{n-1} \Big(\frac{k}{n}\Big)^{a+q-3} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} \Big) \\
&= O(n^{a+q-2}),
\end{aligned}$$

оскільки перший член є $O(n^{-1})$, а другий є $O(n^{a+q-2})$ з тих самих міркувань, що й $S_1(a,n)$. Нарешті,

$$\begin{aligned}
S_3(1,n) &\leq \frac{c_7 \ln n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{q-2} \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} \\
&\leq \frac{c_7 \ln n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{q-2} \Big| \Big(1 - \frac{k}{n}\Big)^{b-1} - 1 \Big| + \frac{c_7 \ln n}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k^{q-2} \\
&= O(n^{q-2} \ln n) + O(n^{-1} \ln n)
\end{aligned}$$

з огляду на оцінку для $S_1(a,n)$. Отже, $S_3(1,n) = O(n^{q-1})$. Доведення завершено. $\square$

Лема 210. *Припустимо, що* θ *є випадковою величиною зі значеннями в* $[1, +\infty)$ *така, що для деяких* $c > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ *та* $\varepsilon > 0$

$$1 - F_\theta(x) := \mathbb{P}\{\theta \geq x\} = cx^{-\alpha} + O(x^{-(\alpha+\varepsilon)}), \quad x \to \infty. \tag{C.21}$$

Нехай η_α *є випадковою величиною, що не залежить від* θ *та має щільність* (2.127). *Тоді для довільного* $\beta > 0$ *існує* $\delta > 0$ *таке, що*

$$d_1\Big(\ln((1 - \theta x^{-1})\eta_\alpha)\mathbb{1}_{\{\theta < x-\beta\}}, \ln \eta_\alpha\Big) = O(x^{-(\alpha+\delta)}), \quad x \to \infty. \tag{C.22}$$

Доведення. Позначимо ліву частину (C.22) через $s_\theta(x, \beta)$. З огляду на співвідношення

$$s_\theta(x, \beta) = s_{c^{-1/\alpha}\theta}(c^{-1/\alpha}x, c^{-1/\alpha}\beta), \quad x \geq 1,$$

та

$$\mathbb{P}\{c^{-1/\alpha}\theta \geq x\} = x^{-\alpha} + O(x^{-(\alpha+\varepsilon)}), \quad x \to \infty,$$

достатньо перевірити твердження для $c = 1$. Зафіксуємо β до кінця доведення. Використовуючи представлення

$$d_1(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |\mathbb{P}\{X \leq x\} - \mathbb{P}\{Y \leq x\}| \mathrm{d}x,$$

див. (3.2.17) в [222], запишемо

$$\begin{aligned} &s_\theta(x, \beta) \\ &\quad = \int_{-\infty}^0 |\mathbb{P}\{\ln(\mathbb{1}_{\{\theta \geq x-\beta\}} + (1 - \theta x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta < x-\beta\}}) \leq z\} - \mathbb{P}\{\ln \eta_\alpha \leq z\}| \mathrm{d}z \\ &\quad = \int_0^1 |\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta \geq x-\beta\}} + (1 - \theta x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta < x-\beta\}} \leq z\} - \mathbb{P}\{\eta_\alpha \leq z\}| z^{-1} \mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Інтегруючи частинами першу ймовірність під знаком інтеграла, маємо при $z \in [0, 1)$ та $x > 1 + \beta$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta \geq x-\beta\}} + (1 - \theta x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta < x-\beta\}} \leq z\} \\ &\qquad = -\int_{[1, x-\beta)} \mathbb{P}\{(1 - yx^{-1})\eta_\alpha \leq z\} \mathrm{d}(1 - F_\theta(y)) \\ &\qquad = -\mathbb{P}\{\eta_\alpha \leq \beta^{-1}xz\}\Big(1 - F_\theta((x-\beta)-)\Big) + \mathbb{P}\{\eta_\alpha \leq zx(x-1)^{-1}\} \\ &\qquad + \int_{[1, x-\beta)} (1 - F_\theta(y)) \mathrm{d}_y \mathbb{P}\{(1 - yx^{-1})\eta_\alpha \leq z\}. \end{aligned}$$

