

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КУКУРБА ВІКТОР РОМАНОВИЧ

УДК 519.715: 519.857.4

**НЕПЕРЕРВНА ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ
З НАПВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ**

01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня

кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка" Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник :доктор фізико-математичних наук, професор,
Чабанюк Ярослав Михайлович. Львівський державний університет безпеки життєдіяльності ДСНС України
професор кафедри промислової безпеки та охорони праці

Офіційні опоненти :доктор фізико-математичних наук, професор
Джалладова Ірада Агаверді-кизи
ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана» МОН України
завідувач кафедри комп'ютерної математики та інформаційної безпеки

доктор фізико-математичних наук, професор
Слейко Ярослав Іванович
Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України,
завідувач кафедри теоретичної та прикладної статистики

Захист відбудеться "19" вересня 2016 р. о 15:45 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.35 Київського національного університету імені Тараса Шевченка, за адресою: м. Київ, проспект Академіка Глушкова, 2-А, географічний факультет, ауд. 312.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці ім. М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ, вул.Володимирська, 58.

Автореферат розісланий "3" серпня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради

П.М. Зінько

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Основні алгоритми стохастичної апроксимації, що були запропоновані Робінсом і Монро та Кіферем і Вольфовицем на початку 1950-х років стали об'єктом теоретичних та практичних досліджень у зв'язку з великою кількістю прикладних та теоретичних проблем, що виникають в аналізі стохастичних процесів. В основі алгоритмів лежить стохастичне різницеве рівняння

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon_n Y_n,$$

де u_n набуває значень з евклідового простору та описує стан системи, Y_n випадковий вектор, $\varepsilon_n > 0$ малий параметр.

В даній роботі розглядається процедура стохастичної оптимізації в неперервному випадку. Вперше даний підхід був запропонований в роботі Kiefer E., Wolfowitz J.¹ в дискретному випадку при цьому були встановлені асимптотичні властивості та отримана збіжність процедури в середньому квадратичному.

Метод полягає в пошуку точки максимуму u_0 , невідомої функції регресії $f(u)$, $u \in R$, за умови його єдиності. Крім того, значення функції $f(u)$ вимірюється з випадковими помилками, що не дозволяє застосувати градієнтний метод $u(t+1) - u(t) = af'(u(t))$, де константа $a > 0$. Ідея процедури Кіфера та Вольфовиця зводиться до наближеного підрахунку похідної як відношення приросту функції до приросту аргументу $\Delta u = 2c(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ і одночасним сповільненням руху u до u_0 вводячи залежність від часу для параметра a .

Аналогічна процедура стохастичної оптимізації для неперервного випадку була введена Хасьминским Р. З. і розглядались в роботах Невельсона М. Б., Дячкова А. Г. і Пинскера М. С., Гладишева Е. Г., Логінова Н. В., Benveniste A., Metivier M., Priouret P., та інших авторів.

Збіжність неперервної процедури Кіфера-Вольфовиця розглянув Sakrison D. T., а Derman C. довів збіжність процедури з ймовірністю 1 при слабших умовах. В роботі Невельсона М. Б., Хасьминского Р. З.² збіжність встановлюється через властивості функцій типу Ляпунова та мартингальні властивості випадкових процесів, що значно спрощує вивчення та застосування процедури стохастичної оптимізації.

Застосування стохастичної апроксимації з точки зору проблем оптимізації розглянуті в роботі Ljung L., Pflug G., Walk H.³, при цьому авторами модифіковано процедури Робінса-Монро та отримано ряд застосувань при знаходженні глобального мінімуму функції $F(u), u \in S, S \subseteq R^d, S$ - обмежена область, і локального

¹ Kiefer E. Stochastic estimation of the maximum of a regression function./ Kiefer E., Wolfowitz J. // Ann. Math. Statist., – 1952. – 23, № 3. – P. 462–466.

² Ljung L. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems/ Ljung L., Pflug G., Walk H. – Birkhauser Verlag Basel. – 1992. – 115 p.

³ Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание./ Невельсон М. Б., Хасьмин-ский Р. З. – М.: Наука. – 1972. – 304 с

мінімуму при $u \in S \cap U$, де U відкритий окіл точки u_0 . В неперервному випадку використано принцип інваріантності для процесів.

Основними властивостями процедури стохастичної оптимізації є її асимптотична нормальність, а також властивість флуктуацій відносно дифузійної складової процедури. Дані властивості були розглянуті в роботах Невельсона М. Б., Хасьминського Р. З., І. А. Ібрагімова, Fabian V., Ruppert D., та інших. При цьому, авторами використовується нормування по часу на \sqrt{t} з центруванням флуктуацій по точці рівноваги u_0 , або по граничному процесу.

До найважливіших питань теорії еволюційних систем в випадковому середовищі відносять стійкість. Стійкість динамічної системи, що задовольняє принципу усереднення, вперше була встановлена М.М. Боголюбовим, а також розглянута Ю.О. Митропольським та А.М. Самойленко. Розвитку теорії випадкових еволюцій започаткований Hersh T., Griego R., призвів до вивчення стійкості динамічних систем у випадковому середовищі. Стійкість динамічної системи з марковським збуренням при умові стійкості усередненої системи вивчалась в роботах А.В. Скорохода, Є.Ф. Царькова, а також В.С. Королюка. В умовах дифузійної апроксимації динамічної системи з марковським збуренням проблема стійкості вперше була розв'язана в роботі Blankenship G. L., Pananicolaou G. C. з використанням мартингальної характеристики відповідного марковського процесу.

Стійкість динамічної системи у напівмарковському середовищі в умовах усереднення та дифузійної апроксимації вивчалась А.В. Свіщуком та В.С. Королюком. При цьому використовувалася мартингальна характеристика марковського процесу з додатковою компонентою лінійчатого процесу. У випадку з напівмарковськими збуреннями, для вивчення стійкості динамічної системи використовують властивості компенсуючого оператора введеного в роботах М.Н. Свіріденко.

В роботі О.М. Іксанова розглянуто процеси дробового ефекту, граничними для яких є дробово інтегровні стійкі процеси Леві (згорки степеневих функцій та стійких процесів Леві) та дробово інтегровні обернені стійкі субординатори.

