

УДК 517.95:419.86:539.3

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.32>

Володимир СТОЯН¹, д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0009-0008-0746-5050
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net

Дмитро ЧЕРНИЙ¹, д-р техн. наук, доц.
ORCID ID: 0000-0002-6378-8048
e-mail: d_cherniy@ukr.net

Сергій ВОЛОЩУК¹, канд. фіз.-мат. наук, доц.
ORCID ID: 0009-0000-6416-5566
e-mail: sr.voloshchuk@gmail.com

Роман ЗАТОРСЬКИЙ², д-р фіз.-мат. наук, проф.
ORCID ID: 0000-0001-7503-4932
e-mail: romazatorsky@gmail.com

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна
²Карпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

ТРИВИМІРНІ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДИНАМІКОЮ НЕПОВНО СПОСТЕРЕЖУВАНИХ ТОВСТИХ ПРУЖНИХ ПЛИТ. ЧАСТИНА II. ВИПАДОК ДИСКРЕТНО ЗАДАНОГО БАЖАНОГО СТАНУ

Уперше розв'язано складні задачі керування товстою пружною плитою, динаміку якої описано рівняннями Ляме в обмеженій тривимірній просторовій області на скінченному часовому відрізку. Суть цих задач полягає в тому, що поле пружно-динамічних зміщень плити під дією керуючої функції має набувати бажаного стану, заданого дискретно в просторі та часі, або перебувати в мінімально можливому, за відомих умов, середньоквадратичному околі цих значень. У ролі керуючих функцій можуть бути обрані об'ємні, початкові, поверхневі та торцеві функції зовнішньодинамічних впливів, що можуть впливати на динаміку плити кожна окремо, або в практично можливій комбінації кількох таких впливів. Зазначені задачі розв'язано за наявності дискретно визначених зовнішньодинамічних спостережень за початковим, крайовим і торцевим станом плити у наперед відомих точках, що належать областям визначення згаданих вище станів. Фактично, ці спостереження є дискретними початковими, крайовими та торцевими умовами, якими доповнюється рівняння Ляме. Проте їхня кількість і якість може бути довільною та впливатиме лише на громіздкість обчислень. На основі дискретних початкових, крайових і торцевих умов разом із дискретними бажаними станами, ураховуючи при цьому інтегральний вигляд моделі, функції керування знайдено як псевдорозв'язки системи алгебраїчних рівнянь або системи інтегральних рівнянь. Також побудовано й оцінено на точність й однозначність аналітичні залежності зовнішньодинамічних керуючих факторів та викликаного ними поля пружно-динамічних зміщень точок плити. Розглянуто частинні випадки деяких можливих комбінацій керувань динамікою товстої пружної плити.

Ключові слова: просторово розподілені динамічні системи, просторові задачі теорії пружності, товсті пружні плити, задачі керування.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 74-10, 74H75.

Вступ

Пропонована стаття продовжує дослідження авторів (Стоян, Черний, & Волощук, 2024) проблем керування динамікою пружно-динамічної конструкції, що є об'єктом дослідження і являє собою визначене у просторі тривимірне пружне тіло, обмежене двома паралельними площинами та довільного обрису циліндричною поверхнею між ними.

Дослідження пружно-динамічних характеристик таких тіл (плит) у тривимірній постановці є складним математичним завданням, що не має точного та прийнятного для практики розв'язку. Ще складнішими є завдання керування динамікою таких тіл. Останнє пов'язане зі складнощами математичних залежностей (Lur'e, 1964; Timoshenko, & Woinowsky-Krieger, 1987) поля пружно-динамічних зсувів тіла від зовнішньодинамічних збудовальних факторів, якими вони визначаються.

Більшість традиційно відомих результатів дослідження динаміки названих об'єктів були отримані чисельно (Grigorenko, Savula, & Mukha, 2000; Grigorenko, Ya., & Grigorenko, A., 2013) на підставі математичних моделей (Nemysh, & Khoma, 1993; Григорюк, & Селезов, 1973; Нигул, 1963; Шереметьев, & Пелех, 1964) їхньої динаміки, що зазвичай будувалися (Selezov, 2018) на припущеннях (Селезов, 1961) про невелику товщину пружного тіла щодо його інших геометричних розмірів.

Згодом нами було запропоновано (Стоян, 2016) напівтривимірні математичні моделі динаміки товстих пружних плит, якими тривимірне поле динамічних зміщень плити описувалося двовимірними диференціальними рівняннями, параметрично залежними від виродженої поперечної координати. Незважаючи на нескінченновимірний порядок цих рівнянь, нами була запропонована і методика побудови їхнього точного математичного розв'язку з подальшим використанням до розв'язання тривимірних початково-крайових задач динаміки пружних плит і керування ними (Стоян, 2016).

У роботі (Stoyan, 2018) побудовано більш вдалу математична модель динаміки товстих пружних плит, яка в зручнішій для практики формі описує тривимірне пружно-динамічне поле товстої пружної плити. Останнє допомогло побудувати аналітичний розв'язок початково-крайової задачі динаміки плити, який, точно задовольняючи диференційне рівняння моделі, за середньоквадратичним критерієм узгоджується із зовнішньодинамічними спостереженнями за плитою на її гранично-поверхневих областях, незважаючи на кількість і якість останніх. На базі цієї моделі у

© Стоян Володимир, Черний Дмитро, Волощук Сергій, Заторський Роман, 2025

дослідженні (Стоян, Черній, & Волощук, 2024) були успішно розв'язані і задачі керування динамікою товстої пружної плити з виведення поля її пружно-динамічних зміщень у середньоквадратичний окіл аналітично заданого стану гранично-поверхневих областей останньої.

Методи, подібні до розглянутих у (Стоян, 2024), але використані для моделювання функціонально стійких технологічних процесів промислових підприємств були застосовані в роботах (Pichkur, & Sobchuk, 2021; Pichkur et al., 2024), де автори розглянули лінійну дискретну модель деякого абстрактного процесу та задачу керування ним, використовуючи при цьому властивості псевдообернених матриць.

Дослідження, проведені у представлений роботі є актуальними, оскільки алгоритм побудови на їхній основі розв'язку задачі керування динамікою товстої пружної плити суттєво спрощується, не залежить від кількості та якості умов про початковий, крайовий, торцевий і бажаний стани плити і може бути відносно нескладно реалізований за допомогою сучасних систем комп'ютерної математики.

