Міністерство освіти і науки України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Боднарчук Ірина Миколаївна

УДК 519.21

РЕГУЛЯРНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯНЬ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ЗІ СТОХАСТИЧНИМИ МІРАМИ

01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ — 2017

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі математичного аналізу механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Радченко Вадим Миколайович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
професор кафедри математичного аналізу.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Копитко Богдан Іванович,
Ченстоховський політехнічний університет,
професор Інституту математики;

кандидат фізико-математичних наук
Ізюмцева Ольга Леонідівна,
Інститут математики НАН України,
науковий співробітник відділу теорії
випадкових процесів;

Захист відбудеться "20" листопада 2017 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.37 в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: 03022, м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись в науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58, зала № 12.

Автореферат розісланий "19" жовтня 2017 року.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Моклячук М. П.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Теорія стохастичних інтегральних та диференціальних рівнянь за останні десятиріччя, активно розвиваючись, знайшла свої застосування в радіоелектроніці та електротехніці, квантовій механіці, теорії автоматичного керування, космічних дослідженнях. Стохастичними рівняннями описуються зміни на ринку фінансів та цінних паперів, що в останні роки значно підвищило інтерес спеціалістів-практиків до даної галузі математики.

В процесі розвитку теорії стохастичних рівнянь розширюється множина інтегровних процесів та стохастичних мір, за якими беруться інтеграли. Так, параболічне рівняння з мартингальними мірами вперше було розглянуто в роботі J. B. Walsh. Зокрема, J. B. Walsh показав, що розв'язки деяких стохастичних рівнянь в частинних похідних можуть бути записані, як інтеграли від невипадкових функцій за мартингальними мірами. Такий підхід було розвинено далі S. Albeverio, J.-L. Wu i T.-S. Zhang та R. C. Dalang. Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних вивчались як стохастичні рівняння в нескінченновимірних просторах (а саме, в гільбертових та банахових) у роботах P.-L. Chow; G. Da Prato i J. Zabczyk; L. Gawarecki i V. Mandrekar; S. Peszat i J. Zabczyk.

Зазвичай розглядалися диференціальні рівняння зі стохастичними мірами, що задовольняють певні припущення — такі, як існування моментів, неперервність, мартингальність, невід'ємність тощо. Широко дослідженими є стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних з вінерівським процесом (V. Barbu, G. Da Prato, L. Tubaro; A. Millet, P.-L. Morien; J. van Neerven, M. C. Veraar i L. Weis та ін.), дробовим броунівським рухом (R. Balan, C. Tudor; A. Boudaoui, T. Caraballo i A. Oauhab; Yu. S. Mishura; L. Quer-Sardanyons i S. Tindel), рівняння з мартингальними мірами (R. C. Dalang i M. Sanz-Solé; M. Sanz-Solé i A. Süss; J. B. Walsh) та мірами Леві (E. Hausenblas; S. Peszat i J. Zabczyk; C. I. Prévôt; T. Taniguchi).

Рівняння з частинними похідними зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності, певним чином узагальнюють вказані вище рівняння, та залишаються мало дослідженими. Саме такі рівняння розглядаються в даній дисертаційній роботі. Для хвильових рівнянь та рівнянь параболічного типу із загальними стохастичними мірами досліджено питання існування, єдиності та регулярності м'яких розв'язків. Наявність лише умови сигма-адитивності міри, яка задає випадковий вплив, дозволяє застосовувати отримані результати для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною. Тому, вивчення регулярності розв'язків рівнянь з частинними похідними зі стохастичними мірами є актуальним.

Рівняння з частинними похідними зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності, певним чином узагальнють вказані вище рівняння, та залишаються мало дослідженими. Саме такі рівняння розглядаються в даній дисертаційній роботі. Для хвильових рівнянь та рівнянь параболічного типу із загальними стохастичними мірами досліджено питання існування, єдиності та регулярності м’яких розв’язків. Наявність лише умови сігма-адитивності міри, яка задає випадковий вплив, дозволяє застосовувати отримані результати для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною. Тому, вивчення регулярності розв’язків рівнянь з частинними похідними зі стохастичними мірами є актуальним.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконана в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем № 11БФ038-02 “Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей” (номер державної реєстрації 0111U006561) та № 16БФ038-02 “Дослідження та статистичний аналіз асимптотичної поведінки складних стохастичних неоднорідних динамічних систем” (номер державної реєстрації 0116U002530), що виконуються на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського Національного університету імені Тараса Шевченка, і входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт “Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів”.

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв’язання таких задач:

- доведення існування та єдиності м’яких розв’язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(x),\ x\in\mathsf{R}$ і $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ та встановлення неперервності за Гельдером їх траєкторій;

- встановлення неперервної залежності м’яких розв’язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(x),\ x\in\mathsf{R}$ і $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ від даних;

- доведення існування та єдиності м’якого розв’язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x),\ x\in\mathsf{R}$ та встановлення неперервності за Гельдером його траєкторій;

- доведення існування та єдиності м’якого розв’язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області $((t,\vec{x})\in[0,\ T]\times\mathsf{R}^d,\ d\geq 1)$ зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$ та встановлення неперервності за

Гельдером його траєкторій;

- дослідження асимптотичної поведінки м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

- дослідження асимптотичної поведінки м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області ($(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$) зі стохастичною мірою $\mu(t)$, $t \in [0, T]$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є м'які розв'язки диференціальних рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами (а саме, хвильових рівнянь, параболічного рівняння та рівняння теплопровідності).

Предмет дослідження. Предметом дослідження є властивості м'яких розв'язків диференціальних рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами.