Нехай θ_α є в.в., яка не залежить від η_α та має розподіл

$$1 - F_{\theta_\alpha}(x) := \mathbb{P}\{\theta_\alpha \ge x\} = x^{-\alpha}, \quad x \ge 1.$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha \ge x-\beta\}} + (1-\theta_\alpha x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta_\alpha < x-\beta\}} \le z\} \\
&\qquad = -\int_{[1,x-\beta)} \mathbb{P}\{(1-yx^{-1})\eta_\alpha \le z\} \mathrm{d}(1-F_{\theta_\alpha}(y)) \\
&\qquad = -\mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\}\Big(1-F_{\theta_\alpha}((x-\beta))\Big) + \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le zx(x-1)^{-1}\} \\
&\qquad + \int_{[1,x-\beta)} (1-F_{\theta_\alpha}(y))\mathrm{d}_y \mathbb{P}\{(1-yx^{-1})\eta_\alpha \le z\}.
\end{aligned}$$

Віднімаючи відповідні рівності та використовуючи (C.21), маємо при $z \in [0,1)$ та $x > 1+\beta$,

$$\begin{aligned}
&\Big|\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta \ge x-\beta\}} + (1-\theta x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta < x-\beta\}} \le z\} \\
&\qquad\qquad - \mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha \ge x-\beta\}} + (1-\theta_\alpha x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta_\alpha < x-\beta\}} \le z\}\Big| \\
&\le K\Big(\mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\}(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)} + \int_{[1,x-\beta)} y^{-(\alpha+\varepsilon)} \mathrm{d}_y \mathbb{P}\{(1-yx^{-1})\eta_\alpha \le z\}\Big),
\end{aligned}$$

для деякого $K > 0$, яке не залежить ані від x, ані від z. Тому,

$$\begin{aligned}
&s_\theta(x,\beta) \\
&\le \textstyle\int_0^1 |\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha \ge x-\beta\}} + (1-\theta_\alpha x^{-1})\eta_\alpha \mathbb{1}_{\{\theta_\alpha < x-\beta\}} \le z\} - \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le z\}| z^{-1}\mathrm{d}z \\
&\quad + K \textstyle\int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\}(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)}\mathrm{d}z \\
&\quad + K \textstyle\int_0^1 z^{-1} \int_{[1,x-\beta)} y^{-(\alpha+\varepsilon)} \mathrm{d}_y \mathbb{P}\{(1-yx^{-1})\eta_\alpha \le z\}\mathrm{d}z \\
&=: I_1(x) + I_2(x) + I_3(x).
\end{aligned}$$

Спочатку обчислимо $I_2(x)$:

$$\begin{aligned}
&I_2(x) = K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)} \int_0^1 \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\} z^{-1}\mathrm{d}z \\
&= K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)} \int_0^{\beta x^{-1}} \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\} z^{-1}\mathrm{d}z + K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)}(\ln x - \ln \beta) \\
&= K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)} \int_0^1 \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le z\} z^{-1}\mathrm{d}z + K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)}(\ln x - \ln \beta) \\
&= K(x-\beta)^{-(\alpha+\varepsilon)}(\mathbb{E}|\ln \eta_\alpha| + \ln x - \ln \beta)) = O(x^{-(\alpha+\varepsilon)} \ln x).
\end{aligned}$$

Візьмемо довільне $\varepsilon' \in (0,\varepsilon]$ таке, що $\alpha+\varepsilon'<1$. Третій доданок $I_3(x)$ оцінюється за допомогою теореми Фубіні

$$\begin{aligned} I_3(x) &\le K\int_0^1 z^{-1}\int_{[1,x-\beta)} y^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathrm{d}_y\mathbb{P}\{(1-yx^{-1})\eta_\alpha\le z\}\mathrm{d}z \\ &= K\int_0^1 z^{-1}\int_{[1,x-\beta)} y^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathbb{P}\{(1-\eta_\alpha^{-1}z)x\in \mathrm{d}y\}\mathrm{d}z \\ &= K\int_0^1 z^{-1}\mathbb{E}\Big((1-\eta_\alpha^{-1}z)x\Big)^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathbb{1}_{\{1\le(1-\eta_\alpha^{-1}z)x\le x-\beta\}}\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= Kx^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathbb{E}\int_0^1 z^{-1}(1-\eta_\alpha^{-1}z)^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathbb{1}_{\{1\le(1-\eta_\alpha^{-1}z)x\le x-\beta\}}\mathrm{d}z \\ &= Kx^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathbb{E}\int_{\beta\eta_\alpha x^{-1}}^{\eta_\alpha(1-x^{-1})} z^{-1}(1-\eta_\alpha^{-1}z)^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathrm{d}z \\ &\overset{z=\eta_\alpha u}{=} Kx^{-(\alpha+\varepsilon')}\int_{\beta x^{-1}}^{1-x^{-1}} u^{-1}(1-u)^{-(\alpha+\varepsilon')}\mathrm{d}u = O(x^{-(\alpha+\varepsilon')}\ln x). \end{aligned}$$

