УДК 539.3

https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.30

Шикула О. М.[1], д.ф.-м.н., проф.
Жукова Н. Б.[2], к.ф.-м.н., с.н.с.

Модель нелінійного деформування зернистих композитів

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3, Державний університет інформаційно-телекомунікаційних технологій, 03110, м. Київ, вул. Солом'янська, 7,
e-mail: ensh@ukr.net
[2] Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України, 03057, м. Київ, вул. Нестерова, 3,
e-mail: zhukova_n@ukr.net

E. N. Shikula[1], Doctor of Phys. and Math.Sciences,
N. B. Zhukova[2], Cand. of Phys. and Math. Sciences.

Model of nonlinear deformation of granular composites

[1] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Science of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 3; State University of Information and Telecommunication Technologies, 03110, Kyiv, Solomyanska str., 7,
e-mail: ensh@ukr.net
[2] S.P. Timoshenko Institute of Mechanics, National Academy of Science of Ukraine, 03057, Kyiv, Nesterova str., 3,
e-mail: zhukova_n@ukr.net

Побудовано модель нелінійного деформування зернистого композитного матеріалу стохастичної структури з фізично нелінійними компонентами. В основу покладені стохастичні диференціальні рівняння фізично нелінійної теорії пружності Л.П. Хорошуна. Розв'язок задачі про напружено-деформівний стан та ефективні деформативні властивості композитного матеріалу будується за методом осереднення. Розроблено алгоритм визначення ефективних властивостей зернистого матеріалу з фізично нелінійними компонентами. Розв'язок нелінійних рівнянь, що враховують їх фізичну нелінійність, будується за ітераційним методом. Встановлено закон зв'язку між макронапруженнями і макродеформаціями в зернистому матеріалі та залежності середніх деформацій і напружень в його компонентах від макродеформацій. Побудовано криві деформування матеріалу для різних значень об'ємного вмісту його компонентів. Вивчено залежність ефективних деформативних властивостей зернистого матеріалу від об'ємного вмісту компонентів. Досліджено вплив нелінійності компонентів на деформування зернистого композитного матеріалу. Встановлено, що нелінійність компонентів суттєво впливає на ефективні деформативні властивості та напружено-деформований стан зернистих матеріалів.

Ключові слова: зернистий композитний матеріал, нелінійність деформування компонентів, ефективні деформативні властивості, напружено-деформівний стан, вплив нелінійності

The model of nonlinear deformation of a granular composite material of a stochastic structure with physically nonlinear components was constructed. The basis is the stochastic differential equations of the physically nonlinear theory of elasticity by L.P. Khoroshun. The solution to the problem of the stress-strain state and effective deformable properties of the composite material is built using the averaging method. An algorithm for determining the effective properties of granular material with physically nonlinear components has been developed. The solution of nonlinear equations, taking into account their physical nonlinearity, is constructed by the iterative method. The law of the relationship between macrostresses and macrostrains in granular material and the dependence of average strains and stresses in its components on macrostrains has been established. Curves of deformation of the material were constructed for different values of the volume content of its components. The dependence of the effective deformable properties of the granular material on the volume content of the components was studied. The effect of component nonlinearity on the deformation of granular composite material was studied. It was established that the nonlinearity of the components significantly affects the effective deformable properties and the stress-strain state of granular materials.

Key Words: granular composite material, nonlinearity of deformation of components, efficient deformative properties, stress-strain state, influence of nonlinearity

Статтю представив член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

В умовах достатньо високих навантажень багато композитних матеріалів мають нелінійний характер залежностей між макронапруженнями та макродеформаціями внаслідок фізично нелінійного деформування компонентів. Такий вид нелінійності притаманний композитам на основі пластичної металевої матриці та на основі полімерів при підвищених температурах. Експериментальні дослідження показують [1], що при досить високих температурах нелінійно деформуються також високомодульні матеріали типу органічного скла. На рис. 1 наведено графіки експериментальної залежності напруження від деформації для органічного скла за різних температур. Як бачимо при температурі 80^0, залежність між напруженням і деформацією має параболічний характер. Тому актуальним є дослідження фізично нелінійного деформування композитних матеріалів при нелінійному деформуванні як матриці, так і включень.