Методика дослідження. В десертаційній роботі використовуються методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, стохастичного аналізу, теорії міри та математичної фізики. Зокрема, ключовим моментом при дослідженні регулярності та асимптотичної поведінки інтегралів за стохастичними мірами є отримана А. Камонт дискретна характеризація просторів Бєсова.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

- доведено існування та єдиність м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t)$, $t \in [0, T]$ та $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ та встановлено неперервність за Гельдером їх траєкторій;

- встановлено неперервну залежність м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t)$, $t \in [0, T]$ та $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ від даних;

- доведено існування та єдиність м'якого розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ та встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій;

- доведено існування та єдиність м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області ($(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$) зі стохастичною мірою $\mu(t)$, $t \in [0, T]$ та встановлено неперервність за Гельдером його траєкторій;

- досліджено асимптотичну поведінку м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

- досліджено асимптотичну поведінку м'якого розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області $((t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d,\ d \geq 1)$ зі стохастичною мірою $\mu(t)$, $t \in [0,\ T]$ при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

Практичне значення отриманих результатів. В цілому дисертаційна робота носить теоретичний характер. Однак, результати даної роботи можуть бути застосовані для аналізу стохастичних систем, попередня інформація про поведінку яких є мінімальною, і ми не можемо накладати спеціальні умови на стохастичні міри, пов'язані з даними системами. Крім того, отримані результати та застосована в роботі методика можуть бути використані при подальшому вивченні стохастичних рівнянь, що розглядаються, та аналогічних до них.

Особистий внесок здобувача. Всі результати дисертаційної роботи отримані здобувачем самостійно. У спільних статтях співавтору проф. Радченку В. М. належать постановка задачі та загальне керівництво роботою, співавтору проф. Шевченку Г. М. належать консультації та обговорення.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на

- міжнародній конференції "Stochastic analysis and random dynamics", Львів, 2009 р.

- міжнародній конференції "Stochastic Processes in Abstract Spaces", Київ, 2015 р.

- XVII міжнародній науковій конференції імені академіка Михайла Кравчука, Київ, 2016 р.

- XIV міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспіран- тів та молодих науковців " Шевченківська весна – 2016 ", Київ, 2016 р.

- міжнародній конференції "Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics", Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару "Стохастичні диференціальні рівняння" при кафедрі загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару "Теорія ймовірностей та математична статистика” при кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.

- засіданні наукового семінару “Асимптотичні та аналітичні методи для задач математичної фізики” при кафедрі математичної фізики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ, 2016 р.
- засіданні наукового семінару при кафедрі вищої математики механіко-математичного факультету Львівського національного університету імені Івана Франка, Львів, 2016 р.
- засіданні наукового семінару “Числення Маллявена та його застосування” відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ, 2017 р.

Публікації. За результатами дисертаційної роботи опубліковано 6 статтей у наукових фахових виданнях України [1]–[6], з яких 3 статті ([3],[5],[6]) — у фахових виданнях, англомовні переклади яких включено до наукометричної бази Scopus, та 3 статті ([3],[5],[6]) – у виданнях з переліку фахових видань, затвердженого МОН України, та 5 тез доповідей на конференціях [7]–[11].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, п’яти розділів, висновків та списку використаних джерел. Повний обсяг дисертації становить 141 сторінку, список використаних джерел займає 17 сторінок і містить 129 найменувань.

Подяка. Автор висловлює щиру подяку своєму науковому керівнику професору Радченку Вадиму Миколайовичу за постановку розглянутих у дисертаційній роботі задач, цінні поради та постійну увагу до роботи.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

Перший розділ містить короткий історичний огляд літератури за тематикою дисертації та висвітлює сучасний стан вивчення проблем, схожих до тих, що розглядаються в дисертаційній роботі.

У **другому розділі** наводяться деякі означення та твердження, що мають безпосереднє відношення до змісту дисертаційної роботи — означення та властивості стохастичної міри та інтеграла за стохастичною мірою, оцінка стохастичного інтеграла за допомогою норми простору Бєсова, властивості м’якого розв’язку стохастичного рівняння теплопровідності, теорема про фундаментальний розв’язок параболічного рівняння.

Зокрема, відзначимо наступне означення.

Означення 2.1 Довільне σ-адитивне відображення $\mu : B \to L_0$ називається *стохастичною мірою.*

Третій розділ дисертації присвячений доведенню існування, єдиності та неперервності за Гельдером м'яких розв'язків задач Коші для стохастичних хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t), t \in [0, T]$ та $\mu(x), x \in \mathbb{R}$, а також встановленню неперервної залежності вказаних розв'язків від даних.

Розглядаються наступні стохастичні хвильові рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

та

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x,u(t,x)) + \sigma(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{3.2}$$

Тут $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, $T > 0, a > 0$. У рівнянні (3.1) стохастична міра μ визначена на борельовій σ-алгебрі підмножин $\mathbb{R}$, а в (3.2) — на борельовій σ-алгебрі підмножин $[0, T]$.

Символічні записи (3.1) та (3.2) розуміємо у наступному м'якому сенсі

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) - u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy \\ & + \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy \\ & + \frac{1}{2a}\int_{\{y:|y-x|<at\}} d\mu(y) \int_0^{t-|y-x|/a} \sigma(s,y)ds \end{aligned} \tag{3.3}$$

та

$$\begin{aligned} u(t,x) = {} & \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) - u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_0(y)dy \\ & + \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f(s,y,u(s,y))dy \\ & + \frac{1}{2a}\int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)dy, \end{aligned} \tag{3.15}$$

відповідно. Тут $u(t,x) = u(t,x,\omega) : [0,T] \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція.

У даному розділі розглядаються наступні припущення.

A1.1. Функції $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$, $v_0(y)=v_0(y,\omega):\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega\in\Omega$:

$$|u_0(y,\omega)|\le C(\omega),\quad |v_0(y,\omega)|\le C(\omega).$$

A1.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le C(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)},\quad 0<\beta(u_0)\le 1.$$

A1.3. $f(s,y,v):[0,T]\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,v)|\le C$.

A1.4. $f(s,y,v)$ ліпшицева за $v\in\mathrm{R}$:

$$|f(s,y,v_1)-f(s,y,v_2)|\le C|v_1-v_2|.$$

A1.5. $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

A1.6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1,y_1)-\sigma(s_2,y_2)|\le C(|s_1-s_2|^{\beta(\sigma)}+|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)}),\quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1.$$

A1.7. $|\mu((0,t])|\le C(\omega),\quad \forall t\in(0,T]$.

