

УДК 539.3

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2021/3.23>

Середницька Х. І., к. ф.-м. н.

Kh. I. Serednytska, Ph. D. (Phys.-Math.)

Параметр термічної ректифікації у біматеріалі з міжфазною тріщинуватістю

Parameter of thermal rectification in the bimaterial with interfacial cracking

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, 79060, Lviv, Naukova str., 3-b
e-mail: labmtd@iapmm.lviv.ua

Вивчено явище термічної ректифікації у біматеріалі з періодичною системою міжфазних щілин, заповнених газом. Враховано зміну термоопору та тиску заповнювача щілин під дією розтягувальних зусиль та однорідного теплового потоку. Тиск газу визначається з рівняння Клапейрона-Менделєєва. Термоопір газу прямо пропорційний розкриттю щілин і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу. Задачу термопружності зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Для розв'язування системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь запропоновано аналітично-числову ітераційну процедуру. Визначено параметр термічної ректифікації та проаналізовано його залежність від прикладеного силового і теплового навантаження, теплопровідності та маси газу та коефіцієнта тріщинуватості біматеріалу. Встановлено нелінійну залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості. Термічна ректифікація проявляється в більшій мірі для більших значень теплового потоку та меншої теплопровідності газу.

Ключові слова: біматеріал, міжфазна тріщинуватість, параметр термічної ректифікації.

The phenomenon of thermal rectification in bi-material with a periodic system of gas-filled interfacial cracks has been studied. The change of thermal resistance and pressure of the crack filler under the action of tensile forces and uniform heat flow is taken into account. The gas pressure is determined from the Clapeyron-Mendeleev equation. The thermal resistance of the gas is directly proportional to the opening of the cracks and inversely proportional to the thermal conductivity of the gas. The thermo-elastic problem is reduced to nonlinear systems of singular integro-differential equations for an opening cracks and a temperature jump between the cracks faces. An analytical-numerical iterative procedure is proposed to solve the system of singular integro-differential equations. The parameter of thermal rectification is determined and its dependence on the applied on the thermal and mechanical loads, thermal conductivity and mass of the gas and the interfacial cracking factor of the bi-material is analyzed. The nonlinear dependence of the thermal rectification parameter on the heat flow density and the interfacial cracking factor is established. The thermal rectification is manifested to a greater extent for higher values of heat flow and lower thermal conductivity of gas.

Key Words: bi-material, interfacial cracking, parameter of thermal rectification.

Статтю представив член-кор. НАН України Жук Я.О.

1. Вступ

Передача тепла через з'єднані елементи суттєво залежить від термомеханічних параметрів тіл, прикладеного навантаження, геометричних характеристик поверхонь та властивостей заповнювача зазорів між ними. У праці [1] досліджено передачу тепла між спряженими поверхнями тіл за наявності середовища в інтерфейсних зазорах. Встановлено, що для матеріалів з різними термо-

механічними властивостями спостерігається явище термічної ректифікації, яке полягає у залежності контактного термоопору від напрямку теплового потоку. Для контакту двох тіл з шорсткими поверхнями явище термічної ректифікації експериментально було досліджено у праці [2], Теоретичні дослідження термічної ректифікації стосуються контакту пружних тіл з поверхневи-ми виїмками, заповненими теплопровідним сере-

довищем, та текстурованих тіл за наявності між-контактного газу [3].

У даній статті вивчено явище термічної ректифікації для біматеріалу з періодичною системою міжфазних заповнених щілин під дією теплового потоку та розтягувального навантаження з урахуванням тиску і термоопору ідеального газу.

2. Формулювання задачі

Розглядаємо біматеріал, що складається з двох півплощин D_1 і D_2 , матеріали яких характеризуються різними коефіцієнтами Пуассона (ν_1, ν_2), модулями зсуву (G_1, G_2), коефіцієнтами лінійного теплового розширення (α_1, α_2) та коефіцієнтами теплопровідності (λ_1, λ_2). На межі з'єднання півплощин розташована періодична система міжфазних щілин (рис. 1) завдовжки $2a$ з початковою висотою $h_0(x)$ та періодом розташування d . Порожнини щілин заповнені теплопровідним газом з коефіцієнтом теплопровідності λ_g , який чинить тиск P_g на їх береги.

