

УДК 514.181

MSC 51N05

**ASSEMBLING OF NOISY MEASURED APICTORIAL JIGSAW
PUZZLE BY THE CURVATURE OF CONTOURS USING A
CORROTATIONAL BEAM SPLINE**

D. R. KOLTSOV¹, I. V. ORYNYAK²

¹Faculty of Applied Mathematics, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine,

E-mail: koltsovdd@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0396-7255

²Faculty of Applied Mathematics, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, Ukraine,

E-mail: igor_orinyak@yahoo.com, ORCID: 0000-0003-4529-0235

**УКЛАДАННЯ НЕТОЧНО ОЦИФРОВАНОГО
БЕЗКОЛІРНОГО ПАЗЛА ПО КРИВИЗНІ КОНТУРІВ ЗА
ДОПОМОГОЮ КОРОТАЦІЙНОГО БАЛКОВОГО СПЛАЙНА**

Д. Р. КОЛЬЦОВ¹, І. В. ОРІНЯК²

¹Факультет прикладної математики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,

E-mail: koltsovdd@gmail.com, ORCID: 0000-0002-0396-7255

²Факультет прикладної математики, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,

E-mail: igor_orinyak@yahoo.com, ORCID: 0000-0003-4529-0235

АБСТРАКТ. Automatic assembly of apictorial two-dimensional jigsaw puzzles is a typical problem of determining the correspondence between segments of two different curves (curve matching). Historically, this has been one of the earliest problems in such an important branch of computer science as pattern recognition. Curve matching is used in computer vision; reconstruction of destroyed paper documents or banknotes; archaeological restoration of mosaics, ornaments, pottery; interpretation of medical diagnostics results; and so on. A significant problem in these studies is the ordering of contour points, which are usually discrete and inaccurately determined by technical means due to the object's volume, lighting and color peculiarities, and environmental contamination characteristics. All this necessitates smoothing and interpolation of the obtained points. However, smoothing also leads to the loss of useful information. The problem is further complicated by the fact that matching criteria are based on comparing the curvatures of adjacent lines, while the effect of measurement errors and their smoothing on calculated curvatures is insufficiently studied in the literature.

Corresponding author: D.R. Koltsov (koltsovdd@gmail.com).

© D.R. Koltsov, I.V. Orynyak, 2025. This is an open-access article distributed under the terms of **Creative Commons Attribution Licence (CC BY)**.

The article considers a jigsaw puzzle containing 60 elements. Sides of all pieces are digitized using a medium-resolution camera. A conditional boundary is determined between the pixels of a piece and the general background. Typically, the constructed puzzle contour contains between 2000 and 3500 pixels. Then, a continuous curve is built using an original beam-based corotational spline, which treats the contour as a flexible beam, while the measurement points act as spring supports, with their stiffness controlling the degree of smoothing. A feature of the implemented method is that during calculation, the initially noisy boundary points may change their computed positions, which leads to the need for their renumbering. To address this, the concept of a projection of a measured point onto the calculated contour is introduced, defined as the nearest point, and renumbering is performed according to these projection sequences. To determine the corner points of a puzzle element, the points of maximum curvature are first found, where a so-called imaginary point is introduced. Unlike real points, here the condition of angular continuity of the contour is not fixed, and an angle jump occurs, the magnitude of which is obtained by minimizing the integral of the square of curvature in the vicinity of this vertex. The corner points divide the puzzle into four different contour segments. The correspondence between contours of different puzzle pieces (i.e., automatic assembly of the whole puzzle) is determined by minimizing the integral of the square of the difference of curvatures between two adjacent contour segments.

Practical calculations and automatic puzzle assembly confirmed the effectiveness of the proposed method.

KEYWORDS: two-dimensional jigsaw puzzle, corner points, beam corotational spline, curve matching, smoothing, renumbering of contour points.

АНОТАЦІЯ. Автоматичне укладання безколірних іграшкових двовимірних пазлів є типовою задачею визначення зіставлення ділянок двох різних кривих (curve matching). Це історично є однією з найперших задач в такому важливому напрямку комп'ютерних наук як розпізнавання образів. Визначення відповідності кривих застосовується в комп'ютерному зору; відтворенні знищених паперових документів чи банкнот; археологічних відновленнях мозаїк, прикрас, посуду; тлумаченнях результатів медичного діагностування; тощо. Значною проблемою в цих дослідженнях є упорядкування контурних точок, котрі зазвичай є дискретними і неточно визначеними технічними засобами за рахунок об'ємності предмета, особливостей освітлення і кольору, характеристик забрудненості навколишнього середовища. Все це призводить до необхідності згладжування і інтерполяції отриманих точок. Проте згладжування призводить і до втрати корисної інформації. Задача ускладнюється тим, що критерії співставлення оснований на порівнянні кривизн суміжних ліній, а вплив похибок вимірювання і їх згладжування на розрахункові кривизни в літературі є недостатньо дослідженим.

В статті розглядається іграшковий пазл, що містить 60 елементів. Для цього всі елементів оцифровуються за допомогою фотоапарата середньої роздільної здатності. Визначаються умовна границя між пікселями елемента і загального фону. Зазвичай побудований контур пазла містить від 2000 до 3500 пікселів. Потім будується неперервна крива за допомогою оригінального балкового коротаційного сплайну, що розглядає контур як гнучку балку, а точки виміру як пружинні опори, величина жорсткості яких контролює степінь згладжування. Особливістю реалізованої методики є те, що в процесі розрахунку початково зашумлені точки границі можуть змінювати своє розрахункове положення, що призводить до необхідності їх перенумерації. Для цього вводиться поняття проекції заміряної точки на розрахований контур, як найближчої точки, і перенумерація відбувається по цих проекціях-відповідниках. Для визначення кутових точок елемента (пазла) спочатку знаходяться точки найбільшої кривизни, де вводиться так звана уявна точка. На відміну від реальних точок тут не фіксується умова кутової неперервності контуру, і відбувається стрибок кутів, величина якого отримуються шляхом мінімізації інтеграла від квадрату кривизни в околі цієї вершини. Кутові точки розбивають пазл на чотири різних ділянки контури. Відповідність між контурами різних пазлів (тобто автоматичне збирання всього пазла) визначається шляхом мінімізації інтегралу від квадрата різниці кривизн двох суміжних ділянок контуру.

Практичні розрахунки і автоматичне складання пазлу засвідчили ефективність запропонованого методу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: двовимірний пазл, кутові точки, балковий коротаційний сплайн, узгодження кривих, згладжування, перенумерація точок контуру.

1. ВСТУП

Визначення відповідності ділянок двох кривих заміряних з певною похибкою є ключовою проблемою в задачах розпізнавання образів. Ця задача має велике значення в різних застосуваннях комп'ютерної інженерії. Як приклад, відмітимо задачі реконструкції археологічних артефактів зі їх фрагментів – мозаїка, посуд, прикраси, скелети [1–3]; відновлення навмисно або випадково пошкоджених документів чи банкнот [4, 5]; для дослідження структури ДНК в біології [6, 7]; для аналізу відповідності континентальних та океанічних ландшафтів в геології [8, 9]; виявлення штучних вставок на зображеннях [10]; розпізнавання об'єктів живої природи [11].

Так чи інакше ці дослідження пов'язані з задачею автоматичного укладання безколірних іграшкових двовимірних пазлів. Дослідження цієї задачі було вперше проведено в роботі [12]. Зокрема, відмічено, що ця задача являє собою «добре визначену та легко зрозумілу проблему, і оскільки вона влучно ілюструє труднощі, що виникають у всіх проблемах розпізнавання образів, вона ідеально підходить як піддослідний кролик для тестування

нових методів розпізнавання образів» [11]. Ця влучна цитата характеризує вибір об'єкта дослідження нашої роботи.

Тим не менше, дана проблема є далеко не тривіальною. Окрім обчислювальної комбінаторної складності — велика кількість елементів, що співставляються; різні можливі точки початку і кінця співставлявальних ділянок, — існують значні методологічні проблеми геометричного співставлення кривих. Перша проблема — це вибір критерію та відповідного порогу співставлення. Це можуть бути відстані між співставленими точками, кути зміни напрямку дотичної до контура, кривизни, а також їх різні інтегральні чи дискретні комбінації. Значні труднощі виникають і з визначенням кутів точок, де напрям дотичної не є неперервним. Проте найбільша проблема пов'язана з неточностями замірів, що залежить від характеристик інструментів заміру; характеристиками об'єму і кольору об'єкта і середовища, проникливості світлових чи фізичних сигналів, відстані до об'єкту, тощо.

Ці неточності не дозволяють проведення безпосереднього співставлення різних кривих. Більше того, в якості критеріїв часто виступають кути (перша похідна від положення) чи кривизни (пропорційні другій похідній). Відомо, що чисельне диференціювання значно ампліфікує високочастотний шум, що повністю затіняє корисну інформацію. Застосування згладжування може подавити шум, але призводить і до втрати корисної інформації. Очевидно, що для застосування згладжування треба розуміти наскільки характеристики (довжина ділянки згладжування, ваги точок) згладжуючих засобів (фільтри, конволюційні ядра, сплайни) відповідають амплітуді і частоті шуму. Більше того, на відміну від згладжування сигналів, чи просто одного геометричного контуру, в цій задачі ми маємо як мінімум дві криві, які можуть вимірюватися трохи по різному (різна кількість точок вимірювання, різні відстані між ними, трохи інша амплітуда шуму). Тому згладжування для задачі відповідності кривих є складнішою — проводити таке згладжування, щоб: а) рівень залишкової корисної інформації був максимально великим і значно більшим за залишковий рівень шуму; б) був однаковим для двох ділянок кривих, що співставляються незалежно від способу і особливостей вимірювання кожної.

В наступному аналізі літератури ми будемо торкатися в основному лише питань пов'язаних зі згладжуванням форми кривих і застосуванні кривизни як критерія подібності ліній, та менше приділяти уваги власне послідовності з'єднання елементів, що досить детально розглянуто в літературі.

