КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра системного аналізу та теорії прийняття рішень

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 124 Системний аналіз
на тему:

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ БІЗНЕС-СТРАТЕГІЇ

Виконала студентка 4-го курсу
Резніченко Ілона Володимирівна
____
(підпис)

Науковий керівник:
доцент, доктор фіз.-мат. наук
Капустян Олена Анатоліївна
____
(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.
Студент __________________
(підпис)

Роботу розглянуто й допущено до захисту на засіданні кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень
«07» 06 2022 р.,
протокол № 10

Завідувач кафедри
проф., доктор фіз.-мат. наук
Олександр НАКОНЕЧНИЙ
____
(підпис)

Київ – 2022

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи: 35 сторінок, 3 рисунки, 30 джерел посилань.

У цій роботі розв'язано задачу оптимального керування, яка описується звичайним диференціальним рівнянням. Отримано оптимальне керування та відповідна йому траєкторія.

Розглянута постановка задачі оптимального керування носить прикладний характер і описує процес розробки бізнес-стратегії для підприємства, яке виробляє унікальний товар. Задачу оптимального керування для побудови бізнес-стратегії розв'язано із застосуванням принципу максимуму Понтрягіна та методу динамічного програмування Беллмана. Встановлено, що побудована стратегія є екстремальною.

В економічній інтерпретації, якщо оптимальна стратегія будується на короткий термін часу, то краще продати всю вироблену продукцію без будь-яких інвестицій. Якщо ж вибір бізнес-стратегії може здійснюватися у середньостроковій або довгостроковій перспективі, оптимальною стратегією є спрямування всього випуску на збільшення виробництва, а потім варто продати все, щоб отримати максимальний прибуток в останній період.

Ключові слова: оптимальне керування, принцип максимуму Понтрягіна, метод динамічного програмування Беллмана, бізнес-стратегія.

ЗМІСТ

ВСТУП

Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження або розробки. Сучасний бізнес працює в умовах глобальної фінансової нестабільності, надзвичайно високої конкуренції, швидкозмінних трендів, що впливає на його успішність та розвиток. Для того, щоб компанія могла отримувати очікувані результати, мінімізувати негативні впливи, наприклад, пережити кризу, зумовлену COVID-19 й не втратити свій бізнес, необхідно планувати кожен крок, визначати напрямки дій, зосереджуватися на головних моментах. Тобто виникає необхідність розробки та впровадження бізнес-стратегії.

На сьогодні існує значна кількість підходів до побудови бізнес-стратегії, як-от математичні, маркетингові методи та ін. Одним із підходів є теорія оптимального керування, значущість якої у даному випадку пов'язана з її прикладним аспектом, оскільки уможливлює розв'язувати різні задачі з економіки, біології, медицини, ядерної енергетики та ін.

Наразі характерним є широке застосування методів теорії систем та теорії керування при розв'язанні теоретичних і прикладних задач. У праці [13] значну увагу приділено оптимальному керуванню динамічними системами за принципом максимуму, методом динамічного програмування та за класичним варіаційним численням. Наведено методи фільтрації та особливості керування стохастичними динамічними системами, а також визначено властивості лінійних систем – керованість, спостережуваність та ідентифікованість.

Використання й упровадження теорії оптимального керування у економічні процеси набуває все більшого поширення. Вищезазначеній проблемі присвячені праці [9, 11, 15, 18] та ін. У працях учені описують математичні методи теорії оптимального керування та прикладні аспекти їх втілення в економічні процеси.

Актуальність роботи та підстави для її виконання. Оптимальне керування пов'язане з вибором найбільш вигідних, тобто оптимальних, способів керування складними об'єктами, котрі описуються з допомогою системи звичайних диференціальних рівнянь [18]. До таких складних об'єктів ми можемо віднести й процес побудови бізнес-стратегії, який можна уявити як сукупність взаємопов'язаних елементів. Функціонуванням такого об'єкту можна керувати, що робить наше дослідження актуальним й зумовило вибір теми кваліфікаційного дослідження «Задача оптимального керування для побудови бізнес-стратегії».