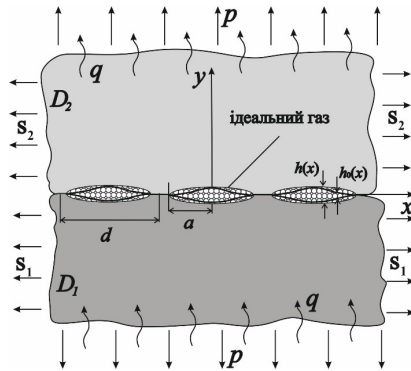


Рис. 1. Біматеріал з міжфазною тріщинуватістю.

На нескінченності до біматеріалу прикладено рівномірно розподілене розтягувальне навантаження p та стаціонарний тепловий потік q .

Тиск газу змінюється за законом ідеального газу (рівняння Клапейрона-Менделєєва)

$$P_g V_g = m_g R T_g / \mu_g, \quad (1)$$

де m_g – маса газу, μ_g – молярна маса газу; T_g – абсолютна температура газу; $R = 8.3145$ Дж/(К·моль) – універсальна газова стала,

$V_g = l \int_{-a}^a h(x) dx$ – об'єм газу, що припадає на одиницю довжини щілин l ($l = 1$ м) в перпендикуля-

рному напрямку, $h(x)$ – розкриття щілин, яке змінюється в процесі навантаження.

Вплив газу на передачу тепла між берегами щілин враховуємо умовою неідеального теплового контакту з термоопором $R(x)$:

$$T^- - T^+ = q_y^+ R(x), \quad (2)$$

де термоопір щілин $R(x) = h(x)/\lambda_g$.

Контактно-крайові умови на ділянках щілин ($y = 0, x \in (-a + kd, a + kd), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) мають вигляд:

$$T^- - T^+ = q_y^+ \frac{h(x)}{\lambda_g}, \quad q_y^+ = q_y^-, \quad (3)$$

$$\sigma_y^+ = \sigma_y^- = P_g, \quad \tau_{xy}^+ = 0, \quad \tau_{xy}^- = 0. \quad (4)$$

3. Сингулярні інтегро-диференціальні рівняння задачі

Використовуючи методику розв'язування задач термопружності для біматеріалу з міжфазними тріщинами [4] та задовольняючи умови (3)-(4), сформульовану задачу зведено до нелінійної системи сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь з ядром Гільберта відносно стрибка температури $\gamma(x)$ та розкриття щілин $h(x)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \int_{-a}^a h'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt + \frac{\lambda \eta^-}{2} (\gamma(x) - \gamma_{ef}) = \\ & = -\frac{G^*}{2} (p + P_g) + \frac{1}{d} \int_{-a}^a h'_0(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt, \\ & h(\pm a) = 0, \quad |x| < a; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lambda_g \frac{\gamma(x)}{h(x)} - \frac{\lambda}{2d} \int_{-a}^a \gamma'(t) \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi(t-x)}{d} \right) dt = q, \\ & \gamma(\pm a) = 0, \quad |x| < a; \quad (6) \end{aligned}$$

де $\gamma_{ef} = \frac{1}{d} \int_{-a}^a \gamma(x) dx$; $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $G^* = \frac{(1 - \kappa_1\kappa_2)}{G_1(1 - \kappa_2)}$, $\kappa_n = 3 - 4\nu_n$, $\eta^- = \eta_2 - \eta_1$, $\eta_n = \alpha_n(1 + \nu_n)/\lambda_n$, $n = 1, 2$.

Систему (5), (6) розв'язуємо за допомогою методів послідовних наближень та колокацій [4].

4. Ефективні параметри біматеріалу

Для термічних розрахунків матеріалів важливими характеристиками є так звані ефективні параметри: ефективний стрибок температури та ефективний термоопір.

Ефективний (усереднений) стрибок температури γ_{ef} визначає додатковий розподіл температури, зумовлений множиною щілин. Щільність розміщення щілин на міжфазній лінії характеризується коефіцієнтом міжфазної тріщинуватості $k_t = \frac{2a}{d}$, де $2a$ – довжина щілини, d – період розташування щілин.