Залишається оцінити перший інтеграл. Для цього помітимо, що для кожного $z\in[0,1)$ та $x\ge 1+\beta$,

$$\{\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha\ge x-\beta\}}+(1-\theta_\alpha x^{-1})\eta_\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha<x-\beta\}}\le z\}=\{(1-\eta_\alpha^{-1}z)x\le\theta_\alpha<x-\beta\},$$

а, отже,

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}\{\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha\ge x-\beta\}}+(1-\theta_\alpha x^{-1})\eta_\alpha\mathbb{1}_{\{\theta_\alpha<x-\beta\}}\le z\}=\mathbb{P}\{(1-\eta_\alpha^{-1}z)x\le\theta_\alpha<x-\beta\} \\ &= \mathbb{P}\{((1-\eta_\alpha^{-1}z)x)\vee 1\le\theta_\alpha<x-\beta\} \\ &= \mathbb{P}\{\eta_\alpha\le\beta^{-1}xz,((1-\eta_\alpha^{-1}z)x)\vee 1\le\theta_\alpha<x-\beta\} \\ &= \mathbb{P}\{\eta_\alpha\le\beta^{-1}xz,((1-\eta_\alpha^{-1}z)x)\vee 1\le\theta_\alpha<x\} \\ &- \mathbb{P}\{\eta_\alpha\le\beta^{-1}xz\}((x-\beta)^{-\alpha}-x^{-\alpha}). \end{aligned}$$

Підставляючи це в $I_1(x)$, бачимо

$$\begin{aligned} I_1(x) &\le \int_0^1 |\mathbb{P}\{\eta_\alpha\le\beta^{-1}xz,((1-\eta_\alpha^{-1}z)x)\vee 1\le\theta_\alpha<x\}-\mathbb{P}\{\eta_\alpha\le z\}|z^{-1}\mathrm{d}z \\ &+ ((x-\beta)^{-\alpha}-x^{-\alpha})\int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\{\eta_\alpha\le\beta^{-1}xz\}\mathrm{d}z. \end{aligned}$$

Другий член є $O(x^{-\alpha-1}\ln x)$ згідно з тими самими міркуваннями, що були використані при оцінці $I_2(x)$. Елементарними обчисленнями переконуємось, що перший член рівний

$$\int_0^1 \Big|\mathbb{P}\{z < \eta_\alpha \le (x-1)^{-1}xz\}$$
$$+ x^{-\alpha}\Big(\int_{((x-1)^{-1}xz)\wedge 1}^{(\beta^{-1}xz)\wedge 1}((1-y^{-1}z)^{-\alpha})\mathbb{P}\{\eta_\alpha \in \mathrm{d}y\} - \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\}\Big)\Big|z^{-1}\mathrm{d}z$$
$$=: J(x).$$

За нерівністю трикутника,

$$J(x) \le \int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\{z < \eta_\alpha \le (x-1)^{-1}xz\}\mathrm{d}z$$
$$+ x^{-\alpha}\int_0^1 \Big|\int_{((x-1)^{-1}xz)\wedge 1}^{(\beta^{-1}xz)\wedge 1}(1-y^{-1}z)^{-\alpha}\mathbb{P}\{\eta_\alpha \in \mathrm{d}y\} - \mathbb{P}\{\eta_\alpha \le \beta^{-1}xz\}\Big|z^{-1}\mathrm{d}z. \tag{C.23}$$

За теоремою Фубіні, перший доданок можна обчислити так:

$$\int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\{z < \eta_\alpha \le (x-1)^{-1}xz\}\mathrm{d}z \;=\; \mathbb{E}\int_0^1 z^{-1}\mathbb{1}_{\{z<\eta_\alpha\le(x-1)^{-1}xz\}}\mathrm{d}z$$
$$= \mathbb{E}\int_0^1 z^{-1}\mathbb{1}_{\{x^{-1}(x-1)\eta_\alpha \le z < \eta_\alpha\}}\mathrm{d}z \;=\; \mathbb{E}\int_{x^{-1}(x-1)\eta_\alpha}^{\eta_\alpha} z^{-1}\mathrm{d}z = O(x^{-1}).$$