Мета й завдання роботи. Дослідити й розв'язати задачу оптимального керування звичайним диференціальним рівнянням із застосуванням до побудови бізнес-стратегії.

Для досягнення цієї мети поставлено такі завдання:

– дослідити задачу оптимального керування для побудови бізнес-стратегії;

– розв'язати задачу оптимального керування, яка описує процес побудови бізнес-стратегії, за допомогою двох основних методів теорії оптимального керування.

Об'єкт, методи й засоби дослідження або розроблення.

У роботі об'єктом є задача оптимального керування для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Для розв'язання досліджуваної задачі оптимального керування були використані метод динамічного програмування Беллмана та принцип максимуму Потрягіна.

Можливі сфери застосування.

Розв'язана задача оптимального керування може бути застосована не лише для дослідження економічних задач (наприклад, формування оптимального плану розвитку підприємств, при проєктуванні автоматизованих систем керування виробничими процесами тощо), а й для дослідження прикладних технічних або транспортних процесів (наприклад, космічна навігація, регулювання технологічних процесів тощо).

Апробація роботи та публікації з теми роботи. Основні положення та висновки дослідження опубліковано в збірнику тез XX Міжнародної науково-практичної конференції «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп’ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз», під назвою «THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH APPLICATION TO BUSINESS STRATEGY» [29] (on-line, Київ, 14 березня 2022 р., URL: https://probability.knu.ua/shv2022/ShV_2022.pdf).

РОЗДІЛ 1 ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ВИВЧЕННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ БІЗНЕС-СТРАТЕГІЇ

1.1 Огляд літератури

Задачі оптимального керування відносяться до теорії екстремальних задач, котрі стали предметом дослідження ще з давніх часів. Деякі такі задачі пов'язують з іменами давньогрецьких філософів – з Аристотелем, Архімедом, Евклідом тощо. Однією з найдавніших екстремальних задач є ізопериметрична задача: серед пласких замкнутих кривих, які мають визначену довжину, необхідно знайти криву, яка займає найбільшу площу. Постановки екстремальних задач були зумовлені вимогами й запитами розвитку тогочасного суспільства, яке активно розбудовувалося.

З плином часу відбулося зародження варіаційного числення, яке вивчає певний клас екстремальних задач. Поштовхом до цього слугувала задача про криву найшвидшого спуску (задача про брахістохрону). Постановка цієї задачі була опублікована І. Бернуллі в науковому журналі «Acta Eruditorum» у 1696 р.

З XVII ст. набуло поширення твердження, що закони навколишнього світу є наслідком деяких варіаційних принципів. Серед таких принципів варто вказати принцип Ферма (1660 р.) про траєкторію світла; принцип стаціонарної дії У.Р. Гамільтона (1834 р.); принцип віртуальних переміщень та ін. Разом з цим учені П. Ферма, І. Ньютон, Г. Лейбніц та інші описували і розвивали методи розв'язання екстремальних задач [11].

Розвиток теорії екстремальних задач знайшов своє продовження у працях представників класичного варіаційного числення (Л. Ейлер, Ж. Лагранж встановили необхідну умову екстремуму першого порядку; К. Вейєрштрас, К. Якобі – необхідні й достатні умови другого порядку; Д. Гільберт, А. Кнезер – побудували теорію Гамільтона-Якобі і теорію поля) та ін.

У XX сторіччі відбувається подальший розвиток теорії екстремальних задач, що призвело до створення лінійного програмування, випуклого аналізу, математичного програмування, теорії мінімаксу й деяких інших розділів, одним з яких є теорія оптимального керування [11]. Дана теорія виникла у зв’язку з актуальними задачами автоматичного регулювання у галузях промисловості й транспорту.

Першою задачею, яка стала відправним пунктом у розробці теорії оптимального керування, вважається задача, розв’язана науковою школою, очолюваною Л.С. Понтрягіним, у 1958 р. У наш час дана задача називається задачею про швидкодію: тіло рухається прямолінійно без тертя і керується зовнішньою силою, що може змінюватись у заданих межах; потрібно знайти керування зовнішньою силою, що забезпечує зупинку тіла в заданій точці за найкоротший час.