Ефективний термічний опір R_{ef} на лінії контакту є функцією теплового потоку і визначається як $R_{ef}(q) = \frac{\partial \gamma_{ef}}{\partial q}$.

В залежності від напрямку теплового потоку спостерігається якісно різний розподіл ефективного термоопору, тобто має місце явище термічної ректифікації [1]. Кількісною характеристикою термічної ректифікації є параметр

$$\delta = \left| \frac{R_{ef}^+ - R_{ef}^-}{R_{ef}^+} \right| \cdot 100\%, \text{ де } R_{ef}^+ \text{ – величина ефективного термоопору для теплового потоку скерованого до матеріалу з більшою термічною дистортивністю, } R_{ef}^- \text{ – величина ефективного термоопору для теплового потоку скерованого до матеріалу з меншою термічною дистортивністю.}$$

5. Числові результати та їх аналіз
Числові розрахунки проведено для наступних безрозмірних величин: тепловий потік $\bar{q} = qd\eta^-$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = pG^*$, коефіцієнт теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g = \frac{\lambda_g}{\lambda}$, маса газу

5. Числові результати та їх аналіз

Числові розрахунки проведено для наступних безрозмірних величин: тепловий потік $\bar{q} = qd\eta^-$, розтягувальні зусилля $\bar{p} = pG^*$, коефіцієнт теплопровідності газу $\bar{\lambda}_g = \frac{\lambda_g}{\lambda}$, маса газу

$$\bar{m}_g = \frac{m_g R G^* T_g}{\mu_g d^2 l}, \text{ параметр термічної ректифікації}$$

$$\delta = \left| \frac{\bar{R}_{ef}^+ - \bar{R}_{ef}^-}{\bar{R}_{ef}^+} \right| \cdot 100\%, \quad \bar{R}_{ef}^+ = \frac{R_{ef}^+ d}{\lambda}, \quad \bar{R}_{ef}^- = \frac{R_{ef}^- d}{\lambda}.$$

Початкова висота щілин $\bar{h}_0(\bar{x})$ визначена як функція $\bar{h}_0(\bar{x}) = 0.001(\bar{a}^2 - \bar{x}^2)^{3/2}$. Діапазон зміни коефіцієнта міжфазної тріщинуватості $0.1 \leq k_t < 1$.

На рис. 2-5 проілюстровано зміну параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$ зі зміною густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень маси газу \bar{m}_g , розтягувальних зусиль \bar{p} та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості k_t .

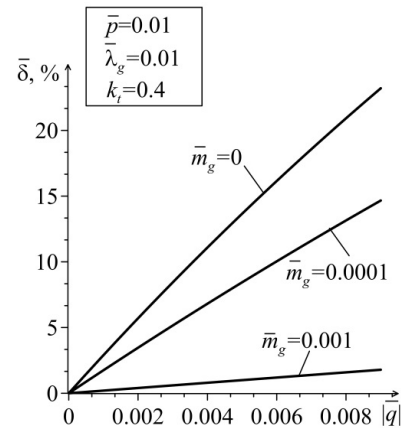


Рис. 2. Залежність параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень маси газу \bar{m}_g .

Спостерігається нелінійна залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку і його збільшення зі збільшенням густини потоку. При збільшенні маси газу \bar{m}_g (рис. 2) параметр $\bar{\delta}$ зменшується і буде приймати найбільших значень у випадку неврахування тиску газу ($\bar{m}_g = 0$). У відсотковому відношенні для заданих вхідних даних не перевищує 30%.

Збільшення розтягувальних зусиль \bar{p} (рис. 3) зумовлює зменшення параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$. Для розглянутих вхідних даних рівень термічної ректифікації становить 8-10%.

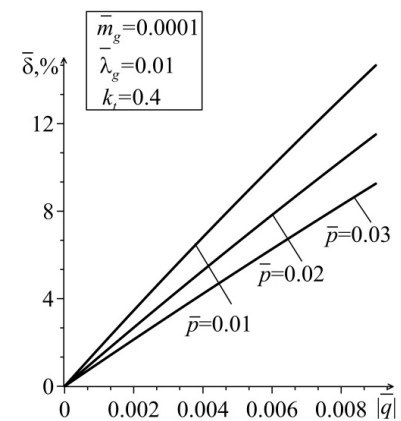


Рис. 3. Залежність параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$ від густини теплового потоку $|\bar{q}|$ для різних значень розтягувальних зусиль \bar{p} .

