Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на тему:

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА МОДЕЛЬ ВАРТОСТІ ОПЦІОНУ НА ОСНОВІ РІВНЯННЯ БЛЕКА-ШОУЛЗА З НЕПОВНІСТЮ ВИЗНАЧЕНИМИ ДОДАТКОВИМИ УМОВАМИ

Студента 4 курсу
кафедри МСС
Артема КУШНАРЬОВА

Науковий керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Сергій ВОЛОЩУК

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту в ЕК, протокол № 10 від 5 червня 2023 р.

Завідувач кафедри МСС ____________ д.т.н., доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2023

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ

Кваліфікаційна робота бакалавра. Робота складається з 31 сторінки, 5 рисунків, 8 інформаційних джерел.

Актуальність. Дослідження, проведені в даній роботі, можуть бути використані при формуванні портфелю акцій, особливо тоді, коли відома тенденція щодо зростання або спадання цін на акції. Придбавши опціон на акцію за ціною згідно моделі, можна забезпечити собі ціну на акцію, нижчу, ніж на ринку. Тому дослідження, проведені в роботі, є актуальними.

Мета роботи. Метою роботи є побудова функції вартості опціону на основі моделі Блека-Шоулза з неповністю визначеними початково-крайовими умовами.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є математичні моделі визначення вартості ціни опціонів.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є диференціальна модель Блека-Шоулза з неповністю визначеними початково-крайовими умовами.

Методи дослідження. При дослідженні використовувалися методи диференціальних рівнянь, математичного моделювання, обчислювальні методи, методів візуалізації даних.

Ключові слова. Опціон, рівняння Блека-Шоулза, дискретні початково-крайові умови, дискретизація, ціна опціону.

ВСТУП

Цінні папери, як засоби фінансових угод і операцій, відомі доволі давно. Їх активне використання почалося ще в середньовіччі. Внаслідок великих географічних відкриттів набула широкого розмаху міжнародна торгівля, тому у підприємців з'явилася потреба в значних коштах та операціях з ними. Це призвело по появи перших фінансових спілок, що були прототипами акціонерних товариств. З часом це призвело до появи ринку цінних паперів. З розширенням ринку з'явилась потреба не тільки в цінних паперах, а й у похідних від них фінансови документах, які називають деривативами.

Спочатку деривативи використовувалися для забезпечення збалансованого обмінного курсу товарів на міжнародному ринку. На сьогоднішній день, деривативи використовуються як засіб планування виробництва та постачання або в якості фінансового інструменту для фінансування виробника.

Опціони – це похідний фінансовий інструмент. Вони бувають двох типів: «call», право на придбання, або «put», право на продаж, що стосується обумовленого в опціоні активу на визначених в ньому умовах. Динаміку вартості опціонів на ринку можна досліджувати за допомогою методів математичного моделювання. Відомими є, наприклад, модель Блека-Шоулза та Біноміальна модель оцінювання вартості опціонів. В даній роботі зупинимось на дослідженні диференціальної моделі Блека-Шоулза вартості опціону.

Актуальність. Дослідження, проведені в даній роботі, можуть бути використані при формуванні портфелю акцій, особливо тоді, коли відома тенденція щодо зростання або спадання цін на акції. Придбавши опціон на акцію за ціною згідно моделі, можна забезпечити собі ціну на акцію, нижчу, ніж на ринку. Тому дослідження, проведені в роботі, є актуальними.

Мета роботи. Метою роботи є побудова функції вартості опціону на основі моделі Блека-Шоулза з неповністю визначеними початково-крайовими умовами.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є математичні моделі визначення вартості ціни опціонів.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є диференціальна модель Блека-Шоулза з неповністю визначеними початково-крайовими умовами.

Методи дослідження. При дослідженні використовувалися методи диференціальних рівнянь, математичного моделювання, обчислювальні методи, методів візуалізації даних.

РОЗДІЛ 1
ОПЦІОН ЯК ПОХІДНИЙ ЦІННИЙ ПАПІР. МОДЕЛЬ ВАРТОСТІ ОПЦІОНУ

1.1 Цінні папери

Розглянемо деякі поняття, тісно пов'язані з цінними паперами:

1. Фінансовий актив – це нефізичний актив, вартість якого визначається договірною вимогою, наприклад: банківський депозит, облігації та участь в акціонерному капіталі. Фінансові активи зазвичай більш ліквідні, ніж інші матеріальні активи, такі як товари та нерухомість.
2. Фінансовий інструмент – грошовий контракт між сторонами. Міжнародні стандарти фінансової звітності визначають фінансовий інструмент як «будь-який договір, в результаті якого виникає фінансовий актив у одної організації та фінансове зобов'язання або інструмент власного капіталу в іншої».
3. Інструмент власного капіталу, за міжнародними стандартами фінансової звітності – це будь-який договір, який свідчить про залишкову частку в активах підприємства після відрахування усіх його зобов'язань.

Тоді маємо, що цінний папір – це фінансовий актив, що відноситься до взаємозамінного оборотного фінансового інструменту, який має певну грошову вартість. Він представляє собою позицію власності в корпорації за допомогою акцій. Цінні папери можуть показувати відносини кредитора з державними органами або корпораціями, що володіють певними облігаціями. Вони також засвідчують право власності, що представлено опціоном.

Основними видами цінних паперів є пайові цінні папери, боргові цінні папери та їх гібриди.

Пайові цінні папери представляють собою частку власності, яка належить акціонерам в організації і реалізується у формі акцій акціонерного капіталу. Власники пайових цінних паперів, як правило, не мають права на регулярні виплати, але вони можуть отримати прибуток від приросту капіталу під час їх продажу.

Пайові цінні папери дають право їх власнику на певний контроль над компанією на пропорційній основі через право голосу. У випадку банкрутства компанії вони розділяють лише залишкові відсотки після того, як всі зобов’язання перед колекторами були виплачені.

Боргові цінні папери представляють собою позичені їх власником гроші, які треба повернути з вимогами, які передбачають розмір позики, відсоткову ставку та дату погашення або поновлення. Боргові цінні папери, до яких належать державні та корпоративні облігації, депозитні сертифікати та інші документи, зазвичай дають їх власнику право на регулярну виплату відсотків та погашення основної суми, а також будь-які інші права, що були передбачені певним договором. Зазвичай вони випускаються на певний термін, після закінчення якого емітент може викупити їх.

Гібридні цінні папери, як випливає з назви, поєднують деякі характеристики як боргових, так і пайових цінних паперів. Прикладом гібридного цінного паперу є варант на акції, який дає право до завершення контракту придбати пакет акцій.

Публічні цінні папери котируються на фондових біржах, де емітенти (продавці) можуть шукати списки цінних паперів і залучати інвесторів, забезпечуючи ліквідний і регульований ринок для торгівлі. Неформальні електронні торгові системи стали більш поширеними останніми роками, тому зараз цінними паперами часто торгують «поза біржою» або безпосередньо серед інвесторів, використовуючи сучасні технології комунікації і розрахунку.

Первинне публічне розміщення акцій являє собою перший великий продаж компанією пайових цінних паперів населенню. Після цього будь-які нові акції, які все ще продаються на первинному ринку, називаються вторинним розміщенням. Цінні папери також можуть пропонуватися приватно обмеженій та кваліфікованій групі в рамках так званого приватного розміщення. Іноді компанії продають акції в поєднанні публічного та приватного розміщення.