Оптимальне керування – це задача проєктування системи, яка забезпечує для заданого об’єкта керування або процесу закон керування або керовану послідовність впливів, що забезпечують максимум або мінімум заданої сукупності критеріїв якості системи [21].

У наш час теорія оптимального керування активно використовується в прикладних технічних (наприклад, космічна навігація, регулювання технологічних процесів тощо), транспортних (наприклад, вибір найбільш економічних маршрутів перевезення вантажів тощо), економічних (наприклад, формування оптимального плану розвитку підприємств, при проєктуванні автоматизованих систем керування виробничими процесами тощо) задач, оскільки роль прикладної математики як аналітичного засобу постійно зростає.

Перші спроби розробки методів пошуку оптимального керування об’єктами з заданими обмеженнями на їхні координати були зроблені фахівцями, які досліджували проблеми теорії управління. Зокрема, в кінці 1940-х рр. А.А. Фельдбаум запропонував теорему про *n*-інтервали. У даній теоремі доводиться, що оптимальне керування об’єктами, які описуються звичайними диференціальними рівняннями з одним обмеженим керованим впливом, складається з n знакозмінних інтервалів, що дорівнює порядку рівняння.

На початку 1950-х рр., крім пошуку аналітичних розв'язків, проводилась розробка наближених інженерних рішень. Так, широко застосовувався метод пошуку оптимального процесу з допомогою швидкодіючої ЕОМ на математичній моделі з наступним відображенням знайдених значень керованих впливів на реальному об'єкті керування.

Ряд учених присвятили свої напрацювання дослідженню задач оптимального керування в економіці. Слід виділити фундаментальні праці таких учених, як Б. Лагоша, A. Arrow, M.D. Intriligator, W. Hildenbrand, H. Sonnen-schein, R. Barro, X. Sala-i-Martin та ін.

Зокрема, праця М. Інтрілігатора «Математичні методи оптимізації і економічна теорія» [9] вважається однією з перших, у якій постає питання розв'язку економіко-математичних задач, де поряд з методами математичного програмування висвітлюється й математична теорія оптимального керування. Науковець вказав, що без таких математичних понять, як похідні функції, граничні значення, екстремуми – максимальні й мінімальні значення та ін., не можливо успішно побудувати економіко-математичні моделі, призначені бути допоміжним інструментом для ведення й планування господарства. М. Інтрілігатор детально описав застосування принципу максимуму для аналізу моделі оптимального економічного росту.

Досить ретельно особливості оптимального керування в економіці описано в [15]. Головну увагу науковець зосереджує на застосуванні математичних методів теорії оптимального керування в макроекономічних динамічних дослідженнях. Учений виклав конкретні методи оптимального керування з єдиних методологічних позицій. Розроблені раніше як незалежні принцип максимуму й метод динамічного програмування науковець виводить через достатні умови оптимальності В.Ф. Кротова [14].

Як показує практика, задача оптимального керування є важливим інструментом для побудови бізнес-стратегії. Визначення поняття «бізнес-стратегія» простежуємо у працях таких зарубіжних та українських науковців, як Д. Аакер, І. Ансофф, Ю. Вдовиченко, В. Дикань, П. Друкер, Д. Кліланд, Г. Мінцберг, А. Міщенко, С. Оборська, М. Портер, Н. Рильська, Г. Тарасюк та ін.

Зокрема, у [5] стверджується, що ділова або бізнес-стратегія – це стратегія забезпечення довгострокових конкурентних переваг окремої стратегічної бізнес-одиниці.

За працею [8] бізнес-стратегія – це стратегія вищого рівня для вузькоспеціалізованих підприємств або другого рівня для диверсифікованих корпорацій, яка визначає розробку заходів, спрямованих на: 1) посилення конкурентоспроможності та збереження конкурентних переваг у довгостроковій перспективі; 2) формування механізму реагування на зовнішні зміни; 3) об’єднання стратегічних дій основних функціональних підрозділів; 4) вирішення специфічних проблем, пов’язаних з бізнесом.