Нижче, як продовження результатів роботи (Стоян, Черній, & Волощук, 2024), з використанням викладених у (Стоян, 2024) методик дослідження розподілених просторово-часових систем в умовах невизначеності, нами будуть розв'язані задачі керування полем пружно-динамічних зміщень точок товстої пружної плити для непідйомних класичною математикою випадків, коли бажаний стан плити задається в окремих просторово-граничних точках останньої. За припущення, що дискретно визначеною є й інформація про гранично-поверхневий стан плити, будуть побудовані аналітичні залежності початково, гранично та поверхнево визначених керуючих факторів, кожен з яких окремо та спільно з іншими дає змогу поле пружно-динамічних зміщень точок плити за середньоквадратичним критерієм привести до бажаного стану. Як і в (Стоян, Черній, & Волощук, 2024) будуть досліджені питання точності й однозначності отриманих розв'язків, а також їхня форма у вироджених випадках – необмежена в плані плита (пружний шар) і динаміка плити, що встановилася в часі.

1. Основні означення та результати

1.1. Тривимірна математична модель динаміки товстої пружної плити

Продовжимо розгляд динаміки товстої пружної плити, внутрішній об'єм S_0 якої у декартовій системі координат ox, oy, oz обмежений поверхнями $z = \pm h$ і циліндром $\Gamma_0 = \{\xi = (x, y, z): (x, y) \in \Gamma, -h \leq z \leq h\}$ між ними.

Позначивши через λ і μ пружно-динамічні характеристики матеріалу плити, динаміку (t – часова координата) її опишемо системою рівнянь Ляме (Lur'e, 1964)

$$L(\partial_\xi, \partial_t)u(s) = f(s), \quad (1)$$

у якій $s = (\xi, t) \in S_0^T = S_0 \times \Gamma_0 \times [0, T]$, $\partial_\xi = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$,

$$L(\partial_\xi, \partial_t) = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 + \mu(\partial_y^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_y & (\lambda + \mu)\partial_x\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_y\partial_x & (\lambda + 2\mu)\partial_y^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_z^2) - \rho\partial_t^2 & (\lambda + \mu)\partial_y\partial_z \\ (\lambda + \mu)\partial_z\partial_x & (\lambda + \mu)\partial_z\partial_y & (\lambda + 2\mu)\partial_z^2 + \mu(\partial_x^2 + \partial_y^2) - \rho\partial_t^2 \end{pmatrix},$$

а $f(s) = \text{col}(f_1(s), f_2(s), f_3(s))$ і $u(s) = \text{col}(u_1(s), u_2(s), u_3(s))$ – вектори об'ємно визначених силових факторів і спричинених ними зміщень точок $\xi \in S_0 \times \Gamma_0$ у напрямку координатних осей.

Як і в (Стоян, Черній, & Волощук, 2024), диференціальну математичну модель (1) замінімо (Стоян, 2016; Stoyan, 2018) зручнішим для роботи її інтегральним еквівалентом виду

$$u(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(s-s')f(s')ds',$$

$$G(s-s') = \frac{1}{16\pi^4} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{E(p, q, s-s')}{L(p, q)} dp dq, \quad (2)$$

де i – уявна одиниця, $p = (p_1, p_2, p_3)$, $dp = dp_1 dp_2 dp_3$, а

$$L(\partial_\xi, \partial_t)G(s-s') = \Delta(s-s') \quad (3)$$

за

$$\Delta(s-s') = \text{diag}(\delta(s-s'), i = \overline{1, 3}),$$

$$\delta(s-s') = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

(тут $\delta(\cdot)$ – δ -функція Дірака).

Зважаючи на обмеженість просторово-часової області S_0^T , зовнішньодинамічну картину функціонування плити для найзагальнішого випадку визначимо співвідношеннями:

$$\begin{aligned} L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0, \xi \in S_0} &= f_r^0(\xi), r = \overline{1, R_0}, \\ L_\rho^\pm(\partial_\xi)u(s)|_{s \in S_0^\pm} &= f_\rho^\pm(s), \rho = \overline{1, R^\pm}, \\ L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)|_{s \in S_0^\Gamma} &= f_\rho^\Gamma(s), \rho = \overline{1, R_\Gamma}, \end{aligned} \quad (4)$$

у яких $L_r^0(\partial_t)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $L_\rho^\pm(\partial_\xi)$ ($\rho = \overline{1, R^\pm}$), $L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) – задані диференціальні оператори, $S_0^\pm = \{(x, y) \in S_0, z = \pm h\} \times [0, T]$, $S_0^\Gamma = \{\Gamma(\xi) \times (-h \leq z \leq h)\} \times [0, T]$, а $f_r^0(\xi)$ ($r = \overline{1, R_0}$), $f_\rho^\pm(s)$ ($\rho = \overline{1, R^\pm}$), $f_\rho^\Gamma(s)$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$) – відомі силові фактори.

Ураховуючи властивості визначеної згідно із (2), (3) матричної функції $G(s-s')$, розв'язок задач (1) і (4) можна записати (Stoyan, 2018) у вигляді

$$u(s) = u_\infty(s) + u^0(s) + u^+(s) + u^-(s) + u^\Gamma(s), \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} u_{\infty}(s) &= \int_{S_0^T} G(s-s')f(s')ds', \\ u^0(s) &= \int_{S_0} G(s-s')|_{t'=0}f^0(\xi')d\xi', \\ u^{\pm}(s) &= \int_{S_0^{\pm}} G(s-s')f^{\pm}(s')ds', \\ u^{\Gamma}(s) &= \int_{S_0^{\Gamma}} G(s-s')f^{\Gamma}(s')ds' \end{aligned} \quad (6)$$

за

$$\begin{aligned} f^0(\xi) &= col(f_r^0(\xi), r = \overline{1, R_0}), \\ f^{\pm}(s) &= col(f_{\rho}^{\pm}(s), \rho = \overline{1, R_{\pm}}), \\ f^{\Gamma}(s) &= col(f_{\rho}^{\Gamma}(s), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}). \end{aligned}$$

Зауважимо, що представлення (5) вектор-функції $u(s)$ зміщеної точок розглядуваної плити спостерігатимемо і для випадку, коли зовнішньодинамічні об'єкти та гранично-поверхневі силові фактори визначені дискретно так, що при заданих у точках s_l ($l = \overline{1, L}$) значеннями f_l ($l = \overline{1, L}$) об'ємно розподілених зовнішньодинамічних силових факторів $f(s)$

$$\begin{aligned} L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0, \xi=\xi_l^0} &= f_{rl}^0, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}, \\ L_{\rho}^{\pm}(\partial_{\xi})u(s)|_{s=s_l^{\pm} \in S_0^{\pm}} &= f_{\rho l}^{\pm}, \rho = \overline{1, R_{\pm}}, l = \overline{1, L_{\pm}}, \\ L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_{\xi})u(s)|_{s=s_l^{\Gamma} \in S_0^{\Gamma}} &= f_{\rho l}^{\Gamma}, \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Проте

$$\begin{aligned} u_{\infty}(s) &= \sum_{l=1}^L G(s-s_l)f_l, \\ u^0(s) &= \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} G(s-s_l^0)|_{t_l^0=0, \xi=\xi_l^0} f_{rl}^0, \\ u^{\pm}(s) &= \sum_{\rho=1}^{R_{\pm}} \sum_{l=1}^{L_{\pm}} G(s-s_l^{\pm})f_{\rho l}^{\pm}, \\ u^{\Gamma}(s) &= \sum_{\rho=1}^{R_{\Gamma}} \sum_{l=1}^{L_{\Gamma}} G(s-s_l^{\Gamma})f_{\rho l}^{\Gamma}, \end{aligned} \quad (8)$$

що, як і вище, розв'язує початково-крайові задачі (1), (4) та (1), (7).

