Журнал обчислювальної та прикладної математики
2022, № 1
Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.85

MSC 47J20, 49J40, 65K15, 90C25

CONVERGENCE OF ADAPTIVE EXTRA-PROXIMAL ALGORITHMS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS IN HADAMARD SPACES

V. V. Semenov, Ya. I. Vedel, S. V. Denisov

Faculty of Computer Science and Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: {volodya.semenov, yana.vedel, denisov.univ}@gmail.com

ЗБІЖНІСТЬ АДАПТИВНИХ ЕКСТРАПРОКСИМАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРО РІВНОВАГУ В ПРОСТОРАХ АДАМАРА

В. В. Семенов, Я. І. Ведель, С. В. Денисов

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики, КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: {volodya.semenov, yana.vedel, denisov.univ}@gmail.com

Abstract. New iterative extra-proximal algorithms have been proposed and investigated for approximate solution of problems of equilibrium in Hadamard metric spaces. The parameter update rule does not use the values of the Lipschitz constants of the bifunction. In contrast to the rules of the linear search type, it does not require calculations of the bifunction values at additional points. In addition, at the initial stages of the algorithms, the step size parameter can increase from iteration to iteration. For pseudo-monotone bifunctions of the Lipschitz type we proved convergence theorems. It is shown that the proposed algorithms are applicable to pseudo-monotone variational inequalities in Hilbert spaces.
Keywords: Hadamard space, equilibrium problem, pseudo-monotonicity, extra-proximal algorithm, adaptivity, convergence.

Анотація. Для наближеного розв'язання задач про рівновагу в метричних просторах Адамара запропоновано та досліджено нові ітераційні алгоритми екстрапроксимального типу. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшіцевих констант біфункції та, на відміну від правил типу лінійного пошуку, не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Крім того, на початкових етапах роботи алгоритмів параметр величини кроку може зростати від ітерації до ітерації. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теореми про збіжність. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Ключові слова: простір Адамара, задача про рівновагу, псевдомонотонність, екстрапроксимальний алгоритм, адаптивність, збіжність.

Вступ

Задачі рівноважного програмування (задачі про рівновагу, нерівності Кі Фаня) є популярним розділом сучасного прикладного нелінійного аналізу [1]. Формулювання задачі про рівновагу, яке вважають класичним, було наведено ще в роботах Х. Нікайдо та К. Ісоди, виконаних в 1950-х роках [2] та пов'язаних з доведенням існування точок рівноваги за Нешем в некооперативних іграх. Увагу дослідників до задач рівноважного програмування у 1990-х привернули роботи W. Oettli [3,4], у яких були розглянуто такий варіант задачі про рівновагу:

$$\text{знайти } \ x \in C: \ F(x,y) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C, \tag{1}$$

де C — підмножина гільбертового простору H, $F : C \times C \to \mathbb{R}$ — біфункція (equilibrium bifunction), тобто, $F(x,x) = 0$ для всіх $x \in C$.

Задача (1) — зручна загальна форма запису та дослідження різних задач, що виникають в математичній фізиці, дослідженні операцій та оптимізації [1]. Наведемо ряд типових постановок.

(1) Якщо $F(x,y) = g(y) - g(x)$, де $g : C \to \mathbb{R}$, то задача (1) є задачею умовної мінімізації:
$$g \to \min_C .$$

(2) Якщо $F(x,y) = (Ax, y - x)$, де $A : C \to H$, то задача (1) зводиться до класичної варіаційної нерівності [5,6]:
$$\text{знайти } \ x \in C: \ (Ax, y - x) \geq 0 \ \ \forall\, y \in C. \tag{2}$$

(3) Нехай C_1, C_2 — опуклі підмножини H, $C = C_1 \times C_2$, $L : C \to \mathbb{R}$ — опукла-угнута функція. Точка $(x_1, x_2) \in C$ називається сідловою точкою функції L, якщо
$$L(x_1, y_2) \leq L(x_1, x_2) \leq L(y_1, x_2) \quad \forall (y_1, y_2) \in C. \tag{3}$$
Покладемо $F(x,y) = L(y_1, x_2) - L(x_1, y_2)$, де $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$. Тоді задача пошуку сідлової точки (3) рівносильна задачі про рівновагу вигляду (1):
$$\text{знайти } \ (x_1, x_2) \in C: \ L(y_1, x_2) - L(x_1, y_2) \geq 0 \quad \forall (y_1, y_2) \in C.$$

(4) Нехай I — скінченна множина індексів. Для кожного $i \in I$ задано множину C_i та функцію $f_i : C \to \mathbb{R}$, де $C = \prod_{i \in I} C_i$. Для $x = (x_i)_{i \in I} \in C$ позначимо $x^i = (x_j)_{j \in I, j \neq i}$. Точка $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I}$ називається рівновагою Неша, якщо для всіх $i \in I$ справедливі нерівності
$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i) \ \ \forall\, y_i \in C_i.$$

Визначимо функцію $F : C \times C \to \mathbb{R}$ таким чином

$$F(x, y) = \sum_{i \in I} \left(f_i(x^i, y_i) - f_i(x) \right).$$

Точка $\bar{x} \in C$ є рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли $\bar{x}$ є розв'язком задачі (1).

Якісні результати (теореми існування, єдиності тощо) стосовно задач рівноважного програмування див. в [1, 7]. Найбільш завершені результати отримані для задач з монотонними та псевдомонотонними біфункціями на опуклих допустимих множинах.

Зазначимо, що часто негладкі задачі оптимізації можуть ефективно розв'язуватися, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових задач, а до останніх застосувати алгоритми розв'язання задач про рівновагу та варіаційних нерівностей [8]. З появою генеруючих змагальних нейронних мереж (generative adversarial network, GAN) стійкий інтерес до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей виник в середовищі фахівців з машинного навчання [9].

Пріоритетні результати, повязані з ітераційними проксимальними методами рівноважного програмування, належать А. С. Антіпіну [10–12].

У 2008 р. Quoc, Muu та Hien, грунтуючись на ідеях [13], запропонували у роботі [14] аналог екстраградієнтного методу

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} x_n, \end{cases} \tag{4}$$

де $\lambda_n > 0$, а prox_g — проксимальний оператор [15], що відповідає власній опуклій напівнеперервній знизу функції g:

$$H \ni x \mapsto \operatorname{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in \operatorname{dom} g} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|_2^2 \right) \in \operatorname{dom} g.$$

Автори [14] довели при певних умовах збіжність методу (4) та його аналогу з відстанню Брегмана замість евклідової. Дана робота отримала продовження в багатьох дослідників [16–24]. Наприклад, в роботі [24], відштовхуючись від двокрокового екстраградієнтного алгоритму Зикіної та Меленьчука [25], запропоновано та досліджено такий алгоритм

$$\begin{cases} y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(x_n, \cdot)} x_n, \\ z_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(y_n, \cdot)} y_n, \\ x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda_n \cdot F(z_n, \cdot)} x_n, \end{cases}$$

де $\lambda_n > 0$.