У [21] формулюється, що бізнес-стратегія – це загальний алгоритм, сценарій альтернативної поведінки підприємства у змінному середовищі, реалізація якої повинна привести його до досягнення поставленої перед нею комплексної концептуальної стратегічної мети: конкурентної переваги в обраних сегментах.

Бізнес (ділова) стратегія – це стратегія бізнес-одиниць, що визначає напрямок дій на забезпечення конкурентних переваг у конкретній сфері діяльності організації. Якщо корпоративний план установлює загальний напрямок розвитку компанії, план стратегічної бізнес-одиниці детально визначає, яким чином будуть досягнуті стійкі переваги перед конкурентами й у чому полягатиме внесок кожного стратегічного підрозділу у вирішенні завдань компанії в цілому. Такий план включає: цілі й установки, що розкриваються у термінах «прибуток», «частка ринку», відновлення продукції; аналіз власної позиції на ринку й конкурентні відносин [6].

Як компонент корпоративної стратегії, бізнес-стратегія містить у собі стратегії бізнес-підрозділів (підрозділів підприємства, допоміжних підприємства, виробничих підрозділів та інших підрозділів, що генерують значний прибуток та мають певний рівень автономності при плануванні своєї діяльності). Бізнес-стратегії складаються на період 5-10 років, але конкретна тривалість горизонту стратегічного планування залежить від галузі та сфери діяльності підприємства [17].

Саме ефективна бізнес-стратегія, яка сформована на засадах теорії оптимального керування та сучасних математичних інструментів, стає у наш час одним з основних факторів забезпечення ефективного розвитку бізнесу.

Отже, вивчення наукової літератури з теми дослідження уможливлює стверджувати, що практика застосування теорії оптимального керування у галузі економіки набула широкого поширення. Дане твердження є важливим, оскільки математичні методи теорії оптимального керування є визначальними для побудови бізнес-стратегії.

1.2 Задача оптимального керування як об’єкт дослідження

Як ми вже зазначали в попередньому параграфі, розвиток теорії оптимального керування був викликаний потребами однієї з важливих галузей технічних наук – теорії автоматичного регулювання. У самій загальній постановці проблема регулювання (керування) автоматичними знаряддями зводиться до вибору значень у часі деяких величин, які називаються керованими параметрами, котрі підпорядковуються ряду обмежень, за яких досягається екстремум визначеного функціоналу. Даний функціонал у математичній формі характеризує мету керування. Визначення екстремуму такого функціонала у математичній теорії оптимального керування й називають задачею оптимального керування.

Як стверджують Казаков О.Л., Царькова Н.И. [10], задача оптимального керування – це отримання в певному значенні найкращого результату управління.

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таке керування, при якому виконуються деякі обмеження і мінімізується певний функціонал. Вигляд обмежень і функціоналів визначаються умовами реальних задач [19, с.78-79].

У загальному випадку задача оптимального керування формулюється таким чином. Дано:

– рівняння стану об’єкта керування;

– система обмежень, що встановлена на зміні стану та керування.

Потрібно знайти такі залежності $X(t)$, при яких показник якості керування досягає максимального або мінімального значення.

Математичний апарат сучасної теорії оптимального керування включає методи варіаційного числення, метод принципу максимуму й методи динамічного програмування.

1.3 Математичний апарат розв’язання задачі оптимального керування для побудови бізнес-стратегії

1.3.1 Принцип максимуму Понтрягіна

Важливим математичним інструментом для розв’язання задач оптимального керування є принцип максимуму Понтрягіна [20]. З цього приводу Е. Копп [12] стверджує, що «Принцип максимуму Понтрягіна є досить витонченим методом дослідження варіаційних задач із зв’язками, які обмежують керування».