Аналіз останніх досліджень. Першою роботою по «складанню» безколірних (apictorial) пазлів була [12]. Окрім самої постановки задачі були виділені три основних аспекта: 1) цифровий опис границь елементів; 2) маніпуляції з елементами — повороти і співставлення; 3) оцінка відповідності границь. Для співставлення виділялися точки, де кривизна була екстремальною. Проблема згладжування тут не розглядалася. В той час було типово розглядати співставлення лише по характерним точкам, а згладжування в основному відносилось до специфічних прийомів трактування належності первинних пікселів до області елемента в залежності від стану його

оточуючих пікселів [13]. Щодо згладжування контуру, то використовувалися суб'єктивні критерії врахування ваги наступної точки по відношенню до попередньої [14].

Вагомим вкладом була робота [15], де розглядався прямокутний (4 сторони) пазл із 104 елементів. Описана методика цифрового фотографування пазла і виділення 4-х кутових точок, де швидко і значно ($\sim 90^\circ$) змінюється напрямок дотичної (велика кривизна). Вперше відмічається необхідність згладжування контуру, відповідно до ідеї [16], де знаходиться найкоротший шлях між замірними точками, що лежить поблизу спостережуваного контуру, на відстані меншій відомої наперед величини неточності вимірювань. На ньому розставляються точки через рівні відстані. Для визначення того, чи є криві відповідними, знаходиться Евклідова відстань для заданих точок [15], яка повинна бути мінімальною. Для складання пазлів застосовувався глобальний алгоритм, де уже враховувалося розміщення попередньо проставлених елементів, де спочатку складалися кутові і граничні елементи усього пазла.

Наступна робота Волфсона [17] має велике значення оскільки вперше вводить залежність кривизни від координати довжини як найбільш значущої ознаки кривої. Оскільки автор не використовує математичні методи згладжування, то в якості замінника кривизни використовувалися певним чином усереднені значення приростів кутів на елементарних ділянках заданої довжини. Подібна методика застосовується при відновленні порізаних документів [18], проте тут відповідність двох контурів перевіряється для всього набору точок шляхом визначення суми коефіцієнтів, які наперед встановлюються в залежності від різниці квадратів кривизн. Більш універсальний підхід до порівняння двох контурів, що отримані в різному масштабі, дається в роботах [18, 19], де вводяться поняття енергії деформації і енергії видовження, як інтеграли від квадратів різниці кривизн і квадратів різниці лінійних деформації (видовження). Ці критерії порівняння застосовувалися в роботах [1, 20, 21] для співставлень археологічних, біомедичних, графічних зображень.

Цікаво відзначити, що подібні інтеграли для однієї кривої мають широке застосування в задачах інтерполяції і побудови оптимальних шляхів чи естетичних кривих і мають чітко виражений механічний зміст, адже крива деформування гнучкої балки задовольняє критерію мінімуму енергії деформації [22–24]. Подібний критерій ми будемо застосовувати і в цій роботі.

Методи згладжування і отримання неперервних кривизн для дискретно визначених точок положення були запропоновані раніше в 1986 [25]. Вводиться незалежний параметр t і вважається, що згладжені координати точок x та y можуть бути представлені як функції цього параметра t . Вважається, що значення t_i в точках заміру є відомими, наприклад є номером точки i , а замірні положення є відповідно X_i та Y_i . Тоді для отримання неперервних згладжених залежностей $x(t)$ та $y(t)$ вводиться конволюційний інтеграл з ядром $g(t, \sigma)$, де в якості ядра приймається відома функція

нормального розподілу з параметром σ . Очевидно, що σ є параметром згладжування (інтервалом) і чим він більший, тим значнішим є згладжування. Отримавши неперервні значення функцій $x(t)$; $y(t)$ можна знайти координату довжини, $s(t)$ і кривизну, $\kappa(t)$ кожної точки по відомим формулам диференційної геометрії [26].

Відмітимо, що Гаусівське згладжування є найбільш застосованим при обробці результатів вимірів [27, 28]. Проте в роботі [25] не уточнюється вибір параметру σ в залежності від амплітуди можливої похибки, а лише даються загальні коментарі, щодо впливу його на характер отримуваної кривої. В статистичних оцінках подібний підхід називається методом Надараї-Вотсона, який не вважається оптимальним для згладжування [29]. Зокрема, для врахування нерівномірно розміщених точок X_i та Y_i і коли відстань між ними співставна з параметром згладжування σ , пропонуються деякі методи інтерполяції проміжних значень між ними для використання їх в конволюційному інтегралі [30, 31].

Більше того, використання параметричних сплайнів чи кернелів для геометричних задач залежить від суб'єктивного вибору параметра t , такого, наприклад, як рівномірний розподіл чи привязаний до довжини дуги (так звана натуральна параметризація) інтерполяційного сплайну [32]. Проте жоден з цих популярних підходів не є оптимальним і широко застосовуються альтернативні підходи, зокрема, так званий доцентровий (centripetal) метод, де значення параметра t залежить від самої кривизни траєкторії [33]. Він також є ітераційним як і при натуральній параметризації, але дає кращі результати на ділянках різкої зміни кривизни.

Для ідентифікації морських ссавців застосовується альтернативний підхід для згладжування [11]. Замість вищезазначеного конволюційного інтегралу, що вимагає великої кількості обчислень і викликає певні труднощі врахування граничних умов для обмежених ділянок, використовується техніка В-сплайнів [11]. Тут також використовується параметрична апроксимація і координата, наприклад, $x(t)$ знаходиться шляхом мінімізації функціонала, де окрім відхилень по методу найменших квадратів враховується мінімізація інтеграла від квадрата кривизни з певною вагою ρ .

Параметр згладжування ρ грає подібну роль як і параметр σ . Аналогічні апроксимації широко застосовуються в статистичних аналізах [34]. Між іншим, кубічні (балкові) сплайни дають найменше значення згинальної енергії для кожного вибраного значення коефіцієнта пропорційності між приростом третьої похідної і функцією в заданих дискретних точках [35, 36], що фактично дозволяє рішати задачу як рішення диференційного рівняння третього порядку.

Проблема шуму визначається як основна при розпізнаванні образів в роботі [37]. Відзначається, що успішному впровадженні диференційних інваріантів перешкоджають складності їх обчислення, що приводять до підсилення шуму. Власне тому і пропонуються використання їх інтегральних відповідників. В роботі [38] згладжування проводиться за допомогою В-сплайнів, і вводиться інтеграл від модуля кривизни як характеристика для

порівняння кривих чи їх ділянок. Все це є свідченням відсутності надійних і зрозумілих методів згладжування кривизни до зрозумілого наперед рівня.

Оригінальна афінно-інваріантна характеристика кривої для співставлення кривих і розпізнавання прихованих об'єктів [39] також вимагає визначення кривизни з наступним інтегруванням їх абсолютних величин. Методика згладжування відбувається в два етапи. На першому етапі застосовується кернел Гауса, хоча як зазначається в [40] вибір параметра σ є неоднозначним, адже малі значення дають дуже багато точок, де кривизна змінює знак, а великі значення призводять до втрати корисної інформації. На другому етапі застосовуються B-сплайни, які дають неперервний і ще більш згладжений контур, придатний для отримання неперервних кривизн.

Автори [41,42] використовують кривизну і її похідну по довжині контуру як Евклідові диференціальні інваріанти. Характерними точками вважаються ті, де похідна від кривизни досягає нуля. Вони і розбивають криві на ділянки співставлення. Відзначається великий вплив шуму на отримані значення кривизни, і це вимагає проведення досить точних вимірів [40,41] контура. Це зменшує, але не знімає проблему шуму. Пропонуються два емпіричні методи згладжування. Перший метод передбачає переміщення точок найбільшої кривизни в напрямку кривизни на деяку величину пропорційну цій кривизні. Це суб'єктивний метод, що може по різному згладжувати цю криву і відповідну їй іншу криву, що затрудняє процедуру узгодження. Інший метод також є суб'єктивним, використовує техніку періодичних сплайнів з ітераційною процедурою перерозподілу початкових точок пропорційно по довжині сплайну, причому кількість ітерацій досягла 1500 [41]. Як вказують автори [41], цей метод не має теоретичного обґрунтування і в майбутньому пропонується застосовувати згладжувальні сплайни.

В роботі [42] дається огляд сучасних методів представлення форми двовимірних фігур і суттєвих параметрів (ознак), що її характеризують, причому кривизна є одним із найбільш суттєвих із них (distinguishable). Проте ця ознака досить добре працює у випадку даних без шуму. Вказується що звичайно застосовується Гаусівське згладжування з різними величинами σ , вибір яких суттєво впливає на оцінку відповідності.

Ціль статті. Наша робота присвячена застосуванню коротаційних балкових сплайнів, КБС для контрольованого (тобто такого, коли шум згладжується до зрозумілого наперед прийняттого для подальших рішень рівня) згладжування кривизни геометричних фігур по неточно визначеним даним. В певному сенсі вона є подальшим узагальненням результатів роботи [43], де згладжувалася кривизна центральних точок осі трубопровода за допомогою балкового коротаційного сплайну. Там виміряні точки знаходилися на віддалі, що в багато разів перевищує похибку вимірювання. Це значно спрощує методику аналізу і дозволяє знаходити кривизни з заданою точністю за одну ітерацію.

Новизна даної роботи полягає в розгляді «густих» точок, де похибка може бути більшою за відстані між точками, адже відстань вимірюється

пікселями, а завжди (колір, освітленість) похибка віднесення даного пікселя до тіла може складати декілька пікселів. Тому тут будемо мати справу з перенумерацією точок і застосуванні ітераційних процедур. Друга особливість – це власне розроблення критеріїв співставлення контурів і аналіз впливу похибки вимірювання на співставність «свох» і «чужих» контурів. Робота направлена на розробку методик і критеріїв контрольованого згладжування артефактів і неточностей для: а) виділення кутових точок; б) застосування обгрунтованого критерію відповідності ділянок двох контурів.

Теорія і практика застосування КБС описана в наших роботах [24,43–45]. КБС є розвитком відомих балкових інтерполяційних сплайнів, що беруть початок ще з роботи Холідея 1959 [46], де показано, що рішення теорії балок (кубічні сплайни) для заданих положень точок мінімізують наступний функціонал енергії деформації:

$$E_{EoD} = \int_0^L \kappa^2(l) dl. \quad (1)$$

Криві, що задовольняють критерію (1) часто розглядаються як добротні і функціонал застосовується для побудови інтерполяційних кривих. Для задач згладжування балкові кубічні сплайни були застосовані вперше в роботі. Цікаво відмітити, що фактично цей функціонал є рішенням диференціальних рівнянь теорії балок, де вважається, що в точках заміру (опорах), діють сили пропорційні різниці між розрахунковим значенням та замірним значенням, з коефіцієнтом пропорційності ρ [47].