Для випадку, коли функції $f^0(\xi)$, $f^{\pm}(s)$, $f^{\Gamma}(s)$ та вектори

$$\begin{aligned} f^0 &= col((f_{rl}^0), r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}), \\ f^{\pm} &= col((f_{\rho l}^{\pm}), \rho = \overline{1, R_{\pm}}, l = \overline{1, L_{\pm}}), \\ f^{\Gamma} &= col((f_{\rho l}^{\Gamma}), \rho = \overline{1, R_{\Gamma}}, l = \overline{1, L_{\Gamma}}) \end{aligned}$$

їхніх значень мають не силовий характер, вплив останніх на стан внутрішньо-поверхневих точок плити можна змодельовувати (Stoyan, 2018) силовими характеристиками $\bar{f}^0(s^0)$, $\bar{f}^{\pm}(s^{\pm})$, $\bar{f}^{\Gamma}(s^{\Gamma})$,

$$\begin{aligned} \bar{f}^0 &= col(\bar{f}_m^0, m = \overline{1, M_0}), \\ \bar{f}^{\pm} &= col(\bar{f}_m^{\pm}, m = \overline{1, M_{\pm}}), \\ \bar{f}^{\Gamma} &= col(\bar{f}_m^{\Gamma}, m = \overline{1, M_{\Gamma}}), \end{aligned}$$

що справедливі для $\bar{f}_m^0 = \bar{f}_m^0(s_m^0)$, $\bar{f}_m^{\pm} = \bar{f}_m^{\pm}(s_m^{\pm})$, $\bar{f}_m^{\Gamma} = \bar{f}_m^{\Gamma}(s_m^{\Gamma})$,

$$\begin{aligned} s^0 &\in \bar{S}, s_m^0 \in \bar{S}, \bar{S} = S_0 \times (-\infty, 0], \\ s^+ &\in \bar{S}^+, s_m^+ \in \bar{S}^+, \bar{S}^+ = (R^3 \setminus S_0) \times (z > h) \times [0, T], \\ s^- &\in \bar{S}^-, s_m^- \in \bar{S}^-, \bar{S}^- = (R^3 \setminus S_0) \times (z < -h) \times [0, T], \\ s^{\Gamma} &\in \bar{S}^{\Gamma}, s_m^{\Gamma} \in \bar{S}^{\Gamma}, \bar{S}^{\Gamma} = (R^3 \setminus S_0) \times (-h < z < h) \times [0, T] \end{aligned}$$

та визначають за аналогією із (6), (8) функції

$$\begin{aligned} u^0(s) &= \int_{\bar{S}} G(s-s')\bar{f}^0(s')ds', \\ u^{\pm}(s) &= \int_{\bar{S}^{\pm}} G(s-s')\bar{f}^{\pm}(s')ds', \\ u^{\Gamma}(s) &= \int_{\bar{S}^{\Gamma}} G(s-s')\bar{f}^{\Gamma}(s')ds', \end{aligned} \quad (9)$$

або

$$\begin{aligned} u^0(s) &= \sum_{m=1}^{M_0} G(s - s_m^0) \bar{f}_m^0, s_m^0 \in \bar{S}, \\ u^\pm(s) &= \sum_{m=1}^{M^\pm} G(s - s_m^\pm) \bar{f}_m^\pm, s_m^\pm \in \bar{S}^\pm, \\ u^\Gamma(s) &= \sum_{m=1}^{M_\Gamma} G(s - s_m^\Gamma) \bar{f}_m^\Gamma, s_m^\Gamma \in \bar{S}^\Gamma \end{aligned} \quad (10)$$

у співвідношенні (5) при

$$\begin{aligned} \Phi &= \sum_{r=1}^{R_0} \int_{\bar{S}} \|L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0} - f_r^0(\xi)\|^2 d\xi + \sum_{\rho=1}^{R_+} \int_{\bar{S}^+} \|L_\rho^+(\partial_\xi)u(s) - f_\rho^+(s)\|^2 ds + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{R_-} \int_{\bar{S}^-} \|L_\rho^-(\partial_\xi)u(s) - f_\rho^-(s)\|^2 ds + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\bar{S}^\Gamma} \|L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s) - f_\rho^\Gamma(s)\|^2 ds \rightarrow \min_{u(s)}, \end{aligned} \quad (11)$$

або

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 \rightarrow \min_{u(s)}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \|L_r^0(\partial_t)u(s)|_{t=0, \xi=\xi_l^0} - f_{rl}^0\|^2, \\ \Phi_2 &= \sum_{\rho=1}^{R_+} \sum_{l=1}^{L_+} \|L_\rho^+(\partial_\xi)u(s)|_{s=s_l^+} - f_{\rho l}^+\|^2, \\ \Phi_3 &= \sum_{\rho=1}^{R_-} \sum_{l=1}^{L_-} \|L_\rho^-(\partial_\xi)u(s)|_{s=s_l^-} - f_{\rho l}^-\|^2, \\ \Phi_4 &= \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \|L_\rho^\Gamma(\partial_\xi)u(s)|_{s=s_l^\Gamma} - f_{\rho l}^\Gamma\|^2, \end{aligned}$$

а вектор-функція $u(s)$ будується з урахуванням (9), (10).

Не зупиняючись на розв'язанні задач (1), (4), (11) та (1), (7), (12), які за відомих об'ємно розподілених зовнішньодинамічних збурень $f(s)$ детально розглянуті нами у (Стоян, Черній, & Волощук, 2024), зауважимо, що представлена співвідношеннями (5), (9) та (5), (10) вектор-функція $u(s)$ рівнянню (1) буде задовольняти точно, а співвідношенням (4), (7) середньоквадратично при визначених згідно з (11), (12) моделювальному вектору $\bar{f} = \text{col}(\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma)$ та моделювальній вектор-функції $\bar{f}(s) = \text{col}(\bar{f}^0(\xi), \bar{f}^+(s), \bar{f}^-(s), \bar{f}^\Gamma(s))$.