На вторинному ринку цінні папери просто передаються як активи від одного інвестора до іншого, тобто акціонери можуть продавати свої цінні папери іншим інвесторам за гроші та/або за приріст капіталу. Таким чином вторинний ринок доповнює первинний. Вторинний ринок є менш ліквідним для приватних цінних паперів, оскільки вони не представлені на ринку широкому загалу покупців і можуть зацікавлювати лише кваліфікованих інвесторів.

1.2 Похідні цінні папери

Похідні цінні папери (похідні фінансові інструменти, дериватив) – це фінансові контракти, укладені між двома або більше сторонами, вартість яких визначається на основі базового активу, групи активів або контрольного показника.

Дериватив встановлюється між двома або більше сторонами, які можуть торгувати на біржі або на позабіржовому ринку. Ці контракти можна використовувати для торгівлі будь-якою кількістю активів і нести власні ризики. Ціни на них визначаються коливаннями базового активу. Ці фінансові цінні папери зазвичай використовуються для доступу до певних ринків і можуть бути інструментом захисту від ризику. Звичайні похідні цінні папери включають ф'ючерсні контракти, форвардні контракти, опціони та свопи.

Деривативи використовуються для доступу до конкретних ринків і торгівлі різними активами. Найпоширенішими базовими активами для деривативів є акції, облігації, товари, валюти, процентні ставки тощо. Вартість контракту залежить від зміни цін на базовий актив.

Похідні інструменти, якими торгують на позабіржовому ринку, як правило мають більшу ймовірність ризику контрагента, тобто більшу небезпеку щодо дефолту однієї зі сторін, які беруть участь у операції. Вони укладаються між двома приватними сторонами і не регулюються. Щоб застрахувати цей ризик, інвестор може придбати валютний дериватив, щоб зафіксувати певний обмінний курс. Похідні цінні папери, які можна використовувати для хеджування такого роду ризиків, включають валютні ф'ючерси та валютні свопи.

Існує багато різних типів похідних цінних паперів, що можна використовувати для керування ризиками. Ринок деривативів продовжує рости, пропонуючи його продукти, що відповідають майже будь-якій потребі та допустимим ризикам.

Найпоширенішими типами деривативів є ф’ючерси, форвардні контракти, свопи та опціони.

Ф’ючерсний контракт – це угода між двома сторонами про купівлю та поставку активу за узгодженою ціною в майбутньому, який є стандартизованим контрактом на біржі. Трейдери використовують ф’ючерсні контракти, щоб хеджувати свій ризик або спекулювати на ціні базового активу. Залучені сторони зобов’язані виконати вимогу купити або продати базовий актив.

Форвардні контракти подібні до ф’ючерсів, але ними не торгують на біржі. Їх можна купити лише поза біржою. Коли створюється форвардний контракт, покупець і продавець можуть узгодити умови, розмір і процес розрахунків. Будучи позабіржовим продуктом, форвардні контракти несуть більший ступінь ризику контрагента для обох сторін.

Ризики контрагента є різновидом кредитного ризику, оскільки сторони можуть бути не в змозі виконати зобов’язання, викладені в контракті. Якщо одна сторона стає неплатоспроможною, інша сторона може не мати права позову та втратити цінність своєї позиції.

Після створення, сторони форвардного контракту можуть компенсувати свої позиції з іншими контрагентами, що може збільшити потенційні ризики контрагентів, оскільки більше трейдерів залучаються до того самого контракту.

Своп є ще одним поширеним типом деривативу, який часто використовується для обміну одного виду грошових потоків на інший. Наприклад, трейдер може використовувати процентний своп, щоб перейти з позики зі змінною процентною ставкою на позику з фіксованою процентною ставкою, або навпаки.

Опціонний контракт подібний до ф'ючерсного контракту, оскільки це угода між двома сторонами про купівлю або продаж активу на заздалегідь визначену дату в майбутньому за наперед узгодженою і зафіксованою у опціоні ціною. Ключова відмінність між опціонами та ф'ючерсами полягає в тому, що з опціоном покупець не зобов'язаний виконувати свою угоду про купівлю або продаж. Це лише можливість, а не обов'язок покупця опціону. Як і у випадку з ф'ючерсами, опціони можуть використовуватися для хеджування або спекуляції на ціні базового активу.

Трейдери та інвестори купують і продають опціони з кількох причин. Спекуляція опціонами дозволяє трейдеру утримувати позицію з кредитним плечем в активі за нижчою ціною, ніж купівля акцій активу. Інвестори використовують опціони для хеджування або зниження ризику своїх портфелів.

Опціони також є одним із найбільш прямих способів інвестувати в нафту. Для трейдерів щоденний обсяг торгів опціонами та відкритий інтерес (тобто кількість непогашених контрактів на похідні фінансові інструменти, по яким не було розраховано актив) є двома ключовими показниками, на які слід звертати увагу, щоб приймати найбільш обґрунтовані інвестиційні рішення.

За типами опціони поділяються на “Call” опціони та “Put” опціони.

Опціон "Call" або купівельний опціон – це договір в момент часу t про те, що покупцеві (першому партнеру) надається право купити у продавця (другого партнера) акцію (яка в даний момент часу t має ціну x) у певний момент часу t^* в майбутньому за узгодженою ціною x^*. При цьому покупець має заплатити продавцю вартість опціону $f = w(x,t)$. Слід зазначити, що з настанням часу t^* продавець повинен продати актив за ціною x^*, вказаною у договорі навіть тоді, коли ціна на ринку відрізнятиметься. Покупець натомість має право відмовитися від купівлі активу. Таким чином, покупець купляє у продавця опціон та стає його власником. У подальшому покупець має право продати опціон третій стороні. Опціон стає цінним папером який є фінансовою похідною від активу (акції). Дата t^* є датою погашення опціону.

Опціон "Put" або опціон продажу – це договір у момент часу t про те, що першому партнеру надається право продати актив, який має ціну x в даний момент часу t, у певний момент часу t^* в майбутньому за узгодженою ціною x^* другому партнеру. При цьому перший партнер сплачує вартість опціону продажу $f = w(x,t)$ та стає власником опціону. В момент настання часу t^* другий партнер повинен купити актив за ціною x^* у першого партнера, якщо перший партнер захоче продати.

Опціони купівлі та продажу відносяться до європейських опціонів, ознакою яких є купівля/продаж активу точно в момент часу t^*, вказаний у опціоні.

Емітент (продавець) опціону є короткою стороною (short) контракту, власник – довгою стороною (long). Відповідно є чотири можливі позиції в опціонах:

1. Купити купівельний опціон (операція long call)
2. Емітувати купівельний опціон (short call)
3. Купити опціон продажу (long put)
4. Емітувати опціон продажу (short put)

За стилями опціони поділяються на американські та європейські. Американські опціони можуть бути виконані в будь-який час до дати закінчення опціону, тоді як європейські опціони можуть бути виконані лише у дату закінчення терміну дії, тобто у дату виконання.