1. ТЕОРІЯ КБС

1.1. Опис КБС

Алгоритм КБС приймає на вхід набір впорядкованих точок $B_i(X_i, Y_i)$ (в нашому випадку пікселів) в прямокутній системі координат, де i – це номер точки в наборі даних. На кожній ітерації k , точкам незмінного початкового набору B_i ставиться у відповідність розрахункові точки зі апроксимованого набору $A_i^k(X_i^k, Y_i^k)$ в подальшому ці точки будуть називатись «контрольними точками». Індекс k , в більшості випадків, буде опускатись, рис. 1. Всі точки з розрахункового A та вхідного B наборів визначені в глобальній системі координат (\vec{i}, \vec{j}) .

З'єднаємо послідовно точки A_i^k та A_{i+1}^k прямими лініями, утворюючи при цьому відрізки, ці відрізки будемо позначати за допомогою індексу i , що відповідає значенню початкової точки відрізка, рис. 1. Довжина вектора \vec{l}_i , для кожного відрізка, визначається за наступною формулою.

$$\vec{l}_i = \vec{A}_{i+1} - \vec{A}_i = (X_{i+1} - X_i) \vec{i} + (Y_{i+1} - Y_i) \vec{j}. \quad (2)$$

Для кожного відрізка визначається локальна система координат (s_i, w_i) та відповідні базові вектори \vec{t}_i та \vec{n}_i .

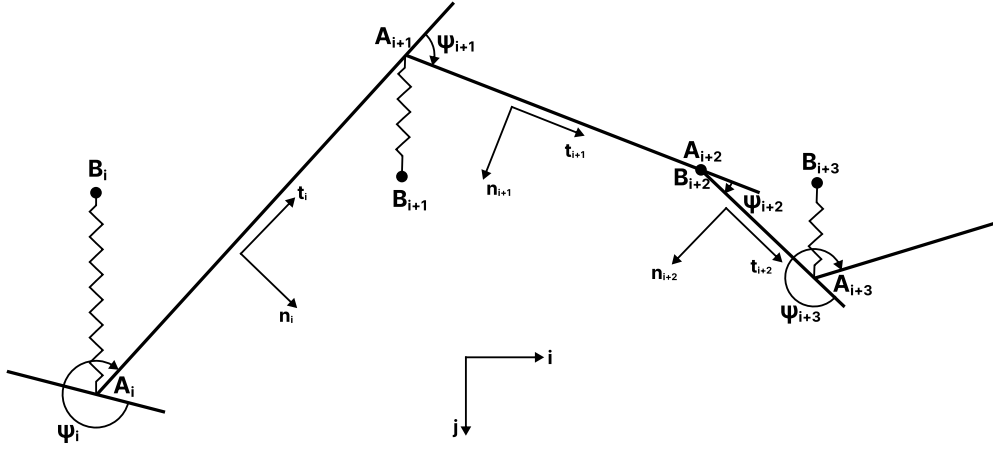


РИС. 1. Модель дискретних балок на пружних опорах, точка A_{i+2} тут є уявною

Локальний дотичний вектор \vec{t}_i , виходячи з формули (2), визначається наступним чином:

$$\vec{t}_i = \frac{\vec{l}_i}{|\vec{l}_i|} = a_i \vec{i} + b_i \vec{j}, \quad (3)$$

де:

$$|\vec{l}_i| = l_i = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}.$$

Нормальний вектор \vec{n}_i визначається як перпендикуляр до \vec{t}_i та повернутий відносно \vec{n}_i за годинниковою стрілкою, рис. 1. Локальна система координат (s_i, w_i) пов'язана з базовими векторами наступним чином. Початкова точка s_i співпадає зі значеннями \vec{A}_i а напрямок співпадає зі значенням вектора \vec{t}_i . Аналогічно для w_i , чий початок співпадає з \vec{A}_i а напрямок співпадає з вектором \vec{n}_i . Вектор \vec{n}_i визначається наступним чином:

$$\vec{n}_i = c_i \vec{i} + d_i \vec{j}, \quad (4)$$

де:

$$\begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Також важливу роль в побудові згладженого контуру відіграє узгодження кутів між двома сусідніми прямими відрізками, тобто між напрямками \vec{t}_i та \vec{t}_{i+1} . Позначимо ці кути розбіжності як ψ_i , їх додатній напрям співпадає з рухом годинникової стрілки, рис. 1, та рахується по формулам

скалярного добутку векторів:

$$\cos(\psi_i) = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_{i+1}, \quad (6)$$

$$\sin(\psi_i) = \vec{n}_i \cdot \vec{t}_{i+1}. \quad (7)$$

Для визначення квадранта в якому знаходиться кут нам необхідно визначити обидва значення, так як поодинокі ці функції визначені лише на двох квадрантів координатної системи. Відмітимо, що якщо в обох рівняннях отримуємо знак «+», то кут лежить в першому квадранті.

Тепер розглянемо основну математичну модель методу прямолінійної балки на згин, її параметри та рівняння. Балка описується вектором стану $\vec{Y}(t)$, що характеризується набором чотирьох параметрів для локальної кожної координати довжини t , що відраховується від точки початку ділянки, $\vec{Y}(t) = \text{column}\{W(t); \theta(t); M(t); Q(t)\}$. Тут слідуючи поняттям теорії балок, замість функції відхилення і її похідних, ми оперуємо поняттями: $W(t)$ — це переміщення, додатній напрям якого співпадає з напрямком нормалі; $\theta(t)$ — кут повороту, додатній напрям якого співпадає з напрямком повороту від дотичної до нормалі (по годинниковій стрілці); $M(t)$ — згинальний момент, $Q(t)$ — поперечна сила. Їхні додатні напрями вибираються так, щоб в відповідних диференціальних залежностях використовувався знак «+». Тут розглядається найпростіша статична балка, так звана балка Ейлера-Бернуллі, що описана в усіх підручниках по опору матеріалів. Використовуються наступні диференційні залежності між параметрами балки:

$$\frac{dW(t)}{dt} = \theta(t); \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = M(t); \quad \frac{dM(t)}{dt} = Q(t); \quad \frac{dQ(t)}{dt} = 0. \quad (8)$$

Розв'язок системи визначальних рівнянь (8) в формі, зручній для застосування методу початкових параметрів, є таким:

$$\left(\vec{Y}(t)\right) = [p_{i,j}(t)] \left(\vec{Y}_0\right) \quad (9)$$

де $\vec{Y}_0 = \vec{Y}(t=0)$ є вектором стану в початковій точці розглянутого відрізка,

$$(p_{i,j}(s)) = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq l_i. \quad (10)$$

Для формулювання схеми розрахунку нам потрібно доповнити рівняння зв'язку (10) рівняннями спряження, які пов'язують вектор стану в кінцевій точці попереднього вектора та в початковій точці наступного:

$$W_{i+1,0} = W_{i,1}, \quad (11)$$

$$\theta_{i+1,0} = \theta_{i,1} - \psi_i, \quad (12)$$

$$M_{i+1,0} = M_{i,1}, \quad (13)$$

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1} - D(W_{i,1} - \Pi_i). \quad (14)$$

де нижні індекси «0» та «1» позначають початок та кінець відрізка відповідно. Зауважимо, якщо D прямує до нескінченності, що має місце при дуже невеликих розкидах вхідних даних (порівняно з відстанями між точками замірів) чи при їх точному визначенні (задача інтерполяції), то рівняння (14) не може бути реалізоване в обчислювальній програмі. В цьому випадку воно має представлятися так:

$$W_{i,1} = \Pi_i - C(Q_{i+1,0} - Q_{i,1}), \quad C = \frac{1}{D}. \quad (15)$$

Рівняння (11) означає, що зміщення (відхилення положення від початкової прямої) має бути однаковим. Рівняння (12) полягає в забезпеченні дотичної неперервності деформованого контуру, де кути деформації компенсують початкове кутове зміщення. Рівняння (13) — це рівність наближених кривизн балки. А рівняння (14) враховує дію пружинної опори, розміщеної між перерізами, де D — жорсткість пружної опори. Як показано в роботі [47] рівномірна згладжуваність досягається, якщо вважати, що жорсткість пропорційна відстані між опорами, тобто:

$$D = \frac{L_i}{h^4},$$

де h — це параметр згладжування, що має розмірність довжини, чим він більший, тим сильніше згладжується контур. Щодо L_i — це довжина, на якій діє ця опора, тобто сума половинок відстані до правої опори і відстані до лівої опори.

$$L_i = \frac{s_i}{2} + \frac{s_{i+1}}{2}.$$

Окремої уваги заслуговує поняття Π_i — відстань між опорою точкою B_i та найближчою точкою контуру A_i . Пошук і перенумерація точок A_i на кожній ітерації є суттєвою новизною відповідна процедура буде описана нижче.

1.2. Поняття уявної точки

В задачах геометричного моделювання методом КБС часто виникає необхідність застосування уявних точок, які трактуються як точки A_i . Нагадаємо, що уявна точка не має фізичного відповідника, тобто точки B_i . Її введення обумовлене необхідністю зменшення розрахункових кутів $\theta(t)$, бо рівняння теорії балок стають неправильними [24, 43]. Введення уявних точок в розрахункову схему може відбуватися різними способами, наприклад, просто на середини прямих відрізків з самого початку, а можна на будь якому етапі — ітерації [24]. Їх застосування вимагає перенумерації всіх точок. Введення уявних точок відбувається, коли ми будуємо наближений контур (перед першою ітерацією), або у нас уже є поняття наближеного розрахункового контуру (на наступних ітераціях). Розрахунки для уявних точок, і відрізків, що містять їх, майже нічим не відрізняються від таких для реальних точок. Ми використовуємо ті ж самі рівняння зв'язку (10).