1.2. Задачі керування динамікою товстої пружної плити об'ємно розподіленими зовнішньодинамічними впливами

Викладені результати дослідження динаміки товстої пружної плити зводилися до розв'язання задач побудови вектор-функції зміщень точок плити за відомих початкових об'ємно-динамічних поверхнево і гранично розподілених зовнішньодинамічних збурень, якими були як силові фактори $f(s)$, $f^0(\xi)$, $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$, так і збурення не силового характеру, співвідношеннями (4), (7) визначені через компоненти вектор-функції $u(s)$.

Розглянемо задачі побудови одного з названих факторів за відомих інших, які визначимо з урахуванням (4) або (7) й умов бажаних станів

$$L_r(\partial_s)u(s)|_{s=s^*} = U_r(s^*), r = \overline{1, R}, \quad (13)$$

$$L_r(\partial_s)u(s)|_{s=s_l^*} = U_{rl}, r = \overline{1, R}, l = \overline{1, L} \quad (14)$$

при заданих $L_r(\partial_s)$, $U_r(s)$, U_{rl} та $s^* \in S_0^T$, $s_l^* \in S_0^T$, $l = \overline{1, L}$.

Зауважимо, що відсутність обмежень на кількість і якість інформації, заданої співвідношеннями (4), (7), а також довільність у визначенні (13), (14) бажаного стану плити, поставлені задачі керування роблять математично некоректними. З огляду на це невідомі керуючі фактори визначатимемо з умови найкращого середньоквадратичного узгодження вектор-функції $u(s)$ зміщень їм відповідних зі значеннями бажаними та спостережуваними згідно із (4), (7). Зауважимо, що для випадку, коли останні задаються неперервно співвідношеннями (4), то постановки та розв'язки задач керування наведені у (Стоян, Черній, & Волощук, 2024).

Нижче зупинимось на розв'язанні цих задач для дискретно визначеного бажаного стану (14) за умови, що зовнішньодинамічні та торцеві спостереження за плитою визначаються співвідношенням (7). Як і в (Стоян, Черній, & Волощук, 2024) ці спостереження моделюватимемо дискретно та неперервно визначеними моделювальними факторами $(\bar{f}^0, \bar{f}^\pm, \bar{f}^\Gamma)$ та $(\bar{f}^0(s), \bar{f}^\pm(s), \bar{f}^\Gamma(s))$ відповідно, які поза розглядуваною областю S_0^T визначені так, щоб за середньоквадратичного виконання умов (12)

$$\Phi_* = \sum_{r=1}^R \sum_{l=1}^L \|L_r(\partial_s)u(s)|_{s=s_l^*} - U_{rl}\|^2 \rightarrow \min_{u(s)}. \quad (15)$$

Розв'язувальні рівняння для визначення цих моделювальних векторів і вектор-функцій отримаємо із (7) після підстановки туди (5), (10) та (5), (9) відповідно. Це будуть системи лінійних алгебраїчних і лінійних інтегральних рівнянь, які при керуванні пружною плитою за допомогою об'ємно розподілених зусиль $f(s)$ та $\bar{f} = \text{col}(f(s_m) = f_m, m = \overline{1, M})$, матимуть вигляд

$$A\bar{f} = F \quad (16)$$

та

$$\int_{(\cdot)} A(s)\bar{f}(s)ds = F. \quad (17)$$

Тут $(\cdot)$ означає інтегрування по області визначення підінтегральної функції, а

$$F = \text{col}\left(\left(f_{rl}^0, r = \overline{1, R_0}, l = \overline{1, L_0}\right), \left(f_{pl}^+, \rho = \overline{1, R_+}, l = \overline{1, L_+}\right), \left(f_{pl}^-, \rho = \overline{1, R_-}, l = \overline{1, L_-}\right), \right. \\ \left. \left(f_{pl}^\Gamma, \rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}\right), \left(U_{rl}, r = \overline{1, R}, l = \overline{1, L}\right)\right)$$

– вектор бажаного стану та зовнішньодинамічних спостережень за станом плити,

$$\bar{f} = \text{col}\left(\bar{f}^0, \bar{f}^+, \bar{f}^-, \bar{f}^\Gamma, \bar{f}\right),$$

$$\bar{f}(s) = \text{col}\left(\bar{f}^0(s), \bar{f}^+(s), \bar{f}^-(s), \bar{f}^\Gamma(s), \bar{f}(s)\right),$$

– вектор та вектор-функція керуючих та моделювальних згідно із (12) і (15) пружно-динамічних факторів, а

$$A = [A_{ij}]_{i,j=1}^{i,j=5}, A(s) = [A_{ij}(s)]_{i,j=1}^{i,j=5}$$

– матриця та матрична функція, у яких

$$A_{ij} = \text{col}\left(\left(\text{str}\left(\bar{L}(i)G(s - \underline{s}(j))\right)\right)_{s=\bar{s}(i)}, m = \overline{1, M(j)}, r(i) = \overline{1, \bar{R}(i)}, l = \overline{1, \underline{L}(i)}\right),$$

$$A_{ij}(s') = \text{col}\left(\left(\bar{L}(i)G(s - s')\right)_{s=\bar{s}(i)}, r(i) = \overline{1, \bar{R}(i)}, l = \overline{1, \underline{L}(i)}\right), s' \in \Sigma(j).$$

Тут індекси $i = \overline{1, 5}$ та $j = \overline{1, 5}$ визначають номери компонентів векторів

$$r(i) = (r, \rho, \rho, \rho, r),$$

$$\bar{L}(i) = (L_r^0(\partial_t), L_\rho^+(\partial_s), L_\rho^-(\partial_s), L_\rho^\Gamma(\partial_s), L_r(\partial_s)),$$

$$\bar{R}(i) = (R_0, R_+, R_-, R_\Gamma, R),$$

$$\underline{L}(i) = (L_0, L_+, L_-, L_\Gamma, L),$$

$$\bar{s}(i) = ((\xi_i^0, 0), s_i^+, s_i^-, s_i^\Gamma, s_i^*),$$

$$\underline{s}(j) = (s_m^0, s_m^+, s_m^-, s_m^\Gamma, s_m),$$

$$M(j) = (M_0, M_+, M_-, M_\Gamma, M),$$

$$\Sigma(j) = (\bar{s}, \bar{s}^+, \bar{s}^-, \bar{s}^\Gamma, s_0^T).$$

Розв'язками систем (16), (17) такими, що

$$\|A\bar{f} - F\|^2 \rightarrow \min_{\bar{f}}, \quad (18)$$

$$\left\| \int_{(\cdot)} A(s)\bar{f}(s)ds - F \right\|^2 \rightarrow \min_{\bar{f}(s)}, \quad (19)$$