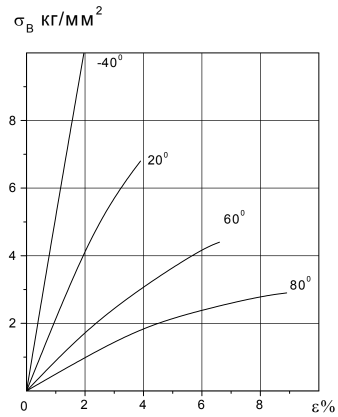

Рис.1. Експериментальна залежність напруження від деформації для органічного скла при різних температурах

Розглянемо зернистий композит з нелінійними ізотропними компонентами, який знаходиться в умовах однорідних макродеформацій. Залежності між напруженнями σ_{ij} та деформаціями ε_{ij} можна подати у вигляді

$$\sigma_{ij} = (K - 2\mu/3)\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (i,\, j,\, p = 1, 2, 3), \quad (1)$$

де модулі об'ємного стиску K і зсуву μ – випадкові функції координат, які приймають значення відповідно K_1, μ_1 і K_2, μ_2 для включень і матриці, причому об'ємні деформації компонентів є лінійними, тобто модулі об'ємного стиску K_1, K_2 не залежать від деформацій, а деформації зсуву описуються нелінійними діаграмами.

Виходячи з рівнянь рівноваги

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (2)$$

співвідношень Коші

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = 1/2\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

та залежностей (1), отримаємо фізично та статистично нелінійні рівняння рівноваги відносно флуктуацій переміщень $u_i^0 = u_i - <\varepsilon_{ij}> x_j$

$$(K_c + \mu_c/3)u^0_{r,ri} + \mu_c u^0_{i,rr} = -[(K' - 2/3\,\mu')\varepsilon_{pp}\delta_{ij} + 2\mu'\varepsilon_{ij}]_{,j}$$
$$(K' = K - K_c;\ \mu' = \mu - \mu_c;\ i,\, j,\, p,\, r = 1, 2, 3). \quad (4)$$

Усереднюючи співвідношення (1), отримуємо вирази для середніх напружень у вигляді

$$<\sigma_{ij}> = c_1(K_1 - 2/3\,\mu_1) <\varepsilon^1_{pp}> \delta_{ij} +$$
$$+ c_2(K_2 - 2/3\,\mu_2) <\varepsilon^2_{pp}> \delta_{ij} +$$
$$+ 2c_1\mu_1 <\varepsilon^1_{ij}> + 2c_2\mu_2 <\varepsilon^2_{ij}>, \quad (5)$$

де c_1, c_2 – об'ємні вмісти відповідно включень та матриці.

За допомогою функції Гріна рівняння (4) можна привести до інтегральної форми. Скориставшись методом умовних моментів Л.П. Хорошуна [2, 3], усереднюючи ці рівняння за умовною щільністю, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь відносно середніх деформацій компонентів. Визначивши їх з цієї системи і підставивши в співвідношення (5), отримаємо залежності між макронапруженнями $<\sigma_{ij}>$ і макродеформаціями $<\varepsilon_{ij}>$

$$<\sigma_{ij}> = \left(K^* - 2/3\,\mu^*\right) <\varepsilon_{pp}> \delta_{ij} + 2\mu^* <\varepsilon_{ij}>, \quad (6)$$

Ефективні деформативні коефіцієнти мають вигляд [2, 4]

$$K^* = <K> - \frac{c_1 c_2 (K_1 - K_2)^2}{c_1 K_2 + c_2 K_1 + \bar{K}_c};$$
$$\mu^* = <\mu> - \frac{c_1 c_2 (\mu_1 - \mu_2)^2}{c_1 \mu_2 + c_2 \mu_1 + \bar{\mu}_c}; \quad (7)$$

де [5]

$$\bar{K}_c = \frac{4}{3}\mu_c; \quad \bar{\mu}_c = \frac{\mu_c(9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}; \quad (8)$$

$$\mu_c = c_1\mu_1 + c_2\mu_2; \; K_c = c_1K_1 + c_2K_2, \qquad (9)$$

якщо жорсткість матриці більше, ніж жорсткість включень, та

$$\mu_c = \left({c_1}/{\mu_1} + {c_2}/{\mu_2} \right)^{-1}; \; K_c = \left({c_1}/{K_1} + {c_2}/{K_2} \right)^{-1} \qquad (10)$$

в іншому випадку.

Зауважимо, що в випадку фізичної нелінійності компонентів композиту ефективні деформативні характеристики (7) – (10) будуть функціями середніх деформацій у включеннях $<\varepsilon_{ij}^1>$ та матриці $<\varepsilon_{ij}^2>$. Виразивши середні деформації в компонентах через макродеформації $<\varepsilon_{ij}>$, отримаємо ефективні коефіцієнти як функції макродеформацій.