У роботах Я.М. Чабанюка отримана збіжність процедури стохастичної апроксимації у випадках залежності функції регресії від марковського та напівмарковського процесу, в схемах усереднення та дифузійної апроксимації. Також розглянуто асимптотичну нормальність процедури в зазначених схемах.

Процедура стохастичної оптимізації у марковському середовищі в схемах усереднення та дифузійної апроксимації розглянута в роботах У.Т. Хімки, з використанням двокомпонентного марковського процесу. Крім цього в роботі досліджено флуктуації процедур стохастичної оптимізації з імпульсним та дифузійним збуренням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційне дослідження було виконано у відповідності до плану наукових досліджень кафедри прикладної математики Національного університету "Львівська політехніка". Її

результати включені в науковий звіт про виконання державної теми "Стохастична оптимізація в марковських та напівмарковських середовищах" (Міністерство освіти і науки України, номер держ. реєстрації 0103U008846, на період з 2009-2014 рр.).

Мета і задачі дослідження.

Метою дисертації є встановлення достатніх умов збіжності та асимптотичної нормальності неперервної процедури стохастичної оптимізації в напівмарковському середовищі.

Для досягнення поставленої мети розв'язуються наступні задачі:

-- модифікувати процедуру Кіфера-Вольфовиця методом вводу другого параметру у функцію регресії, що описує вплив зовнішніх випадкових факторів і задається напівмарковським процесом.

-- отримати достатні умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями в схемах усереднення та дифузійної апроксимації;

-- отримати умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями та імпульсним збуренням;

-- встановити асимптотичну поведінку процедури стохастичної оптимізації в умовах збіжності в схемі дифузійної апроксимації;

Об'єкт дослідження -- неперервна процедура стохастичної оптимізації у випадку залежності функції регресії від зовнішнього середовища, що описується напівмарковськими переключеннями.

Предмет дослідження -- збіжність неперервної процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями до дифузійних процесів.

Методи досліджень. У роботі використовуються результати та методи теорії випадкових еволюцій, марковських та напівмарковських процесів, другий метод Ляпунова, схема серій з малим параметром в схемі усереднення, дифузійної апроксимації. При побудові граничних операторів використовується метод розв'язку проблеми сингулярного збурення для генератора двокомпонентного марковського процесу.

Наукова новизна одержаних результатів.

--- вперше побудовано компенсуючий оператор розширеного процесу марковського відновлення для процедури стохастичної оптимізації, отримано його асимптотичний розклад та розв'язано проблему сингулярного збурення для асимптотичного оператора з використанням збуреної функції типу Ляпунова;

--- вперше встановлено достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної оптимізації до точки екстремуму усередненої функції регресії в напівмарковському середовищі в схемах усереднення та дифузійної апроксимації;

--- вперше отримано асимптотичну нормальність флуктуацій неперервної процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації;

--- вперше встановлено достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями та імпульсними збуреннями до точки екстремуму;

--- досліджено асимптотичну поведінку математичної моделі для встановлення оптимальних параметрів на завершеність тестування програмного продукту в стохастичних умовах та вперше введено параметр впливу зовнішніх чинників процесу тестування, що описується напівмарковським процесом.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертаційної роботи носять теоретичний і практичний характер. Розглянуті методи стохастичної оптимізації можуть використовуватися для розв'язування прикладних проблем, що задаються стохастичними системами з зовнішніми впливами, що описуються напівмарковськими процесами. В даній роботі оптимізаційна процедура застосована для аналізу надійності програмного забезпечення, що описується динамічними моделями на основі неоднорідного пуассонового процесу, при цьому враховані зовнішні впливи, що можуть бути описані напівмарковським процесом.

Особистий внесок здобувача. Постановка задач належить науковому керівнику дисертаційної роботи Чабанюку Ярославу Михайловичу, доведення теорем та допоміжних тверджень належить дисертанту - Кукурбі Віктору Романовичу. Застосування процедури стохастичної оптимізації для математичної моделі прогнозування надійності програмного забезпечення проведено дисертантом. У публікаціях, виконаних у співавторстві, особистий внесок здобувача полягав у виконанні основних розрахунків, доведень та формулюванні висновків, співавторам належить постановка задач та рекомендації щодо методів їх розв'язування. Отримані результати дисертаційної роботи сформульовані у вигляді теорем та строго доведені з використанням допоміжних лем та тверджень і обґрунтовані автором з посиланнями на використані джерела.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались на всеукраїнських та міжнародних конференціях, зокрема на:

- міжнародній конференції "Problems Of Decision Making Under Uncertainties" (PDMU, Skhidnytsia, 2011, Yalta, 2011, Mukachevo, 2012, Skhidnytsia, 2013, Skhidnytsia, 2014, Brno, 2014, Skhidnytsia, 2015),
- XIII міжнародній науковій конференції ім. акад. М.Кравчука (Київ, 2010),
- міжнародній математичній конференції ім. В.Я. Скоробагатька (Дрогобич, 2011),
- V міжнародній науковій конференції OPTIMA-2012: "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (Кам'янець-Подільський, 2012),
- VI міжнародній науково-практичній конференції студентів, аспірантів та молодих вчених "Сучасні задачі прикладної статистики, промислової, актуарної та

фінансової математики", присвяченій 75-річчю Донецького національного університету (Донецьк, 2012),

– International conference Modern Stochastics: Theory and Applications III (MSTA, Kyiv, 2012),

– IV міжнародній науково-практичній конференції "Системний аналіз. Інформатика. Управління" (Запоріжжя, 2013),

– IV всеукраїнській науково-практичній конференції "Інформатика та системні науки" (Полтава, 2013),

– Конференція молодих учених "Підстригачівські читання – 2015" (Львів, 2015),

а також на науковому семінарі кафедри прикладної математики Інституту прикладної математики та фундаментальних наук Національного університету "Львівська Політехніка" (Львів, 2013,2015) та на науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка (Київ, 2015).