Тут і надалі позначатимемо за допомогою C та $C(\omega)$ константи, що можуть бути різними у різних формулах.

В підрозділі 3.3 доведено наступні леми.

Лема 3.1. *Нехай для деякого* $\tau>1/2$ *функція* $|y|^\tau$ *інтегровна за* μ *на* R *та виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $K>0$, $\lambda\in(0,1-1/(2\beta(\sigma)))$ *та* $t\in[0,T]$ *випадкова функція*

$$\varphi(x)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\quad |x|\le K,$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником λ.

Лема 3.2. *Нехай для деякого* $\tau>1/2$ *функція* $|y|^\tau$ *інтегровна за* μ *на* R *та виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $\lambda_*\in(0,1/2)$ *та* $x\in\mathrm{R}$ *випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t)=\int_{\{y:|y-x|<at\}}d\mu(y)\int_0^{t-|y-x|/a}\sigma(s,y)ds,\quad t\in[0,T],$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником λ_*.

Основним результатом підрозділу 3.3 є наступна теорема.

Теорема 3.1. *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.3), то для всіх* $t \in [0,T], x \in \mathrm{R}$ $u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* R *для деякого* $\tau > 1/2$, *то для будь-яких фіксованих* $K > 0$ *та* $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$, $\gamma_1 < 1 - 1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2 < 1/2$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1) - \bar{u}(t_2,x_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i \in [0,T], |x_i| \le K, i = 1,2.$$

3) Якщо функція $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* R *для деякого* $\tau > 1/2$, *то випадкова функція* $u(t,x)$ *маємо модифікацію, що неперервно залежить від даних.*

Під неперервною залежністю мається на увазі наступне. Нехай маємо такі дві задачі Коші для хвильового рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_i(t,x)}{\partial x^2} + f_i(t,x,u_i(t,x)) + \sigma_i(t,x)\dot{\mu}(x), \\ u_i(0,x) = u_{0i}(x), \qquad \dfrac{\partial u_i(0,x)}{\partial t} = v_{0i}(x), \quad i = 1,2, \end{cases} \tag{3.13}$$

де $(t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}$, а розв'язок розглядається у м'якому сенсі. Нехай функції $u_{0i}, v_{0i}, f_i, \sigma_i, i = 1,2$, задовольняють умови A1.1 – A1.6 та $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}, \forall v \in \mathrm{R}$ виконується

$$|u_{01}(x) - u_{02}(x)| < \delta \quad \text{м. н.}, \quad |v_{01}(x) - v_{02}(x)| < \delta \quad \text{м. н.},$$
$$|\sigma_1(t,x) - \sigma_2(t,x)| < \delta, \quad |f_1(t,x) - f_2(t,x)| < \delta. \tag{3.14}$$

Тоді $\forall \rho \in (0,1/2)$ $\exists Q = Q(\omega) > 0$, що $\forall (t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}$

$$|u_1(t,x) - u_2(t,x)| < C(\omega)\delta^{\rho} \text{ м.н.}$$

В підрозділі 3.4 доведено наступні леми.

Лема 3.3. *Нехай виконуються припущення* A1.5, A1.6. *Тоді для довільних фіксованих* $t \in [0,T], K > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ *випадкова функція*

$$\varphi(x) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)\,dy, \quad |x| \le K$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Лема 3.4. *Нехай виконуються припущення A1.5 – A1.7. Тоді для довільних* *фіксованих* $x \in \mathrm{R}$, $\delta > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_2 < 1/2$ *випадкова функція*

$$\hat{\varphi}(t) = \int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma(s,y)dy, \quad t \in [\delta, T]$$

має модифікацію, що неперервна за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_2$.

Основними результатами підрозділу 3.4 є наступні теореми.

Теорема 3.2. *Нехай виконуються припущення* A1.1 – A1.6. *Тоді*

1) Рівняння (3.15) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (3.15), то для всіх* $t \in [0,T], x \in \mathrm{R}$ $u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

2) Якщо також справджується A1.7, то для будь-яких фіксованих $\delta > 0, K > 0$ *та* $\gamma_1, \gamma_2 \in [0, \beta(u_0)]$ *таких, що* $\gamma_1 < 3/2 - 1/(2\beta(\sigma))$ *та* $\gamma_2 < 1/2$, *стохастична функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,x)$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,x_1) - \bar{u}(t_2,x_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |x_1 - x_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i \in [\delta, T], |x_i| \le K, i = 1,2.$$

Нехай крім (3.2) маємо наступні задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u_j(t,x)}{\partial x^2} + f_j(t,x,u_j(t,x)) + \sigma_j(t,x)\dot{\mu}(t), \\ u_j(0,x) = u_{0j}(x), \qquad \dfrac{\partial u_j(0,x)}{\partial t} = v_{0j}(x), \end{cases}$$

де $j \ge 1$, $(t,x) \in [0,T] \times \mathrm{R}$, $T > 0, a > 0$, а розв'язки розглядаються у м'якому сенсі, тобто,

$$\begin{aligned} u_j(t,x) = \frac{1}{2}\left(u_{0j}(x+at) - u_{0j}(x-at)\right) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} v_{0j}(y)dy \\ + \frac{1}{2a}\int_0^t ds \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} f_j(s,y,u(s,y))dy \\ + \frac{1}{2a}\int_{[0,t]} d\mu(s) \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \sigma_j(s,y)dy. \qquad (3.16) \end{aligned}$$

Для даних рівнянь розглядатимемо наступні припущення.

A1.1*. Функції $u_{0j}(y) = u_{0j}(y,\omega) : \mathrm{R} \times \Omega \to \mathrm{R}$, $v_{0j}(y) = v_{0j}(y,\omega) : \mathrm{R} \times \Omega \to \mathrm{R}$ вимірні та обмежені для кожного $\omega \in \Omega$:

$$|u_{0j}(y,\omega)| \le C(\omega), \quad |v_{0j}(y,\omega)| \le C(\omega).$$

A1.2*. $u_{0j}(y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|u_{0j}(y_1)-u_{0j}(y_2)\right| \le C(\omega)\left|y_1-y_2\right|^{\beta(u_0)}, \quad 0<\beta(u_0)\le 1.$$

A1.3*. $f_j(s,y,v):[0,T]\times \mathrm{R}\times \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|f_j(s,y,v)|\le C$.