будуть (Stoyan, 2018)

$$\bar{f} = A^T P_1^* F + \bar{v} - A^T P_1^* A \bar{v}, \quad (20)$$

$$\bar{f}(s) = A^T(s) P_2^* F + \bar{v}(s) - A^T(s) P_2^* A_v, \quad (21)$$

за відповідних розмірностей вектора $\bar{v} = \text{col}(v_0, v^+, v^-, v^\Gamma, v)$ та вектор-функції

$$\bar{v}(s) = \text{col}((v_0(s), s \in \bar{s}), (v^+(s), s \in \bar{s}^+), (v^-(s), s \in \bar{s}^-), (v^\Gamma(s), s \in \bar{s}^\Gamma), (v(s), s \in S_0^T)),$$

тотожно рівних нулю, якщо $\det A^T A > 0$ та $\lim_{N \rightarrow \infty} \det[A^T(s_i)A(s_j)]_{i,j=1}^{i,j=N} > 0$ відповідно,

вектора

$$A_v = \int_{(\cdot)} A(s)\bar{v}(s)ds$$

та матриць

$$P_1 = AA^T, \quad P_2 = \int_{(\cdot)} A(s)A^T(s)ds,$$

псевдообернення яких позначено знаком $*$.

Зі співвідношень (20), (21) знаходимо керуючу вектор-функцію

$$\bar{f}(s) = (A_{i5}^T(s), i = \overline{1, 5})P_2^*(F - A_v) + v(s),$$

визначений вище вектор її значень

$$\bar{f} = (A_{i5}^T, i = \overline{1, 5})P_1^*(F - A\bar{v}) + \bar{v},$$

а також моделювальні вектор-функції

$$\begin{aligned}\bar{f}^0(s) &= (A_{i1}^T(s), i = \overline{1, 5})P_2^*(F - A_v) + v_0(s), \\ \bar{f}^+(s) &= (A_{i2}^T(s), i = \overline{1, 5})P_2^*(F - A_v) + v^+(s), \\ \bar{f}^-(s) &= (A_{i3}^T(s), i = \overline{1, 5})P_2^*(F - A_v) + v^-(s), \\ \bar{f}^\Gamma(s) &= (A_{i4}^T(s), i = \overline{1, 5})P_2^*(F - A_v) + v^\Gamma(s),\end{aligned}\quad (22)$$

з їхніми значеннями

$$\begin{aligned}\bar{f}^0 &= (A_{i1}^T, i = \overline{1, 5})P_1^*(F - A\bar{v}) + v_0, \\ \bar{f}^+ &= (A_{i2}^T, i = \overline{1, 5})P_1^*(F - A\bar{v}) + v^+, \\ \bar{f}^- &= (A_{i3}^T, i = \overline{1, 5})P_1^*(F - A\bar{v}) + v^-, \\ \bar{f}^\Gamma &= (A_{i4}^T, i = \overline{1, 5})P_1^*(F - A\bar{v}) + v^\Gamma.\end{aligned}\quad (23)$$

Визначенні у (22), (23) моделювальні функції $\bar{f}^0(s)$, $\bar{f}^+(s)$, $\bar{f}^-(s)$, $\bar{f}^\Gamma(s)$ та вектори їхніх значень $\bar{f}^0$, $\bar{f}^+$, $\bar{f}^-$, $\bar{f}^\Gamma$ дають змогу за необхідності через співвідношення (9), (10) знайти складові $u^0(s)$, $u^\pm(s)$, $u^\Gamma(s)$ вектор-функції стану $u(s)$.

Відповідно до (Selezov, 2018) ця функція, будучи розв'язком рівняння (1), із зовнішньодинамічними спостереженнями (7) та визначеному в (14) бажаному стані плити буде узгоджуватися з точністю

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} (\Phi + \Phi_*) = \min_{\bar{f}} \|A\bar{f} - F\| = F^T F - F^T A A^* F \quad (24)$$

за дискретно визначеного керування $\bar{f}$ та

$$\varepsilon^2 = \min_{u(s)} (\Phi + \Phi_*) = \min_{\bar{f}(s)} \left\| \int_{(c)} A(s) \bar{f}(s) ds - F \right\|^2 = F^T F - F^T P_1 P_1^* F \quad (25)$$

за просторово розподіленого динамічного керування $\bar{f}(s)$.

Подамо керуючий вектор $\bar{f}$ та керуючу вектор-функцію $\bar{f}(s)$ у зручнішому для практичного використання вигляді. Зважаючи на те, що

$$\begin{aligned}A_{15} &= \text{col} \left(\left(\text{str} \left(L_r^0(\partial_t) G(s - s_m) \right) \Big|_{s=(\xi_l^0, 0)}, m = \overline{1, M} \right), r = \overline{1, R_0} \right), l = \overline{1, L_0}, \\ A_{25} &= \text{col} \left(\left(\text{str} \left(L_\rho^+(\partial_s) G(s - s_m) \right) \Big|_{s=s_l^+}, m = \overline{1, M} \right), \rho = \overline{1, R_+} \right), l = \overline{1, L_+}, \\ A_{35} &= \text{col} \left(\left(\text{str} \left(L_\rho^-(\partial_s) G(s - s_m) \right) \Big|_{s=s_l^-}, m = \overline{1, M} \right), \rho = \overline{1, R_-} \right), l = \overline{1, L_-}, \\ A_{45} &= \text{col} \left(\left(\text{str} \left(L_\rho^\Gamma(\partial_s) G(s - s_m) \right) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, m = \overline{1, M} \right), \rho = \overline{1, R_\Gamma} \right), l = \overline{1, L_\Gamma}, \\ A_{55} &= \text{col} \left(\left(\text{str} \left(L_r(\partial_s) G(s - s_m) \right) \Big|_{s=s_l^*}, m = \overline{1, M} \right), r = \overline{1, R} \right), l = \overline{1, L},\end{aligned}$$

керуючий вектор $\bar{f}$ можна обчислити за формулою:

$$\bar{f} = (A_{15}^T \ A_{25}^T \ A_{35}^T \ A_{45}^T \ A_{55}^T) (A A^T)^* (F - A\bar{v}) + \bar{v},$$

де $\bar{v}$ – довільний вектор розмірності $M_0 + M_+ + M_- + M_\Gamma + M$ з дійсними компонентами. Зауважимо, що компоненти вектора $\bar{f}$ рівні останнім M компонентам знайденого за формулою (20) вектора керуючих і моделювальних пружно-динамічних факторів.