Останнім часом виникла обумовлена проблемами математичної біології та машинного навчання потреба в побудові теорії та алгоритмів розв'язання задач математичного програмування в метричних просторах Адамара (також відомих під назвою $CAT(0)$ просторів) [26]. Ще однією сильною мотивацією для вивчення даних задач є можливість записати деякі неопуклі задачі у вигляді геодезично опуклих в просторі зі спеціально підібраною рімановою метрикою [27]. З'явився помітний інтерес до задач про рівновагу в метричних просторах Адамара [28, 29]. Наприклад, в роботі [29] відштовхуючись від результатів статті [14], запропонували та обґрунтували для псевдомонотонних задач про рівновагу в просторах Адамара аналог екстрапроксимального методу (4). Нарешті, в роботах [30–35] для задач про рівновагу в просторах Адамара запропоновано та досліджено адаптивні аналоги алгоритму (4) та алгоритму Попова [36–38].

В даній роботі розглядаються задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для їх наближеного розв'язання запропоновано нові ітераційні алгоритми екстрапроксимального типу. Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшіцевих констант біфункції та, на відміну від правил типу лінійного пошуку, не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Крім того, на початкових етапах роботи алгоритмів параметр величини кроку може зростати від ітерації до ітерації. Це відрізняє розглянуті алгоритми від методів робіт [30–35]. Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теореми про збіжність. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

1. Допоміжні відомості

Наведемо кілька понять і фактів, пов'язаних з метричними просторами Адамара. З деталями можна ознайомитися в [26, 39, 40].

Нехай (X, d) — метричний простір і x, $y \in X$. Геодезичним шляхом, що з'єднує точки x і y, називають таку ізометрію

$$\gamma : [0, d(x, y)] \to X,$$

що $\gamma(0) = x$, $\gamma(d(x, y)) = y$. Множину

$$\gamma\left([0, d(x, y)]\right) \subseteq X$$

позначають $[x, y]$ і називають геодезичним сегментом з кінцями x і y (або просто — геодезичною).

Метричний простір (X, d) називають геодезичним простором, якщо будь-які дві точки X можна з'єднати геодезичною, і однозначно геодезичним простором, якщо для будь-яких двох точок X існує єдина геодезична, яка їх з'єднує.

Геодезичний простір (X, d) називають $CAT(0)$ простором, якщо для будь-якої трійки таких точок y_0, y_1, $y_2 \in X$, що

$$d^2(y_1, y_0) = d^2(y_2, y_0) = \frac{1}{2} d^2(y_1, y_2),$$

виконується нерівність

$$d^2(x, y_0) \leqslant \frac{1}{2} d^2(x, y_1) + \frac{1}{2} d^2(x, y_2) - \frac{1}{4} d^2(y_1, y_2) \quad \forall x \in X. \tag{5}$$

Нерівність (5) інколи називають CN-нерівністю [39] (зауважимо, що в евклідовому просторі (5) перетворюється на тотожність), а точку y_0 — серединою між точками y_1 і y_2 (вона завжди існує в геодезичному просторі).

Відомо, що $CAT(0)$ простір є однозначно геодезичним [40].

Для двох точок x і y $CAT(0)$ простору (X,d) і $t \in [0,1]$ будемо позначати

$$t\,x \oplus (1-t)y$$

таку єдину точку z сегмента $[x,y]$, що

$$d(z,x) = (1-t)d(x,y) \quad \text{i} \quad d(z,y) = t\,d(x,y).$$

Множина $C \subseteq X$ називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх x, $y \in C$ і $t \in [0,1]$ виконується $t\,x \oplus (1-t)y \in C$.

Корисним інструментом для роботи в $CAT(0)$ просторі (X,d) є наступна нерівність:

$$d^2(t\,x \oplus (1-t)y, z) \leqslant t\,d^2(x,z) + (1-t)d^2(y,z) - \\ - t(1-t)d^2(x,y), \quad \{x,y,z\} \in X, \quad t \in [0,1]. \quad (6)$$

Зауваження 1. Важливими прикладами $CAT(0)$ просторів є евклідові простори, $\mathbb{R}$-дерева, многовиди Адамара та гільбертова куля з гіперболічною метрикою [26, 39, 40].

Повний $CAT(0)$ простір називають простором Адамара.

Як і в гільбертовому просторі, в просторах Адамара коректно визначений оператор метричного проєктування на опуклу замкнену множину C [26]. А саме, для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $P_C x$ множини C з властивістю

$$d(P_C x, x) = \min_{z \in C} d(z,x),$$

причому має місце такий критерій [26]:

$$y = P_C x \quad \Leftrightarrow \quad d^2(y,z) \leqslant d^2(x,z) - d^2(y,x) \;\; \forall z \in C.$$

Нехай (X,d) — метричний простір і (x_n) — обмежена послідовність елементів X. Нехай $r\left(x,(x_n)\right) = \limsup\limits_{n\to\infty} d(x,x_n)$. Число

$$r\left((x_n)\right) = \inf_{x \in X} r\left(x,(x_n)\right)$$

називають асимптотичним радіусом послідовності (x_n), а множину

$$A\left((x_n)\right) = \{x \in X : \; r\left(x,(x_n)\right) = r\left((x_n)\right)\}$$

— асимптотичним центром послідовності (x_n).

Відомо, що в просторі Адамара асимптотичний центр $A\left((x_n)\right)$ складається з однієї точки [26].

Послідовність (x_n) елементів простору Адамара (X,d) слабко збігається (або, як іноді кажуть, Δ-збігається [39]) до елементу $x \in X$, якщо $A\left((x_{n_k})\right) = \{x\}$ для будь-якої підпослідовності (x_{n_k}). Відомо, що довільна послідовність елементів обмеженої, замкненої та опуклої підмножини K простору Адамара має підпослідовність, яка слабко збігається до елементу з K [26, 39].

Зауваження 2. У гільбертовому просторі згадана Δ-збіжність (слабка збіжність) співпадає з класичною слабкою збіжністю.

При доведенні слабкої збіжності послідовностей елементів метричного простору Адамара корисний відомий аналог леми Опяла [26].

Лема 1. *Нехай послідовність* (x_n) *елементів простору Адамара* (X, d) *слабко збігається до елементу* $x \in X$*. Тоді для всіх* $y \in X \setminus \{x\}$ *маємо*

$$\liminf_{n\to\infty} d(x_n, x) < \liminf_{n\to\infty} d(x_n, y).$$

Нехай (X, d) — простір Адамара. Функція $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ називається опуклою (геодезично опуклою), якщо для всіх x, $y \in X$ і $t \in [0, 1]$ виконується

$$\varphi(t\,x \oplus (1-t)y) \leqslant t\,\varphi(x) + (1-t)\varphi(y).$$

Наприклад, в просторі Адамара функції $y \mapsto d(y, x)$ опуклі. Якщо ж існує така константа $\mu > 0$, що для всіх x, $y \in X$ і $t \in [0, 1]$ виконується

$$\varphi(t\,x \oplus (1-t)y) \leqslant t\,\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) - \mu t(1-t)d^2(x, y),$$

то функція φ називається сильно опуклою.