Спреди опціонів – це стратегії, які використовують різні комбінації купівлі та продажу різних опціонів для бажаного рівня ризику та доходу. Спреди створюються на основі базових опціонів і можуть використовувати переваги різних сценаріїв, таких як середовища з високою або низькою волатильністю.

Базовий опціон — це дериватив, який дає власнику право, але не обов'язок, купити або продати базовий актив за заздалегідь визначеною ціною протягом певного періоду часу. Базовий опціон є опціоном продажу або купівлі, що не має особливих або незвичайних функцій. Такі опціони стандартизовані при торгівлі на біржі.

1.3 Модель Блека-Шоулза вартості опціону

У фінансовій сфері економічної діяльності підприємства похідні цінні папери, де в основі яких є певні активи, відіграють дуже важливу роль. Виникає питання практичного визначення вартості похідних цінних паперів залежно від вартості цього активу.

Опишемо метод визначення вартості "Call" опціону.

Нехай функція $x(t)$ є ціною акції, а t та t^* – два моменту часу ($t < t^*$), де t – момент часу укладання угоди придбання опціону, а t^* – фіксований момент часу в майбутньому, у який власник опціону має право придбати акцію по погодженій ціні x^*. З визначення "Call" опціону зрозуміло, що його ціна $w(x, t)$ залежить від двох змінних: ціни акції x у часовий момент придбання опціону t.

Для розрахунку ціни опціону Фішером Блеком і Майроном Шоулзом у 1973 році в статті «Формування цін на опціони та корпоративні зобов'язання» запропоноване параболічне рівняння в частинних похідних:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + 0.5\,\sigma^2 x^2\,\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - r\,w(x,t) = 0, x \in [0,\infty), t \in [0,t^*],$$

де σ – волатильність акцій (статистичний показник, який протягом певного часу описує тенденцію зміни ринкових цін та доходів.), а r – безризикова процентна ставка (відсоткова ставка при відсутності усіх ризиків).

До даного рівняння додаткові умови ставляться з таких міркувань.

Якщо ціна фінансового активу рівна 0 (тобто $x(t)=0$) то ціна опціону також буде рівна 0. Отже можемо записати крайову умову:

$$w(0\,,t)\;=\;0.$$

Для моменту часу $t = t^*$ маємо два випадки:

- якщо ціна $x(t^*)$ акції у момент часу t^* менша за ціну акції, зазначену в опціоні, то купувати опціон немає сенсу, а отже
$$w(x\,,t^*)\;=\;0, x\;\in\;[0\,,x^*);$$
- якщо ціна $x(t^*)$ акції у момент часу t^* більша, за ціну акції, зазначену в опціоні, то ціна $x(t^*)$ буде сумою ціни опціону і ціни акції, зазначеної в опціоні:
$$x^* +\; w(x\,,t^*)\;=\;x(t^*), x\;\in\;[x^*,\infty).$$

Отже для функції $w(x,t)$ справедливою буде умова:

$$w(x\,,t^*)\;=\varphi(x) = \begin{cases} x - x^*, x \in [x^*,\infty), \\ 0, x \in [0,x^*). \end{cases}$$

Таким чином динаміка ціни опціону описується наступною початково-крайовою задачею [1]:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + 0.5\sigma^2 x^2\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} +$$

$$+ rx\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - rw(x,t) = 0, x \in [0,\infty), t \in [0\,,t^*], \tag{1.1}$$

$$w(x,t)|_{t=t^*} = \varphi(x),\ x \in [0, \infty),$$

$$w(x,t)|_{x=0} = 0. \qquad (1.2)$$

Перетворимо задачу (1.1), (1.2) у початково-крайову задачу, зробивши наступну заміну змінних $\tau = t^*$- t. Отримаємо:

$$\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial \tau} = 0.5\,\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w(x,\tau)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w(x,\tau)}{\partial x} - rw(x,\tau),\ \ \tau \in [0, \infty),\ x \in [0, \infty] \qquad (1.3)$$

$$w(x,\tau)|_{\tau=0} = \varphi(x),$$

$$w(x,\tau)|_{x=0} = 0, \qquad (1.4)$$

Розв’язок задачі (1.3), (1.4) представляється у вигляді інтегралу [1]:

$$w(x,\tau) = e^{-\tau r}\int_{x^*}^{\infty}\frac{(y - x^*)}{d_0 y\sqrt{2\pi}}exp\left(-\frac{1}{2}q^2(y)\right)dy,$$

де

$d_0 = \sigma\sqrt{\tau}$, $q(y) = \frac{1}{d_0}(ln\frac{x}{y} + (r-\alpha)\,\tau)$, де $\alpha = 0.5\,\sigma^2$.

РОЗДІЛ 2
МОДЕЛЬ БЛЕКА-ШОУЛЗА НА СКІНЧЕННОМУ ЧАСОВОМУ І ЦІНОВОМУ ВІДРІЗКАХ

2.1 Модель Блека-Шоулза з дискретними додатковими умовами

Розглянемо модель Блека-Шоулза ціни опціону (1.1) на скінченному проміжку цін $[a, b]$ та скінченному часовому проміжку $[0, t^*]$.

Візьмемо $a > 0$ таким, щоб не було сенсу купувати опціон, тобто таким, щоб ціна опціону при ціні акції a була рівна 0 в будь-який момент часу. Тоді маємо задачу:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + 0.5\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + rx\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - rw(x,t) = 0, x \in [a,b], t \in [0\ , t^*], \quad (2.1)$$

$$w(x,t)|_{t=t^*} = 0, x \in [a, x^*], \quad (2.2)$$

$$w(x,t)|_{t=t^*} = x - x^*, x \in [x^*, b],$$

$$w(x,t)|_{x=a} = 0.$$

Розв’язком задачі (2.1), (2.2) є функція ціни опціону $w(x,t)$.

Так як відомими в цій задачі є ціни опціонів у кінцевий момент часу t* та при початковій вартості акції a, то це є задача спостереження.

Спростимо задачу (2.1)-(2.2) за допомогою наступної заміни [1]:

$$w(x,t) = e^{rt} v(x,t),$$

$$z = ln(x) + Ct, \tau = t^* - t, C = -r + 0.5\sigma^2.$$

Отримаємо наступну диференціальну модель ціни опціону:

$$\frac{\partial y(z,\tau)}{\partial \tau} - 0.5\sigma^2 \frac{\partial^2 y(z,\tau)}{\partial z^2} = 0, z \in S = [ln(a), ln(b) + Ct^*], \tau \in [0, t^*], \quad (2.3)$$

$$y(z,\tau)\,|_{\tau=0} = 0,\ z \in S_0^{(1)} = [ln(a) + Ct^*,\ ln(x^*) + Ct^*], \quad (2.4)$$

$$y(z,\tau)\,|_{\tau=0} = (e^{z-Ct^*} - x^*)e^{-rt^*},\ z \in S_0^{(2)} = [ln(x^*) + Ct^*,\ ln(b) + Ct^*], \quad (2.5)$$

$$y(z,\tau)\,|_{(z,\tau)\in S_\Gamma} = 0,\ S_\Gamma = \{(z,\tau): z = \ln(a) + C(t^* - \tau), \tau \in [0, t^*]\}, \quad (2.6)$$

де $y(z,\tau) = v(e^{z-C(t^*-\tau)}, t^* - \tau)$.