На відміну від класичного варіаційного числення, прикладом якого є метод Ейлера, множники Лагранжа, Якобі, Вейєрштраса, за якого функція оптимального керування шукається в класі неперервних функцій, у принципі максимуму Понтрягіна функція оптимального керування може належати класу кусково-неперервних функцій з точками розриву першого роду або сукупністю ізольованих точок.

Якщо процес описується системою нелінійних диференціальних рівнянь, то принцип максимуму розглядається як необхідна умова оптимальності, в іншому випадку (для системи лінійних диференціальних рівнянь) даний принцип є і достатньою умовою оптимальності.

З низки задач оптимального керування за допомогою принципу максимуму Понтрягіна розв'язуються три основі задачі, а саме: задача керування за максимальною швидкодією; задача керування скінченним станом; задача керування з мінімізацією інтегралу. Саме тому принцип максимуму набув широкого розповсюдження.

Розглянемо найпростішу задачу оптимального керування:

$$\begin{cases} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \boldsymbol{u}) dt \\ \dot{x} = g(t, x, \boldsymbol{u}) \\ x(t_0) = \boldsymbol{\alpha} \\ \max\limits_{u \in C} J(\boldsymbol{u}), \\ C = \{\boldsymbol{u}: [t_0, t_1] \to U \subseteq \mathbb{R}^k, \boldsymbol{u} - \text{ допустиме } \} \end{cases} \tag{1.1}$$

де t_1 фіксоване. Задачу (1.1) називають найпростішою задачею оптимального керування (далі ОК).

Розглянемо необхідну умову Понтрягіна. Введемо функцію

$$(\lambda_0, \lambda) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n): [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^{n+1}$$

Будемо називати таку функцію мультиплікатором (множником). Визначимо функцію Гамільтона $H: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ як

$$H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) = \lambda_0 f(t, x, u) + \lambda \cdot g(t, x, u).$$

Наступний результат є фундаментальним:

Теорема 1.1 [20]. *Нехай у задачі (1.1) f і g – неперервні функції з неперервними похідними по x.*

Нехай u^* є оптимальним керуванням і x^* є траєкторією. Тоді існує множник (λ_0^*, λ^*), де $\lambda_0^* \geq 0$ константа і λ^*: $[t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ неперервний, такі що виконуються наступні умови:

i) (нетривіальність множника) $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq (0,0)$;

ii) (принцип максимуму Понтрягіна) для всіх $t \in [t_0, t_1]$ маємо

$$u^*(t) \in arg \max_{v \in U} H\big(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big),$$

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big) = \max_{v \in U} H\big(t, x^*(t), v, \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big); \qquad (1.2)$$

iii) *(спряжене рівняння) маємо*

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\nabla_x H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big), \qquad t \in [t_0, t_1]; \qquad (1.3)$$

iv) *(умова трансверсальності)* $\lambda^*(t_1) = 0$*;*

v) *(нормальність)* $\lambda_0^* = 1$.

Якщо, крім того, функції f і g неперервно диференційовані по t, то для всіх $t \in [t_0, t_1]$

$$H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big) = H\big(t_0, x^*(t_0), u^*(t_0), \lambda_0^*, \lambda^*(t_0)\big) +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} \frac{dH}{dt}\big(s, x^*(s), u^*(s), \lambda_0^*, \lambda^*(s)\big) ds \qquad (1.4)$$

Введемо ще деякі означення.

Оптимальне керування u^*, що задовольняє умовам теореми Понтрягіна, називають *екстремальним*. Ми визначаємо (λ_0^*, λ^*) множник Лагранжа залежно від екстремального керування u^* як функцію, що задовольняє умовам теореми 1.1.

Зазначимо, що оскільки у спряженому рівнянні u^* є вимірюваною функцією, то множник λ^* є розв'язком звичайного диференціального рівняння, яке можна записати у вигляді

$$\dot{\lambda} = G(t, \lambda)\text{ , де } [t_0, t_1],$$

тут G – права частина рівняння (1.3), G – вимірна функція, афінна по змінній λ, тобто є лінійним диференціальним рівнянням по λ з вимірюваними коефіцієнтами. Отже, λ^* є абсолютно неперервною функцією.