Відомо, що для опуклих функцій напівнеперервність знизу та слабка напівнеперервність знизу еквівалентні [26], а сильно опукла напівнеперервна знизу функція досягає мінімуму в єдиній точці.

Зауваження 3. Багато важливих для застосувань конструкцій в просторах Адамара пов'язані з точками мінімуму опуклих функцій [26, 40]. Наприклад, нехай дано набір точок $\{x_i\}_{i=\overline{1,m}}$ метричного простору (X, d) і набір додатніх чисел $\{\alpha_i\}_{i=\overline{1,m}}$. Барицентром (центром мас, середнім Фреше) точок $\{x_i\}$ з вагами $\{\alpha_i\}$ називається точка

$$z \in \operatorname{argmin}_{y\in X} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i).$$

У просторі Адамара функції $y \mapsto d^2(y, x_i)$ сильно опуклі (випливає з нерівності (6), тому функція

$$y \mapsto \sum_{i=1}^{m} \alpha_i d^2(y, x_i)$$

також сильно опукла. Звідси випливає, що барицентр існує та він єдиний.

Для опуклої, власної і напівнеперервної знизу функції $\varphi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ проксимальний оператор визначається наступним чином [26]:

$$\operatorname{prox}_\varphi x = \operatorname{argmin}_{y\in X} \left(\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(y, x) \right).$$

Оскільки функції

$$\varphi(y) + \frac{1}{2} d^2(\cdot, x)$$

сильно опуклі, означення проксимального оператора коректне, тобто для кожного $x \in X$ існує єдиний елемент $\operatorname{prox}_\varphi x \in X$.

Наступні факти відіграють важливу роль у доведенні основних результатів.

Лема 2. *Нехай невід'ємні послідовності* (a_n), (b_n), *такі, що*

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n.$$

Тоді існує границя $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.

Лема 3. *Нехай* (ξ_n) — *послідовність невід'ємних чисел, що задовольняє рекурентну нерівність*

$$\xi_{n+1} \leqslant (1-\alpha_n)\xi_n + \alpha_n\beta_n + \gamma_n,$$

де послідовності (α_n), (β_n) *і* (γ_n) *мають властивості:*

1) $\alpha_n \in (0,1)$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$;
2) $\limsup_{n\to\infty} \beta_n \leqslant 0$;
3) $\gamma_n \in [0,+\infty)$ *та* $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty$.

Тоді $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

Лема 4 (P.-E. Mainge, [41])**.** *Нехай числова послідовність* (α_n) *має підпослідовність* (α_{n_k}), *яка володіє властивістю*

$$\alpha_{n_k} < \alpha_{n_k+1} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді існує така неспадна послідовність (m_k) *натуральних чисел, що*

$$m_k \to +\infty \quad і \quad \alpha_{m_k} \leqslant \alpha_{m_k+1},\ \alpha_k \leqslant \alpha_{m_k+1}\ \forall k \geq n_1.$$

Перейдемо до формулювання задачі про рівновагу в просторі Адамара.

2. Задача про рівновагу у просторі Адамара

Нехай (X,d) — метричний простір Адамара. Для непорожньої опуклої замкненої множини $C \subseteq X$ і біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ розглянемо задачу про рівновагу (або задачу рівноважного програмування):

$$\text{знайти} \quad x \in C : F(x,y) \geqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{7}$$

Припустимо, що виконані умови:

(A1) $F(x,x) = 0$ для всіх $x \in C$;

(A2) функції $F(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ опуклі і напівнеперервні знизу для всіх $x \in C$;

(A3) функції $F(\cdot,y) : C \to \mathbb{R}$ слабко напівнеперервні зверху для всіх $y \in C$;

(A4) біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ псевдомонотонна, тобто

$$\text{для всіх} \quad x,y \in C \quad \text{із} \quad F(x,y) \geqslant 0 \quad \text{випливає} \quad F(y,x) \leqslant 0;$$

(A5) біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ ліпшицевого типу, тобто існують дві константи $a > 0$, $b > 0$, такі, що

$$F(x,y) \leqslant F(x,z) + F(z,y) + a\,d^2(x,z) + b\,d^2(z,y) \quad \forall x,y,z \in C. \tag{8}$$

Розглянемо дуальну задачу про рівновагу:

$$\text{знайти} \quad x \in C : F(y,x) \leqslant 0 \quad \forall y \in C. \tag{9}$$

Множини розв'язків задач (7) і (9) позначимо S і S^*, відповідно. При виконанні умов (A1)–(A4) маємо $S = S^*$ [28]. Крім того, множина S^* опукла та замкнена. Далі будемо припускати, що $S \neq \varnothing$.

3. Адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для наближеного розв'язання задачі (7) розглянемо екстрапроксимальний алгоритм з адаптивним вибором λ_n

Алгоритм 1. Обираємо елементи $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$, невід'ємну сумовну послідовність (μ_n). Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda F(x_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(F(x_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

Якщо $y_n = x_n$, то зупинити та $x_n \in S$. Інакше перейти на крок **2**.

2: Обчислити

$$x_{n+1} = \operatorname{prox}_{\lambda F(y_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(F(y_n, y) + \frac{1}{2\lambda} d^2(y, x_n) \right).$$

3: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n + \mu_n, \text{ якщо } F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant 0, \\ \min\left\{ \lambda_n + \mu_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n,y_n)+d^2(x_{n+1},y_n)}{(F(x_n,x_{n+1})-F(x_n,y_n)-F(y_n,x_{n+1}))} \right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.

Зауваження 4. В алгоритмі 1 параметр λ_{n+1} залежить тільки від розташування точок x_n, y_n, x_{n+1}, значень $F(x_n, x_{n+1})$, $F(x_n, y_n)$ і $F(y_n, x_{n+1})$. Ніяка інформація про константи a і b з нерівності (8) не використовується.

Зауваження 5. На початкових етапах роботи алгоритму 1 параметр λ_n може зростати від ітерації до ітерації. Якщо $\mu_n \equiv 0$ правило оновлення λ_n співпадає з правилом з роботи [33].

Лема 5. *Породжена алгоритмом 1 послідовність* (λ_n) *збіжна. Причому*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \in \left[\min\left\{ \lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a,b\}} \right\}, \lambda_1 + \mu \right],$$

де $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < +\infty$.

Доведення. При виконанні $F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) > 0$ маємо

$$\frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}))} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n)}{(a\, d^2(x_n, y_n) + b\, d^2(x_{n+1}, y_n))} \geqslant \frac{\tau}{2\max\{a,b\}}.$$

Індукцією показуємо, що послідовність (λ_n) обмежена зверху числом $\lambda_1+\mu$, де $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n$, а знизу числом $\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a,b\}}\right\}$.