Рівняння диференціальної моделі опціону є однорідним параболічним рівнянням з двома змінними. Задача є схожою на крайову задачу параболічного типу, але додаткова умова визначає значення функції *y(z, τ)* в точках множини S_Γ, а не на кінцях інтервалу *S*. Разом з цим, умови задачі не є початковими, бо вони не визначають значення функції *y(z, τ)* на всьому інтервалі *S* при $\tau = 0$. З цього випливає, що класичними методами розв'язати задачу буде важко.

Можна знайти функцію *y(z, τ)* наближено. Вона точно задовольнятиме рівняння диференціальної моделі опціону і наближено задовольнятиме його додаткові умови, згідно середньоквадратичного критерію.

$$\Phi_y = \int_{S_0^{(1)}} (y(z,0))^2 dz + \int_{S_0^{(2)}} (y(z,0) - (e^{z-Ct^*} - x^*)e^{-rt^*})^2 dz +$$
$$+\int_{S_\Gamma} (y(z,\tau))^2 dz d\tau \to \min_{y(z,x)} \qquad (2.7)$$

Використаємо методику, що була використана в [7] для моделювання динаміки гіперболічних систем, щоб побудувати функцію *y(z, τ)*. За допомогою цієї методики отримаємо множину функцій точних розв'язків даного рівняння, де додаткові умови будуть задовольнятися наближено, згідно середньоквадратичного критерію (2.4).

Взявши функцію *y(z, τ)* та довільний елемент отриманої раніше множини та застосувавши заміни, що є обернені до застосованих раніше, одержимо функцію *w(x,t)*, яка буде моделювати ціну опціону європейського типу. Також визначимо нев'язку додаткових умов та запишемо умови однозначності отриманої раніше множини розв'язків даної задачі.

2.2 Розв'язання задачі Блека-Шоулза з дискретними додатковими умовами

Задачу (2.3)-(2.6) розглянемо з дискретизованими додатковими умовами. Область $S_0^{(1)}$ у (2.4) дискретизуємо точками $z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots$ тоді:

$$y(z,\tau)|_{\tau=0,z=z_i^{(1)}} = 0, z_i^{(1)} \in S_0^{(1)}, \overline{i=1,L_{01}} \quad (2.8)$$

Область $S_0^{(2)}$ у (2.5) дискретизуємо точками $z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots$:

$$y(z,\tau)|_{\tau=0,z=z_j^{(2)}} = \left(e^{z_j^{(2)}-Ct^*} - x^*\right)e^{-rt^*},\ z_j^{(2)} \in S_0^{(2)}, \overline{j=1,L_{02}} \quad (2.9)$$

Область S_Γ у (2.6) дискретизуємо точками $(z_1,\tau_1), (z_2,\tau_2), \ldots$:

$$y(z,\tau)|_{\tau=\tau_k,z=z_k} = 0, z_k = \ln(a) + C(t^* - \tau_k), \tau_k \in [0,t^*], \overline{k=1,L_\Gamma} \quad (2.10)$$

Запишемо середньоквадратичний критерій, згідно якого отримаємо результат:

$$\Phi = \sum_{i=1}^{L_{01}} (y(z,\tau)|_{\tau=0,z=z_i^{(1)}})^2 + \sum_{j=1}^{L_{02}} (y(z,\tau)|_{\tau=0,z=z_j^{(2)}} - \left(e^{z_j-Ct^*} - x^*\right)e^{-rt^*})^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{L_\Gamma} (y(z,\tau)|_{\tau=\tau_k,z=z_k})^2 \rightarrow \min_{y(z,\tau)} \quad (2.11)$$

Згідно з [2] розв'язок задачі запишемо у вигляді співвідношення:

$$y(z,\tau) = y_\infty(z,\tau) + y_{01}(z,\tau) + y_{02}(z,\tau) + y_\Gamma(z,\tau), \quad (2.12)$$

де $y_\infty(z,\tau) = \int_{S_0^T} G(z - z', \tau - \tau')u(z',\tau')dz'd\tau'$

а

$$G(z - z', \tau - \tau') = \frac{\chi(\tau - \tau')}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - \tau')}} e^{\frac{-(z-z')^2}{2\sigma^2(z-z')}}, \quad (2.13)$$

є функцією Гріна диференціального оператора $\frac{\partial}{\partial\tau} - 0.5\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, який породжує рівняння (2.3). У формулі (2.13) $\chi(\tau - \tau')$ – функція Хевісайда.

Оскільки права частина рівняння (2.3) дорівнює 0, то $\mathrm{y}_\infty(\mathrm{z},\tau) = 0$, а отже не буде першого доданку у (2.12). Отже, отримаємо:

$$y(\mathrm{z},\tau) = \mathrm{y}_{01}(\mathrm{z},\tau) + \mathrm{y}_{02}(\mathrm{z},\tau) + \mathrm{y}_\Gamma(\mathrm{z},\tau) \tag{2.14}$$

Функції $\mathrm{y}_{01}(\mathrm{z},\tau)$, $\mathrm{y}_{02}(\mathrm{z},\tau)$, $\mathrm{y}_\Gamma(\mathrm{z},\tau)$ – невідомі. Їх будемо шукати у вигляді [9,4]:

$$\mathrm{y}_{01}(\mathrm{z},\tau) = \int_{S_{01}} G(z - z', \tau - \tau') u_{01}(\mathrm{z}',\tau')\mathrm{dz}'\mathrm{d}\tau' , \tag{2.15}$$

$$\mathrm{y}_{02}(\mathrm{z},\tau) = \int_{S_{02}} G(z - z', \tau - \tau') u_{02}(\mathrm{z}',\tau')\mathrm{dz}'\mathrm{d}\tau', \tag{2.16}$$

$$\mathrm{y}_\Gamma(\mathrm{z},\tau) = \int_{S_\Gamma^-} G(z - z', \tau - \tau') u_\Gamma(\mathrm{z}',\tau')\mathrm{dz}'\mathrm{d}\tau', \tag{2.17}$$

де $u_{01}(\cdot) \in S_{01} = S_0^{(1)} \times (-\infty, 0], u_{02}(\cdot) \in S_{02} = S_0^{(2)} \times (-\infty, 0]$ – невідомі функції, які визначені у межах просторової частини області функціонування системи, але до часового моменту $\tau = 0$, а $u_\Gamma(\cdot) \epsilon S_\Gamma^- = (R^2 \backslash S_\Gamma) \times [0, t^*]$ – невідома функція, яка діє за межами просторової частини області функціонування системи, але у час $\tau \in [0, t^*]$.

Знайдемо моделюючі функції $\mathrm{u}_{01}(\cdot), \mathrm{u}_{02}(\cdot), \mathrm{u}_\Gamma(\cdot)$ у вигляді векторів їх значень:

$$\mathrm{u}_{01} = col\left(\mathrm{u}_{01}(s_m^{01}), m = \overline{1, M_{01}}\right) (s_m^{01} \in S_{01}), \tag{2.18}$$

$$\mathrm{u}_{02} = col\left(\mathrm{u}_{02}(s_m^{02}), m = \overline{1, M_{02}}\right) (s_m^{02} \in S_{02}), \tag{2.19}$$

$$\mathrm{u}_\Gamma = col\left(\mathrm{u}_\Gamma(s_m^\Gamma), m = \overline{1, M_\Gamma}\right) (s_m^\Gamma \in S_\Gamma^-), \tag{2.20}$$

$s_m^{01} = (z'_m, \tau'_m),\ m = \overline{1, M_{01}}, s_m^{02} = (z'_m, \tau'_m),\ m = \overline{1, M_{02}},$
$s_m^\Gamma = (z'_m, \tau'_m),\ m = \overline{1, M_\Gamma}$ – точки дискретизації області $S_{01}, S_{02}, S_\Gamma^-$.