Враховуючи співвідношення, що пов'язують макронапруження та макродеформації із середніми напруженнями та деформаціями в компонентах

$$<\sigma_{ij}> = c_1 <\sigma_{ij}^1> + c_2 <\sigma_{ij}^2>;$$

$$<\varepsilon_{ij}> = c_1 <\varepsilon_{ij}^1> + c_2 <\varepsilon_{ij}^2>, \qquad (11)$$

зв'язки між напруженнями та деформаціями компонентів, що випливають з (1)

$$<\sigma_{ij}^\nu> = \left(K_\nu - \frac{2}{3}\mu_\nu\right) <\varepsilon_{pp}^\nu> \delta_{ij} + 2\mu_\nu <\varepsilon_{ij}^\nu>$$

$$(\nu = 1,2) \qquad (12)$$

і співвідношення (7), отримаємо залежності, що пов'язують середні деформації в компонентах $<\varepsilon_{ij}^\nu>$ $(\nu = 1,2)$ та макродеформації $<\varepsilon_{ij}>$

$$<\varepsilon_{ij}^\nu> = (-1)^{\nu+1} \times$$

$$\times \left[\frac{2\mu^*(\mu_1-\mu_2)(K^*-K_{3-\nu}) - 3K^*(K_1-K_2)(\mu^*-\mu_{3-\nu})}{6c_2\mu^*(K_1-K_2)(\mu_1-\mu_2)} \times \right.$$

$$\left. \times <\varepsilon_{pp}> \delta_{ij} + \frac{\mu^*-\mu_{3-\nu}}{2c_2\mu^*(\mu_1-\mu_2)} <\varepsilon_{ij}> \right]. \qquad (13)$$

Підставивши співвідношення (13) в (7) – (10), отримаємо вирази для ефективних коефіцієнтів як функцій макродеформацій $<\varepsilon_{ij}>$.

Співвідношення (7) – (10), (13) дозволяють написати ітераційний алгоритм для визначення ефективних деформативних характеристик зернистого композитного матеріалу.

В якості конкретної задачі досліджуємо нелінійне деформування зернистого композитного матеріалу, у якого модулі об'ємного стиску включень K_1 та матриці K_2`є сталими, а модулі зсуву μ_ν $(\nu = 1,2)$ задаються функціями

$$\mu_1(<\varepsilon^1>) = \begin{cases} \mu_{01}, & J_\varepsilon^1 < \dfrac{k_1}{2\mu_{01}}; \\ \mu_{01} - \mu_1'\left(1 - \dfrac{k_1}{2J_\varepsilon^1}\right), & J_\varepsilon^1 \ge \dfrac{k_1}{2\mu_{01}}; \end{cases} \qquad (14)$$

$$\mu_2(<\varepsilon^2>) = \begin{cases} \mu_{02}, & J_\varepsilon^2 < \dfrac{k_2}{2\mu_{02}}; \\ \mu_2' + \left(1 - \dfrac{\mu_2'}{\mu_{02}}\right)\dfrac{k_2}{2J_\varepsilon^2}, & J_\varepsilon^2 \ge \dfrac{k_2}{2\mu_{02}}, \end{cases} \qquad (15)$$

де $\mu_{0\nu}$, μ_ν', $k_\nu = \sigma_{0\nu}\sqrt{2/3}$ – сталі включень (при $\nu = 1$) та матриці (при $\nu = 2$), $\sigma_{0\nu}$ – межа їх плинності, $J_\varepsilon^\nu = (<\varepsilon_{pq}^\nu>'<\varepsilon_{pq}^\nu>')^{1/2}$, $<\varepsilon_{pq}^\nu>'$ – девіатор середніх у включеннях або матриці деформацій.

При виконанні розрахунків в якості компонентів взяті відповідно включення з органічного скла, які мають діаграму нелінійного деформування (14) із сталими [1, 4 – 6]

$$K_1 = 27{,}78 \text{ ГПа}; \quad \mu_{01} = 20{,}83 \text{ ГПа};$$

$$\mu_1' = 0{,}184 \text{ ГПа}; \quad \boldsymbol{\sigma_{01}} = 1{,}8 \text{ ГПа}, \qquad (16)$$

об’ємним вмістом $\boldsymbol{c_1}$ = 0; 0,2; 0,4; 0,6; 1,0
та епоксидна матриця, яке має діаграму лінійного зміцнення (15) із сталими [1, 4 – 6]

$$K_2 = 3{,}33 \text{ ГПа}; \quad \mu_{02} = 1{,}11 \text{ ГПа};$$

$$\mu_2' = 0{,}02 \text{ ГПа}; \quad \sigma_{02} = 0{,}12 \text{ Гпа}. \qquad (17)$$