Маємо

$$\lambda_{n+1} - \lambda_1 = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^+ - \sum_{k=1}^{n} (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^- .$$

Числовий ряд $\sum_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^+$ збіжний, оскільки $(\lambda_{k+1} - \lambda_k)^+ \leq \mu_k$ та ряд $\sum_k \mu_k$ збіжний. Припустимо, що ряд $\sum_k (\lambda_{k+1} - \lambda_k)^-$ розбіжний. Тоді $\lambda_{n+1} \to -\infty$ при $n \to \infty$. Отримали протиріччя. Таким чином, існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n$ та виконується нерівність

$$\min\left\{\lambda_1, \frac{\tau}{2\max\{a,b\}}\right\} \leqslant \lim_{n\to\infty} \lambda_n \leqslant \lambda_1 + \mu,$$

що і треба було довести. □

Для варіаційних нерівностей в гільбертовому просторі алгоритм 1 набуває вигляду.

Алгоритм 2. Обираємо елементи $x_1 \in C$, $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$, невід'ємну сумовну послідовність (μ_n). Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$y_n = P_C\left(x_n - \lambda_n A x_n\right).$$

Якщо $y_n = x_n$, то зупинити та x_n — розв'язок. Інакше перейти на крок **2**.

2: Обчислити

$$x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda_n A y_n\right).$$

3: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n + \mu_n, & \text{якщо} \ \ (Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n + \mu_n, \frac{\tau}{2}\frac{\|x_n - y_n\|^2 + \|x_{n+1} - y_n\|^2}{(Ax_n - Ay_n, x_{n+1} - y_n)}\right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{10}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.

Зауваження 6. Алгоритм 2 відрізняється від дослідженого в [42,43] методу правилом оновлення параметру λ_{n+1}. В [42,43] замість (10) розглядалось наступне правило

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min\left\{\lambda_n, \tau\frac{\|x_n - y_n\|}{\|Ax_n - Ay_n\|}\right\}, & \text{якщо} \quad Ax_n \neq Ay_n, \\ \lambda_n, & \text{інакше.} \end{cases}$$

4. Доведення збіжності

Перейдемо до доведення збіжності алгоритму 1.

Має місце

Лема 6. *Для $x \in C$ і $x^+ = \operatorname{prox}_{\lambda F(x,\cdot)} x$, де $\lambda > 0$, має місце нерівність*

$$F(x,x^+) - F(x,y) \leqslant \frac{1}{2\lambda}\left(d^2(y,x) - d^2(x,x^+) - d^2(x^+,y)\right) \ \forall y \in C. \tag{11}$$

Доведення. З визначення $x^+ = \arg\min_{y\in C}\left(F(x,y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(y,x)\right)$ випливає

$$F(x,x^+) + \frac{1}{2\lambda}d^2(x^+,x) \leqslant F(x,p) + \frac{1}{2\lambda}d^2(p,x) \ \forall p \in C. \tag{12}$$

Поклавши в (12) $p = t\,x^+ \oplus (1-t)y$, $y \in C$, $t \in (0,1)$, отримаємо

$$F(x,x^+) + \frac{1}{2\lambda}d^2(x^+,x) \leqslant$$
$$\leqslant F(x, t\,x^+ \oplus (1-t)y) + \frac{1}{2\lambda}d^2(t\,x^+ \oplus (1-t)y, x) \leqslant$$
$$\leqslant t\,F(x,x^+) + (1-t)F(x,y) +$$
$$+ \frac{1}{2\lambda}\left(t\,d^2(x^+,x) + (1-t)d^2(y,x) - t(1-t)d^2(x^+,y)\right).$$

Таким чином,

$$(1-t)F(x,x^+) - (1-t)F(x,y) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\lambda}\left(-(1-t)d^2(x^+,x) + (1-t)d^2(y,x) - t(1-t)d^2(x^+,y)\right). \quad (13)$$

Скоротивши в (13) $1-t$ і зробивши граничний перехід при $t \to 1$ отримаємо (11). □

З леми 6 випливає, що для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 1, мають місце нерівності ($\forall y \in C$)

$$F(x_n,y_n) - F(x_n,y) \leqslant \frac{1}{2\lambda_n}\left(d^2(y,x_n) - d^2(x_n,y_n) - d^2(y_n,y)\right), \quad (14)$$

$$F(y_n,x_{n+1}) - F(y_n,y) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\lambda_n}\left(d^2(y,x_n) - d^2(x_n,x_{n+1}) - d^2(x_{n+1},y)\right). \quad (15)$$

Нерівність (14) дає обгрунтування правилу зупинки в алгоритмі 1. Дійсно, для $x_n = y_n$ з (14) випливає

$$-F(x_n,y) \leqslant 0 \ \ \forall y \in C,$$

тобто, $x_n \in S$

Має місце

Лема 7. *Для послідовностей (x_n), (y_n), породжених алгоритмом 1, має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1},z) \leqslant d^2(x_n,z) -$$
$$-\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(x_{n+1},y_n) - \left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(y_n,x_n), \quad (16)$$

де $z \in S$.

Доведення. Нехай $z \in S$. З псевдомонотонності біфункції F маємо

$$F(y_n,z) \leqslant 0. \quad (17)$$

З (17) та (15) випливає

$$2\lambda_n F(y_n,x_{n+1}) \leqslant d^2(z,x_n) - d^2(x_n,x_{n+1}) - d^2(x_{n+1},z). \quad (18)$$

З правила обчислення λ_{n+1} отримуємо

$$F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n) - F(y_n, x_{n+1}) \leqslant \\ \leqslant \frac{\tau}{2\lambda_{n+1}} \left(d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n) \right). \quad (19)$$

Оцінивши знизу ліву частину (18) з допомогою (19), одержимо

$$2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n)) - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \left(d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n) \right) \leqslant \\ \leqslant d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (20)$$

Для оцінки знизу $2\lambda_n (F(x_n, x_{n+1}) - F(x_n, y_n))$ в (20) використаємо нерівність (14). Маємо

$$d^2(x_n, y_n) + d^2(y_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, x_n) - \\ - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \left(d^2(x_n, y_n) + d^2(x_{n+1}, y_n) \right) \leqslant \\ \leqslant d^2(z, x_n) - d^2(x_n, x_{n+1}) - d^2(x_{n+1}, z). \quad (21)$$

Перегрупувавши (21), отримаємо (16). □

Сформуюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай (X, d) — простір Адамара, $C \subseteq X$ — непорожня опукла замкнена множина, для біфункції $F : C \times C \to \mathbb{R}$ виконані умови (A1)–(A5) і $S \neq \varnothing$. Тоді породжені алгоритмом 1 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку $z \in S$ задачі про рівновагу* (7)*, причому* $\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_{n+1}) = 0$.