Тоді функції $y_{01}(z,\tau)$, $y_{02}(z,\tau)$, $y_\Gamma(z,\tau)$ можна записати у такому вигляді:

$$\mathrm{y}_{01}(\mathrm{z},\mathrm{\tau}) = \sum_{m=1}^{M_{01}} G(z - z'_m, \tau - \tau'_m)\mathrm{u}_{01}(z'_m, \tau'_m)\,, (z'_m, \tau'_m) = s_m^{01} \tag{2.21}$$

$$\mathrm{y}_{02}(\mathrm{z},\mathrm{\tau}) = \sum_{m=1}^{M_{02}} G(z - z'_m, \tau - \tau'_m)\mathrm{u}_{02}(z'_m, \tau'_m)\,, (z'_m, \tau'_m) = s_m^{02} \tag{2.22}$$

$$\mathrm{y}_{\Gamma}(\mathrm{z},\mathrm{\tau}) = \sum_{m=1}^{M_{\Gamma}} G(z - z'_m, \tau - \tau'_m)\mathrm{u}_{\Gamma}(z'_m, \tau'_m), (z'_m, \tau'_m) = s_m^{\Gamma} \tag{2.23}$$

Після підстановки (2.21)-(2.23) у (2.8)-(2.10) отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$A\overline{u} = \overline{\mathrm{Y}}, \tag{2.24}$$

де

$$\bar{u} = col(\mathrm{u}_{01},\ \mathrm{u}_{02}, \mathrm{u}_{\Gamma}), \tag{2.25}$$

$$\overline{Y} = col\Big(col(0, i = \overline{1, L_{01}}), col\left(\left(e^{z_j - Ct^*} - x^*\right)e^{-rt^*}, j = \overline{1, L_{02}}\right),$$

$$col(0, k = \overline{1, L_{\Gamma}})\Big), \tag{2.26}$$

$$\mathrm{A} = col\big(a_i, \overline{i = 1, L_{01}};\ b_j, \overline{j = 1, L_{02}};\ c_k, \overline{k = 1, L_{\Gamma}}\big), \tag{2.27}$$

$$a_i = str(G\left(z_i^{(1)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{01}};\ G\left(z_i^{(1)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{02}};$$

$$G\left(z_i^{(1)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{\Gamma}}\,), z_i^{(1)} \in S_0^{(1)}, \overline{i = 1, L_{01}}\,.$$

$$b_j = str(G\left(z_j^{(2)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{01}};\ G\left(z_j^{(2)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{02}};$$

$$G\left(z_j^{(2)} - z'_m, -\tau'_m\right), m = \overline{1, M_{\Gamma}}\,), z_j^{(2)} \in S_0^{(2)}, \overline{j = 1, L_{02}}\,.$$

$$c_k = str(G(z_k - z'_m, \tau_k - \tau'_m), m = \overline{1, M_{01}};\ G(z_k - z'_m, \tau_k - \tau'_m), m = \overline{1, M_{02}};$$

$$G(z_k - z'_m, \tau_k - \tau'_m), m = \overline{1, M_{\Gamma}}\,), z_k = \ln(a) + C(t^* - \tau_k), \tau_k \epsilon\ [0, t^*], \overline{k = 1, L_{\Gamma}}.$$

В зв’язку з тим, що матриця A може мати прямокутну форму і бути виродженою, її розв’язок або псевдорозв’язок знайдемо у вигляді [2]:

$$\overline{u} = A^{+}\left(\overline{Y} - Av\right) + v \tag{2.28}$$

де A^{+}–псевдообернена матриця до матриці A, а v – довільний дійсний вектор, який має розмірність $M_{01} + M_{02} + M_{\Gamma}$.

Мінімальний за нормою розв’язок (2.25) має вигляд:

$$\overline{u} = A^{+}\overline{Y} \tag{2.29}$$

Точність моделювання ціни опціону визначається за формулою:

$$\varepsilon^{2} = \min_{y(z,\tau)} \Phi = \overline{Y}^{T}\overline{Y} - \overline{Y}^{T} P P^{+} \overline{Y}, \tag{2.30}$$

де $P = AA^{T}$, а P^{+} – матриця, псевдообернена до P.

Однозначність множини розв’язків, яка складається з векторів (2.28) визначається за такою умовою: якщо $\det A^{T}A > 0$, то розв'язок задачі є однозначним; якщо $\det A^{T}A = 0$, то розв’язок задачі є неоднозначним.

РОЗДІЛ 3
ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛІ БЛЕКА-ШОУЛЗА ВАРТОСТІ ОПЦІОНУ

3.1 Алгоритм реалізації чисельного експерименту

Опишемо детальний алгоритм реалізації чисельного дослідження ціни опціону на основі моделі Блека-Шоулза з дискретними додатковими умовами. Даний алгоритм може бути реалізований в різних системах комп'ютерної математики або за допомогою сучасних мов програмування.

Алгоритм пошуку ціни опціону

1. Введемо початкові дані моделі, а саме: запишемо модель ціни опціону Блека-Шоулза (2.1). В цій моделі є деякі параметри, які потрібно ввести. Введемо волатильність акцій σ^2, потім введемо безризикову процентну ставку r.
2. Для моделі Блека-Шоулза (2.3) – (2.6) обчислимо параметр C: $C = -r + 0.5\sigma^2$.
3. Введемо відрізок $[a, b]$, де a найменш можлива ціна акції, а b найбільш можлива ціна акції. Тоді $x \in [a, b]$.
4. Для умов (2.4)-(2.6) введемо ціну x^*на акцію згідно опціону, де $x^* \in [a, b]$.
5. Введемо момент часу t^* у який може бути реалізовано опціон. Тоді ціна опціону буде досліджуватись протягом часового відрізку $[0\,, t^*]$. Тобто, $t \in [0\,, t^*]$.
6. Для спрощення даної задачі проведемо таку заміну:
$$w(x, t) = e^{rt} v(x, t),$$
де $w(x, t)$ – ціна опціону.
7. Для подальших розрахунків, проведемо ще одну заміну
$$y(z, \tau) = v\left(e^{z - C(t^* - \tau)}, t^* - \tau\right).$$

Тоді задача (2.1)-(2.2) набуде вигляду (2.3)-(2.6).