Публікації. За результатами дисертаційних досліджень опубліковано 13 наукових праць, серед яких 1 наукова стаття у виданні, що включене до міжнародної наукометричної бази [1], 4 наукові статті у фахових журналах України [2 --- 5] (загальним обсягом 1,96 умовних друкованих аркушів), 1 наукова стаття у віснику НУЛП [6], та 7 матеріалах і тезах наукових конференцій [7 --- 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається із вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку на 1-й сторінці. Загальний обсяг роботи становить 114 сторінок, список використаних джерел налічує 98 найменування на 8 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У *Вступі* обґрунтовано актуальність теми, сформульовано мету та задачі дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення та апробацію одержаних результатів.

У розділі 1 *Огляд літератури та допоміжні відомості* висвітлено сутність проблеми, подано огляд існуючих на сьогоднішній день результатів досліджень та описано об'єкт досліджень. Наведено допоміжні відомості з теорії марковських та напівмарковських процесів, стохастичних систем з випадковими збуреннями, мартингальної характеристикації та збіжності стохастичних динамічних систем.

У другому розділі *Збіжність неперервної процедури стохастичної оптимізації* описано модифіковану процедуру Кіфера-Вольфовиця з функцією регресії, залежною від впливу зовнішнього середовища, що описується напівмарковським процесом. У підрозділі 2.1 встановлено достатні умови збіжності неперервної процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення.

Процедура будується для функції регресії $C(u; x)$, що залежить від впливу зовнішнього середовища, яке описується напівмарковським процесом $x(t), t \geq 0$, у вимірному фазовому просторі станів (X, \mathbf{X}) .

НМП $x(t), t \geq 0$ асоційований з марковським процесом відновлень $x_0(t), t \geq 0$, що задається напівмарковським ядром:

$$Q(x, B, t) = \int_B G_x(t) P(x, dy),$$

де $G_x(t)$ - функція розподілу часу перебування в стані $x \in X$, $P(x, B), x \in X, B \in \mathbf{X}$ --- стохастичне ядро.

Генератор асоційованого марковського процесу, $x_0(t), t \geq 0$ має наступне представлення

$$\mathbf{Q} = q(x)[\mathbf{P} - I],$$

де оператор перехідних ймовірностей \mathbf{P} визначається

$$\mathbf{P}\varphi(x) = \int_X P(x, dy)\varphi(y), x \in X,$$

на банаховому просторі $B(X)$ дійснозначних обмежених неперервних функцій $\varphi(x), x \in X$, з нормою

$$\|\varphi(x)\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|,$$

інтенсивність $q(x)$ визначається як

$$q(x) = g^{-1}(x), g(x) = E\theta_x = \int_0^\infty \bar{G}_x(t) dt, \bar{G}_x(t) = 1 - G_x(t),$$

тобто θ_x -- час перебування марковського процесу в стані x .

Також НМП $x(t), t \geq 0$ є рівномірно ергодичним зі стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathbf{X}$

$$\pi(dx)q(x) = q\rho(dx), q = 1/g, g = \int_X \pi(dx)q(x),$$

де $\rho(dx)$ --- стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx)P(x, B), \rho(X) = 1.$$

Для генератора \mathbf{Q} марковського процесу $x_0(t), t \geq 0$, визначений потенціал

$$\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_x \pi(dx)\varphi(x)$ – проектор на підпростір нулів оператора $\mathbf{Q} : N_{\mathbf{Q}} = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$.

Потенційний оператор \mathbf{R}_0 супроводжуючого марковського процесу $x_0(t)$, $t \geq 0$, визначається рівністю $\mathbf{R}_0 = [\mathbf{Q} + \Pi]^{-1} - \Pi$, та задовільняє співвідношення $\mathbf{Q}\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}_0\mathbf{Q} = I - \Pi$ [1].

Як відомо з робіт Хасьмінського Р.З. неперервна процедура стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями може розглядатися у вигляді рівняння:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon)), \quad (1)$$

$$\text{де } \nabla_{b(t)}C(u; x) = \frac{(C(u+b(t); x) - C(u-b(t); x))}{2b(t)}, \quad u \in R.$$

Без зменшення загальності будемо вважати, що $u_0 = 0$.

Збіжність неперервної ПСО (1) розглядається в умовах експоненціальної стійкості рівняння

$$\frac{du}{dt} = C'(u), C(u) = \int_x \pi(dx)C(u; x). \quad (2)$$

Функція регресії $C(u)$ має єдину точку u_0 екстремуму.

Теорема 1.1 Нехай існує функція Ляпунова $V(u), u \in R$, для рівняння (2) така, що задовольняє умові експоненційної стійкості

$$C1: C'(u)V'(u) < -c_0V(u), c_0 > 0.$$

А також, при $\tilde{\nabla}_{b(t)}C(u; x) := \nabla_{b(t)}C(u; x) - \nabla_{b(t)}C(u)$, мають місце додаткові умови:

$$C2: |V'(u)| \leq c_1(1+V(u)), c_1 > 0.$$

$$C3: |\nabla_{b(t+\varepsilon)}C(u; x)V'(u)| \leq c_3(1+V(u)),$$

$$C4: |\nabla_{b(t+\varepsilon)}C(u; x)[\nabla_{b(t+\varepsilon)}C(u; x)V'(u)]'| \leq c_4(1+V(u)),$$

$$C5: |\nabla_{b(t+\varepsilon)}C(u; x)\mathbf{P}\mathbf{R}_0[\tilde{\nabla}_{b(t)}C(u; x)V'(u)]'| \leq c_5(1+V(u)),$$

Функція регресії $C(u, x)$ по еволюції u задовільняє глобальну умову Ліпшиця

$$C6: |\nabla_{b(t)}C(u) - C'(u)| \leq k_1b(t).$$

Крім того, функції розподілу $G_x(t)$, $x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$:

$$C7: \sup_{x \in X} \int_0^\infty e^{ht} \overline{G}_x(t) dt \leq H < \infty, h > 0.$$