Доведення. Нехай $z \in S$. Покладемо

$$a_n = d(z, x_n),$$

$$b_n = \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(x_{n+1}, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n).$$

Нерівність (16) приймає вигляд $a_{n+1} \leqslant a_n - b_n$. Оскільки існує $\lim_{n\to\infty} \lambda_n > 0$, то

$$1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0, 1), \quad n \to \infty.$$

З леми 2 випливає існування границі

$$\lim_{n\to\infty} d^2(z, x_n)$$

та

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(d^2(x_{n+1}, y_n) + d^2(y_n, x_n) \right) < +\infty.$$

Звідки отримуємо обмеженість послідовності (x_n) та

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1}, x_n) = 0. \quad (22)$$

Розглянемо підпослідовність (x_{n_k}), що слабко збігається до деякої точки $z \in C$. Тоді з (22) випливає, що (y_{n_k}) слабко збігається до z. Покажемо, що $z \in S$. Маємо

$$\begin{aligned} F\left(y_{n_k}, y\right) \geqslant F\left(y_{n_k}, x_{n_k+1}\right) - &\\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, x_{n_k+1}) - d^2\left(x_{n_k+1}, y\right)\right) \geqslant &\\ \geqslant F\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) - F\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) + d^2\left(x_{n_k+1}, y_{n_k}\right)\right) - &\\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(y, x_{n_k}\right) - d^2\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) - d^2\left(x_{n_k+1}, y\right)\right) \geqslant &\\ \geqslant -\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(x_{n_k+1}, x_{n_k}\right) - d^2\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) - d^2\left(y_{n_k}, x_{n_k+1}\right)\right) - &\\ - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2\left(x_{n_k}, y_{n_k}\right) + d^2\left(x_{n_k+1}, y_{n_k}\right)\right) - &\\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2\left(y, x_{n_k}\right) - d^2\left(x_{n_k}, x_{n_k+1}\right) - d^2\left(x_{n_k+1}, y\right)\right) \quad \forall y \in C. & \quad (23) \end{aligned}$$

Здійснивши граничний перехід в (23) з врахуванням (22) та слабкої напівнеперервності функції $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$, отримаємо

$$F(z, y) \geqslant \limsup_{k\to\infty} F\left(y_{n_k}, y\right) \geqslant 0 \ \ \forall y \in C,$$

тобто, $z \in S$.

Застосовуючи варіант леми Опяла для простору Адамара, отримуємо слабку збіжність послідовності (x_n) до точки $z \in S$. Дійсно, припустимо, що існує підпослідовність (x_{m_k}), яка слабко збігається до деякої точки $\bar{z} \in C$ та $\bar{z} \neq z$. Ясно, що $\bar{z} \in S$. Далі, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, z\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, z\right) < &\\ < \lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, \bar{z}\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, \bar{z}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, \bar{z}\right) < &\\ < \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m_k}, z\right) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_n, z\right), & \end{aligned}$$

що неможливо. Отже, (x_n) слабко збігається до $z \in S$. З (22) випливає, що і послідовність (y_n) слабко збігається до $z \in S$. □

Зауваження 7. Як видно з доведення теореми 1, для послідовності (x_n), починаючи з деякого номера N, виконується фейєрівська властивість відносно множини розв'язків S.

Розглянемо окремий випадок задачі про рівновагу: варіаційна нерівність в гільбертовому просторі H:

$$\text{знайти} \quad x \in C : (Ax, y - x) \geqslant 0 \quad \forall y \in C. \qquad (24)$$

З теореми 1 випливає такий результат.

Теорема 2. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (24). *Тоді породжені алгоритмом 2 послідовності (x_n), (y_n) слабко збігаються до розв'язку варіаційної нерівності* (24), *причому*

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0.$$

5. Регуляризований адаптивний екстрапроксимальний алгоритм

Для задачі про рівновагу (7) розглянемо регуляризований за допомогою схеми Гальперна [44] адаптивний екстрапроксимальний алгоритм.

Алгоритм 3. Обираємо елементи $a \in C$, $x_1 \in C$, числа $\tau \in (0,1)$, $\lambda_1 \in (0,+\infty)$, невід'ємну сумовну послідовність (μ_n) та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$y_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(x_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(F(x_n, y) + \tfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

2: Обчислити

$$z_n = \operatorname{prox}_{\lambda_n F(y_n,\cdot)} x_n = \operatorname{argmin}_{y\in C} \left(F(y_n, y) + \tfrac{1}{2\lambda_n} d^2(y, x_n) \right).$$

3: Обчислити

$$x_{n+1} = \alpha_n a \oplus (1-\alpha_n) z_n.$$

4: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n + \mu_n, & \text{якщо } F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{ \lambda_n + \mu_n, \frac{\tau}{2} \frac{d^2(x_n,y_n)+d^2(z_n,y_n)}{(F(x_n,z_n)-F(x_n,y_n)-F(y_n,z_n))} \right\}, & \text{інакше.} \end{cases} \quad (25)$$

Покласти $n := n+1$ та перейти на **1**.

Зауваження 8. Для регуляризації базової адаптивної екстрапроксимальної схеми використана класична схема Гальперна [44], варіант якої для простору Адамара вивчено в [26].

Лема 8. *Для послідовностей (x_n), (y_n) та (z_n), породжених алгоритмом 3, має місце нерівність*

$$d^2(z_n, z) \leqslant d^2(x_n, z) - \\ - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) - \left(1 - \tau \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n), \quad (26)$$

де $z \in S$.

Лема 9. *Для послідовностей* (x_n), (y_n) *та* (z_n), *породжених алгоритмом 3, має місце нерівність*

$$d^2(x_{n+1},z)-(1-\alpha_n)\,d^2(x_n,z)+$$
$$+(1-\alpha_n)\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(z_n,y_n)+(1-\alpha_n)\left(1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)d^2(y_n,x_n)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha_n d^2(a,z)-\alpha_n(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\,,\quad(27)$$

де $z\in S$.

Доведення. Нехай $z\in S$. З рівності $x_{n+1}=\alpha_n a\oplus(1-\alpha_n)\,z_n$ та нерівності сильної опуклості (6) випливає оцінка

$$d^2(x_{n+1},z)\leqslant\alpha_n d^2(a,z)+(1-\alpha_n)\,d^2(z_n,z)-\alpha_n(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\,.$$

Для оцінки зверху виразу $d^2(z_n,z)$ використаємо лему 8 та отримаємо нерівність (27). □

Лема 10. *Породжені алгоритмом 3 послідовності* (x_n), (y_n) *та* (z_n) *обмежені.*

Доведення. Нехай $z\in S$. Маємо

$$d(x_{n+1},z)=d(\alpha_n a\oplus(1-\alpha_n)\,z_n,z)\leqslant\alpha_n d(a,z)+(1-\alpha_n)\,d(z_n,z)\,.$$

Оскільки існує $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n>0$, то

$$1-\tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\to1-\tau\in(0,1)\ \text{ при }\ n\to\infty.$$

Скориставшись нерівністю леми 9, отримаємо

$$d(x_{n+1},z)\leqslant\alpha_n d(a,z)+(1-\alpha_n)\,d(x_n,z)\leqslant\max\{d(a,z)\,,d(x_n,z)\}$$

для всіх $n\geqslant n_0$.