Зауважимо, що диференціальне рівняння із задачі (1.1) можна переписати як

$$\dot{x} = \Delta_\lambda H.$$

Розглянемо поняття нормального і ненормального керування.

Зрозуміло, що у теоремі 1.1 для найпростішою задачі ОК (1.1) з умови *v)* виплаває, що $(\lambda_0^*, \lambda^*) \neq (0{,}0)$. Якщо ми розглянемо більш загальну задачу, то для неї не можна буде гарантувати, що $\lambda_0^* = 1$.

Загалом, існує два різних випадки для константи λ_0^*:

а) якщо множник $\lambda_0^* = 0$, то ми говоримо, що u^* є ненормальним. Тоді гамільтоніан H для такого λ_0^* не залежить від f, а принцип максимуму Понтрягіна не застосовується;

б) якщо $\lambda_0^* \neq 0$, ми говоримо, що u^* є нормальним, тож у даному випадку можна припустити, що $\lambda_0^* = 1$.

Розглянемо детальніше. Нехай u^* є нормальним екстремальним керуванням з траєкторією x^* і множником (λ_0^*, λ^*) відповідно. Легко перевірити, що $(\tilde{\lambda}_0, \tilde{\lambda})$, , визначається як

$$\tilde{\lambda}_0 = 1, \quad \tilde{\lambda} = \frac{\lambda^*}{\lambda_0^*},$$

знову є множником, що пов'язаний із нормальним керуванням u^*. Отже, якщо u^* є нормальне керування, тоді можна вважати, що $\lambda_0^* = 1$. Ці аргументи дають наступне:

Зауваження 1.1. У теоремі 1.1 можна замінити $\lambda_0^* \geq 0$ константа, з $\lambda_0^* \in \{0,1\}$.Теорема 1.1 це гарантує.

Зауваження 1.2. У найпростішій задачі оптимального керування (1.1) кожен екстремум є нормальним.

Розглянемо принцип максимуму з набагато більшою регулярністю.

Важлива необхідна умова оптимальності при опуклому аналізі передбачає наступне:

Зауваження 1.3. Нехай f і g такі, як у теоремі 1.1 з додатковим припущенням, що вони диференційовані відносно змінної u. Нехай множина керувань U є опуклою і $u*$ є оптимальним для (1.1). Оскільки для кожного фіксованого t керування $u*(t)$ є максимумом для $v \to H(t, x^*(t), v, \lambda_0^*(t))$, то для принципу максимуму Понтрягіна одержимо

$$\nabla_u H\big(\tau, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big) \cdot \big(v - u^*(t)\big) \leq 0, \tag{1.5}$$

для кожного $v \in U, t \in [t_0, t_1]$.

Коли множина керувань збігається з $\mathbb{R}^k$, ми маємо наступну модифікацію для принципу максимуму Понтрягіна:

Зауваження 1.4. У зауваженні 1.3 нехай $U = \mathbb{R}^k$ є множиною керувань для (1.1). Тоді у теоремі 1.1 ми можемо замінити принцип максимуму Понтрягіна наступним новим формулюванням

$$\nabla_u H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Розглянемо гамільтоніан за оптимальною траєкторією в (2.4) як функцію

$$t \to h(t) \coloneqq H\big(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)\big) \tag{1.6}$$

в $[t_0, t_1]$, навіть якщо керування u^* є не неперервним. Сформулюємо ще одну властивість.