Функції $a(t)$ та $b(t)$ монотонно спадні, обмежені та задовольняють умовам:

$$C8: \int_0^{\infty} a(t)dt = \infty, \int_0^{\infty} a(t)b(t)dt < \infty, \int_0^{\infty} a^2(t)dt < \infty,$$

$$C9: \frac{a'(t+\varepsilon)}{a^2(t)a(t+\varepsilon)} \leq A_1, \frac{b'(t+\varepsilon)}{a^2(t)b(t+\varepsilon)} \leq A_2, \frac{a(t+\varepsilon)b'(t+\varepsilon)}{2a^2(t)b(t+\varepsilon)} \leq A_3, a(t) > 0, b(t) > 0,$$

$$0 \leq t, \varepsilon > 0.$$

Тоді при кожному додатньому $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0$ - достатньо мале, процедура стохастичної оптимізації (1) збігається при $t \rightarrow \infty$ з ймовірністю 1 до точки екстремуму:

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

У підрозділі 2.2 розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації пошуку точки u_0 в схемі дифузійної апроксимації, що задається еволюційним диференціальним рівнянням:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^2)), \quad (3)$$

де

$$C^\varepsilon(u; x) = \nabla_{b(t)} C(u; x) + \varepsilon^{-1} C_0(u; x),$$

де $\nabla_{b(t)} C(u; x) = \frac{(C(u+b(t); x) - C(u-b(t); x))}{2b(t)}$, $u \in R$. Функція регресії $C(u; x)$, $u \in R$, $x \in X$

задовольняє умовам існування глобального розв'язку супроводжуючих систем

$$du_x(t)/dt = C(u_x(t), x), x \in X.$$

Функція сингулярного збурення $C_0(u, x)$, $u \in R$, $x \in X$, задовольняє умові балансу

$$\int_X \pi(dx) C_0(u, x) \equiv 0.$$

Збіжність ПСО (3) розглядається в умовах експоненційної стійкості рівняння:

$$du(t)/dt = C'(u(t)), \quad (4)$$

де

$$C(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x).$$

$C(u)$ - усереднена функція регресії за стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in X$, яка має єдину точку екстремуму u_0 . Без зменшення загальності покладемо $u_0 = 0$.

Розглянемо елементи ПСО (3), що отримуються внаслідок розв'язку проблеми сингулярного збурення(п. 2.4)

$$L_0(x) = C_0(x)R_0C_0(x) + \mu(x)C_0^2(x)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_0 V(u) &= \Pi \mathbf{L}_0(x) V(u) \Pi = \\ &= b(u) V'(u) + \frac{1}{2} B(u) V''(u),\end{aligned}$$

де

$$b(u) = b_0(u) + b_\mu(u), \quad (5)$$

$$b_0(u) := \int_x \pi(dx) C_0(u; x) \mathbf{R}_0 C_0(u; x),$$

$$b_\mu(u) := \int_x \pi(dx) \mu(x) C_0(u; x) C_0(u; x)$$

$$B(u) = B_0(u) + B_\mu(u) \quad (6)$$

$$B_0(u) := 2 \int_x \pi(dx) C_0(u; x) \mathbf{R}_0 C_0(u; x),$$

$$B_\mu(u) := \int_x \pi(dx) \mu(x) C_0(u; x) C_0(u; x)$$

$$\mu(x) := (g_2(x) - 2g^2(x))/g(x),$$

де $g_2(x)$ - другий момент часу перебування

$$g_2(x) := \int_0^\infty t^2 G_x(dt) = 2 \int_0^\infty \bar{G}_x^{(2)}(t) dt, \quad \bar{G}_x^{(2)}(t) := \int_t^\infty \bar{G}_x(s) ds.$$

Теорема 2. Нехай існує функція Ляпунова $V(u), u \in R$, що забезпечує експоненційну стійкість для рівняння (4)

$$C1: C'(u) V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0,$$

$$C2: |V'(u)| \leq c_1 (1 + V(u)),$$

$$C3: |\nabla_{b(t)} C(u) - C'(u)| \leq kb(t) V'(u).$$

А також, при

$$\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x) := \nabla_{b(t)} C(u) - \nabla_{b(t)} C(u; x),$$

$$\tilde{\mathbf{L}}_0(x) V(u) = [\mathbf{L}_0 - \mathbf{L}_0(x)] V(u) = \tilde{L}_0(u; x) V'(u)$$

мають місце додаткові умови C4:

$$|C_0(u; x) [\mathbf{P} \nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x) V'(u)]'| \leq c_2 (1 + V(u)),$$

$$|C_0(u; x) [\mathbf{P} \tilde{L}_0(u; x) V'(u)]'| \leq c_3 (1 + V(u)),$$

$$|\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x) [\mathbf{P} \nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x) V'(u)]'| \leq c_4 (1 + V(u)),$$

$$|\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x) [\mathbf{P}\tilde{L}_0(u; x)V'(u)]'| \leq c_5(1+V(u)),$$

$$|C_0(u; x)[C_0(u; x)[\mathbf{P}\nabla_{b(t)} \tilde{C}(u; x)V'(u)]'| \leq c_6(1+V(u)),$$

$$|C_0(u; x)[C_0(u; x)[\mathbf{P}\tilde{L}_0(u; x)V'(u)]'| \leq c_7(1+V(u)).$$

Крім того, функції розподілу $G_x(t), x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$

$$C5: \sup_{x \in X} \int_0^{\infty} e^{ht} \bar{G}_x(t) dt \leq H < \infty, h > 0.$$

Нормуюча функція $a(t)$ монотонно спадає, обмежена та задовольняє умовам:

$$C6: \int_0^{\infty} a(t) dt = \infty, \int_0^{\infty} a^2(t) dt < \infty, \int_0^{\infty} a(t)b(t) dt < \infty$$

$$C7: \frac{a(t + \varepsilon^2 s)b'(t + \varepsilon^2 s)}{2b(t + \varepsilon^2 s)} < A, a'(t + \varepsilon^2 s) < A, \frac{a^2(t + \varepsilon^2 s)}{a^2(t)} < A, A < \infty.$$

Тоді при кожному додатному $\varepsilon \leq \varepsilon_0, \varepsilon_0$ - достатньо мале, процедура стохастичної оптимізації (3) збігається при $t \rightarrow \infty$ з ймовірністю 1 до точки екстремуму:

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

У розділі 3 *Асимптотична нормальність процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації та неперервна процедура з імпульсними збуреннями* встановлено асимптотичну нормальність флуктуації одновимірної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації, що описується стохастичним диференціальним рівнянням. В випадку процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням встановлено достатні умови збіжності, що дають змогу розглядати асимптотичну нормальність даної процедури.