Отже,

$$d(x_{n+1},z)\leqslant\max\{d(a,z)\,,d(x_{n_0},z)\}\quad\forall n\geqslant n_0.$$

Таким чином, послідовність (x_n) обмежена.

Обмеженість послідовностей (y_n) та (z_n) випливає з обмеженості (x_n) та леми 9. □

Перейдемо до основного результату.

Теорема 3. *Нехай* (X,d) *— метричний простір Адамара,* C *— непорожня опукла замкнена множина простору* X, *біфункція* $F:C\times C\to\mathbb{R}$ *задовольняє умови (A1)–(A5) та* $S\neq\emptyset$. *Тоді породжені алгоритмом 3 послідовності* (x_n), (y_n) *та* (z_n) *збігаються до елемента* $P_S a$.

Доведення. Розглянемо елемент $z_0=P_S a$. З леми 10 випливає існування такого числа $M>0$, що

$$\left|d^2(a,z_0)-(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\right|\leqslant M\ \text{ для всіх }\ n\in\mathbb{N}.$$

Тоді з нерівності леми 9 отримаємо оцінку

$$d^2(x_{n+1}, z_0) - (1-\alpha_n)\, d^2(x_n, z_0) + \\ + (1-\alpha_n)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(z_n, y_n) + \\ + (1-\alpha_n)\left(1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right) d^2(y_n, x_n) \leqslant \alpha_n M. \quad (28)$$

Розглянемо числову послідовність $(d(x_n, z_0))$. Можливі два варіанти:

a) існує такий номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, що

$$d(x_{n+1}, z_0) \leqslant d(x_n, z_0) \ \text{ для всіх } \ n \geqslant \bar{n};$$

b) існує така зростаюча послідовність номерів (n_k), що

$$d(x_{n_k+1}, z_0) > d(x_{n_k}, z_0) \ \text{ для всіх } \ k \in \mathbb{N}.$$

Спочатку розглянемо варіант a). У цьому випадку існує границя

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_0) \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $d^2(x_{n+1}, z_0) - d^2(x_n, z_0) \to 0$, $\alpha_n \to 0$ та $1 - \tau\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \to 1 - \tau \in (0,1)$, то при $n \to \infty$ маємо

$$d(x_n, y_n) \to 0, \quad (29)$$

$$d(z_n, y_n) \to 0. \quad (30)$$

З обмеженості (x_n) випливає існування підпослідовності (x_{n_k}), що слабко збігається до точки $w \in X$. Тоді з (29), (30) випливає, що (y_{n_k}) та (z_{n_k}) слабко збігаються до w. Очевидно, що $w \in C$. Покажемо, що обов'язково $w \in S$. Маємо

$$F(y_{n_k}, y) \geqslant \\ \geqslant F(y_{n_k}, z_{n_k}) - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \geqslant \\ \geqslant F(x_{n_k}, z_{n_k}) - F(x_{n_k}, y_{n_k}) - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})\right) - \\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \geqslant \\ \geqslant -\frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(z_{n_k}, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) - d^2(y_{n_k}, z_{n_k})\right) - \\ - \frac{\tau}{2\lambda_{n_k+1}}\left(d^2(x_{n_k}, y_{n_k}) + d^2(z_{n_k}, y_{n_k})\right) - \\ - \frac{1}{2\lambda_{n_k}}\left(d^2(y, x_{n_k}) - d^2(x_{n_k}, z_{n_k}) - d^2(z_{n_k}, y)\right) \ \ \forall y \in \mathbb{N}. \quad (31)$$

Здійснивши граничний перехід в (31) з урахуванням (29), (30) та слабкої напівнеперервності зверху функції $F(\cdot, y) : C \to \mathbb{R}$, отримуємо

$$F(z, y) \geqslant \limsup_{k\to\infty} F(y_{n_k}, y) \geqslant 0 \quad \forall y \in C,$$

тобто, $z \in S$.

Доведемо, що

$$\limsup_{n\to\infty}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\right)\leqslant 0. \tag{32}$$

Розглянемо таку підпослідовність (z_{n_k}), що

$$\lim_{k\to\infty}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_{n_k})\,d^2(a,z_{n_k})\right)= \\ =\limsup_{n\to\infty}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\right).$$

Додатково можна вважати, що $z_{n_k}\to w\in S$ слабко. Тоді, скориставшись слабкою напівнеперервністю знизу функції $d^2(a,\cdot)$, отримуємо

$$\lim_{k\to\infty}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_{n_k})\,d^2(a,z_{n_k})\right)\leqslant d^2(a,z_0)-d^2(a,w). \tag{33}$$

Оскільки $z_0=P_S a=\operatorname{argmin}_{w\in S} d(a,w)$, то з (33) випливає (32).

Тепер з (32), нерівності

$$d^2(x_{n+1},z_0)\leqslant(1-\alpha_n)\,d^2(x_n,z_0)+\alpha_n\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_n)\,d^2(a,z_n)\right),$$

яка має місце для достатньо великих n, та леми 3 робимо висновок, що $d(x_n,z_0)\to 0$. З (29), (30) отримуємо $d(y_n,z_0)\to 0$ та $d(z_n,z_0)\to 0$.

Вивчимо варіант b). У цьому випадку розглянемо послідовність номерів (m_k) з властивістю (лема 4):

i) $m_k\nearrow+\infty$;
ii) $d(x_{m_k+1},z_0)\geqslant d(x_{m_k},z_0)$ для всіх $k\geq n_1$;
iii) $d(x_{m_k+1},z_0)\geqslant d(x_k,z_0)$ для всіх $k\geq n_1$.