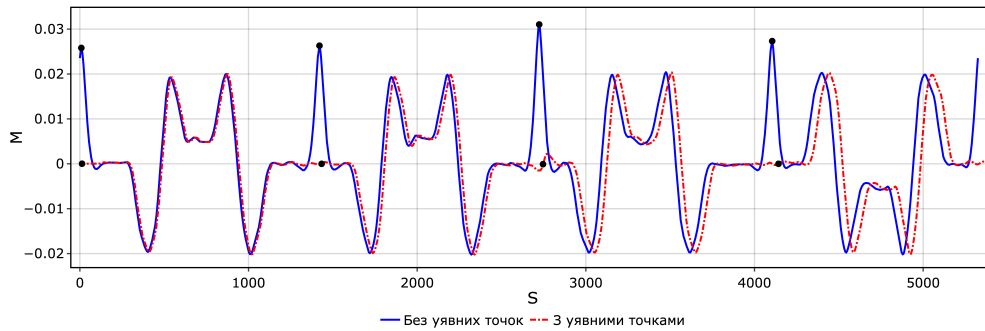


РИС. 2. Порівняння графіка моментів з уявними кутовими точками та без них

Єдиною особливістю є те, що жорсткість D пружини (якої немає) приймається нулю. Тому останнє рівняння спряження (14) записується так:

$$Q_{i+1,0} = Q_{i,1}.$$

В даній роботі поняття уявної точки застосовується також для визначення кутових точок. В кутових точках відбувається стрибок кута. Проблема в тому, що ми не знаємо їх положення, бо із-за неточностей визначення положення реальних точок завжди є ймовірність прийняття невірної точки як кутової, що може впливати на подальші результати. Тому спочатку проводиться проведення сплайну для усього контуру. В районі кутових точок, інтеграли енергії приймають (для обмеженої кількості пікселів, скажімо 20) найменше значення. Тому ми завжди знаємо приблизне положення кутової точки. Спочатку воно береться суб'єктивно. Тоді в рівняннях спряження викидається рівняння неперервності кутів (12). А замість нього використовується умова, що моменти в кутових точках дорівнюють нулю:

$$M_{i,1} = 0 \tag{16}$$

Ця умова є досить логічною, адже біля кутових точок контур являє собою прямі відрізки, тобто кривизна прямує до нуля. Використання умови (16) вимагає проведення декількох ітерацій з: а) перенумерацією реальних точок і віднесенням їх до найближчих ділянок контура (дивись нижче); б) та поступовим уточненням кута між ділянками

Завдяки такій умові ми можемо згладити контур а також позбутися паразитних значень моментів, які виникають в кутових точках. Більше цього, це дозволяє розбити весь контур на чотири окремих окремих підконтури, співставлення яких власне і є основою процедури збирання пазла в цілому.

1.3. АЛГОРИТМ МОДЕЛІ, РІШЕННЯ СИСТЕМИ І ПОВУДОВА КОНТУРУ

Алгоритм побудови початкового полігонального контуру на кожній ітерації, нумерації невідомих, складання системи рівнянь, їх рішення і отримання згладженої геометрії, переходу на наступну ітерацію, що вимагає полігональної геометрії — все це описано в наших попередніх роботах [41, 43, 44]. Тут ми лише відмітимо наступне.

Перед кожною ітерацією маємо пронумеровані точки B_i та A_i , де $0 \leq i \leq M$. Останні утворюють полігон з M прямими відрізками. По положеннях цих точок знаходимо відстань між ними Π_i , яка має знак. Знак є додатнім, якщо вектор $\overrightarrow{A_i B_i}$ утворює гострий кут з нормаллю \vec{n}_i .

Для кожного відрізка формуємо вектор невідомих (4 параметри) на його початку і в його кінці, тобто всього 8 невідомих. Оскільки кількість відрізків є M , то всього маємо $8M$ невідомих. З іншої сторони, для кожного відрізка ми маємо 4 рівнянь зв'язку, тобто $4M$ рівнянь. На межах між елементами (відрізками) ми маємо 4 рівняння спряження. Всього таких меж $M - 1$, тобто маємо $4M - 4$ рівняння. Т акож на кожній границі застосовуються по 2 граничних умові, всього їх 4. Таким чином, кількість рівнянь і кількість невідомих — однакова.

Розв'язок матриці дає нам вектори стану $\vec{Y}_{m,0}$ на початку кожного сегмента (елемента). Згідно з (10) вектор стану $\vec{Y}_m(t)$ можна визначити для кожної точки t сегмента.

Ще однією принциповою новизною нашого методу порівняно з методом Фаулера та Вілсона [48] є введення змінного результуючого вектора нормалі, $\vec{n}\theta_m(t)$, вздовж якого розміщується обчислена величина $W(t)$. Це необхідно для забезпечення неперервності сплайна поблизу кінців сегмента, особливо фіктивних точок. Цей деформований вектор нормалі $\vec{n}\theta_m(t)$ отримується обертанням початкового вектора \vec{n}_m на обчислений кут $\theta(t)$. Легко перевірити, що завдяки умові неперервності кутів (12), деформовані вектори нормалі стануть неперервними. Таким чином:

$$\vec{n}\theta_m(t) = \vec{n}_m \cos\theta(t) - \vec{t}_m \sin\theta(t).$$

Зрештою, істинне значення положення точок m -го відрізка представляється як векторна сума початкового положення (прямий відрізок) та обчисленого зміщення:

$$\vec{R}_m(t) = \left\{ \vec{A}_{m-1} + t \cdot \vec{t}_m \right\} + W_m(t) \vec{n}\theta_m(t) = \vec{A}_{m-1} + \vec{t}_m \cdot T(t) + \vec{n}_m \cdot N(t).$$

Подальший аналіз дає можливість по значенням $\vec{R}_m(t)$ отримати по формулам диференційної геометрії координату довжини, $s(t)$, та кривизну, $\kappa_d(t)$ в кожній точці контура [43, 44] кожної ділянки. Для зручності приведемо їх також і тут:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{(\dot{T})^2 + (\dot{N})^2} dt,$$

$$\kappa_d(t) = \frac{\ddot{N}\dot{T} - \ddot{T}\dot{N}}{\sqrt{(\dot{T})^2 + (\dot{N})^2}^3}.$$

Очевидно, що маючи залежності параметрів $s(t)$ та $\kappa_d(t)$, можна будувати залежності $\kappa(s)$

2. ЗГЛАДЖУВАННЯ І СПІВСТАВЛЕННЯ ПАЗЛІВ

2.1. ПОЧАТКОВИЙ КОНТУР, НУМЕРАЦІЯ І ПЕРЕНУМЕРАЦІЯ ТОЧОК B_i

Власне цей параграф і становить основну принципову методичну відмінність даної роботи від попередніх [24, 43–45] в частині згладжування кривих. Тут проблема полягає в тому як власне визначити сам контур (пронумеровані дискретні точки B_i); створити перший пробний контур, знайти на ньому точки A_i , відповідно до розміщення яких перенумеровуються точки B_i ; а потім створити процедуру уточнення контурів на послідовних ітераціях і локальної перенумерації точок B_i . Опишемо це детально в вигляді алгоритма:

1. Проводимо сканування всіх пазлів, рис. 3а. Отримуємо кольорову модель. Для початку ми змінюємо кольорову модель з RGB на HSV (відтінки, насиченість, яскравість), що дає нам більшу гнучкість у визначенні кольору. Для визначення білого кольору вводиться правило розділення. Наприклад, все що потрапляє в проміжок $(0, 0, 240) - (360, 50, 255)$ вважається білим кольором, а все інше це чорний колір. Тобто всі відтінки зі значенням насиченості до 50 та значенням яскравості від 240 до 255 ми вважаємо білим кольором. Після таких перетворень ми отримуємо зображення розділене на 2 кольори чорне і біле, де зображення пазла чорне, а фон білий. Далі ми інвертуємо кольори так щоб фон став чорним а паз білим. Таким чином ми отримуємо маску пазла, рис. 3б. І вже до цього зображення застосовується функція `findContours` з бібліотеки `OpenCV` яка і дає нам початкові точки B_i , рис. 3в.

2. На першій ітерації вибирається, кожна K -та точка серед точок B_i , наприклад кожна 20, щоб початковий полігон був гладким, і кути ψ_i , рис. 1, були менше 90° . Для цього початкового полігона вважаємо, що точки A_i співпадають з B_i , а значить початкові $\Pi_i \in \text{нульовими}$. Вибираємо початкове значення $l = 20$ (тобто вважається, що довжини всіх артефактів завідомо менше 20). Обчислюємо першу ітерацію, після якої ми отримуємо початковий наближений контур, який ми будемо уточнювати в подальшому за рахунок врахування всіх інших точок і уточнення (зменшення) значення l . Для локальної ділянки ми отримуємо розрахунковий (синій) контур, рис. 4.



РИС. 3. Обробка пазла

3. Наша задача тепер знайти проєкції всіх без винятку точок B_i на контур і отримати точки A_i . Більше того, навіть ті точки B_i (кожна К-та), що приймали участь в побудові наближеного контуру, для яких ми уже маємо відповідні розрахункові значення A_i , також приймають участь в уточнюючій процедурі, що полягає в перевизначенні точок A_i і їх перенумерації, а значить і в перенумерації точок B_i . Для цього між К-тими точками вводиться (назвемо ці великі ділянки К-тими ділянками) по 200 додаткових точок, і шукаються найближчі відстані між реальними точками B_i та цими додатковими (в межах 3-х найближчих К-тих ділянок). Таким чином, знаходяться нові A_i , які нумеруються відповідно до їх розміщення по довжині контура, а потім відповідно і перенумеровуються точки B_i . На рис. 5 показані з'єднані відповідно до початкової нумерації точки B_i , а на рис. 6 — вони з'єднані відповідно до отриманої перенумерації.