У підрозділі 3.1 встановлено асимптотичну нормальність флуктуацій навколо точки рівноваги усередненої динамічної системи.

Неперервна процедура стохастичної оптимізації пошуку точки екстремуму функції регресії $C(u, x)$ в схемі дифузійної апроксимації задається стохастичним диференціальним рівнянням:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)C^\varepsilon(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^4)), \quad (7)$$

де

$$C^\varepsilon(u; x) = \nabla_{b(t)} C(u; x)\varphi'(u) + \varepsilon^{-1}C_0(u; x)\varphi'(u),$$

$$\nabla_{b(t)} C(u; x) = \frac{(C(u + b(t); x) - C(u - b(t); x))}{2b(t)}, \quad u \in R.$$

Функція регресії $C(u, x)$ така, що $C(u, \cdot) \in C^3(R)$, тобто допускає наступний розклад псевдо градієнта

$$\nabla_{b(t)} C(u, x) = C^{(1)}(x) + uC^{(2)}(x) + u^2C^{(3)}(u, x), \quad (8)$$

де

$$C^{(1)}(x) = C'(0, x), C^{(2)}(x) = C''_u(0, x), \quad (9)$$

$$C^{(3)}(x) = C''_u(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1. \quad (10)$$

Нехай для збурення $C_0(x)$ функції регресії (8) виконується умова балансу

$$\text{ÓÁ1: } \tilde{\text{П}}C_0(u; x) := \int_x \rho(dx) C_0(u; x) = 0.$$

При відповідних умовах на нормуючі функцію $a(t), b(t), t > 0$, неперервна ПСО (7) збігається з ймовірністю одиниця до точки екстремуму u_0 рівняння

$$du(t)/dt = C(u(t)),$$

де

$$C(u) := \int_x \pi(dx) C(u, x).$$

Таким умовам задовольняють функції

$$a(t) = a/t, b(t) = b/t^{1/4}, 0 < t_0 < t, a, b > 0,$$

які і буду розглядатися надалі в ПСО (7). З того, що $u_0 = 0$ має місце рівність

$$C(0) = 0,$$

а разом з властивостями проектора та розкладом псевдо градієнта в ряд Тейлора отримаємо додаткову умову балансу

$$\text{ÓÁ2: } \text{П}C^1(x) = 0.$$

Асимптотична нормальність ПСО (7) досліджується для нормованих флуктуацій

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sqrt{t} [u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)], \quad (11)$$

де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається через $C_0(u; x)$ з (7)

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2} a \int_{t_0}^t C_0(u^\varepsilon(s); x(s/\varepsilon^4)) / s ds. \quad (12)$$

Зауважимо, що збурення (12) задовольняє рівняння

$$\frac{dC_0^\varepsilon(t)}{dt} = \varepsilon^{-2} \frac{a}{t} C_0(u^\varepsilon(t); x(\frac{t}{\varepsilon^4})). \quad (13)$$

В позначенні

$$\tilde{v}^\varepsilon(t) = u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)$$

флуктуація (11) має представлення

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} \sqrt{t} \tilde{v}^\varepsilon(t),$$

або в зворотній формі

$$\tilde{v}(t) = \varepsilon v^\varepsilon(t) / \sqrt{t}.$$

З іншої сторони з (11) маємо представлення

$$u^\varepsilon(t) = \varepsilon [v^\varepsilon(t) / \sqrt{t} + C_0^\varepsilon(t)]. \quad (14)$$

Зауваження 1. Для збурення $C_0^\varepsilon(t)$ доведена слабка збіжність

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \rightarrow 0,$$

де

$$\sigma^2(t) = \frac{\sigma^2}{t^2},$$

а

$$\sigma^2 = 2a^2 \int_x \pi(dx) C_0(x) R_0 C_0(x). \quad (15)$$

Теорема 3.2 При умовах збіжності ПСО

Ошибка! Источник ссылки не найден. та при додаткових умовах УБ1, УБ2 а також

$$D1: \rho^2 := \sigma^2 + \sigma_\mu^2 > 0,$$

де σ^2 обчислюється в (15), а

$$\sigma_\mu^2 = qa^2 \int_x \rho(dx) \mu(x) C_0^2(x),$$

$$\mu(x) := g_2(x) - 2g^2(x),$$

$$D2: c_1 < -\frac{1}{2a},$$

де

$$c_1 := q \int_x \rho(dx) C^1(x),$$

має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), t > 0, \varepsilon \rightarrow 0,$$

в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T$.

Граничний двокомпонентний процес $\zeta(t), \sigma(t)w(t)$, $t > 0$, визначається генератором

$$L_t \varphi(v, w) = \frac{a^2 \rho^2}{2t^2} \varphi''_w(v, w) + \frac{a}{t} C^2(v, w) \varphi'_v(v, w), \quad (16)$$

де $C^2(v, w) = vb + ac_1\sqrt{tw}$, $b := ac_1 + \frac{1}{2}$.

У підрозділі 3.2 встановлено достатні умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з додатковими імпульсними збуреннями в схемі з малим параметром серій в термінах властивостей функції Ляпунова, використовуючи розв'язок проблеми сингулярного збурення для рівномірно ергодичного напівмарковського процесу.

Неперервна процедура стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями з імпульсними збуреннями задається еволюційним рівнянням:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)[\nabla_{b(t)}C(u^\varepsilon(t); x(t/\varepsilon^4))dt + \varepsilon d\eta^\varepsilon(t)], \quad (17)$$

де $\nabla_{b(t)}C(u; x) = \frac{(C(u+b(t); x) - C(u-b(t); x))}{2b(t)}$, $u \in R$.