Внутрішній інтеграл в другому доданку правої частини (C.23) дорівнює

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_{((x-1)^{-1}xz)\wedge 1}^{(\beta^{-1}xz)\wedge 1}(y-z)^{-\alpha}(1-y)^{\alpha-1}\mathrm{d}y,$$

і після заміни змінної $u := (y-z)(1-z)^{-1}$ стає

$$\frac{\sin \pi\alpha}{\pi}\int_{\frac{z}{(1-z)(x-1)}\wedge 1}^{\frac{(\beta^{-1}x-1)z}{1-z}\wedge 1} u^{-\alpha}(1-u)^{\alpha-1}\mathrm{d}u$$
$$= \mathbb{P}\Big\{\frac{z}{(1-z)(x-1)}\wedge 1 \le \eta_\alpha \le \frac{(\beta^{-1}x-1)z}{1-z}\wedge 1\Big\}.$$

Оскільки для $z \in [0,1)$ та $x > 1+\beta$,

$$0 \le \frac{z}{(1-z)(x-1)}\wedge 1 \le \frac{(\beta^{-1}x-1)z}{1-z}\wedge 1 \le (\beta^{-1}xz)\wedge 1,$$

то інтеграл в другому доданку в (C.23) рівний

$$\int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\Big\{\eta_\alpha \le \frac{z}{(1-z)(x-1)}\wedge 1\Big\}\mathrm{d}z$$
$$+ \int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\Big\{\frac{(\beta^{-1}x-1)z}{1-z}\wedge 1 \le \eta_\alpha \le (\beta^{-1}xz)\wedge 1\Big\}\mathrm{d}z.$$

Щоб перевірити, що другий доданок у цій формулі є $O(x^{-1})$, запишемо

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 z^{-1}\mathbb{P}\Big\{\frac{(\beta^{-1}x-1)z}{1-z}\wedge 1 \le \eta_\alpha \le (\beta^{-1}xz)\wedge 1\Big\}\mathrm{d}z \\
&\qquad = \mathbb{E}\int_0^1 z^{-1}\mathbb{1}_{\{\eta_\alpha\beta x^{-1}\le z\le \eta_\alpha(\beta^{-1}x-1+\eta_\alpha)^{-1}\}}\mathrm{d}z \\
&\qquad = \mathbb{E}\Big(\ln(\beta^{-1}x)-\ln(\beta^{-1}x-1+\eta_\alpha)\Big) = O(x^{-1}).
\end{aligned}$$

Перший член можна оцінити аналогічно, отже $J(x)=O(x^{-1})$. Таким чином $s_\theta(x,\beta)=O(x^{-\alpha+\delta})$ для деякого досить малого $\delta>0$. Доведення завершено.

$\square$

Додаток D

Список опублікованих праць за темою дисертації

Публікаці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. Alsmeyer G. Functional limit theorems for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / G. Alsmeyer, A. Iksanov, A. Marynych // Stochastic Processes and their Applications. – 2017. – **127**, №3. – p. 995–1017.

2. Alsmeyer G. Leader election using random walks [Electronic resource] / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // ALEA – Latin American Journal of Probability and Statistics. – 2016. – **13**. – p. 1095–1122. – Режим доступу: `http://alea.impa.br/articles/v13/13-39.pdf`

3. Alsmeyer G. Renewal approximation for the absorption time of a decreasing Markov chain / G. Alsmeyer, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2016. – **53**, №3. – p. 765–782.

4. Fractionally integrated inverse stable subordinators / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych, G. Shevchenko // Stochastic Processes and their Applications. – 2016. – **127**, №1. – p. 80-106.

5. Gnedin A. Λ-coalescents with dust component / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2011. –**48**, №4. – p. 1133–1151.

6. Gnedin A. A generalization of the Erdös-Turán law for the order of random permutation / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Combinatorics, Probability and Computing. – 2012. –**21**, №5. – p. 715-733.
7. Gnedin A. Λ-coalescents: a survey / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Marynych // Journal of Applied Probability. – 2014. – **51A**. – p. 23–40.
8. Gnedin A. Exponential-uniform identities related to records [Electronic resource] / A. Gnedin, A. Marynych // Electronic Communications in Probability. – 2012. – **17**. – p. 1–5. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465263159`
9. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials [Electronic resource] / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Electronic Journal of Probability. – 2016. – **21**. – p. 1–19. – Режим доступу: `http://projecteuclid.org/euclid.ejp/1476706888`
10. Iksanov A. Weak convergence of renewal shot noise processes in the case of slowly varying normalization / A. Iksanov, Z. Kabluchko, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **114**. – p. 67–77.
11. Iksanov A. A note on non-regular martingales / A. Iksanov, A. Marynych // Statistics and Probability Letters. – 2008. – **78**. – p. 3014–3017.
12. Iksanov A. Limit theorems for renewal shot noise processes with eventually decreasing response functions / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Stochastic Processes and their Applications. – 2014. – **124**, №6. – p. 2132–2170.
13. Iksanov A. Moment convergence of first-passage times in renewal theory / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Statistics and Probability Letters. – 2016. – **119**. – p. 134–143.
14. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration I: scaling limits / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1233–1278.