A1.4*. $f_j(s,y,v)$ ліпшицева за $v\in \mathrm{R}$:

$$\left|f_j(s,y,v_1)-f_j(s,y,v_2)\right|\le C\left|v_1-v_2\right|.$$

A1.5*. $\sigma_j(s,y):[0,T]\times \mathrm{R}\to \mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $\left|\sigma_j(s,y)\right|\le C$.

A1.6*. $\sigma_j(s,y)$ неперервна за Гельдером:

$$\left|\sigma_j(s_1,y_1)-\sigma_j(s_2,y_2)\right|\le C(\left|s_1-s_2\right|^{\beta(\sigma)}+\left|y_1-y_2\right|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2<\beta(\sigma)\le 1.$$

Зауважимо, що тут константи C та $C(\omega)$ спільні для всіх $j\ge 1$.

Теорема 3.3. *Нехай для довільного* $j\ge 1$ *елементи рівнянь (3.15) та (3.16) задовольняють припущення* A1.1–A1.7 *та* A1.1*–A1.6*, A1.7 *відповідно. Нехай також*

$$U_j=\sup_{y\in \mathrm{R}}|u_{0j}(y)-u_0(y)|\to 0, \quad j\to\infty \quad \textit{м.н.},$$

$$V_j=\sup_{y\in \mathrm{R}}|v_{0j}(y)-v_0(y)|\to 0, \quad j\to\infty \quad \textit{м.н.},$$

$$\Sigma_j=\sup_{(s,y)\in[0,T]\times \mathrm{R}}|\sigma_j(s,y)-\sigma(s,y)|\to 0, \quad j\to\infty, \tag{3.17}$$

$$F_j=\sup_{(s,y,v)\in[0,T]\times \mathrm{R}\times \mathrm{R}}|f_j(s,y,v)-f(s,y,v)|\to 0, \quad j\to\infty.$$

Тоді для довільного $\delta>0$ *виконується*

$$|u_j(t,x)-u(t,x)|\to 0, \quad j\to\infty \quad \textit{м.н.}, \quad \forall (t,x)\in[\delta,T]\times \mathrm{R}.$$

В **четвертому розділі** дисертаційної роботи доводиться існування, єдиність та неперервність за Гельдером м’якого розв’язку задачі Коші для параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x), x\in \mathrm{R}$. Також досліджується асимптотична поведінка м’якого розв’язку рівняня теплопровідності (часткового випадку параболічного рівняння) при необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати.

Отже, досліджується наступна задача Коші

$$\begin{cases} Lu(t,x)dt+f(t,x,u(t,x))dt+\sigma(t,x)d\mu(x)=0, \\ u(0,x)=u_0(x), \end{cases} \tag{4.1}$$

де $(t,x)\in[0,T]\times \mathrm{R}$, μ — стохастична міра, визначена на $\sigma-$алгебрі борельових множин з R, а оператор L має вигляд

$$Lu(t,x)=a(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial^2 x}+b(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+c(t,x)u(t,x)-\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}, \qquad (4.2)$$

де функції a, b, c визначено в циліндрі

$$\bar{S}=[0,T]\times\mathrm{R}=\{(t,x): t\in[0,T],\ x\in\mathrm{R}\}.$$

Також розглядається частковий випадок задачі (4.1) (рівняння теплопровідності)

$$\begin{cases} du(t,x)=a^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}dt+f(t,x,u(t,x))dt+\sigma(t,x)d\mu(x), t>0, \\ u(0,x)=u_0(x). \end{cases} \qquad (4.4)$$

В даному розділі вивчаються м'які розв'язки задач (4.1) та (4.4), а саме, такі вимірні випадкові функції $u(t,x)=u(t,x,\omega):[0,T]\times\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$, що $\forall(t,x)$ задовольняють інтегральні рівняння

$$u(t,x)=\int_{\mathrm{R}}p(t,x;0,y)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_{\mathrm{R}}p(t,x;s,y)f(s,y,u(s,y))dy$$
$$+\int_{\mathrm{R}}d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds, \qquad (4.3)$$

де $p(t,x;s,y)$ — фундаментальний розв'язок рівняння $Lu(t,x)=0$ та

$$u(t,x)=\int_{\mathrm{R}}p(t,x-y)u_0(y)dy+\int_0^t ds\int_{\mathrm{R}}p(t-s,x-y)f(s,y,u(s,y))dy$$
$$+\int_{\mathrm{R}}d\mu(y)\int_0^t p(t-s,x-y)\sigma(s,y)ds, \qquad (4.16)$$

де $p(t,x)=\dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності.

Розглядаються наступні припущення.

A2.1. Функція $u_0(y)=u_0(y,\omega):\mathrm{R}\times\Omega\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|u_0(y,\omega)|\le C(\omega)$.

A2.2. $u_0(y)$ неперервна за Гельдером за $y\in\mathrm{R}$, а саме,

$$|u_0(y_1)-u_0(y_2)|\le C(\omega)|y_1-y_2|^{\beta(u_0)}, \quad \beta(u_0)\ge 1/2.$$

A2.3. $f(s,y,z):[0,T]\times\mathrm{R}\times\mathrm{R}\to\mathrm{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,y,z)|\le C$.

A2.4. $f(s,y,z)$ ліпшицева за $y\in\mathrm{R}$, $z\in\mathrm{R}$, тобто,

$$|f(s,y_1,z_1)-f(s,y_2,z_2)|\le C(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|).$$

A2.5. Функція $\sigma(s,y):[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,y)|\le C$.