Імпульсний процес збурень (ПЗ) $\eta^\varepsilon(t), t \geq 0$ задається співвідношенням:

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^t \eta^\varepsilon(ds; x(s/\varepsilon^4)),$$

де сім'я процесів з незалежними приростами $\eta^\varepsilon(t; x), t \geq 0, x \in X$ задається генераторами:

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-4} \int_R [\varphi(w + \varepsilon^2 v) - \varphi(w)] \Gamma(dv; x), x \in X.$$

Генератор допускає асимптотичне представлення

$$\Gamma^\varepsilon(x)\varphi(w) = \varepsilon^{-2}\Gamma_1(x)\varphi(w) + \Gamma_2(x)\varphi(w) + \varepsilon^2\theta^\varepsilon(x)\varphi(w)$$

де

$$\Gamma_1(x)\varphi(w) = b_1(x)\varphi'(w); b_1(x) = \int_R v \Gamma(dv; x)$$

$$\Gamma_2(x)\varphi(w) = \frac{1}{2}b_2(x)\varphi''(w); b_2(x) = \int_R v^2 \Gamma(dv; x)$$

Залишковий член такий, що $\varepsilon^2\theta^\varepsilon(x)\varphi(w) \rightarrow 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Нехай при цьому виконується умова балансу

$$\Pi\Gamma_1(x) = \int_X \pi(dx)b_1(x) = 0. \quad (18)$$

Умовою існування точки екстремуму, що співпадає з стаціонарною точкою системи є умова балансу

$$PC'(u_0, x) = \int_x \pi(dx) C'(u_0, x) = 0. \quad (19)$$

Теорема 4.3 *Нехай існує функція Ляпунова $V(u) \in C^3(R)$, що забезпечує експоненційну стійкість*

$$C1: C'V'(u) \leq -c_0 V(u), c_0 > 0.$$

А також умови:

$$C2: |\Gamma_1(x) \mathbf{R}_0 \Gamma_1(x) V(u)| \leq c_1 (1 + V(u)), c_1 > 0,$$

$$C3: |\mathbf{C}_b(x) \mathbf{R}_0 \Gamma_1(x) V(u)| \leq c_2 (1 + V(u)), c_2 > 0,$$

$$C4: |\Gamma_1(x) \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{C}}(x) V(u)| \leq c_3 (1 + V(u)), c_3 > 0,$$

$$C5: |\mathbf{C}_b(x) \mathbf{R}_0 \tilde{\mathbf{C}}(x) V(u)| \leq c_4 (1 + V(u)), c_4 > 0,$$

та умова Ліпшиця

$$C6: |\nabla_{b(t)} C(u) - C'(u)| \leq kb(t) V'(u).$$

Функції розподілу $G_x(t), x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$

$$C7: \sup_{x \in X} \int_0^\infty e^{ht} \overline{G}_x(t) dt \leq H < \infty, h > 0.$$

Функція регресії $C(u; x)$ має першу похідну по $u \in R$ і разом з функціями $b_1(x), b_2(x) \in$ рівномірно обмеженими по $x \in X$. Також нехай виконується умова балансу (18). Нехай керуюча функція $a(t) > 0$ вибрана так, щоб виконувалися умови

$$\int_0^\infty a(t) dt = \infty, \int_0^\infty a^2(t) dt < \infty, \int_0^\infty a(t) b(t) dt < \infty.$$

Тоді для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0, \varepsilon_0$ - достатньо мале, розв'язок еволюційного рівняння (17), при усіх початкових умовах $u^\varepsilon(0) = u$ з ймовірністю 1 збігаються до точки екстремуму:

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u^\varepsilon(t) = 0\} = 1.$$

У четвертому розділі *Застосування процедури стохастичної оптимізації* розглянуто модель тестування програмного продукту з показником складності проекту. Побудовано процедуру стохастичної оптимізації для індексу величини програмного продукту, а саме для параметру s , який є критерієм достатності процесу тестування програмного забезпечення. Крім цього введено залежність від

напівмарковського процесу для врахуванням стохастичності процесу тестування. Створена процедура дозволяє оцінити кількість залишкових помилок, що в свою чергу дає можливість передбачити матеріальні витрати на тестування та його доцільність.

Зокрема, у підрозділі 4.1 розглянуто зв'язок між моделями на основі кількостей помилок та часу між помилками з використанням властивостей марковського та напівмарковського процесу. У підрозділі 4.2 описано модель, а також проаналізовані властивості моделі. У підрозділі 4.3 розглянута неперервна процедура стохастичної оптимізації

$$\frac{du(t)}{dt} = a(t)\nabla_{b(t)}C(u(t);x(t)) + \frac{a(t)}{b(t)} \sum_{r=1}^k \sigma_r(t,u)d\xi_r(t), u \in R, \quad (20)$$

пошуку точки $u = u_0$ екстремуму функції регресії $C(u; x), u \in R, x(t), t \geq 0$ - рівномірно ергодичний напівмарковський процес, коли її значення спостерігаються з помилками типу гаусівського білого шуму $\dot{\xi}_r(t) = \dot{\xi}_r(t, \varpi), r = \overline{1, k}$.

Збіжність процедури (20) формулюється в термінах властивостей гладкості функцій Ляпунова.

Теорема 5.4 Якщо функції $a(t) > 0, b(t) > 0$ задовольняють умовам

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t)dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^2(t)dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty} a(t)b(t)dt < \infty, t_0 > 0,$$

а також функції розподілу $G_x(t)$, часу перебування в стані напівмарковського процесу $x \in X$, задовольняють умові Крамера, рівномірно по $x \in X$

$$\sup_{x \in X} \int_0^{\infty} e^{-ht} \overline{G}_x(t) dt \leq H < \infty, h > 0.$$

то процедура стохастичної оптимізації (20) збігається з ймовірністю 1

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_0\} = 1,$$

де s_0 таке, що

$$\max \lambda(s, x, t) = \lambda(s_0, x, t).$$

Важливим кроком застосування процедури стохастичної оптимізації (20) є встановлення природи стохастичності, що входить в функцію регресії $C(u; x)$. Побудовано функцію інтенсивності для граничного аналізу математичної моделі тестування, з врахуванням зовнішніх впливів в наступній формі

$$\lambda(s, x, t) = \hat{\alpha}(1 + kx(t))\hat{\beta}^{s+1}t^s \exp\left(- (1 + kx(t))\hat{\beta}t\right), \quad (21)$$

де k - додатковий коефіцієнт, що характеризує, впливи зовнішніх факторів на процес тестування, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ - точкова оцінка параметра з моделі.