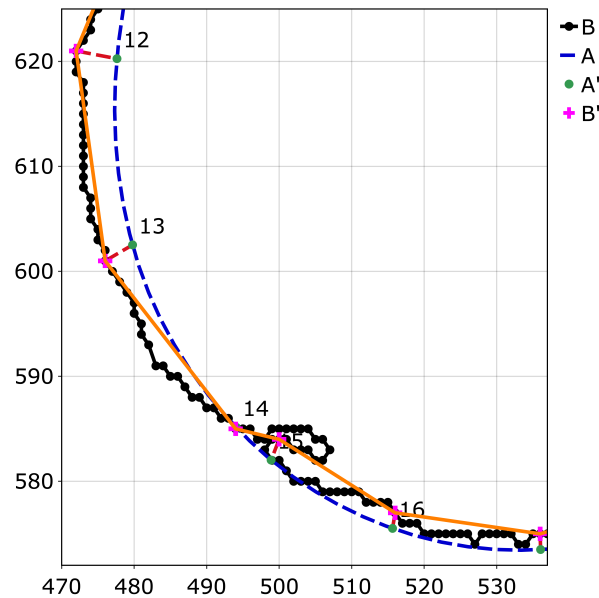


РИС. 4. Контур після першої ітерації. Чорні точки це точки B_i . Фіолетові точки — це кожна 20-та заміряна точка, тобто К-ті точки. Помаранчеві — це початковий полігон, а синій контур показує розрахункову криву після 1 ітерації. Червоним пунктиром показана відповідність між кожною 20-тою точкою та точками згладженого контуру, тобто відповідні їм точки A_i

4. Маючи послідовність точок A_i , відповідних і локально найближчих до B_i , а значить і відстані P_i переходимо до наступного етапу уточнень. Вибираємо нове значення параметра згладжування, наприклад, по правилу $h^{k+1} = h^k/1.2$, що дає менше згладжування порівняно з попереднім. Будемо новий полігон з точок B_i , будемо сплайн і знаходимо новий контур, на якому, зокрема, маємо нові позиції точок A_i . Проте ці точки можуть незначно «уходити» в сторону від точок B_i . Тому в околі «старих» точок

A_i ми генеруємо на контурі по декілька точок вліво і вправо від них. Серед них шукаємо найближчі до точок B_i точки, які перепозначимо як нові уточнені A_i .

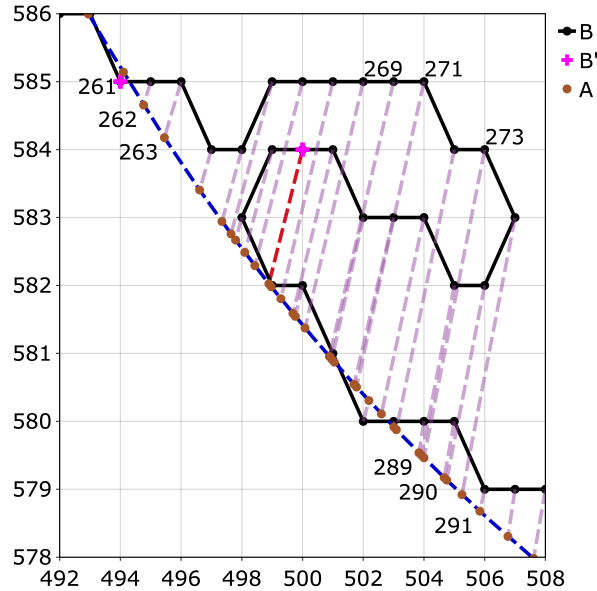


РИС. 5. Проекції точок B_i на розрахований контур та їх перенумерація. Точки B_i відповідно до початкової нумерації і їх проекція (фіолетові) на розрахований контур

2.2. КРИТЕРІЙ ВІДПОВІДНОСТІ ДВОХ ПІДКОНТУРІВ

Для визначення якості кривої використовується наступна відома формула:

$$E = \int_0^l \kappa^2 ds, \quad (17)$$

де κ — це кривизна. Чим менше отримане значення енергії E , тим краща добротність кривої. Формула (17) застосовується для початкового аналізу кожної окремої сторони кожного контуру. Зокрема, певне фіксується певне критеріальне значення E_{st} , по якому розділяються умовно прямолінійні (граніця пазла) та криволінійні сторони.

Для порівняння двох сторін пазла необхідно взяти значення кривизн цих сторін (одна з яких рахується в протилежному напрямку) і застосувати формулу (17) наступним чином

$$E_{a,b} = \int_0^l (\kappa_1(s) - \kappa_2(s))^2 ds, \quad (18)$$

де ми ввели поняття енергії (критерію) порівняння $E_{a,b}$ як енергії взаємної різниці кривизн двох різних сторін a та b . Таким чином, ми знаходимо значення якості різниці кривизн.

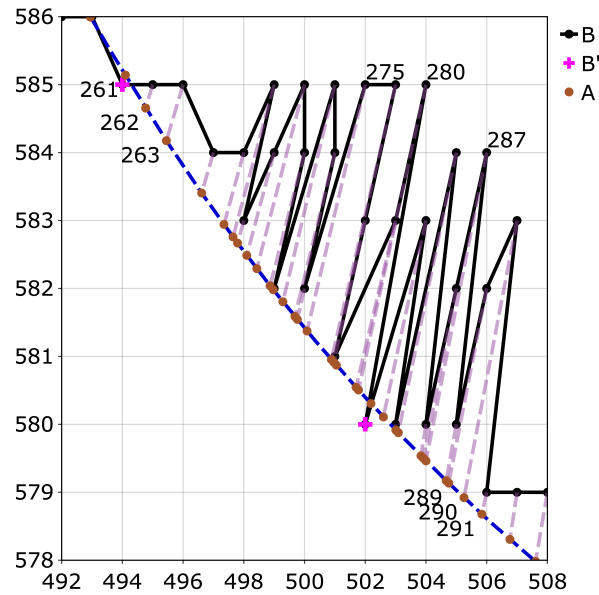


РИС. 6. Проекції точок B_i на розрахований контур та їх перенумерація. Перенумеровані точки B_i відповідно до розміщення їх проєкцій A_i

Сторони різних елементів пазла вважаються відповідними (кандидатами на відповідність), якщо їх взаємна енергія дає найменше значення. Також необхідно зауважити, що для порівняння сторін їх необхідно опрацювати двічі — за та проти годинникової стрілки.

3. ПРИКЛАДИ ОБРОБКИ ДАНИХ

3.1. РОЗГЛЯДУВАНИЙ ПАЗЛ, НУМЕРАЦІЯ

Розглядуваний пазл із 60 елементів показаний на рис. 7.

Очевидно, що самі пазли містять велику гамму кольорів, що ускладнює вибір значення яскравості, що характеризує належність пікселя до пазла, а не до загального фону.

Всі елементи пронумеровані. Кожен елемент має 4 сторони, які також нумеруються за годинниковою стрілкою. Так, для пазла №1 показано порядок нумерації сторін. В подальшому сторони пазлів будуть позначатись як номер пазла та номер сторони записані через дефіс. Так, 1-1 це права сторона першого пазла.

Таким чином, ми маємо $60 \cdot 4 = 240$ сторін. Кожна сторона має співставлятися з іншою. Звичайно, наявність кутових і прямих сторін, випуклих і вгнутих сторін значно зменшує кількість необхідних співставлень, і це детально розглядається в інших роботах [11, 15, 24].

Наша задача полягає в співставленні кривизн відповідних сторін.

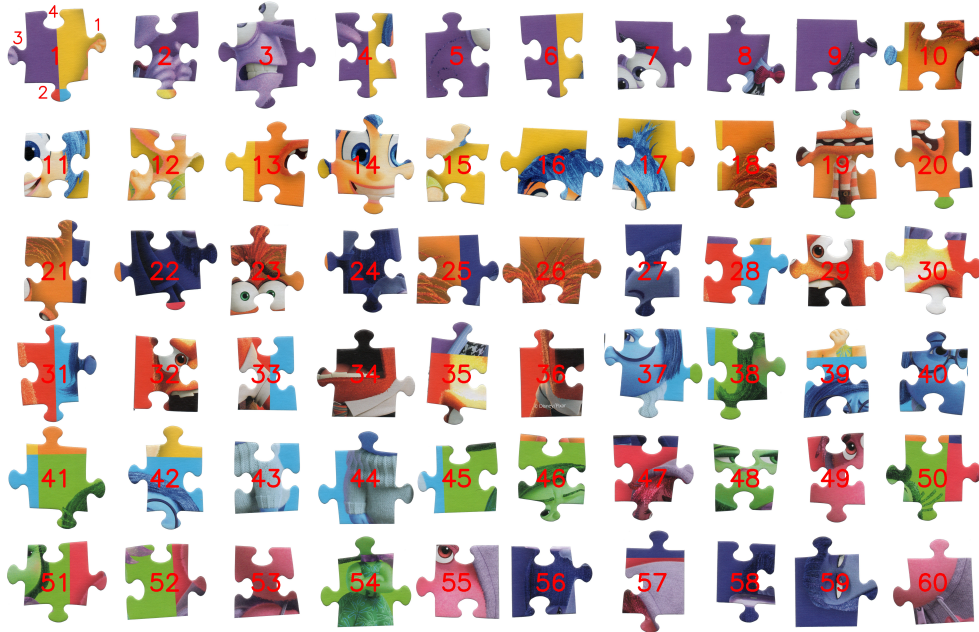


Рис. 7. Розглядуваний пазл

3.2. ПРИКЛАДИ ПОРІВНЯННЯ «СВОЇХ» СТОРІН

Опишемо методику співставлення двох контурів. Визначимо кривизни і загальну довжину кожної сторони, L . Вони можуть незначно відрізнятися в силу неточностей вимірів (різні віддалі фотографування, відмінності в точності визначення границь — кутових точок).

Тому ми перемасштабовуємо меншу сторону до більшої (вводимо масштабування абсциси s), так щоб їхні довжини були однаковими. Це правило перемасштабування застосовується окремо для кожної пари пазлів, які ми порівнюємо. Для знайденого меншого відношення двох сторін правило більш загально формулюється так: а) вводиться правило сепарації — якщо це відношення менше, ніж, скажімо 96,5%, то сторони вважаються невідповідними; б) вводиться правило масштабування, тобто приведення до однакової глобальної довжини для близьких по довжині сторін для подальшого аналізу по формулі (18). Також застосовується правило зсуву, яке відображає той факт, що кутові точки можуть бути визначені неправильно — на 2-4 пікселі в різні сторони, тобто в межах 6 вхідних точок B_i . Тому при порівнянні двох контурів перший з них розглядається в декількох позиціях зсуву відносно другого, тобто він по чергово зсувається на 4, 2, 0, -2, 4 (відповідно вилучаються точки B_i). Рахуються енергії і серед усіх енергій вибирається найменша.