Ураховуючи те, що

$$\begin{aligned}A_{15}(s') &= \text{col} \left(\left(L_r^0(\partial_t) G(s - s') \Big|_{s=(\xi_l^0, 0)}, r = \overline{1, R_0} \right), l = \overline{1, L_0} \right), s' \in S_0^T, \\ A_{25}(s') &= \text{col} \left(\left(L_\rho^+(\partial_s) G(s - s') \Big|_{s=s_l^+}, \rho = \overline{1, R_+} \right), l = \overline{1, L_+} \right), s' \in S_0^T, \\ A_{35}(s') &= \text{col} \left(\left(L_\rho^-(\partial_s) G(s - s_m) \Big|_{s=s_l^-}, \rho = \overline{1, R_-} \right), l = \overline{1, L_-} \right), s' \in S_0^T, \\ A_{45}(s') &= \text{col} \left(\left(L_\rho^\Gamma(\partial_s) G(s - s_m) \Big|_{s=s_l^\Gamma}, \rho = \overline{1, R_\Gamma} \right), l = \overline{1, L_\Gamma} \right), s' \in S_0^T, \\ A_{55}(s') &= \text{col} \left(\left(L_r(\partial_s) G(s - s_m) \Big|_{s=s_l^*}, \rho = \overline{1, R} \right), l = \overline{1, L} \right), s' \in S_0^T,\end{aligned}$$

керуючу векторну функцію $\bar{f}(s)$ можна обчислити за формулою:

$$\bar{f}(s) = (A_{15}^T(s) \ A_{25}^T(s) \ A_{35}^T(s) \ A_{45}^T(s) \ A_{55}^T(s)) P_2^*(F - A_v) + v(s),$$

де $v(s)$ – довільна неперервна в S_0^T векторна функція, розмірність якої узгоджена з $\bar{f}(s)$. Зазначимо, що компоненти векторної функції $\bar{f}(s)$ рівні останнім компонентам, знайденої за формулою (21) векторної-функції керуючих та моделювальних пружно-динамічних факторів.

1.3. Задача керування динамікою товстої пружної плити за участю об'ємно розподілених зовнішньодинамічних впливів і гранично-поверхневих збурень

Розглянемо задачу керування динамікою товстої пружної плити для випадку, коли, як і вище, бажаний стан визначається критерієм (12), а у процесі керування, крім об'ємно розподілених керуючих факторів $f(s)$ та $\bar{f}$, беруть участь і гранично-поверхневі керуючі збурення

$$f_r^0(\xi), (\xi \in S_0, r = \overline{1, R_0}); \quad f_\rho^+(s), (s \in S_0^+, \rho = \overline{1, R_+}); \quad f_\rho^-(s), (s \in S_0^-, \rho = \overline{1, R_-}); \quad f_\rho^\Gamma(s), (s \in S_0^\Gamma, \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Аналітичні вирази для останніх отримаємо зі співвідношень (4) за наявності вектор-функції $u(s)$, побудованої з урахуванням вектор-функцій $\bar{f}^0(\xi)$, $\bar{f}^\pm(s)$, $\bar{f}^\Gamma(s)$, або векторів $\bar{f}^0$, $\bar{f}^\pm$, $\bar{f}^\Gamma$ їхніх значень, згідно із (12), моделюючих зовнішньодинамічну картину спостережень (7) за нею. Задача визначення цих моделювальних факторів, а також і керуючих вектор-функцій $f(s)$ та вектора $\bar{f}$ зведеться до середньоквадратичного згідно із (18), (19) оберненням розв'язуючих рівнянь (16), (17), модифікованих для кожного конкретного випадку керування.

Керування початковими й об'ємно розподіленими динамічними збуреннями

Розглянемо задачі керування динамікою пружної плити сумісною дією об'ємно розподілених і початково визначених зовнішньодинамічних збурень $f(s)$ (або $\bar{f}$) та $f_0(s)$ за наявності поверхнево-граничних спостережень f^+ , f^- , f^Γ у (7).

Керуюча вектор-функція $f(s)$ і вектор $\bar{f}$ разом із вектор-функцією $\bar{f}(s)$, якою названі спостереження моделюються, будуть визначатися розв'язками (20), (21) рівнянь (18), (19), записаних без групи рівнянь з неспостережуваними f_{rl}^0 ($r = \overline{1, R_0}$, $l = \overline{1, L_0}$) праворуч. Керуючу ж вектор-функцію $f^0(\xi)$ отримаємо із (4) з урахуванням $u(s)$ визначеного відповідно до (5), (9).

Керування сумісною дією об'ємно розподілених зовнішньодинамічних збурень й одного із гранично-поверхневих впливів

Розглянемо випадок керування динамікою пружної плити за допомогою об'ємно розподіленого зовнішньодинамічного збурення $f(s)$ (або $\bar{f}$) й одного із гранично-поверхневих впливів $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$ за наявності початкових та гранично-поверхневих спостережень (7) за рештою зовнішньодинамічних збурювальних факторів.

Можна помітити, що розв'язання цих задач зведеться до середньоквадратичного обернення рівнянь (18), (19), у яких будуть відсутні рівняння з неспостережуваними $f_{\rho l}^\pm$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}$, $l = \overline{1, L_\pm}$), $f_{\rho l}^\Gamma$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$, $l = \overline{1, L_\Gamma}$) у правій частині. Розв'язання наших рівнянь співвідношеннями (20), (21) визначить моделювальні функції (або вектори їхніх значень), якими згідно з (9), (10) знаходимо складові $u_\infty(s)$, $u^0(s)$, $u^\pm(s)$, $u^\Gamma(s)$ вектор-функції $u(s)$, а через неї співвідношеннями (4) – і компоненти шуканих об'ємних та гранично-поверхневих керувань $f(s)$, $f^\pm(s)$, $f^\Gamma(s)$.

Зауважимо, що аналогічно можуть бути розв'язані і задачі керування динамікою розглядуваної плити, коли воно виконується об'ємно розподіленим силовим фактором $f(s)$ (або $\bar{f}$) спільно з двома або навіть трьома поверхнево-граничними зовнішньодинамічними збуреннями. Особливістю розв'язання таких задач керування є те, що у розв'язуючих рівняннях (18), (19) будуть відсутні два або три рівняння, що відповідають неспостережуваним відповідно до (4) зовнішньодинамічним факторам.

1.4. Задача керування динамікою товстої пружної плити при відомих об'ємно розподілених зовнішньодинамічних збуреннях

Розглянемо особливості керування динамікою товстої пружної плити для випадку, коли об'ємно розподілені зовнішньодинамічні збурення $f(s)$ функціонально відомі, зовнішньодинамічний просторово-часовий стан визначається співвідношенням (7), а її бажаний стан (14) досягається дією одного, двох та більше доступних для цього початкових і поверхнево-крайових керуючих факторів $\bar{f}^0(\xi)$, $\bar{f}^\pm(s)$, $\bar{f}^\Gamma(s)$.