Зауважимо, що функція інтенсивності виявлення помилок $\lambda(s, x, t)$ має єдиний максимум, отже застосування процедури (20) до функції інтенсивності моделі тестування (21) дає

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{a(t)}{2b(t)} [\hat{\alpha}((1+kx(t))\hat{\beta})^{s(t)+b(t)+1} t^{s(t)+b(t)} e^{-(1+kx(t))\hat{\beta}t} - \\ - \hat{\alpha}((1+kx(t))\hat{\beta})^{s(t)-b(t)+1} t^{s(t)-b(t)} e^{-(1+kx(t))\hat{\beta}t}].$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі отримано нові науково-обґрунтовані результати в галузі системного аналізу та теорії прийняття рішень в умовах невизначеності, що описується впливами випадкової природи. Дисертація є комплексним дослідженням, де встановлено збіжність процедури стохастичної оптимізації з залежною від напівмарковського процесу функцією регресії в схемах усереднення, дифузійної апроксимації та з імпульсним збуренням, розглянуто поведінку флуктуацій процедури в зазначених схемах. Напівмарковський процес описує ширший спектр природніх та технологічних процесів, а ніж марковський, тому має свої переваги в описі середовища в якому відбувається процес.

Вперше отримано достатні умови слабкої збіжності процедури до точки екстремуму в термінах властивостей функції Ляпунова чисто градієнтної усередненої системи за стаціонарним розподілом напівмарковського процесу. Побудовано вигляд генератора процедури в схемі усереднення та розв'язано проблему сингулярного збурення для такого генератора.

Вперше отримано достатні умови збіжності процедури стохастичної оптимізації з імпульсним збуренням в напівмарковському середовищі.

Вперше розглянуто неперервну процедуру стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації з залежною від напівмарковського переключуючого процесу функцією регресії, такої, що задовольняє умові Ліпшиця в умовах глобального балансу на сингулярне збурення функції регресії. Отримано достатні умови збіжності процедури до точки екстремуму в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої системи.

Вперше встановлено асимптотичну нормальність флуктуації одновимірної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації, що описується стохастичним диференціальним рівнянням.

Робота має як теоретичний так і практичний характер та може бути корисною при моделюванні стохастичних оптимізаційних проблем.

Отримані результати містять внесок у дослідження властивостей випадкових еволюцій у вигляді стохастичних систем з напівмарковськими переключеннями. Запропоновані підходи можуть бути використані при розробці нових методів стохастичної оптимізації та їх застосуванню до конкретних прикладних задач, а також при вивченні асимптотичних властивостей випадкових еволюцій з напівмарковськими переключеннями та при дослідженні асимптотичних флуктуацій стохастичних систем та процедури стохастичної оптимізації.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Кукурба В.Р. Непрерывная процедура стохастической оптимизации с полумарковскими переключениями в схеме диффузионной аппроксимации/ В.Р. Кукурба, Я.М. Чабанюк //Кибернетика и системный анализ – 2013. – № 6. – С. 132–142.

2. Кукурба В.Р. Збіжність одновимірної процедури стохастичної оптимізації в напівмарковському середовищі /В.Р. Кукурба, У.Б. Ярکا //Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика: Наук. журнал Донецький нац. ун-т. – 2012. – №1. – С. 64–70.

3. Кукурба В.Р. Асимптотична дифузійність флуктуацій неперервної оптимізаційної процедури в напівмарковському середовищі. /В.Р. Кукурба, Я.М. Чабанюк, А.В. Кінаш // Вісник Київського Національного університету ім. Т. Шевченка. Серія фіз.-мат. науки – 2013. – №2. – С. 184–190.

4. Кукурба В.Р. Стохастична оптимізація з напівмарковськими переключеннями та імпульсним збуренням /В.Р. Кукурба // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики ім. В. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка – 2013. – Вип. 7. – С. 112–121.

5. Кукурба В.Р. Процедура стохастичної оптимізації для моделі тестування з напівмарковськими переключеннями / Я.М. Чабанюк, В.Р.Кукурба, // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-мат. науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики ім. В. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка – 2014. – Вип. 10. – С. 110–120.

Статті у інших виданнях:

6. Кукурба В.Р. Оптимізація моделі тестування програмного забезпечення з показником величини проекту / Я.М. Чабанюк, В.Р.Кукурба, Л.Б. Гнатів, І.С. Будз, Р.Й. Петрович // Вісник НУ"ЛП" серія "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" – № 69 4– С. 81–89.

Матеріали та тези доповідей на наукових конференціях:

7. Кукурба В. Асимптотичне зображення генератора стохастичної оптимізації в напівмарковському середовищі / Я. Чабанюк, В. Кукурба, С. Семенюк, І. Подун. // International V.Ya. Skorobohatko mathematical conference. Abstracts. Drohobych, September 19-23. – Drohobych, 2011. – С. 216.

8. Кукурба В.Р. Генератор стохастичного процесу з напівмарковськими переключеннями / Я.М. Чабанюк, В.Р. Кукурба, І.С. Будз // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2011): праці міжн. конф. (Yalta, 19-23 вересня 2011). – Київ, 2011. – С. 158–159.

9. Кукурба В. Р. Збіжність процедури стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями / Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації (4-5 квітня 2012 р.). – Кам'янець Подільський нац. ун-т ім. І. Огієнка, 2012. – С. 42–43.