В якості прикладу співставлення сторін розглянемо сторону елемент №60, а саме 60-3, рис. 7, як одну із найбільш проблемних при складанні всього пазлу. Справа в тому, що «правильна» сторона співставлення, а саме 53-1, та одна із «неправильних» сторін, а саме 45-1 давали дуже

ТАБЛ. 1. Порівняння масштабів 60-3 з 45-1 та 60-3 з 53-1, при різних h

	60-3 та 45-1	60-3 та 53-1
10	99.53	96.92
20	99.70	96.99
30	99.49	96.88

ТАБЛ. 2. Порівняння сторін: лише 60-3, 60-3 з 45-1 та 60-3 з 53-1, при різних h , виражені в значеннях енергії

	Лише 60-3	60-3 та 45-1	60-3 та 53-1
10	0.14482	0.00548	0.00465
20	0.13433	0.00126	0.00103
30	0.11856	0.00101	0.00022

близькі результати по енергії співставлення. Тому, звичайно, цікаво їх розглянути більш детально. Дослідимо, як впливає параметр згладжування h на отримані значення енергії порівняння (18). Зафіксуємо значення h для обох сторін і проведемо розрахунки для обох сторін. Спочатку співставимо довжини сторін, табл. 1. Як бачимо, невеликі неточності масштабування, початкового положення пазлів при їх фотографуванні трохи впливають на відношення довжин сторін і незначно змінюються від параметру h . Ця таблиця (порівняння 60-3 та 53-1) цікава тим, що дає уявлення про неточність виміру довжини і обґрунтовує критерій відбраковки пар по довжині, який ми тут встановили з запасом як 96,5%.

Тепер власне перейдемо до критерію відповідності. Але спочатку знайдемо енергію лише сторони 60-3 по формулі (18), табл. 2. Як бачимо, чим більше число h , тим менша енергія деформації контура, що є логічним результатом. Ця енергія змінюється від 0.14482 для $h = 10$ до 0.11856 для $h = 30$. Ці значення дають уявлення про число, відносно якого, будуть зрівнюватися енергії співставлення контурів. Як бачимо, для $h = 10$, співставлена енергія контурів 60-3 та 45-1 та 60-3 та 53-1 становить 3.78% та 3.21% відповідно. Цікаво відмітити дві тенденції згладжування при різних h . Перша, це відношення співставленої енергії до початкової зменшується (тобто відносна відповідність стає кращою); Друга, це відношення між енергіями «правильної» пари і «неправильної» пари досягає максимуму при $h = 30$. Тобто, для $h = 30$ співставлена енергія контурів 60-3 та 53-1 та 60-3 та 45-1 становить 0.85% та 0.18%, відповідно. Ще раз відмітимо, що ці дві пари контурів (правильна і неправильна) були найпроблемнішими в нашому пазлі.

Проілюструємо графічно ці результати. На рис. 8 показані співставлення кривизн 60-3 та 53-1 при $h = 10$. Очевидно, що графіки кривизн досить негладкі, мають багато локальних піків і виглядають недозгладженими. Власне тому і значення енергії є досить великим. Аналогічно приведені графіки кривизн для пари контурів 60-3 та 45-1, рис. 9. Візуально тяжко

сказати яка пара є кращою, хоча формально значення енергії для 60-3 та 53-1 є кращим, хоча всього і незначно, табл. 2.

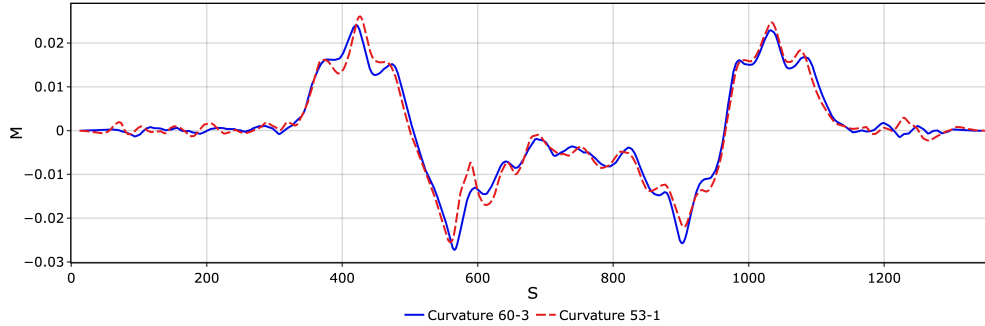


Рис. 8. Порівняння при $h=10$, 60-3 та 53-1

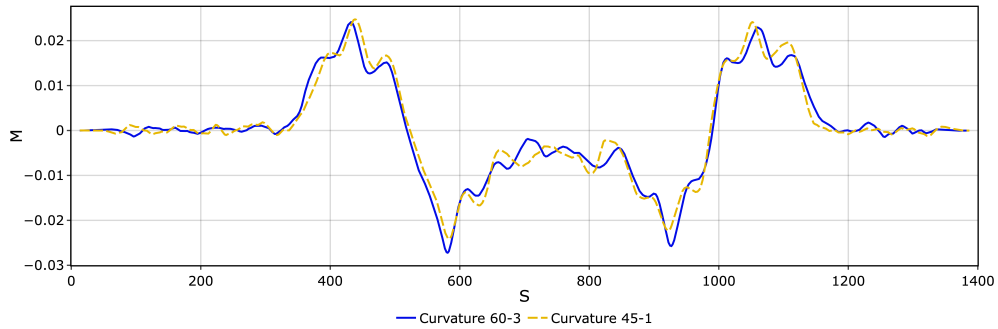


Рис. 9. Порівняння при $h=10$, 60-3 та 45-1

Застосування $h = 20$ помітно зменшує енергію порівняння, рис. 10 та рис. 11. Правильна пара має кращі показники енергії і візуально краще виглядає, ніж неправильна пара. Навіть поведінка графіків на краях є більш логічною, бо лінії є майже прямими. Це свідчить про достатній рівень згладжування.

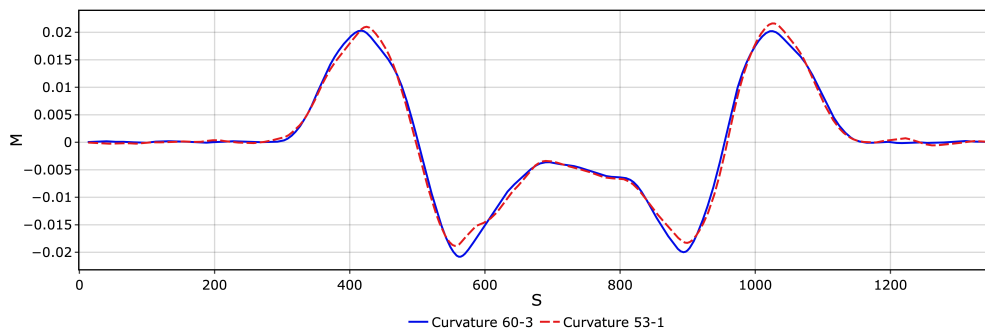


Рис. 10. Порівняння при $h=20$, 60-3 та 53-1

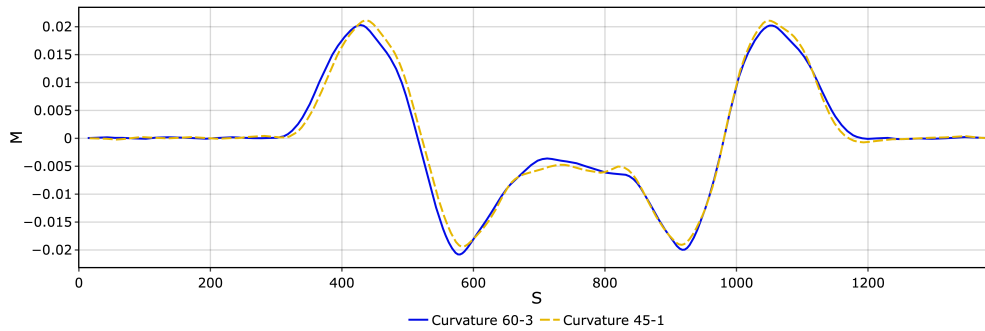


Рис. 11. Порівняння при $h=20$, 60-3 та 45-1

Подальше згладжування при $h = 30$ знову покращує результати, рис. 12 та рис. 13. Але на відміну від попередніх результатів видно, що графік кривизни став ще більше згладженим і втратив корисну інформацію, що є свідченням певного перезгладжування. Енергія знову зменшилася, особливо суттєво для правильної пари, 0.19% від початкової енергії контуру. «Правильне» значення енергії в 5 раз менше за «неправильне», але абсолютні значення є дуже малими.

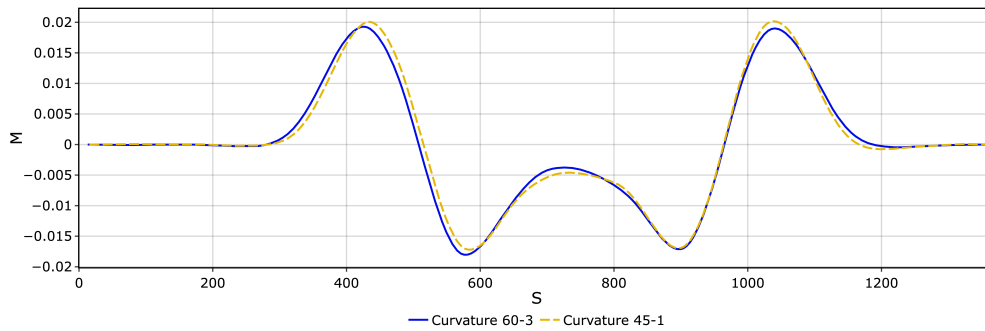


Рис. 12. Порівняння при $h=30$, 60-3 та 53-1

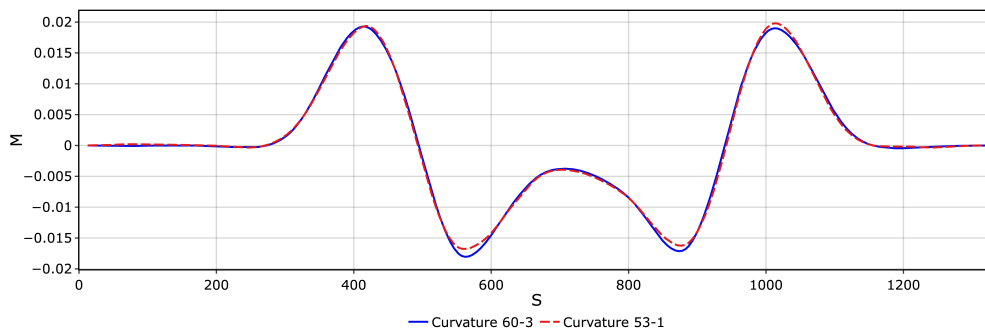


Рис. 13. Порівняння при $h=30$, 60-3 та 45-1

Для ілюстрації впливу згладжування на кривизни покажемо графік кривизни контуру 60-3 при різних h , рис. 14. Тут спостерігаються більш явно всі описані вище явища згладжування. Для нас важливим є те, що інший контур (53-1) також згладжується подібно, тобто не дивлячись на те, що перший контур змінює і екстремуми і точки їх розміщення, другий контур веде себе подібним чином. Це значить, що методика вибору поняття h є правильною.