15. Iksanov A. Weak convergence of finite-dimensional distributions of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych, V. Vatutin // Theory of Probability and its Applications. – 2015. – **59**, №1. – p. 87–113.

16. Kabluchko Z. Renewal shot noise processes in the case of slowly varying tails / Z. Kabluchko, A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2016. – **21(37)**, №2. – p. 14–21.

17. Marynych A. A note on convergence to stationarity of random processes with immigration / A. Marynych // Theory of Stochastic Processes. – 2015. – **20(36)**, №1. – p. 84–100.

18. Marynych A. Weak convergence of the number of zero increments in the random walk with barrier [Electronic resource] / A. Marynych, G. Verovkin // Electronic Communications in Probability. – 2014. – **19**. – p. 1–11. – Режим доступу: `https://projecteuclid.org/euclid.ecp/1465316776`

19. Marynych O. Stochastic recurrences and their applications to the analysis of partition-valued processes / O. Marynych // Utrecht University. – 2011. – p. 134.

20. On asymptotic of beta-coalescents / A. Gnedin, A. Iksanov, A. Maryncyh, M. Möhle // Journal of Applied Probability. – 2014. – **46**, №2. – p. 496–515.

21. Маринич О. В. Про асимптотику числа активних випадкових процесів в системі з іммiграцією / О. В. Маринич // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки – 2016. – №2. – С. 103-113.

Публікаці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

22. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 50.

23. Iksanov A. Asymptotics of beta-coalescents / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «Modern Stochastics : Theory and Applications III». – Kyiv. – 2012. –p. 41.

24. Iksanov A. Finite-dimensional convergence of the number of empty boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 52.

25. Iksanov A. Limit theorems for random processes with immigration at the epochs of a renewal process / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // International conference «11th Germany Probability and Statistics Days». – Ulm, Germany. – 2014. – p. 61–62.

26. Iksanov A. A functional limit theorem for the number of occupied boxes in the Bernoulli sieve / A. Iksanov, A. Marynych // International conference «12th Germany Probability and Statistics Days». – Bochum, Germany. – 2016. – p. 198-199.

27. Iksanov A. Local universality for real roots of random trigonometric polynomials / A. Iksanov, A. Marynych // International workshop «Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics». – Kyiv. – 2016. – p. 23-24.

28. Marynych A. The Bernoulli sieve: allocation scheme in a random environment / A. Marynych // Winter school «Spatial Models in Statistical Mechanics». – Darmstadt, Germany. – 2014. – p. 16–17.

29. Marynych A. On perpetuities arising in population genetics / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2014. – p. 21–22.

30. Marynych A. Renewal approximation for the absorption time in nonincreasing Markov chains / A. Marynych // International conference «Probability, Reliability and Stochastic Optimization». – Kyiv. – 2015. – p. 77.

31. Marynych A. Scaling limits for random processes with immigration / A. Marynych // International conference «Stochastic Processes in Abstract Spaces». – Kyiv. – 2015. – p. 36.

32. Marynych A. A leader-election procedure using records / A. Marynych // International conference «Probabilistic Aspects of Harmonic Analysis». – Będlewo, Poland. – 2016. – p. 24–25.

33. Іксанов О. Про асимптотику бета-коалесцентів / О. Іксанов, О. Маринич // Конференція «Problems of decision making under uncertainties». – Мукачево. – 2012. – с. 116.

Публікаці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

34. Iksanov A. Asymptotic of random processes with immigration II: convergence to stationarity / A. Iksanov, A. Marynych, M. Meiners // Bernoulli. – 2017. – **23**, №2. – p. 1279-1298.

35. Alsmeyer G. A leader-election procedure using records / G. Alsmeyer, Z. Kabluchko, A. Marynych // Annals of Probability. – 2017. – У друці, препринт доступний за посиланням `http://www.imstat.org/aop/future_papers.htm`