A2.6. $\sigma(s,y)$ неперервна за Гельдером за $y\in\mathbb{R}$, тобто,

$$|\sigma(s,y_1)-\sigma(s,y_2)|\le C|y_1-y_2|^{\beta(\sigma)},\quad \beta(\sigma)>1/2.$$

A2.7. $\sup_{s\in[0,T],z\in\mathbb{R}}|f(s,y,z)|\to 0, u_0(y)\to 0, |y|\to\infty.$

A2.8. Функція $|y|^{\tau}$ інтегровна на $\mathbb{R}$ за μ для деякого $\tau>3/2$.

P. Фундаментальний розв'язок оператора L є однорідним за просторовою змінною:

$$p(t,x;s,y)=p(t,x-y;s,0).$$

L1. Функції $a(t,x), b(t,x), c(t,x)$ — неперервні та обмежені в $\bar{S}$ за сукупністю змінних t та x, і для деяких $\alpha_0>0, A>0$ всюди в $\bar{S}$ виконуються нерівності

$$|a(t,x)-a(t^0,x^0)|\le A\left(\left|x-x^0\right|^{\alpha_0}+\left|t-t^0\right|^{\alpha_0}\right),$$

$$|b(t,x)-b(t,x^0)|\le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0},$$

$$|c(t,x)-c(t,x^0)|\le A\left|x-x^0\right|^{\alpha_0}.$$

L2. Оператор L — рівномірно параболічний в $\bar{S}$, тобто, існують такі додатні сталі λ_0,λ_1, що $\lambda_0\le a(t,x)\le\lambda_1$ для всіх $(t,x)\in\bar{S}$.

В даному розділі доведено наступні леми.

Лема 4.1. *Нехай* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$ *та виконуються припущення* A2.5 – A2.6, P, L1, L2. *Тоді для будь-яких фіксованих* $t\in[0,T]$, $K>0$ *та* $\gamma_1<1/2$ *випадковий процес*

$$\vartheta(x)=\int_{\mathbb{R}}d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds,\quad |x|\le K,$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_1.

Лема 4.2. *Нехай* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$ *та виконуються припущення* A2.5 – A2.7, P, L1, L2. *Тоді для будь-яких фіксованих* $x\in\mathbb{R}$ *та* $\gamma_2<1/4$ *випадковий процес*

$$\hat{\vartheta}(t)=\int_{\mathbb{R}}d\mu(y)\int_0^t p(t,x;s,y)\sigma(s,y)ds,\quad t\in[0,T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником γ_2.

Основними результатами даного розділу є наступні теореми.

Теорема 4.1. *Нехай виконуються припущення* A2.1 – A2.6, L1, L2. *Тоді*

1. Рівняння (4.3) має розв'язок $u(t,x)$. *Якщо* $v(t,x)$ *— інший розв'язок (4.3), то для всіх* t *та* x*:* $u(t,x)=v(t,x)$ *м. н.*

Якщо додатково виконується припущення P *та функція* $|y|^{\tau}$ *інтегровна за* μ *на* $\mathbb{R}$ *для деякого* $\tau>1/2$*, то*

2. Для будь-яких фіксованих $t\in[0,T], K>0, \gamma_1<1/2,$ *випадкова функція* $u(t,x),\ x\in[-K,K],$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

3. Для будь-яких фіксованих $\delta>0,\ K>0, \gamma_1<1/2, \gamma_2<1/4,$ *випадкова функція* $u(t,x)$ *має модифікацію* $\tilde{u}(t,x)$ *таку, що для деякого* $C_{\tilde{u}}(\omega)>0$ *виконується*

$$|\tilde{u}(t_1,x_1)-\tilde{u}(t_2,x_2)|\le C_{\tilde{u}}(\omega)(|t_1-t_2|^{\gamma_2}+|x_1-x_2|^{\gamma_1}),$$
$$t\in[\delta,T],\ x\in[-K,K].$$

Теорема 4.2. *Нехай виконуються припущення* А2.1 – А2.8. *Тоді для розв'язку рівняння (4.16) існує модифікація* $u(t,x)$ *така, що при кожному* $t\in[0,T]$ *і кожному* $\omega\in\Omega$ *виконується*

$$|u(t,x)|\to 0,\quad |x|\to\infty.$$

В **п'ятому розділі** вивчається задача Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області зі стохастичною мірою $\mu(t), t\in[0,T]$. Доводиться існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку даної задачі. Досліджується асимптотична поведінка розв'язку при необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати.

У даній частині роботи розглядається рівняння

$$\begin{cases} du(t,\vec{x}) = a^2\Delta_{\vec{x}}u(t,\vec{x})dt + f(t,\vec{x},u(t,\vec{x}))dt+\sigma(t,\vec{x})d\mu(t), \\ u(0,\vec{x})=u_0(\vec{x}), \end{cases} \tag{5.1}$$

де $(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$, $a\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$, $\Delta_{\vec{x}}$ — оператор Лапласа та μ — стохастична міра, визначена на борельовій $\sigma-$алгебрі підмножин $[0,T]$.

Як і в попередніх розділах, символічний запис (5.67) розуміється у м'якому сенсі, тобто

$$\begin{aligned} u(t,\vec{x}) = &\int_{\mathbb{R}^d} p(t,\vec{x}-\vec{y})u_0(\vec{y})d\vec{y} \\ &+\int_0^t ds\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})f(s,\vec{y},u(s,\vec{y}))d\vec{y} \\ &+\int_{(0,t]} d\mu(s)\int_{\mathbb{R}^d} p(t-s,\vec{x}-\vec{y})\sigma(s,\vec{y})d\vec{y}. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Тут $p(t,\vec{x}) = (4a^2\pi t)^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{|\vec{x}|^2}{4a^2t}}$ — фундаментальний розв'язок рівняння теплопровідності, $u(t,\vec{x})=u(t,\vec{x},\omega):[0,T]\times\mathbb{R}^d\times\Omega\to\mathbb{R}$ — невідома вимірна випадкова функція.

Будемо розглядати наступні припущення.