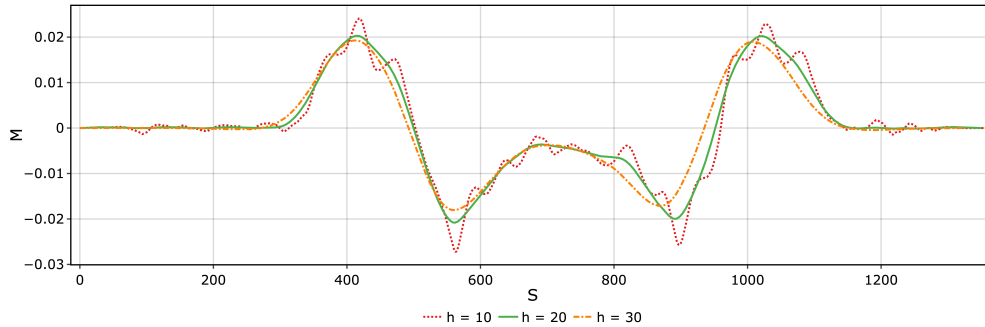


РИС. 14. Розглядуваний пазл. Графік порівняння кривизни при різних значеннях $h = (10, 20, 30)$

3.3. СКЛАДАННЯ ПАЗЛА

Першою дією по складанні пазла є визначення енергій кожної сторони і сепарація сторін на прямі та скривлені, а скривлені (що не обов'язково, бо приводить до наперед передбачуваних результатів) — на випуклі і впуклі. Це є дуже легкою задачею, адже максимальна енергія прямої ділянки в десятки разів перевищувала мінімальну енергію скривлених ділянок. При $h = 20$ мінімальне значення кривої сторони = 0.12546 а максимальне для прямої = 0.00123. Таким чином критерієм прямої сторони є значення якості менше ніж 0,05. Для інших значень h ми маємо подібні значення тому критерій залишається таким самим.

Для складання пазла ми будемо починати з кутового елемента. В даному випадку в нас їх 4 штуки, і немає різниці з якого починати, тобто в програмі вибір першого кутового є довільним. Для вибору кутового елемента було обрано критерій, що елемент має дві прямі сторони і сума енергій (17) їх сторін дає найменше значення. За цим принципом було обрано пазл №60, для якого, при $h = 10$, $E_{60-1} = 0.000061$, а $E_{60-2} = 0.000019$. Починаємо збирати пазл. Сторона для якої будемо підбирати сторону іншого пазла, була обрана як непряма сторона після двох прямих за годинниковою стрілкою. Таким чином, ми починаємо збирати пазл зі сторони 60-3. Так як 60 це кутовий пазл, то з ним має узгоджуватися пазл рамки. За таким принципом ми вибираємо як можливі кандидати всі пазли як мінімум з однією плоскою стороною. Тобто включаємо в розгляд і кутові елементи, бо ми поки ще не знаємо розмірність пазла по вертикалі і горизонталі. В цих елементах розглядаємо лише сторону, яка знаходиться перед прямою

УКЛАДАННЯ НЕТОЧНО ОЦИФРОВАНОГО БЕЗКОЛІРНОГО ПАЗЛА

стороною за годинниковою стрілкою та містить впадину (бо 60-3 є стороною з випуклістю), наприклад 53-1, 45-1, чи 43-1. Для 60-3 ми отримали 53-3, де $E_{60-3,53-1} = 0.00103$ та відношення сторін = 99,70. Наступним кандидатом на співпадіння була сторона 45-1, де відношення довжин було 96.99%, а їхня спільна енергія $E_{60-3, 45-1} = 0,00126$, що є досить близьким.

За таким принципом ми заповнюємо весь перший ряд до тих пір, поки не знайдемо кутовий пазл. Пошуку пазла для сторони 34-3 наведено в таблиці табл. 3. Першим кутовим пазлом який ми знайшли, став 36 пазл. Тепер ми знаємо, що пазл має 10 колонок, і знаючи кількість пазлів, можемо визначити кількість рядків.

ТАБЛ. 3. Пошук пазла для сторони 34-3 при $h = 20$

Кандидати: 19 шт		5-2, 6-3, 7-3, 8-2, 9-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3, 26-3 27-3, 32-2, 35-2, 36-1, 55-4, 56-2, 57-4, 58-2, 59-1					
Співпадає довжина: 10 шт		7-3, 9-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3, 27-3, 32-2, 36-1, 56-2					
Співпадає форма: 8 шт		7-3, 9-2, 17-3, 18-3, 25-3, 32-2, 36-1, 56-2					
34-3 та 7-3	9-2	17-3	18-3	25-3	32-2	36-1	56-2
0.32346	0.26635	0.07224	0.05442	0.22058	0.34831	0.00072	0.22691

Після того, як ми знайшли весь перший ряд, ми змінюємо напрямок та шукаємо пазл над щойно знайденим кутовим. Так як це теж пазл рамки, то шукаємо його за тим самим принципом (але вже без кутових). В нашому випадку це 32 пазл. Пошуку пазла для сторони 36-4 наведено в таблиці табл. 4.

ТАБЛ. 4. Пошук пазла для сторони 36-4 при $h = 20$

Кандидати: 16 шт		5-2, 6-3, 7-3, 8-2, 16-3, 17-3, 18-3, 25-3 26-3, 27-3, 32-2, 35-2, 55-4, 56-2, 57-4, 58-2					
Співпадає довжина: 9 шт		2-1, 3-1, 6-1, 10-2, 18-4, 28-4, 37-4					
Співпадає форма: 6 шт		5-2, 6-3, 25-3, 32-2, 55-4, 56-2					
36-4 та 5-2	6-3	25-3	32-2	55-4	56-2		
0.08576	0.34527	0.09483	0.00061	0.33619	0.07927		

Далі ми продовжуємо збирати наступний рядок в протилежному (зліва-направо) напрямку. Але так як це вже не пазл, що лежить на рамці, то ми використовуємо пошук наступного фрагмента уже по 2 кривим сторонам. Очевидно, що шуканий елемент має узгоджуватися з уже знайденими сторонами 32-1 та 34-4 (як по довжині, так і по енергії) в такому порядку за годинниковою стрілкою і має мати одну випуклу та одну впуклу сторони. По цим початковим критеріям у нас зразу відсіюються більшість пазлів і їх сторін і залишаються лише 4 комбінації, наприклад



РИС. 15. Автоматично зібраний пазл

1-(1, 4), 10-(1, 4), 29-(3, 2), 38-(1, 4). Порівняння кривизн дає таке значення спільних енергій $E_{32-1,1-1} = 0.00379$ та $E_{34-4,1-4} = 0.01735$. Сума цих кривизн = 0.02114. Наступна мінімальна комбінація для ПАЗЛА 29-(3,2) дає такі значення енергії, $E_{32-1,29-3} = 0.00103$ та $E_{34-4,29-2} = 0.00077$ сума = 0,0018 що майже в 12 разів перевищують вищеприведені для ПАЗЛА 1-(1,4). Детальні результати наведені в табл. 5. Все це свідчить про дуже велику ефективність використання енергії як критерія для правильного згладжених контурів і розрахованих кривизн.

ТАБЛ. 5. Пошук пазла для основної сторони 32-1 та додаткової 34-4 при $h = 20$

Співпадає довжина: 10 шт	1-(1, 4), 10-(1, 4), 12-(3, 2), 19-(3, 2), 20-(1, 4) 29-(3, 2), 37-(3, 2), 38-(1, 4), 48-(3, 2), 49-(1, 4)			
Співпадає форма: 4 шт	1-(1, 4), 10-(1, 4), 29-(3, 2), 38-(1, 4)			
	1-(1, 4)	10-(1, 4)	29-(3, 2)	38-(1, 4)
32-1	0.00379 (1-1)	0.29993	0.00103	0.14919
34-4	0.01735 (1-4)	0.11903	0.00077	0.10637
Сума	0,02114	0,41896	0,0018	0,25556

Подальший процес складання є тривіальним. В жодному із розглянутих випадків ми не були на роздоріжжі який елемент і яку сторону вибирати для наступного суміщення.

Висновки

Фактично в роботі ставиться задача по зіставленні кривих, що має велике значення в різних галузях таких як комп'ютерна графіка, судова експертиза, розпізнавання образів. Задача складання пазлів слугує ілюстрацією застосування КБС для рішення подібних задач. Головне досягнення даної роботи полягає в обробці досить густих точок, коли похибка вимірювань може перевищувати величину відстані між точками замірів. Основне значення роботи полягає в тому, що тут детально показано наскільки велике значення має правильне згладжування контуру і отримання його кривизни. В цьому випадку можуть застосовуватися прості алгоритми складання без реалізації алгоритмів динамічного програмування. В роботі встановлено наступне

1. Головна проблема згладжування оцифрованого контура полягає в наявності різного роду артефактів, які мають бути згладженими, а самі положення заміряних точок локально розміщені в хаотичному порядку. Введено поняття початкового (стартового) контуру, який будується з обмеженої кількості реальних точок (наприклад кожної 20-ї), які точно розміщені в правильному порядку. Знайдений контур є початковим грубим наближенням, на якому знаходяться найближчі проекції всіх реальних точок, відповідно до розміщення яких і проводиться перенумерація усіх точок.