Обраний для реалізації керуючий фактор (один, чи кілька) визначимо співвідношенням (4) за відомої вектор-функції $u(s)$, яку побудуємо відповідно до (5), (9) або (5), (10) за наявності функцій $\bar{f}^0(\xi)$, $\bar{f}^\pm(s)$, $\bar{f}^\Gamma(s)$ або векторів $\bar{f}^0$, $\bar{f}^\pm$, $\bar{f}^\Gamma$ їхніх значень, якими згідно із (12), (15) моделюється доступна для спостережень картина (7) зовнішньодинамічного стану плити.

Визначення згаданих вище моделювальних векторів зведеться до розв'язання (середньоквадратичного обернення) систем (16), (17), побудованих з урахуванням постановки задачі керування (відомо, чим керується динаміка плити). Зокрема, у системах (16), (17), як і вище, будуть відсутні рівняння з f_{rl}^0 ($r = \overline{1, R_0}$, $l = \overline{1, L_0}$), $f_{\rho l}^\pm$ ($\rho = \overline{1, R_\pm}$, $l = \overline{1, L_\pm}$), $f_{\rho l}^\Gamma$ ($\rho = \overline{1, R_\Gamma}$, $l = \overline{1, L_\Gamma}$) у правій частині, якщо у списку керуючих зовнішньодинамічних факторів є збурення $\bar{f}^0(\xi)$, $\bar{f}^\pm(s)$, $\bar{f}^\Gamma(s)$ відповідно.

Загальним для всіх випадків керування у розв'язуючих рівняннях (16), (17) буде зміна вектора F у їхніх правих частинах на

$$\begin{aligned} \bar{F} = \text{col} & \left(\left(\left(\left(f_{rl}^0 - L_r^0(\partial_t) u_\infty(s) \right|_{t=0, \xi=\xi_l^0} \right), r = \overline{1, R_0} \right), l = \overline{1, L_0} \right), \\ & \left(\left(\left(f_{\rho l}^+ - L_\rho^+(\partial_\xi) u_\infty(s) \right|_{s=s_l^+} \right), \rho = \overline{1, R_+} \right), l = \overline{1, L_+} \right), \\ & \left(\left(\left(f_{\rho l}^- - L_\rho^-(\partial_\xi) u_\infty(s) \right|_{s=s_l^-} \right), \rho = \overline{1, R_-} \right), l = \overline{1, L_-} \right), \\ & \left(\left(\left(f_{\rho l}^\Gamma - L_\rho^\Gamma(\partial_\xi) u_\infty(s) \right|_{s=s_l^\Gamma} \right), \rho = \overline{1, R_\Gamma} \right), l = \overline{1, L_\Gamma} \right) \end{aligned}$$

де вектор-функція $u_\infty(s)$ співвідношенням (6) визначається через об'ємно розподілене збурення $f(s)$.

Розв'язання модифікованих таким чином розв'язуючих рівнянь (16), (17) дозволить згідно з (5), (9) або (5), (10) визначити функцію $u(s)$, відповідну наявним зовнішньодинамічним умовам (7) функціонування плити. Шукані керуючі фактори будуть знайдені за допомогою співвідношення (4).

Точність розв'язання відповідної задачі та її однозначність, як і вище, будуть визначатися, умовами точності й однозначності розв'язання рівнянь (16), (17).

Дискусія і висновки

Отже, у роботі запропоновано і доведено до простих математичних співвідношень методику розв'язання складних задач керування динамікою тривимірного пружного тіла у формі плоскої плити без обмежень на форму її торцевої поверхні. Передбачалося, що динаміка плити визначається просторово розподіленими у внутрішньому об'ємі плити, а також початковими та гранично-поверхневими зовнішньодинамічними факторами, що можуть бути відомими, спостерігатися в дискретно заданих просторово-часових точках або розглядатися як керуючі впливи на плиту з метою

середньоквадратичного наближення до дискретно заданого стану. Розв'язано задачі побудови зазначених керуючих факторів, а також математичного моделювання останніх за дискретно визначеною реакцією плити на їхню наявність. Відсутність обмежень на кількість і якість інформації про зовнішньодинамічний стан плити робить задачі вивчення динаміки плити недовизначеними та математично некоректними. Проблеми дослідження динаміки таких плит ускладнюються під час розв'язання задач керування такою динамікою. І це при тому, що керуючими розглядаються всі з можливих зовнішньодинамічних впливів у довільній кількісній комбінації.

Для всієї різноманітності таких складних математичних задач керування складним механічним об'єктом у межах складної тривимірної математичної моделі подано розрахункові формули для визначення обраних керуючих факторів, а також для побудови викликаного ними тривимірного поля пружно-динамічних зміщень з оцінкою точності його узгодження із заздалегідь заданими бажаними значеннями.

Внесок авторів: Володимир Стоян – концептуалізація, методика, теоретичні основи дослідження; Дмитро Черній – методика, збір і перевірка даних; Сергій Волощук – методика, емпіричне дослідження, підготовка огляду літератури; Роман Заторський – емпіричне дослідження.

Джерела фінансування. Фінансування здійснюється власним коштом авторів та частково забезпечено Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

Список використаних джерел

- Григолюк, Э. И., & Селезов, И. Т. (1973). *Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*. ВИНТИ.
- Нигул, У. (1963). О применении символического метода А.И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит. *Известия АН Эстонской ССР. Серия: Физ.-мат. и техн. науки*, 12(2), 146–155.
- Селезов, И. Т. (1961). Про гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пластин і деякі особливості цих рівнянь. *Прикладна механіка*, 7, 538–546.
- Стоян, В. А. (2016). *Методи математичного моделювання в задачах динаміки товстих пружних плит*. ВПЦ „Київський університет”.
- Стоян, В. А. (2024). *Розподілені просторово-часові системи в умовах невизначеності*. ВПЦ „Київський університет”.
- Стоян, В. А., Черній, Д. І., & Волощук, С. Д. (2024). Тривимірні задачі керування динамікою неповно спостережуваних товстих пружних плит. Частина І. Випадок неперервно заданого бажаного стану. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Фізико-математичні науки*, 79(2), 65–71.
- Шереметьев, М. П., & Пелех, Б. Л. (1964). К построению уточненной теории пластин. *Инженерный журнал*, 4(3), 504–509.
- Grigorenko, Ya. M., & Grigorenko, A. Ya. (2013). Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review). *International applied mechanics*, 49(2), 123–193. <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0558-x>
- Grigorenko, Ya. M., Savula, Ya. G., & Mukha, I. S. (2000). Linear and nonlinear problems of the elastic deformation of complex shells and methods of their numerical solution. *International applied mechanics*, 36(8), 979–1000. <https://doi.org/10.1023/A:1026645731095>
- Lur'e, A. I. (1964). *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. Interscience Publishers.
- Nemysh, Y. N., & Khoma, I. Y. (1993). Stress-strain state of non-thin plates and shells. Generalized theory (survey). *International applied mechanics*, 29(11), 873–902. <https://doi.org/10.1007/BF00848271>
- Pichkur, V. V., & Sobchuk, V. V. (2021). Mathematical model and control design of a functionally stable technological process. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, 29(1), 32–41. <http://dx.doi.org/10.15421/142102>
- Pichkur, V., Sobchuk, V., Cherniy, D., & Ryzhov, A. (2024). Functional stability of production processes as control problem of discrete systems with change of state vector dimension. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 78(1), 105–110. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.21>
- Selezov, I. T. (2018). Development and application of the Cauchy–Poisson method to layer elastodynamics and the Timoshenko equation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
- Stoyan, V. A. (2018). Three-dimensional integral mathematical models of the dynamics of thick elastic plates. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 232–241. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0024-1>
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1987). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.