А3.1. $u_0(\vec{y}) = u_0(\vec{y},\omega) : \mathbb{R}^d \times \Omega \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена для кожного $\omega \in \Omega$: $|u_0(\vec{y},\omega)| \le C(\omega)$.

А3.2. $u_0(\vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|u_0(\vec{y}_1) - u_0(\vec{y}_2)| \le C(\omega)|\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^{\beta(u_0)}, \quad 0 < \beta(u_0) \le 1.$$

А3.3. $f(s,\vec{y},v) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|f(s,\vec{y},v)| \le C$.

А3.4. $f(s,\vec{y},v)$ ліпшицева за $\vec{y} \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}$:

$$|f(s,\vec{y}_1,v_1) - f(s,\vec{y}_2,v_2)| \le C\left(|\vec{y}_1 - \vec{y}_2| + |v_1 - v_2|\right).$$

А3.5. $\sigma(s,\vec{y}) : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ вимірна та обмежена: $|\sigma(s,\vec{y})| \le C$.

А3.6. $\sigma(s,\vec{y})$ неперервна за Гельдером:

$$|\sigma(s_1,\vec{y}_1) - \sigma(s_2,\vec{y}_2)| \le C(|s_1 - s_2|^{\beta(\sigma)} + |\vec{y}_1 - \vec{y}_2|^{\beta(\sigma)}), \quad 1/2 < \beta(\sigma) < 1.$$

А3.7. μ неперервна за Гельдером:

$$|\mu((s_1,s_2])| \le C(\omega)|s_1 - s_2|^{\beta(\mu)}, \quad s_1, s_2 \in [0,T], \quad \beta(\mu) > 0.$$

А3.8. $|u_0(\vec{y})| \to 0, \quad \sup_{s\in[0,T], v\in\mathbb{R}} |f(s,\vec{y},v)| \to 0, \quad \sup_{s\in[0,T]} |\sigma(s,\vec{y})| \to 0, \quad |\vec{y}| \to \infty.$

В даному розділі доведено наступні леми.

Лема 5.1. *Нехай виконуються припущення* А3.5 *та* А3.6. *Тоді для будь-яких фіксованих* $t \in [0,T]$, $K > 0$ *та* $\tilde{\gamma}_1 < \beta(\sigma)$ *випадкова функція*

$$\vartheta(\vec{x}) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x} - \vec{y}) \sigma(s,\vec{y}) d\vec{y}, \quad |\vec{x}| \le K$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_1$.

Лема 5.2. *Нехай виконуються припущення* А3.5 – А3.7. *Тоді для будь-яких фіксованих* $\vec{x} \in \mathbb{R}^d, \delta > 0$, $\tilde{\gamma}_2 \le \beta(\mu)$, $\tilde{\gamma}_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$ *випадкова функція*

$$\hat{\vartheta}(t) = \int_{(0,t]} d\mu(s) \int_{\mathbb{R}^d} p(t-s, \vec{x} - \vec{y}) \sigma(s,\vec{y}) d\vec{y}, \quad t \in [\delta, T],$$

має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником $\tilde{\gamma}_2$.

Основними результатами даного розділу є наступні теореми.

Теорема 5.1. *Нехай виконуються припущення* А3.1 – А3.6. *Тоді*

(i) Рівняння (5.2) має розв'язок $u(t,\vec{x})$. *Якщо* $v(t,\vec{x})$ *— інший розв'язок (5.2), то для всіх* $t \in [0,T], \vec{x} \in \mathbb{R}^d$ $\; u(t,x) = v(t,x)$ *м. н.*

(ii) Для будь-яких фіксованих $t \in [0,T]$, $K > 0$, $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1 \le \beta(u_0)$

стохастична функція $u(t,\vec{x}), |\vec{x}| \le K$ *має модифікацію, неперервну за Гельдером з показником* γ_1.

(iii) Якщо також справедливе припущення A3.7, то для будь-яких фіксованих $\delta > 0, K > 0$ *та* γ_1, γ_2 *таких, що* $\gamma_1 < \beta(\sigma)$ *та* $\gamma_1 \le \beta(u_0)$, $\gamma_2 \le \beta(\mu) \wedge \beta(u_0)$ *та* $\gamma_2 < \beta(\sigma)/(4 - 2\beta(\sigma))$, *випадкова функція* $u(t,\vec{x})$ *має модифікацію* $\bar{u}(t,\vec{x})$, *для якої виконується*

$$|\bar{u}(t_1,\vec{x}_1) - \bar{u}(t_2,\vec{x}_2)| \le C(\omega)\left(|t_1 - t_2|^{\gamma_2} + |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^{\gamma_1}\right),$$
$$t_i \in [\delta, T], \quad |\vec{x}_i| \le K, i = 1,2.$$

Теорема 5.2. *Нехай виконуються припущення* A3.1 – A3.6 *та* A3.8. *Тоді для розв'язку рівняння (5.2) існує така модифікація* $u(t,\vec{x})$, *що для будь-яких фіксованих* $t \in [0,T], \omega \in \Omega$ *виконується*

$$|u(t,\vec{x})| \to 0, \quad |\vec{x}| \to \infty.$$

У **висновках** сформульовано основні результати дисертаційної роботи. Також, для порівняння, наведено деякі відомі результати для аналогічних задач.

ВИСНОВКИ

Стохастичні диференціальні рівняння в частинних похідних почали привертати увагу дослідників в 60-х роках минулого століття. Цей інтерес був зумовлений, з одного боку, необхідністю описувати випадковий вплив у таких природничих науках, як фізика, хімія, біологія, а з іншого — внутрішнім розвитком теорії випадкових процесів та стохастичного аналізу.

Зазвичай розлядалися диференціальні рівняння з випадковими мірами, що задовольняють певні припущення — такі, як існування моментів, неперервність, мартингальність, невід'ємність тощо. Так, в процесі розвитку теорії стохастичних рівнянь було широко досліджено диференціальні рівняння в частинних похідних з вінерівським процесом, з мартингальними та пуссонівськими мірами, з дробовим броунівським рухом та процесом Леві. Докладно вивчалися питання про існування та єдиність розв'язків цих рівнянь та їх регулярність, асимптотична поведінка.