8. Введемо передатну функцію (функцію Гріна) (2.13) для диференціального оператора з рівняння (2.3).
9. Введемо кількість точок дискретизації для всіх додаткових умов L_{01}, L_{02}, L_Γ.
10. Введемо кількість точок дискретизації для моделюючих функцій, а саме: M_{01} точок для функції $\mathrm{u}_{01}(\cdot)$, M_{02} точок для функції $\mathrm{u}_{02}(\cdot)$, M_Γ точок для функції $\mathrm{u}_\Gamma(\cdot)$.
11. Дискретизуємо області $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, S_\Gamma$ точками $z_i^{(1)}, z_j^{(2)}, (z_k, \tau_k)$ відповідно, де

$$z_i^{(1)} \in S_0^{(1)}, \overline{i = 1, L_{01}},$$

$$z_j^{(2)} \in S_0^{(2)}, \overline{j = 1, L_{02}},$$

$$z_k = \ln(a) + C(t^* - \tau_k), \tau_k \in [0, t^*], \overline{k = 1, L_\Gamma}$$

12. Дискретизуємо області S_{01}, S_{02}, S_Γ^- точками $s_m^{01}, s_m^{02}, s_m^\Gamma$, таким чином, щоб для кожної області значення (z'_m, τ'_m) були різними:

$$(z'_m, \tau'_m) = s_m^{01}, m = \overline{1, M_{01}},$$

$$(z'_m, \tau'_m) = s_m^{02}, m = \overline{1, M_{02}},$$

$$(z'_m, \tau'_m) = s_m^{\Gamma}, m = \overline{1, M_\Gamma}.$$

13. За допомогою отриманих раніше значень запишемо вектор $\overline{Y}$ (2.26), в якому згідно умов (2.4)-(2.6) перші L_{01} елементів дорівнюють 0, наступні L_{02} елементів обчислюються за формулою $\left(e^{z_j - Ct^*} - x^*\right)e^{-rt^*}, j = \overline{1, L_{02}}$, і останні L_Γ елементів також дорівнюють 0.
14. Обчислимо матрицю А, яка матиме $L_{01} + L_{02} + L_\Gamma$ рядків та $M_{01} + M_{02} + M_\Gamma$ стовпців і визначається формулою (2.27).
15. Знайдемо матрицю A^+, псевдообернену до матриці А.

16.За допомогою формули (2.29) та вже відомих A^+ та $\overline{Y}$ знайдемо шуканий вектор $\overline{u}$ дискретизованих моделюючих функцій. Його розмірність буде $M_{01} + M_{02} + M_{\Gamma}$.

17.Обчислимо точність моделювання ε^2 за формулою (2.30).

18.Дослідимо отриманий розв'язок на однозначність. Якщо $\det A^T A > 0$, то розв'язок однозначний, якщо $\det A^T A = 0$, то розв'язок неоднозначний.

19.За формулами (2.21) – (2.23) отримаємо $y_{01}(z,\tau)$, $y_{02}(z,\tau)$, $y_{\Gamma}(z,\tau)$. За допомогою формули (2.14) отримаємо $y(z,\tau)$. Отже, щоб отримати функцію ціни опціону моделі Блека-Шоулза потрібно повернутися до початкових змінних, тобто зробити обернені заміни.

20.Проводимо обернену заміну змінних і переходимо від функції $y(z,\tau)$ до функції $v(e^{z-C(t^*-\tau)}, t^* - \tau)$.

21.Повертаємося за допомогою ще одної оберненої заміни від $v(e^{z-C(t^*-\tau)}, t^* - \tau)$ до $w(x,t)$.

22.Функція $w(x,t)$ матиме складний аналітичний вигляд, тому для аналізу ціни опціону протабулюємо її в області $[a,b] \times [0\, , t^*]$.

23.Побудуємо 3D графік функції $w(x,t)$.

3.2 Результати чисельного експерименту

Для проведення чисельного експерименту розглянемо конкретну задачу, поставлену на основі моделі Блека-Шоулза ціни опціону з неповними дискретними додатковими умовами. Обчислення будемо проводити в системі комп'ютерної математики Wolfram Mathematica 12.1 згідно алгоритму, описаному в пункті 3.1. Мета експерименту отримати функцію ціни опціону та дослідити її.

Задамо дані згідно умови задачі.

1. $\sigma^2 = 0.5$ – волатильність.
2. $r = 0.2$ – безризикова процентна ставка.
3. $a = 2, b = 5$ – межі цінового відрізку $[a, b]$, якому належить ціна акції x.
4. $x^* = 3$ – ціна на акцію, зафіксована в опціоні.
5. $t^* = 5$ – час купівлі акції, зафіксований в опціоні.
6. Обчислимо C: $C = -0.075$.
7. Введемо $M_{01}, M_{02}, M_{\Gamma}$:

   $M_{01} = 2, M_{02} = 2, M_{\Gamma}. = 3.$
8. Введемо $L_{01}, L_{02}, L_{\Gamma}$:

   $L_{01} = 2, L_{02} = 3, L_{\Gamma} = 2.$
9. Введемо точки дискретизації областей $S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, S_{\Gamma}$:

$$z_i^{(1)} \in \{0.4{,}0.5\},$$

$$z_j^{(2)} \in \{0.8{,}0.9{,}1\},$$

$$z_k = \{0.293147{,}0.313147\},$$

$$\tau_k \in \{1.7{,}1.3\}.$$

10. Введемо точки дискретизації областей S_{01}, S_{02}, S_{Γ}^{-}:

$$z'_m \in \{0.43{,}0.54\} \text{ для } s_m^{01},$$

$$\tau'_m \in \{-2.1, -1.1\} \text{ для } s_m^{01},$$

$$z'_m \in \{0.48{,}0.52\} \text{ для } s_m^{02},$$

$$\tau'_m \in \{-1.9, -1.5\} \text{ для } s_m^{02},$$

$$z'_m \in \{0.38{,}0.42{,}0.45\} \text{ для } s_m^{\Gamma},$$

$$\tau'_m \in \{1.7{,}1.3{,}0.5\} \text{ для } s_m^{\Gamma}.$$

11. Запишемо функцію Гріна з заданими параметрами і побудуємо її поверхню:

$$G[\mathrm{z}, z', \tau, \tau'] =$$

$$= \text{If}\left[\tau - \tau' \leq 0{,}0, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau - \tau')}} \text{Exp}\left[\frac{-(z - z')^2}{2\sigma^2(z - z')}\right]\right].$$

На рисунку 3.1 наведено поверхню функції Гріна при $z' = 1, \tau' = 2$.