Залежність параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$ від коефіцієнта міжфазної тріщинуватості k_t для різних значень коефіцієнта теплопровідності

газу $\bar{\lambda}_g$ зображено на рис. 4. Бачимо, що зі збільшенням міжфазної тріщинуватості параметр $\bar{\delta}$ зростає, а зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності газу спадає. Так для розглянутого діапазону зміни коефіцієнта k_t ($0.1 \leq k_t < 0.8$) параметр термічної ректифікації змінюється в межах від 0.01 % до 28 % для $\bar{\lambda}_g = 0.01$, $\bar{\lambda}_g = 0.02$, $\bar{\lambda}_g = 0.04$.

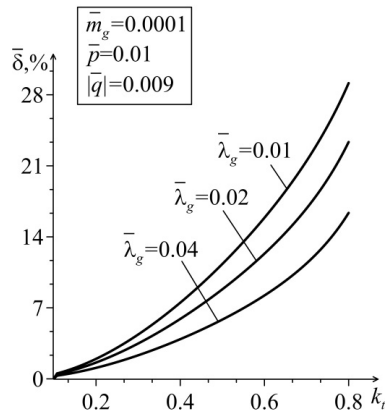


Рис. 4. Залежність параметра термічної ректифікації $\bar{\delta}$ від коефіцієнта тріщинуватості k_t для різних значень коефіцієнта теплопровідності $\bar{\lambda}_g$.

6. Висновки

Вивчено явище термічної ректифікації для біматеріалу з системою періодично розташованих міжфазних щілин, заповнених газом. Сформульовано задачу термопружності для розглянутого біматеріалу з урахуванням тиску і теплопровідності заповнювача щілин, що змінюються в процесі силового і теплового навантаження. Задачу термопружності зведено до системи сингулярних інтеро-диференціальних рівнянь відносно розкриття щілин та стрибка температури між їх берегами. Тиск газу визначено з рівняння Клапейрона-Менделєєва за моделлю ідеального газу. Теплопровідність газу враховано термоопором, що пропорційний висоті щілин і обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності газу. Проаналізовано залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку для різних значень маси та коефіцієнта теплопровідності газу, розтягувальних зусиль та коефіцієнта міжфазної тріщинуватості біматеріалу. Встановлено нелінійну залежність параметра термічної ректифікації від густини теплового потоку та коефіцієнта тріщинуватості біматеріалу. Показано, що термічна ректифікація проявляється в більшій мірі для більших значень теплового потоку та меншої теплопровідності газу.

Список використаних джерел

1. Madhusudana C. V. Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures // *Int. Comm. Heat Mass Transf.* – 1993. – №1. – P. 123–132.
2. Bahrami M., Yovanovich M.M., Culham J.R. Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps // *J Thermophys Heat Transf.* – 2004. – 18. – P. 318–325.
3. Chumak K., Martynyak R. Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface // *Int. J. Heat Mass Transf.* – 2012. – №21–22. – P. 5603–5608.
4. Мартиняк Р.М. Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах / Р.М. Мартиняк, Х.І. Середницька. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.

References

1. MADHUSUDANA C. V. (1993) Thermal contact conduction and rectification at low joint pressures. *Int. Comm. Heat Mass Transf.* 20(1). pp. 123–132.
2. BAHRAMI M., YOVANOVICH M.M. & CULHAM J.R. (2004) Thermal joint resistances of conforming rough surfaces with gas-filled gaps. *J Thermophys Heat Transf.* 18. pp. 318–325.
3. CHUMAK K. & MARTYNYAK R. (2012) Thermal rectification between two thermoelastic solids with a periodic array of rough zones at the interface. *Int. J. Heat Mass Transf.* 55(21–22). pp. 5603–5608.
4. MARTYNYAK, R. M. & SEREDNYTSKA, K. I. (2017) *Kontaktni zadachi termoprugnosti dlya migfaznyh trishchyn v bimaterialnyh tilah.* Lviv: Rastr-7.

Надійшла до редколегії 28.08.21