В даній дисертаційній роботі вивчаються диференціальні рівняння в частинних похідних зі стохастичними мірами, на які накладається лише умова сигма-адитивності. Вони певним чином узагальнюють згадані вище рівняння та є мало дослідженими.

Розділ 3 дисертації присвячений доведенню існування, єдиності та неперервності за Гельдером м'яких розв'язків задач Коші для хвильових рівнянь зі стохастичними мірами $\mu(t),\ t\in[0,T]$ та $\mu(x),\ x\in\mathsf{R}$, а також встановленню неперервної залежності вказаних розв'язків від даних. Зокрема, у випадку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x)$ отримано показники гельдеровості за просторовою та часовою змінними відповідно $\gamma_1,\gamma_2\in[0,\beta(u_0)],\gamma_1<1-1/(2\beta(\sigma))$, $\gamma_2<1/2$. Для розв'язку хвильового рівняння зі стохастичною мірою $\mu(t)$ отримано показники гельдеровості за просторовою та часовою змінними $\gamma_1\in[0,\beta(u_0)],\gamma_1<3/2-1/(2\beta(\sigma))$ та $\gamma_2\in[0,\beta(u_0)],\gamma_2<1/2$ відповідно.

В розділі 4 досліджено задачу Коші для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу на множині $[0,T]\times\mathsf{R}$, породженого загальною стохастичною мірою $\mu(x),x\in\mathsf{R}$. Доведено існування, єдиність та неперервність за Гельдером м'якого розв'язку.

Порівнюючи одержані результати з результатами роботи V. Radchenko (2009)[1] (для рівняння теплопровідності), відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1<1/2$ та $\gamma_2<1/4$ за просторовою та часовою змінними відповідно. Для випадку рівняння теплопровідності в роботі V. Radchenko одержано показники $\gamma_1<1/6$ та $\gamma_2<1/18$. Таким чином, нам вдалося зробити узагальнення та покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте в даному розділі стохастичне рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(x),x\in\mathsf{R}$ описує зміну температури в середовищі при наявності певних випадкових і невипадкових надходжень теплової енергії. Показано, що при виконанні вказаних умов і необмеженому збільшенні абсолютної величини просторової координати температура прямує до нуля.

В розділі 5 досліджено задачу Коші для стохастичного рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(t)$ на множині $[0,T]\times\mathsf{R}^d,d\geq 1$. Показано існування та єдиність м'якого розв'язку, встановлено його неперервність за Гельдером.

Відмітимо, що ми отримали умову Гельдера з показниками $\gamma_1<\beta(\sigma)$, $\gamma_1\leq\beta(u_0)$ та $\gamma_2\leq\beta(\mu)\wedge\beta(u_0)$, $\gamma_2<\beta(\sigma)/(4-2\beta(\sigma))$ за змінними $\vec{x}$ і t відповідно. При цьому, в роботі V. Radchenko (2014)[2] для $d=1$ було одержано $\gamma_1<\beta(\sigma)-1/2$, $\gamma_2\leq\beta(\mu)$ і $\gamma_2<\beta(\sigma)-1/2$. Таким чином, нам вдалося узагальнити результати вказаної роботи та, оскільки $x/(4-2x)>x-1/2$ для $x\in(1/2,1)$, покращити показники неперервності за Гельдером.

Розглянуте рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою $\mu(t),\ t\in[0,\ T]$

---

[1] Radchenko V. Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure / V. Radchenko // Studia Math. — 2009. — Vol. 194, 3. — P. 231–251.
[2] Radchenko V. Heat equation with general stochastic measure colored in time / V. Radchenko // Modern Stochastics: Theory and Applications. — 2014. — Vol. 1. — P. 129–138.

описує зміну температури деякого середовища, в якому присутні певні випадкові та невипадкові надходження теплової енергії. Доведено, що за вказаних умов щодо джерел теплової енергії температура середовища прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Боднарчук І. М’який розв’язок хвильового рівняння із загальною випадковою мірою / І. Боднарчук // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2010. — № 24. — С. 28–33.

2. Боднарчук І. М. Асимптотична поведінка розв’язку рівняння теплопровідності зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук, В. М. Радченко // Науковий вісник Чернівецького нац. ун-ту. Математика. — 2012. — Т. 2, № 1. — С. 7–11.

3. Боднарчук І. М. Рівняння теплопровідності в багатовимірній області із загальною стохастичною мірою / І. М. Боднарчук, Г. М. Шевченко // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2015. — №. 93. — С. 7–21, (english translation in Theory of Probability and Mathematical Statistics — 2016. — No. 93. — P. 1–17).

4. Боднарчук І. Асимптотична поведінка м’якого розв’язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. Боднарчук // Вісник Київ. ун-ту. Математика і механіка. — 2016. — № 36. — С. 40–42.

5. Боднарчук І. М. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2016. — №. 94. — С. 1–15.

6. Боднарчук І. М. Регулярність м’якого розв’язку параболічного рівняння зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук // Укр. мат. журн. — 2017. — Т. 69, 1. — С. 3–16.

7. Bodnarchuk I. Mild solution of wave equation with general stochastic measure / I. Bodnarchuk // Stochastic analysis and random dynamics, International conference: Abstracts, June 14–20, 2009, Lviv. / K: Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, 2009. — P. 24.

8. Bodnarchuk I. M. Heat equation on multidimentional space with a general stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Stochastic Processes in Abstract Spaces, International conference: Program and Abstracts, October 14–16, 2015, Kyiv. / K: Institute of Mathematics of National Academy of Science of Ukraine, 2015. — P. 11.

9. Боднарчук І. М. Асимптотична поведінка м’якого розв’язку стохастичного рівняння теплопровідності / І. М. Боднарчук // Матеріали XIV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “Шевченківська весна — 2016 ” , 6–8 квітня 2016 р. — К.: “Київський

університет ” , 2016. — С. 10–11.