References

- Grigolyuk, E. I., & Selezov, I. T. (1973). *Mechanics of solid deformable bodies. Vol. 5. Non-classical theories of oscillations of rods, plates and shells*. VINITI [in Russian].
- Grigorenko, Ya. M., & Grigorenko, A. Ya. (2013). Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review). *International applied mechanics*, 49(2), 123–193. <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0558-x>
- Grigorenko, Ya. M., Savula, Ya. G., & Mukha, I. S. (2000). Linear and nonlinear problems of the elastic deformation of complex shells and methods of their numerical solution. *International applied mechanics*, 36(8), 979–1000. <https://doi.org/10.1023/A:1026645731095>
- Lur'e, A. I. (1964). *Three-Dimensional Problems of the Theory of Elasticity*. Interscience Publishers.
- Nemysh, Y. N., & Khoma, I. Y. (1993). Stress-strain state of non-thin plates and shells. Generalized theory (survey). *International applied mechanics*, 29(11), 873–902.
- Nigul, U. (1963). On the application of the symbolic method of A.I. Lur'e in the three-dimensional theory of the dynamics of elastic plates. *Bulletin of the Academy of Sciences of the Estonian SSR. Series of physical, mathematical and technical sciences*, 12(2), 146–155 [in Russian].
- Pichkur, V. V., & Sobchuk, V. V. (2021). Mathematical model and control design of a functionally stable technological process. *Journal of Optimization, Differential Equations and Their Applications (JODEA)*, 29(1), 32–41. <http://dx.doi.org/10.15421/142102>
- Pichkur, V., Sobchuk, V., Cherniy, D., & Ryzhov, A. (2024). Functional stability of production processes as control problem of discrete systems with change of state vector dimension. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physical and Mathematical Sciences*, 78(1), 105–110. <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2024/1.21>
- Selezov, I. T. (1961). On the hypotheses underlying the refined equations of transverse plate vibrations and some features of these equations. *Applied mechanics*, 7, 538–546 [in Ukrainian].
- Selezov, I. T. (2018). Development and application of the Cauchy–Poisson method to layer elastodynamics and the Timoshenko equation. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54, 434–442. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0044-x>
- Sheremet'yev, M. P., & Pelekh, B. L. (1964). Towards the construction of a refined theory of plates. *Engineering Journal*, 4(3), 504–509 [in Russian].

- Stoyan, V. A. (2016). *Methods of mathematical modeling in problems of dynamics of thick elastic plates*. VPTs Kyivs'kyi Universitet [in Ukrainian].
- Stoyan, V. A. (2024). *Distributed spatiotemporal systems under uncertainty*. VPTs Kyivs'kyi Universitet [in Ukrainian].
- Stoyan, V. A. (2018). Three-dimensional integral mathematical models of the dynamics of thick elastic plates. *Cybernetics and Systems Analysis*, 54(2), 232–241. <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0024-1>
- Stoyan, V. A., Cherniy, D. I., & Voloshchuk, S. D. (2024). Three-dimensional problems of controlling the dynamics of incompletely observed thick elastic plates. Part II. The case of discretely specified desired condition. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics*, 79(2), 65–71 [in Ukrainian].
- Timoshenko, S., & Woinowsky-Krieger, S. (1987). *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill.

Отримано редакцією журналу / Received: 03.01.25
Прорецензовано / Revised: 08.08.25
Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Volodymyr STOYAN¹, DSc (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0009-0008-0746-5050
e-mail: v_a_stoyan@ukr.net

Dmytro CHERNIY¹, DSc (Engin.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0000-0002-6378-8048
e-mail: d_cherniy@ukr.net

Serhii VOLOSHCHUK¹, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.
ORCID ID: 0009-0000-6416-5566
e-mail: sr.voloshchuk@gmail.com

Roman ZATORSKY², DSc (Phys. & Math.), Prof.
ORCID ID: 0000-0001-7503-4932
e-mail: romazatorsky@gmail.com

¹Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

²Vasyl Stefanyk Carpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine

THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF CONTROLLING THE DYNAMICS OF INCOMPLETELY OBSERVED THICK ELASTIC PLATES. PART II. THE CASE OF DISCRETELY SPECIFIED DESIRED CONDITION

For the first time, complex control problems for a thick elastic plate, the dynamics of which are described by Lamé's equations in a bounded three-dimensional spatial domain over a finite time interval, are being solved. The essence of these problems lies in the fact that the field of elastodynamic displacements of the plate under the influence of a control function should attain a desired state, specified discretely in space and time, or remain in the minimally possible least-squares neighborhood of these values, given the known conditions. The control functions can be chosen from volumetric, initial, surface, and edge functions of external dynamic influences, which can affect the plate's dynamics either individually or in practically feasible combinations of several such influences. These problems are solved given the presence of discretely defined external dynamic observations of the initial, boundary, and edge conditions of the plate at known points, which belong to the domains of definition of the aforementioned conditions. In fact, these observations are discrete initial, boundary, and edge conditions that are complemented with Lamé's equations. However, their quantity and quality can be arbitrary and will only affect the complexity of the computations. Based on the discrete initial, boundary, and edge conditions, along with the discrete desired states, and considering the integral form of the model, control functions are found as pseudosolutions of a system of algebraic equations or a system of integral equations. Analytical dependencies of the external dynamic control factors and the field of elastodynamic displacement of the points of the plate induced by them are also constructed and evaluated for accuracy and uniqueness. Partial cases of some possible combinations of control strategies for the dynamics of the thick elastic plate are also considered.

Keywords: spatially distributed dynamical systems, spatial problems of elasticity theory, thick elastic plates, control problems.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.