З нерівності леми 9 та ii) випливає

$$\alpha_{m_k}d^2(x_{m_k},z_0)+(1-\alpha_{m_k})\left(1-\tau\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right)d^2(z_{m_k},y_{m_k})+ \\ +(1-\alpha_{m_k})\left(1-\tau\frac{\lambda_{m_k}}{\lambda_{m_k+1}}\right)d^2(y_{m_k},x_{m_k})\leqslant \\ \leqslant\alpha_{m_k}d^2(a,z_0)-\alpha_{m_k}(1-\alpha_{m_k})\,d^2(a,z_{m_k})\leqslant\alpha_{m_k}M.$$

Звідки

$$\lim_{k\to\infty}d(x_{m_k},y_{m_k})=\lim_{k\to\infty}d(z_{m_k},y_{m_k})=0.$$

Міркуваннями, подібними вищевикладеним, показуємо, що часткові слабкі границі послідовностей (x_{m_k}), (y_{m_k}) та (z_{m_k}) належать множині S. Як і раніше отримуємо

$$\limsup_{k\to\infty}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_{m_k})\,d^2(a,z_{m_k})\right)\leqslant 0.$$

Далі, для достатньо великих номерів k маємо

$$d^2(x_{m_k+1},z_0)\leqslant(1-\alpha_{m_k})\,d^2(x_{m_k},z_0)+ \\ +\alpha_{m_k}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_{m_k})\,d^2(a,z_{m_k})\right)\leqslant \\ \leqslant(1-\alpha_{m_k})\,d^2(x_{m_k+1},z_0)+\alpha_{m_k}\left(d^2(a,z_0)-(1-\alpha_{m_k})\,d^2(a,z_{m_k})\right).$$

Звідки, врахувавши умову iii), отримуємо

$$d^2(x_k, z_0) \leqslant d^2(x_{m_k+1}, z_0) \leqslant d^2(a, z_0) - (1-\alpha_{m_k})\, d^2(a, z_{m_k}).$$

Таким чином,

$$\limsup_{k\to\infty} d^2(x_k, z_0) \leqslant \limsup_{k\to\infty} \left(d^2(a, z_0) - (1-\alpha_{m_k})\, d^2(a, z_{m_k})\right) \leqslant 0.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, z_0) = 0$$

та, в свою чергу, $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n, z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} d(z_n, z_0) = 0$. □

Зауваження 9. Якщо біфункція $F : C \times C \to \mathbb{R}$ має таку властивість ліпшицевого типу:

$$\exists\, A > 0 : \quad F(x, y) \leqslant F(x, z) + F(z, y) + Ad(x, z)\, d(z, y) \quad \forall x, y, z \in C,$$

то замість (25) в алгоритмі 3 можна використати правило:

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n + \mu_n, \ \text{якщо} \ F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n + \mu_n, \tau \frac{d(x_n, y_n) d(z_n, y_n)}{(F(x_n, z_n) - F(x_n, y_n) - F(y_n, z_n))}\right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Для отриманого такою модифікацією алгоритму буде справедливий аналогічний теоремі 3 результат про збіжність.

Для варіаційної нерівності (24) алгоритм 3 приймає такий вигляд.

Алгоритм 4. Обираємо елементи $a \in C$, $x_1 \in C$, числа $\tau \in (0, 1)$, $\lambda_1 \in (0, +\infty)$, невід'ємну сумовну послідовність (μ_n) та таку послідовність (α_n), що $\alpha_n \in (0, 1)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Покладаємо $n = 1$.

1: Обчислити

$$y_n = P_C(x_n - \lambda_n A x_n).$$

2: Обчислити

$$z_n = P_C(x_n - \lambda_n A y_n).$$

3: Обчислити

$$x_{n+1} = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)\, z_n.$$

4: Обчислити

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \lambda_n + \mu_n, \ \text{якщо} \ (Ax_n - Ay_n, z_n - y_n) \leqslant 0, \\ \min\left\{\lambda_n + \mu_n, \frac{\tau}{2} \frac{\|x_n - y_n\|^2 + \|z_n - y_n\|^2}{(Ax_n - Ay_n, z_n - y_n)}\right\}, \quad \text{інакше.} \end{cases}$$

Покласти $n := n + 1$ та перейти на **1**.

З теореми 3 випливає такий результат.

Теорема 4. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ – непорожня опукла замкнена множина, оператор $A : C \to H$ псевдомонотонний, ліпшицевий, секвенційно слабко неперервний та існують розв'язки* (24). *Тоді породжені алгоритмом 4 послідовності (x_n), (y_n) та (z_n) сильно збігаються до проекції елемента a на множину розв'язків варіаційної нерівності* (24).

Зауваження 10. Якщо оператор A монотонний, то результат теореми 4 справедливий без припущення про його секвенційну слабку неперервність.

Зауваження 11. Спираючись на результат [45], можна побудувати більш економну в обчислювальному відношенні модифікацію алгоритму 4. Слід змінити крок 2, поклавши

$$z_n = P_{T_n}(x_n - \lambda_n A y_n),$$

де

$$T_n = \{z \in H : \ (x_n - \lambda_n A x_n - y_n, z - y_n) \leqslant 0\}.$$

Заключні зауваження

В даній роботі розглянуто задачі про рівновагу в метричних просторах Адамара. Для їх наближеного розв'язання запропоновано нові ітераційні алгоритми екстрапроксимального типу.

Правило оновлення параметрів не використовує значень ліпшіцевих констант біфункції та, на відміну від правил типу лінійного пошуку, не потребує обчислень значень біфункції в додаткових точках. Крім того, на початкових етапах роботи алгоритмів параметр величини кроку може зростати від ітерації до ітерації. Це відрізняє розглянуті алгоритми від методів робіт [30–35].

Для псевдомонотонних біфункцій ліпшицевого типу доведено теореми про збіжність. Показано, що запропоновані алгоритми можна застосувати до псевдомонотонних варіаційних нерівностей в гільбертових просторах.

Робота виконана за фінансової підтримки МОН України (проєкт «Обчислювальні алгоритми і оптимізація для штучного інтелекту, медицини та оборони», 0122U002026, 2022–2024 рр.).

Література

1. Kassay G., Radulescu V. D. Equilibrium Problems and Applications. London: Academic Press, 2019. xx + 419 p.
2. Nikaido H., Isoda K. Note on noncooperative convex games. *Pacific Journal of Mathematics.* 1955. Vol. 5. P. 807–815.
3. Blum E., Oettli W. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Stud.* 1994. 63. P. 123–145.
4. Muu L. D. and Oettli W. Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Anal. TMA.* 1992. 18. P. 1159–1166.
5. Lions J. L., Stampacchia G. Variational inequalities. *Commun. Pure Appl. Math.* 1967. Vol. XX. P. 493–519.
6. Kinderlehrer D. Stampacchia G. An introduction to variational inequalities and their applications. New York: Academic Press, 1980. Russian transl., Moscow: Mir, 1983. 256 p.
7. Combettes P. L., Hirstoaga S. A. Equilibrium Programming in Hilbert Spaces. *J. Nonlinear Convex Anal.* 2005. Vol. 6. P. 117–136.
8. Nemirovski A. Prox-method with rate of convergence O(1/T) for variational inequalities with Lipschitz continuous monotone operators and smooth convex-concave saddle point problems. *SIAM J. Optim.* 2004. Vol. 15. Issue 1. P. 229–251. https://doi.org/10.1137/S1052623403425629

9. Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Networks. arXiv:1802.10551. 2018.
10. Antipin A. S. Equilibrium programming: gradient methods. Part 2. *Autom. Remote Control.* 1997. 58 (8). P. 1337–1347.
11. Antipin A. Equilibrium programming problems: prox-regularization and prox-methods. In: Recent Advances in Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, vol. 452, Springer, Heidelberg, 1997. P. 1–18.
12. Antipin A. S., Flam S. D. Equilibrium programming using proximal-like algorithms. *Math. Program.* 1997. 78. P. 29–41.
13. Mastroeni G. On auxiliary principle for equilibrium problems. In: Daniele, P. et al. (eds.) Equilibrium Problems and Variational Models. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003. P. 289–298.
14. Quoc T. D., Muu L. D., Hien N. V. Extragradient algorithms extended to equilibrium problems. *Optimization.* 2008. Vol. 57. P. 749–776. https://doi.org/10.1080/02331930601122876
15. Bauschke H. H., Combettes P. L. Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 2011. 408 p.
16. Van N. T. T., Strodiot J. J., Nguyen V.H. A bundle method for solving equilibrium problems. *Math. Program.* 2009. 116 (1–2), Ser. B. P. 529–552.
17. Anh P. N. Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and Ky Fan inequalities. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 154. P. 303–320. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0005-x
18. Vuong P. T., Strodiot J. J, Nguyen V. H. Extragradient methods and linesearch algorithms for solving Ky Fan inequalities and fixed point problems. *J. Optim. Theory Appl.* 2012. 155. P. 605–627.
19. Quoc T. D., Anh P. N., Muu L. D. Dual extragradient algorithms to equilibrium problems. *J. Glob. Optim.* 2012. 53. P. 139–159. https://doi.org/10.1007/s10898-011-9693-2
20. Vuong P. T., Strodiot J. J., Nguyen V. H.: On extragradient-viscosity methods for solving equilibrium and fixed point problems in a Hilbert space. *Optimization.* 2015. 64 (2). P. 429–451. https://doi.org/10.1080/02331934.2012.759327
21. Anh P. N., Hai T. N., Tuan P. M. On Ergodic Algorithms for Equilibrium Problems. *J. Glob. Optim.* 2016. 64 (1). P. 179–195. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0330-3
22. Vedel Y. I., Semenov V. V. A new two-phase proximal method of solving the problem of equilibrium programming. *J. Num. Appl. Math.* 2015. No. 1 (118). P. 15–23. (in Russian)
23. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. An Adaptive Algorithm for the Variational Inequality Over the Set of Solutions of the Equilibrium Problem. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2021. Vol. 57. Issue 1. P. 91–100. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00332-2
24. Nguyen T. P. D., Strodiot J. J., Nguyen V. H., Nguyen T. T. V. A family of extragradient methods for solving equilibrium problems. *J. Ind. Manag. Optim.* 2015. 11. P. 619–630.
25. Zykina A. V., Melenchuk N. V. Finite number of iterations in the two-step extragradient method. *Russian Mathematics.* 2014. Volume 58. Issue 9. P. 62–65.
26. Bacak M. Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Berlin-Boston: De Gruyter, 2014. viii+185 p.

27. Colao V., Lopez G., Marino G., Martin-Marquez V. Equilibrium problems in Hadamard manifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* 2012. Vol. 388. P. 61–77. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.11.001
28. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Monotone and pseudo-monotone equilibrium problems in Hadamard spaces. *Journal of the Australian Mathematical Society.* 2019. P. 1–23. https://doi.org/10.1017/S1446788719000041
29. Khatibzadeh H., Mohebbi V. Approximating solutions of equilibrium problems in Hadamard spaces. *Miskolc Mathematical Notes.* 2019. Vol. 20. No. 1. P. 281–297. https://doi.org/10.18514/MMN.2019.2361
30. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V. An Adaptive Two-Stage Proximal Algorithm for Equilibrium Problems in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 6. P. 978–989. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00318-6
31. Vedel Y. I., Sandrakov G. V., Semenov V. V., Chabak L. M. Convergence of a Two-Stage Proximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56. Issue 5. P. 784–792. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00299-6
32. Vedel Y. I., Denisov S. V., Semenov V. V. Regularized Adaptive Extra-Proximal Algorithm for Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. Vol. 52. Issue 9. P. 12–26. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i9.20
33. Vedel Y. I., Golubeva E. N., Semenov V. V., Chabak L. M. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in the Hadamard Spaces. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. Vol. 52. Issue 8. P. 46–58. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i8.40
34. Semenov V., Vedel Y. Convergence of adaptive methods for equilibrium problems in Hadamard spaces. Proceedings of the 7th International Conference «Information Technology and Interactions» (IT&I-2020). Workshops Proceedings Kyiv, Ukraine, December 02-03, 2020. CEUR Workshop Proceedings, vol. 2845. 2021. P. 321–335.
35. Vedel Y., Semenov V. Adaptive Extraproximal Algorithm for the Equilibrium Problem in Hadamard Spaces. In: Olenev N., Evtushenko Y., Khachay M., Malkova V. (eds) Optimization and Applications. OPTIMA 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol. 12422. Springer, Cham, 2020. P 287–300. https://doi.org/10.1007/978-3-030-62867-3_21
36. Popov L. D. A modification of the Arrow-Hurwicz method for search of saddle points. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR.* 1980. Vol. 28. Issue 5. P. 845–848. https://doi.org/10.1007/BF01141092
37. Malitsky Yu. V., Semenov V. V. An extragradient algorithm for monotone variational inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2014. Vol. 50. P. 271–277. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-014-9614-8
38. Lyashko S. I., Semenov V. V. A New Two-Step Proximal Algorithm of Solving the Problem of Equilibrium Programming. In: B. Goldengorin (ed.) Optimization and Its Applications in Control and Data Sciences. Springer Optimization and Its Applications, vol. 115. Springer, Cham, 2016. P. 315–325. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42056-1_10
39. Kirk W., Shahzad N. Fixed point theory in distance spaces. Cham: Springer, 2014. xii+173 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-10927-5.

40. Burago D., Burago Yu., Ivanov S. A Course in Metric Geometry. Graduate Studies in Mathematics. Vol. 33. Providence: AMS, 2001. xiv+415 p.
41. Mainge P.-E. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis.* 2008. Vol. 16. P. 899–912. https://doi.org/10.1007/s11228-008-0102-z
42. Denisov S. V., Semenov V. V., Stetsyuk P. I. Bregman Extragradient Method with Monotone Rule of Step Adjustment. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2019. Vol. 55. Issue 3. P. 377–383. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00144-5
43. Denisov S.V., Nomirovskii D. A., Rublyov B.V., Semenov V.V. Convergence of Extragradient Algorithm with Monotone Step Size Strategy for Variational Inequalities and Operator Equations. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2019. Vol. 51. Issue 6. P. 12–24. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.20
44. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 957–961. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11864-0
45. Lyashko S. I., Semenov V. V., Voitova T. A. Low-cost modification of Korpelevich's methods for monotone equilibrium problems. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2011. Vol. 47. Issue 4. P. 631–639. https://doi.org/10.1007/s10559-011-9343-1

Надійшла: 24.02.2022 / Прийнята: 21.04.2022