10. Боднарчук І. М. Хвильове рівняння зі стохастичною мірою / І. М. Боднарчук // Матеріали сімнадцятої міжнародної наукової конференції імені академіка Михайла Кравчука, 19–20 травня 2016 р. — К.: НТУУ “КПІ ”, 2016. — Т. 3, С. 50.

11. Bodnarchuk I. M. Mild solution of parabolic equation with stochastic measure / I. M. Bodnarchuk // Limit theorems in probability theory, number theory and mathematical statistics, International workshop in honour of Prof. V. V. Buldygin: Abstracts, October 10–12, 2016, Kyiv. / K: National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”, 2016. — P. 10.

АНОТАЦІЯ

Боднарчук І. М. Регулярність розв’язків рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами. — Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2017.

Дисертаційну роботу присвячено дослідженню властивостей м’яких розв’язків задач Коші для диференціальних рівнянь в частинних похідних зі стохастичними мірами. У випадку хвильових рівнянь, в яких випадковий вплив задається стохастичними мірами $\mu(t), t\in[0,T]$ та $\mu(x),\ x\in\mathbb{R}$, доведено існування та єдиність м’яких розв’язків та встановлено неперервність їх траєкторій за Гельдером за часовою та просторовою змінними. Також доведено, що розв’язки вказаних задач неперервно залежать від даних. У випадку параболічного рівняння зі стохастичною мірою $\mu(x),\ x\in\mathbb{R}$, доведено, що існує єдиний м’який розв’язок відповідної задачі Коші. Встановлено, що його траєкторії є неперервними за Гельдером за часовою та просторовою змінними. Для часткового випадку даної задачі (рівняння теплопровідності) досліджено асимптотичну поведінку розв’язку. А саме, показано, що за певних умов даний розв’язок прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати. У випадку задачі Коші для рівняння теплопровідності в багатовимірній області $(t,\vec{x})\in[0,T]\times\mathbb{R}^d, d\geq 1$ зі стохастичною мірою $\mu(t), t\in[0,T]$ доведено існування та єдиність м’якого розв’язку. Встановлено, що траєкторії розв’язку неперервні за Гельдером за часовою та просторовою змінними. Крім того, показано, що за певних умов даний розв’язок прямує до нуля при необмеженому зростанні абсолютної величини просторової координати.

Ключові слова: стохастичне хвильове рівняння, стохастичне параболічне рівняння, стохастичне рівняння теплопровідності, задача Коші, м’який розв’язок, стохастична міра, умова Гельдера, неперервна залежність від даних, асимптотична поведінка.

АННОТАЦИЯ

Боднарчук И. Н. Регулярность решений уравнений в частных производных. — Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика. — Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, 2017.

Диссертационная работа посвящена исследованию свойств мягких решений задач Коши для дифференциальных уравнений в частных производных со стохастической мерой. В случае волновых уравнений, в которых случайное влияние задается стохастическими мерами $\mu(t), t \in [0, T]$ и $\mu(x)$, $x \in \mathsf{R}$, доказано существование и единственность мягких решений и установлено непрерывность их траекторий за Гельдером по часовой и пространственной переменным. Также доказано, что решения указанных задач непрерывно зависят от данных. В случае параболического уравнения со стохастической мерой $\mu(x)$, $x \in \mathsf{R}$, доказано, что существует единственное мягкое решение соответствующей задачи Коши. Установлено, что его траектории непрерывны за Гельдером по часовой и пространственной переменным. Для частного случая данной задачи (уравнения теплопроводности) исследовано асимптотическое поведение решения. А именно, показано, что при некоторых условиях данное решение стремится к нулю при неограниченном росте абсолютной величины пространственной координаты. В случае задачи Коши для уравнения теплопроводности в многомерной области $(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathsf{R}^d, d \geq 1$ со стохастической мерой $\mu(t), t \in [0, T]$ доказано существование и единственность мягкого решения. Установлено, что траектории решения непрерывны за Гельдером по часовой и пространственной переменным. Кроме того, показано, что при некоторых условиях данное решение стремится к нулю при неограниченном росте абсолютной величины пространственной координаты.

Ключевые слова: стохастическое волновое уравнение, стохастическое параболическое уравнение, стохастическое уравнение теплопроводности, задача Коши, мягкое решение, стохастическая мера, условие Гельдера, непрерывная зависимость от данных, асимптотическое поведение.

ABSTRACT

Bodnarchuk I. M. Regularity of solutions of partial differential equations with stochastic measures. — Manuscript.

The thesis for the degree of the candidate of physical and mathematical sciences in speciality 01.01.05 — Probability Theory and Mathematical Statistics. — Kyiv National Taras Shevchenko University, Kyiv, 2017.

Thesis is devoted to the study of properties of mild solutions of Cauchy problems for partial differential equations with stochastic measures. The existence and uniqueness of mild solutions are proved in the case of wave equations in which random influence given by stochastic measures $\mu(t), t \in [0, T]$ and $\mu(x)$, $x \in \mathsf{R}$. Hölder continuity of solutions paths in time and space variables is established. It is also shown that the solutions of these problems are continuous depended on the data. The existence and uniqueness of a mild solution of the Cauchy problem are proved in the case of a parabolic equation with stochastic measure $\mu(x), x \in \mathsf{R}$. Hölder continuity of its paths in time and space variables is established. An asymptotic behavior of the solution is investigated in particular case (a heat equation). Namely, it is shown that under some assumptions the solution tends to 0 as absolute value of space variable tends to infinity. The existence and uniqueness of mild solution are proved in the case of a heat equation in multidimentional space $(t, \vec{x}) \in [0, T] \times \mathsf{R}^d, d \geq 1$ with stochastic measure $\mu(t)$, $t \in [0, T]$. Hölder continuity of solutions paths in time and space variables is established. Besides, it is shown that under some assumptions this solution tends to 0 as absolute value of space variable tends to infinity.

Key words: stochastic wave equation, stochastic parabolic equation, stochastic heat equation, Cauchy problem, mild solution, stochastic measure, Hölder condition, continuous dependence on data, asymptotic behavior.