10. Kukurba V. Convergence of the optimization procedure with semi-Markov switching in one-dimensional case/ V. Kukurba, Ya. Chabanyuk // International conference Modern stochastics : Theory and applications III. Abstracts. (10-14 September 2012). – Kiev, 2012. – С. 52–53

11. Кукурба В.Р. Граничний генератор оптимізаційної процедури в схемі дифузійної апроксимації. / Кукурба В.Р., Чабанюк Я.М., Гошко Л.Б. // Конференція "Системний аналіз. Інформатика. Управління." – Запоріжжя, –2013.

12. Кукурба В.Р. Процедура стохастичної оптимізації для процесу тестування з напівмарковськими переключеннями / Кукурба В.Р., Чабанюк Я.М., Семенюк С.А. Problems of decision making under uncertainties: abstracts (Mukachevo, 12-16 May 2014). – Kyiv, 2014. – С. 122–123.

13. Кукурба В.Р. Генератор флуктуацій оптимізаційної процедури з напівмарковськими переключеннями / Кукурба В.Р., Чабанюк Я.М. Problems of decision making under uncertainties: abstracts (Odessa, 24-28 August 2015). – Kyiv, 2015. – С. 105–106.

АНОТАЦІЯ

Кукурба В.Р. *Неперервна процедура стохастичної оптимізації з напівмарковськими переключеннями* – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.04 "– системний аналіз і теорія оптимальних рішень. "– Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена встановленню достатніх умов збіжності процедури стохастичної оптимізації, параметрами якої є еволюційний процес та напівмарковський процес, що описує впливи зовнішнього випадкового середовища; та встановленню асимптотичної поведінки процедури стохастичної оптимізації. Окремо розглянуто флуктуації процедур стохастичної оптимізації з імпульсним та

дифузійним збуреннями. Встановлено достатні умови слабкої збіжності еволюції до граничного процесу та доведено відповідні теореми. Для цього отримано асимптотичний вигляд збуреного генератора процедури стохастичної оптимізації. Розглянуто задачу тестування програмного продукту з динамічною моделлю прогнозування надійності. Модифіковано дану модель та запропоновано для знаходження параметру кількості помилок тестування як критерію достатності процесу тестування ввести процедуру стохастичної оптимізації, що враховує впливи зовнішньої природи на систему.

Ключові слова: неперервна процедура стохастичної оптимізації, напівмарковський процес, асимптотична нормальність, розв'язок проблеми сингулярного збурення, збурений генератор, прогнозування надійності.

АННОТАЦІЯ

Кукурба В. Р. *Непрерывная процедура стохастической оптимизации с полумарковскими переключениями* – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.04 – системный анализ и теория оптимальных решений. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена установлению достаточных условий сходимости процедуры стохастической оптимизации, параметрами которой является эволюционный процесс и полумарковских процесс, что описывает влияния внешней случайной среды, а также установлению асимптотического поведения процедуры стохастической оптимизации. Отдельно рассмотрены флуктуации процедур стохастической оптимизации с импульсным и диффузионным возмущениями. Установлены достаточные условия слабой сходимости эволюции к предельному процессу и доказано соответствующие теоремы. Для этого получены асимптотические представления возмущенного генератора процедуры стохастической оптимизации.

Рассмотрено одномерную непрерывную процедуру стохастической оптимизации в схеме усреднения в случае зависимости функции регрессии от полумарковского процесса. Функция регрессии удовлетворяет условию Липшица. Получены достаточные условия слабой сходимости процедуры к точке экстремума в терминах свойств функции Ляпунова чисто градиентной усредненной системы по стационарному распределению марковского процесса.

Рассмотрено одномерную непрерывную процедуру стохастической оптимизации в схеме диффузионной аппроксимации с полумарковскими возмущениями. Функция регрессии удовлетворяет условию Липшица в условиях глобального баланса на сингулярное возмущение функции регрессии. Получены достаточные условия сходимости процедуры к точке экстремума в терминах свойств функции Ляпунова усредненной системы.

Установлено асимптотическую нормальность флуктуаций одномерной процедуры стохастической оптимизации в схеме диффузионной аппроксимации, что описывается стохастическим дифференциальным уравнением. При этом использовались асимптотические свойства компенсирующего оператора полумарковских процессов для построения генератора предельного диффузионного процесса.

Рассмотрено непрерывную процедуру стохастической оптимизации с дополнительным импульсным возмущением. Установлены достаточные условия сходимости, позволяющие рассматривать асимптотической нормальности данной процедуры.

Рассмотрена задача тестирования программного продукта с динамической моделью прогнозирования надежности. Модифицированно данную модель и предложено для нахождения параметра количества ошибок тестирования, как критерия достаточности процесса тестирования, ввести процедуру стохастической оптимизации, учитывающий влияния внешней природы на систему.

Ключевые слова: непрерывная процедура стохастической оптимизации, полумарковский процесс, асимптотическая нормальность, решение проблемы сингулярного возмущения, возмущенный генератор, прогнозирования надежности.

ANNOTATION

Kukurba V. *Continues Stochastic Optimization Procedure with semi-Markov switchings*"– Manuscript.

The thesis for the scientific degree of candidate of physical and mathematical sciences in speciality 01.05.04 "– system analysis and optimal decisions theory. "– Taras Shevchenko National University of Kyiv of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

In the thesis, author obtain sufficient conditions for the convergence of stochastic optimization procedure that depends on semi-Markov process of regression function in the average scheme and the diffusion approximation scheme. Asymptotic normality of the stochastic optimization procedure is investigated in the diffusion approximation scheme. Extended compensating operators, constructed on Markov renewal process, are used for characterization of semi-Markov continuous random evolution in schemes.

Conditions are obtained for the convergence of fluctuations stochastic optimization procedure with diffusion perturbing. Appropriate limit processes view are discovered. Asymptotic representation of the perturbed generator procedure was built for this purpose.

The continuous process stochastic optimization with an additional impulse perturbing is considered. Obtained sufficient conditions for convergence allows to consider the asymptotic normality of the procedure.

It is proposed to used continuous stochastic optimization procedure in software reability.

Key words: continuous stochastic optimization procedure, semi-Markov process, asymptotic normality, fluctuation of stochastic optimization procedure, impulse perturbing, diffusion perturbing, perturbed generator, reliability model.