На основі отриманих залежностей було досліджено ефективні діаграми нелінійного деформування зернистого композитного матеріалу при різних об'ємних концентраціях компонентів у разі заданих макропараметрів.

$$<\varepsilon_{11}> \ne 0; \quad <\sigma_{22}> = <\sigma_{33}> = 0. \qquad (18)$$

На рис. 2 наведено графіки залежностей макронапруження ${<\sigma_{11}>}/{\mu_2}$ від макродеформації $<\varepsilon_{11}>$ для зернистого композита при різних об’ємних вмістах компонентів c_1. Як бачимо, фізична нелінійність компонентів матеріалу істотно впливає на характер діаграм деформування при всіх значеннях об'ємного вмісту включень, криві залежностей мають праболічний характер.

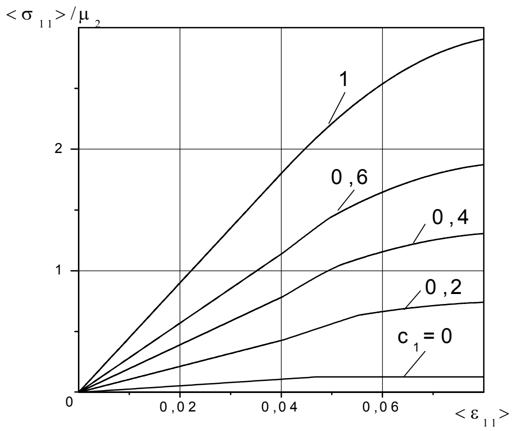

Рис. 2. Залежності макронапруження $<\sigma_{11}>/\mu_2$ від макродеформації $<\varepsilon_{11}>$ для зернистого композита при різних об’ємних вмістах компонентів c_1.

Список використаних джерел

1. *Вулф Б.К.* Авиационное материаловедение / Б.К. Вулф, К.П. Ромадин – Москва: Машиностроение, 1967. – 422 с.
2. *Хорошун Л.П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных сред / Л.П. Хорошун // Прикладная механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3-17.
3. *Хорошун Л.П.* Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов / Л.П. Хорошун // Прикладная механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100-108.
4. *Хорошун Л.П.* Механика композитов: В 12-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т.3 Статистическая механика и эффективные свойства материалов. / Л.П. Хорошун, Б.П. Маслов, Е.Н. Шикула, Л.В. Назаренко. – Киев: Наукова думка, 1993. – 390 с.
5. *Гузь А.Н.* Механика композитных материалов и элементов конструкций В 3-х т. / под общ. ред. А.Н.Гузя / Т. 1. Механика материалов. / А.Н. Гузь, Л.П. Хорошун, Г.А. Ванин и др. – Киев: Наукова думка, 1982. – 368 с.
6. *Крегерс А.Ф.* Математическое моделирование термического расширения пространственно армированных композитов / А.Ф. Крегерс // Механика композитных материалов. – 1988. – № 3. С. 433-441.

References

1. VULF B.K., ROMADIN K.P. (1967) *Aviatsionnoye materialovedeniye* Moskva: Mashinostroyeniye.
2. KHOROSHUN L.P. (1978) Metodyi teorii sluchaynyih funktsiy v zadachah o makroskopicheskih svoystvah mikroneodnorodnyih sred. *Prikladnaya mehanika.* 14 (2). p. 3-17.
3. KHOROSHUN L.P. Metod uslovnyih momentov v zadachah mehaniki kompozitnyih materialov. *Prikladnaya mehanika*. 23 (10). p. 100-108.
4. KHOROSHUN L.P., MASLOV B.P., SHIKULA E.N., NAZARENKO L.V. (1993*) Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 3. Statisticheskaya mehanika i effektivnyie svoystva materialov.* Kiev: Naukova dumka.
5. GUZ A.N., KHOROSHUN L.P., MIHAYLOVA M.I., BABICH D.V., SHIKULA E.N. (2003) *Mehanika kompozitov. (Vols. 1-12). Vol. 12. Prikladnyie issledovaniya.* K: «A.S.K.»
6. KREGERS A.F. (1988) Matematicheskoe modelirovanie termicheskogo rasshireniya prostranstvenno armirovannyih kompozitov *Mehanika kompozitnyih materialov*. 3. P. 433-441.

Надійшла до редколегії 25.08.23