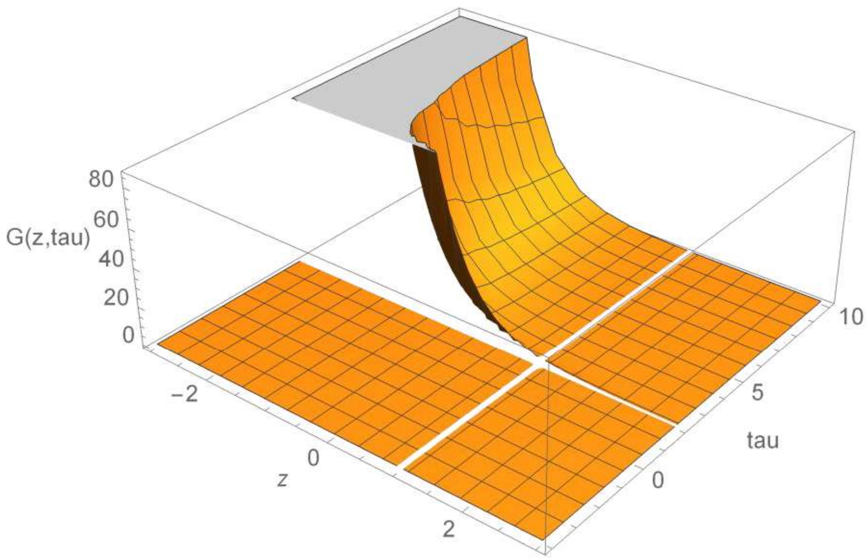

Рис. 3.1. Поверхня функції Гріна при $z' = 1, \tau' = 2$

12. Обчислимо вектор $\overline{Y}$:

$$\overline{Y} = \{\{0\}, \{0\}, \{0.0876079\}, \{0.212892\}, \{0.351353\}, \{0\}, \{0\}\}$$

13. Обчислимо матрицю А:

$$A = \begin{pmatrix} 0.584639 & 1.00658 & 0.679282 & 0.828181 & 0.392145 & 0.774179 & 1.43014 \\ 0.478662 & 0.824114 & 0.556149 & 0.678057 & 0.321061 & 0.633845 & 1.1709 \\ 0.262695 & 0.452283 & 0.305221 & 0.372126 & 0.176202 & 0.347861 & 0.642602 \\ 0.215077 & 0.370298 & 0.249894 & 0.304671 & 0.144262 & 0.284805 & 0.526118 \\ 0.17609 & 0.303175 & 0.204596 & 0.249443 & 0.118112 & 0.233178 & 0.430749 \\ 0.592707 & 1.02047 & 0.688657 & 0.83961 & 0.397557 & 0.784863 & 1.44987 \\ 0.592707 & 1.02047 & 0.688657 & 0.83961 & 0.397557 & 0.784863 & 1.44987 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.2. Матриця А

14. За допомогою функції псевдообернення у системі комп’ютерної математики Wolfram Mathematica 12.1 шукаємо матрицю A^{+}:

$$A^{+}=\begin{pmatrix} 0.0265523 & 0.0217392 & 0.0119307 & 0.00976803 & 0.00799739 & 0.0269187 & 0.0269187 \\ 0.0457151 & 0.0374284 & 0.0205411 & 0.0168176 & 0.0137691 & 0.046346 & 0.046346 \\ 0.0308506 & 0.0252584 & 0.0138621 & 0.0113493 & 0.00929203 & 0.0312764 & 0.0312764 \\ 0.0376131 & 0.030795 & 0.0169006 & 0.0138371 & 0.0113288 & 0.0381321 & 0.0381321 \\ 0.0178099 & 0.0145815 & 0.00800249 & 0.00655188 & 0.00536423 & 0.0180556 & 0.0180556 \\ 0.0351605 & 0.028787 & 0.0157986 & 0.0129348 & 0.0105901 & 0.0356457 & 0.0356457 \\ 0.0649518 & 0.053178 & 0.0291847 & 0.0238944 & 0.0195631 & 0.0658481 & 0.0658481 \end{pmatrix}$$

Рис. 3.3. Матриця A^{+}

15. За формулою (2.29) отримаємо вектор моделюючих функцій:

$$\overline{u} = \{\{0.005934\},\{0.010217\},\{0.006895\},\{0.008406\},\{0.003980\},\{0.007858\},\{0.014517\}\}$$

Тоді u_{01} – перші два компоненти $\overline{u}$:

$\{\{0.005934\},\{0.010217\}\}$,

u_{02} – наступні два компоненти $\overline{u}$:

$\{\{0.006895\},\{0.008406\}\}$,

u_{Γ} – останні три компоненти $\overline{u}$:

$\{\{0.003980\},\{0.007858\},\{0.014517\}\}$,

16. За допомогою формул (2.21)-(2.23) отримали такі функції $y_{01}(z,\tau), y_{02}(z,\tau), y_{\Gamma}(z,\tau)$:

$$y_{01}(z,\tau) = G(z-0.43,\tau-(-2.1))u_{01}(0.43,-2.1) + G(z-0.54,\tau-(-1.1))u_{01}(0.54,-1.1),$$

$$y_{02}(z,\tau) = G(z-0.48,\tau-(-1.9))u_{02}(0.48,-1.9) + G(z-0.52,\tau-(-1.5))u_{02}(0.52,-1.5),$$

$$y_{\Gamma}(z,\tau) = G(z-0.38,\tau-1.7)u_{\Gamma}(0.38,1.7) + G(z-0.42,\tau-1.3)u_{\Gamma}(0.42,1.3) + G(z-0.45,\tau-0.5)u_{\Gamma}(0.45,0.5),$$

тоді маємо:

$y_{01}(z, \tau) = G(z - 0.43, \tau - (-2.1)) * (0.005934) +$

$+ G(z - 0.54, \tau - (-1.1)) * (0.010217),$

$y_{02}(z, \tau) = G(z - 0.48, \tau - (-1.9)) * (0.006895) +$

$+ G(z - 0.52, \tau - (-1.5)) * (0.008406),$

$y_{\Gamma}(z, \tau) = G(z - 0.38, \tau - 1.7) * (0.003980) +$

$+ G(z - 0.42, \tau - 1.3) * (0.007858) +$

$+ G(z - 0.45, \tau - 0.5) * (0.014517).$

17.За формулою (2.14) отримаємо функцію $y(z, \tau)$, а саме:

$y(z, \tau) = G\big(z - 0.43, \tau - (-2.1)\big) * (0.005934) +$

$+ G\big(z - 0.54, \tau - (-1.1)\big) * (0.010217) +$

$+ G\big(z - 0.48, \tau - (-1.9)\big) * (0.006895) +$

$+ G\big(z - 0.52, \tau - (-1.5)\big) * (0.008406) +$

$+ G(z - 0.38, \tau - 1.7) * (0.003980) +$

$+ G(z - 0.42, \tau - 1.3) * (0.007858) +$

$+ G(z - 0.45, \tau - 0.5) * (0.014517).$

18.Роблячи подвійну обернену заміну, повертаємося з $y(z, \tau)$ до $w(x, t)$.

19.Отже, отримали функцію ціни опціону. Для представлення цієї функції, протабулюємо її значення та створимо в Wolfram Mathematica 12.1 3D графік її значень. Нехай:

$$x = \{2,3,3.5,4,5\},$$

$$t = \{0.1,0.5,1,1.5,2\}$$

20.Значення функції ціни опціону за таких x та t мають вигляд:

$w(x, t) =$

$\{0.000626317187,$

$0.000081719825,$

0.000124375521,

0.000038222283,

0.000004846533}

21. Тоді маємо такий 3D графік:

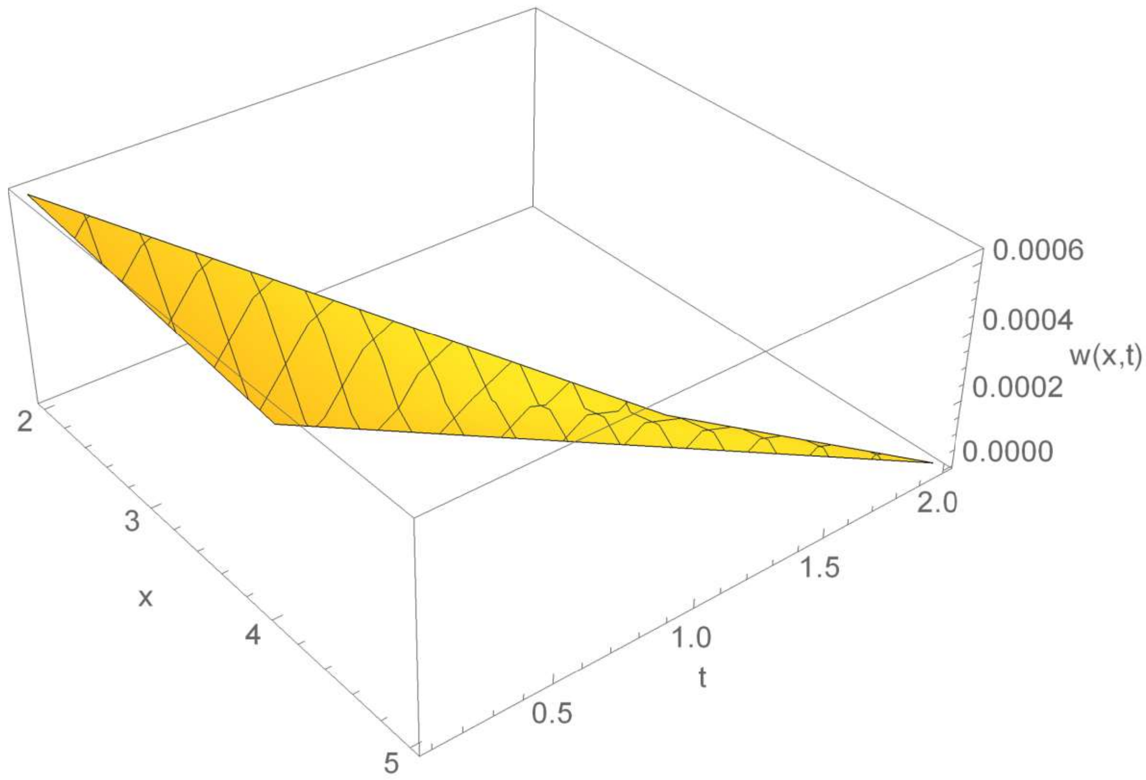

Рис. 3.4 Поверхня ціни опціону

Так як ціна опціону найбільша у початковий момент часу і спадає до часу реалізації опціону, то можна зробити висновок, що найкраще купувати опціони на акції, коли від початку дії опціону, до моменту його реалізації пройшло приблизно половина часу до погашення опціону. Ці міркування підтверджуються перерізом поверхні ціни опціону по фіксованій ціні акції. Подібний переріз при ціні акції 3.5 зображено на рисунку 3.5.

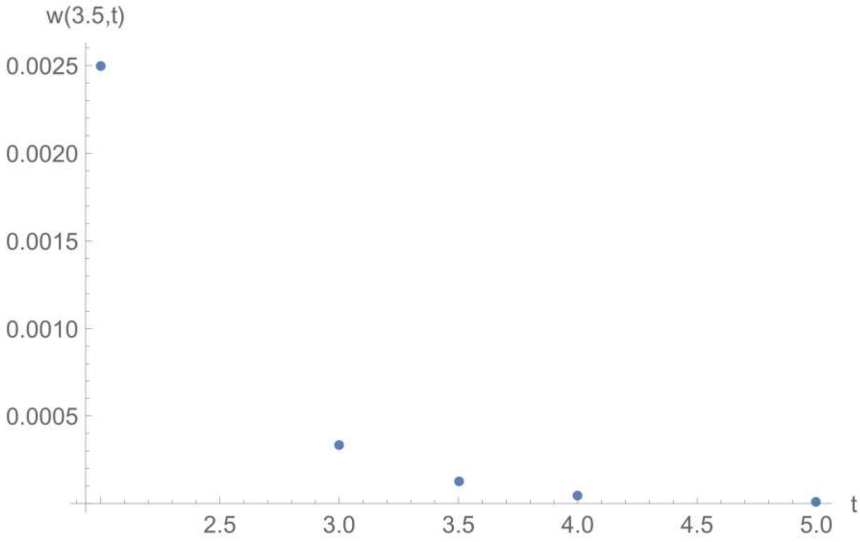

Рис. 3.5. Ціна опціону при $x = 3.5$

Але ціна акції теж має великий вплив на ціну опціону, тому з отриманих результатів випливає, що якщо акція є дешевою, то є сенс купувати на неї опціон у початковий момент часу.

ВИСНОВОК

В даній кваліфікаційній роботі представлена побудова моделі вартості опціону на основі диференціального рівняння Блека-Шоулза з дискретно визначеними початково-крайовими умовами.

У першому розділі зроблено опис понять цінних паперів, фінансових інструментів, фінансових активів та похідних цінних паперів, таких як: ф'ючерсні контракти, форвардні контракти, свопи та опціони. Також описані міркування щодо побудови рівняння Блека-Шоулза, яке описує динаміку ціни опціону.

У другому розділі на основі рівняння Блека-Шоулза з дискретними початковими та крайовими умовами поставлено і розв'язано задачу розрахунку ціни опціону. За допомогою передатної функції диференціального оператора рівняння Блека-Шоулза задача була представлена у вигляді системи функціональних співвідношень, шляхом дискретизації якої було отримано систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Множину розв'язків цієї системи отримано з врахуванням середньоквадратичного критерію за допомогою операції псевдообернення матриць. Обчислено точність та однозначність отриманого розв'язку.

У третьому розділі зроблено постановку та проведено реалізацію чисельного експерименту на основі моделі Блека-Шоулза з дискретними початково-крайовими умовами. Реалізація чисельного експерименту виконана в системі комп'ютерної математики Wolfram Mathematica 12.1. Отриману функцію було табульовано та представлено у вигляді 3D графіку. Проведено аналіз отриманих результатів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Волощук С.Д. Моделювання вартості опціону на основі рівняння Блека-Шоулза // Ефективна економіка. – 2015. – № 4. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=4001

2. Стоян В.А. Лабораторне моделювання просторово розподілених динамічних систем: – К.: ВПЦ „Київський університет”, 2021. – 202 с.

3. W. Kenton. What are Financial Securities? Examples, Types, Regulation, and Importance. – 2023. [Електронний ресурс]:
URL:https://www.investopedia.com/terms/s/security.asp

4. CFI Team. Security. – 2023. [Електронний ресурс]:
URL:
https://corporatefinanceinstitute.com/resources/knowledge/finance/security/

5. M. Hargrave. – 2022. [Електронний ресурс]:
URL: https://www.investopedia.com/terms/o/optionscontract.asp

6. Бондаренко В.Г. Рівняння математичної фізики [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «системний аналіз» / Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.—100 с.
URL: https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/31956/1/RivnMatFiz_Posibnyk.pdf

7. Стоян В.А., Волощук С.Д. Про моделювання задач динаміки гіперболічних систем // Доповіді Національної академії наук України. – 2003. – № 2. – С. 71-77.

8. S. A. Abraham. The History of Options Contracts. – 2022. [Електронний ресурс]:
URL:https://www.investopedia.com/articles/optioninvestor/10/history-options-futures.asp