2. Контроль рівня згладжування відбувається за допомогою так званих узагальнених жорсткостей опор, яка пропорційна силі, з якою реальна заміряна точка «тягне» до себе свою проекцію на згладженому контурі. Показано, що жорсткість містить розмірний параметр довжини, який співвідноситься до величини розмірів артефактів чи похибки вимірювання, що дозволяє правильно підбирати цю жорсткість при якій артефакти згладжуються, а корисна інформація максимально зберігається.

3. Запропоновано алгоритм уточнення положення кутових точок, що полягає в застосуванні так званої уявної (даммі) точки. В цій точці не постулюється рівність дотичних, тому в ній відбувається стрибок кута. Оскільки ця точка не має фіксованого положення, тому перенумерація реальних точок по розміщенню їх наближчих проекцій до розрахункового контура дозволяє точно визначити положення кутової точки і стрибок кута в ній. Це дозволяє чітко виділити чотири різні сторони кожного елемента, по яким і співставляються контури.

4. Сформульовано критерій співставлення двох протилежних ділянок контурів, який представляє собою інтеграл по довжині від квадрата різниці відповідних кривизн. Цей критерій узгоджується з поняттям добротності кривої при побудові сплайнів в геометричному моделюванні.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів щодо публікації цієї статті.

ЛІТЕРАТУРА

1. McBride J.C., Kimia B.B. Archaeological fragment reconstruction using curve-matching. *Proc. IEEE Conf. Computer Vision and Pattern Recognition Workshop*. 2003. Vol. 1. P. 3–3.

2. Kleber F., Sablatnig R. A survey of techniques for document and archaeology artefact reconstruction. *Proc. 10th Int. Conf. Document Analysis and Recognition*. 2009. P. 1061–1065.
3. Sizikova E., Funkhouser T. Wall painting reconstruction using a genetic algorithm. *J. Comput. Cult. Herit.* 2017. Vol. 11. No. 1. P. 1–17.
4. Justino E., Oliveira L.S., Freitas C. Reconstructing shredded documents through feature matching. *Forensic Science International*. 2006. Vol. 160. No. 2–3. P. 140–147.
5. Yilmaz S., Nabyev V.V. Comprehensive survey of the solving puzzle problems. *Computer Science Review*. 2023. Vol. 50. 100586.
6. Marande W., Burger G. Mitochondrial DNA as a genomic jigsaw puzzle. *Science*. 2007. Vol. 318. No. 5849. P. 415.
7. Markaki S., Panagiotakis C. Jigsaw puzzle solving techniques and applications: a survey. *The Visual Computer*. 2023. Vol. 39. No. 10. P. 4405–4421.
8. Lindstrom M. The geological development of the arctic. In: *The Arctic*. Routledge, 2019. P. 3–25.
9. Warren L., Quaglio F., Riccomini C., Simees M., Poire D., Strikis N., Anelli L., Strikis P. The puzzle assembled: Ediacaran guide fossil Cloudina reveals an old proto-Gondwana seaway. *Geology*. 2014. Vol. 42. No. 5. P. 391–394.
10. Cho T.S., Avidan S., Freeman W.T. The patch transform. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2010. Vol. 32. No. 8. P. 1489–1501.
11. Gope C., Kehtarnavaz N., Hillman G., Warsig B. An affine invariant curve matching method for photo-identification of marine mammals. *Pattern Recognition*. 2005. Vol. 38. No. 1. P. 125–132.
12. Freeman H., Garder L. Apictorial jigsaw puzzles: The computer solution of a problem in pattern recognition. *IEEE Trans. Electronic Computers*. 1964. No. 2. P. 118–127.
13. Goldberg D., Malon C., Bern M. A global approach to automatic solution of jigsaw puzzles. *Proc. 18th Annual Symp. Computational Geometry*. 2002. P. 82–87.
14. Levine M.D. Feature extraction: A survey. *Proc. IEEE*. 1969. Vol. 57. No. 8. P. 1391–1407.
15. Wolfson H., Schonberg E., Kalvin A., Lamdan Y. Solving jigsaw puzzles by computer. *Annals of Operations Research*. 1988. Vol. 12. No. 1. P. 51–64.
16. Schwartz J.T., Sharir M. Identification of partially obscured objects in two and three dimensions by matching noisy characteristic curves. *Int. J. Robotics Research*. 1987. Vol. 6. No. 2. P. 29–44.
17. Wolfson H.J. On curve matching. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1990. Vol. 12. No. 5. P. 483–489.
18. Stieber A., Schneider J., Nickolay B., Kruger J. A contour matching algorithm to reconstruct ruptured documents. *Joint Pattern Recognition Symp.* Berlin: Springer, 2010. P. 121–130.
19. Cohen I., Ayache N., Sulger P. Tracking points on deformable objects using curvature information. *Proc. ECCV'92*. Springer, 1992. P. 458–466.
20. Sebastian T.B., Crisco J.J., Klein P.N., Kimia B.B. Constructing 2D curve atlases. *Proc. IEEE Workshop Mathematical Methods in Biomedical Image Analysis*. 2000. P. 70–77.
21. Sebastian T.B., Klein P.N., Kimia B.B. On aligning curves. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2003. Vol. 25. No. 1. P. 116–125.

22. Zafar S., Hussain M. Fair curve designing by Said-Ball curve. *PLoS One*. 2025. Vol. 20. No. 7. e0324553.
23. Brunnett G., Kiefer J. Interpolation with minimal-energy splines. *Computer-Aided Design*. 1994. Vol. 26. No. 2. P. 137–144.
24. Orynyak I., Kuznetsov Y., Tavrov D. Efficient construction of clothoidal splines using corotational beam splines. *J. Comput. Appl. Math.* (in press).
25. Mokhtarian F., Mackworth A. Scale-based description and recognition of planar curves and 2D shapes. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1986. No. 1. P. 34–43.
26. Banchoff T.F., Lovett S. Differential geometry of curves and surfaces. Chapman and Hall/CRC, 2022. 410 p.
27. Goldberg D., Malon C., Bern M. A global approach to automatic solution of jigsaw puzzles. *Computational Geometry*. 2004. Vol. 28. No. 2–3. P. 165–174.
28. Michel D., Oikonomidis I., Argyros A. Scale invariant and deformation tolerant partial shape matching. *Image Vision Comput.* 2011. Vol. 29. No. 7. P. 459–469.
29. Eubank R.L. Nonparametric regression and spline smoothing. CRC Press, 1999. 350 p.
30. Cheng K.F., Lin P.E. Nonparametric estimation of a regression function. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*. 1981. Vol. 57. No. 2. P. 223–231.
31. Clark R.M. Non-parametric estimation of a smooth regression function. *J. R. Stat. Soc. Ser. B*. 1977. Vol. 39. No. 1. P. 107–132.
32. Moreton H.P. Minimum curvature variation curves, networks, and surfaces for fair free-form shape design. PhD Thesis, Univ. California, Berkeley, 1992. 250 p.
33. Lee E.T. Choosing nodes in parametric curve interpolation. *Computer-Aided Design*. 1989. Vol. 21. No. 6. P. 363–370.
34. Ruppert D. Selecting the number of knots for penalized splines. *J. Comput. Graph. Stat.* 2002. Vol. 11. No. 4. P. 735–757.
35. Reinsch C.H. Smoothing by spline functions. *Numerische Mathematik*. 1967. Vol. 10. No. 3. P. 177–183.
36. Bruckstein A.M., Netravali A. On minimal energy trajectories. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 1990. Vol. 49. P. 283–297.
37. Manay S., Cremers D., Hong B.W., Yezzi A.J., Soatto S. Integral invariants for shape matching. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2006. Vol. 28. No. 10. P. 1602–1618.
38. Cui M., Femiani J., Hu J., Wonka P., Razdan A. Curve matching for open 2D curves. *Pattern Recognition Letters*. 2009. Vol. 30. No. 1. P. 1–10.
39. Fu H., Tian Z., Ran M., Fan M. Novel affine-invariant curve descriptor for curve matching and occluded object recognition. *IET Computer Vision*. 2013. Vol. 7. No. 4. P. 279–292.
40. Hoff D.J., Olver P.J. Extensions of invariant signatures for object recognition. *J. Math. Imaging Vision*. 2013. Vol. 45. No. 2. P. 176–185.
41. Hoff D.J., Olver P.J. Automatic solution of jigsaw puzzles. *J. Math. Imaging Vision*. 2014. Vol. 49. P. 234–250.
42. Kurnianggoro L., Jo K.H. A survey of 2D shape representation: Methods, evaluations, and future research directions. *Neurocomputing*. 2018. Vol. 300. P. 1–16.
43. Orynyak I., Kuznetsov Y., Mazuryk R. Controllable curvature smoothing of the pipeline positions by 2D corotational beam spline. *J. Pipeline Syst. Eng. Pract.* 2025. Vol. 16. No. 3. 04025047.

44. Orynyak I., Yablonskyi P., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Fairness of 2D corotational beam spline as compared with geometrically nonlinear elastic beam. *System Research and Information Technologies*. 2024. No. 3. P. 119–140.
45. Orynyak I., Koltsov D., Chertov O., Mazuryk R. Application of beam theory for the construction of twice differentiable closed contours based on discrete noisy points. *System Research and Information Technologies*. 2022. No. 4. P. 119–140.
46. Holladay J.C. A smoothest curve approximation. *Math. Tables Aids Comput.* 1957. Vol. 11. P. 233–243.
47. Mehlum E. A curve-fitting method based on a variational criterion. *BIT Numerical Mathematics*. 1964. Vol. 4. P. 213–223.
48. Fowler A.H., Wilson C.W. Cubic Spline, a Curve Fitting Routine. Oak Ridge: Union Carbide Corp., Nuclear Division, 1966. 41 p.

Надійшла: 27.08.2025 / Прийнята: 20.10.2025