Зауваження 1.5. [27] Нехай у задачі (1.1) f і g – неперервні функції з неперервними похідними за t і x. Нехай u^* є кусково-неперервне оптимальне керування, а x^* - пов'язана з ним траєкторія. Тоді:

• співвідношення (1.4) є наслідком співвідношень i)–v) теореми 1.1;

• функція h в (1.6) абсолютно неперервна в $[t_0, t_1]$ і

$$\dot{h}(t) = \frac{dH}{dt}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0^*, \lambda^*(t)).$$

Даний результат є наслідком наступної леми:

Лема 1.1. *Нехай* $\tilde{h} = \tilde{h}(t, u): [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *є неперервною функцією з неперервними похідними по t. Нехай* $U \subset \mathbb{R}^k$ *замкнена і нехай* $u^*: [t_0, t_1] \to U$ *є кусково-неперервною зліва функцією такою, що*

$$u^*(t) \in \underset{v \in U}{arg\,max}\, \tilde{h}(t, v), \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Нехай $\hat{h}: [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ *є такою функцією, що*

$$\hat{h}(t) = \max_{v \in U} \tilde{h}(t, v) = \tilde{h}(t, u^*(t)) \tag{1.7}$$

у $[t_0, t_1]$. *Тоді* $\hat{h}$ *абсолютно неперервна в* $[t_0, t_1]$ *і*

$$\hat{h}(t) = \hat{h}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \frac{d\tilde{h}}{dt}\big(s, u^*(s)\big)ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \tag{1.8}$$

Наступний важливий результат дає нам достатні умови оптимальності керування.

Теорема 1.2. [30] *Розглянемо задачу (1.1) при* $f \in C^1$ *і* $g \in C^1$. *Нехай множина керувань* U *є опуклою. Нехай* u^* *є нормальним керуванням з* *відповідною траєкторією* x^* *і відповідним множником* $\lambda^* = (\lambda_1^*, ..., \lambda_n^*)$ *(як у теоремі 1.1).*

Припустимо, що для гамільтоніана H функція

$$(x,u) \mapsto H(t,x,u,\lambda^*) \tag{1.10}$$

є увігнутою для кожного $t \in [t_0, t_1]$. *Тоді* u^* *є оптимальним.*

Таким чином, принцип максимуму Понтрягіна орієнтований на отримання оптимального розв'язку у формі програмного керування, тому є важливим математичним інструментом для розв'язання задачі оптимального керування для побудови бізнес-стратегії.

1.3.2 Метод динамічного програмування Беллмана

Особливо ефективним для розв'язання широкого класу задач економіко-математичного моделювання є метод динамічного програмування Р. Беллмана. Це пояснюється тим фактом, що динамічне програмування дозволяє отримати оптимальне керування у формі стратегії, що є цінним для нашого дослідження.

Метод був розроблений для дослідження систем оптимального керування значно більш широкого класу, ніж систем, які описувалися диференціальними рівняннями, тому й застосовується не лише до оптимальних задач, а й до низки технічних та економічних задач, у яких зв'язки між координатами, керуваннями та критеріями оптимальності можуть бути задані як у вигляді рівнянь довільного виду, так і у вигляді експериментально визначених графіків або таблиць числових даних.

У основу динамічного методу Р. Беллмана покладений принцип оптимальності. Відповідно до цього принципу оптимальне керування визначається кінцевою метою керування і станом системи у визначений момент часу, незалежно від того, яким чином система пришла в даний стан, тобто оптимальне керування не залежить від передісторії системи. Це означає, що для будь-якої оптимальної траєкторії кожна ділянка, яка зв'язує будь-яку проміжну точку цієї траєкторії з кінцевою, також є оптимальною траєкторією.

Стосовно нашого дослідження принцип оптимальності можна сформулювати наступним чином: оптимальна стратегія володіє такими якостями, що, який би не був початковий стан або початковий розв'язок, наступні розв'язки приймаються, виходячи із оптимальної стратегії відносно стану, що отримується в результаті першого розв'язку. Таким чином, Р. Беллман використовує особливості багатокрокових процесів прийняття рішень.

Ідея багатокроковості та принцип оптимальності стали основою математико-методологічного відкриття Р. Беллмана. Як зазначає сам автор, «спочатку ми звертаємо увагу на задачі, які за своїм характером формулюються як багатокрокові процеси розв'язання. Згодом ми скористаємося привілеями математики вивчати будь-який процес, який може розглядатися як багатокроковий процес розв'язання» [2, с.18].

Визначимо математичний апарат методу динамічного програмування Беллмана.

Нехай $f: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$, $g: [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}$ і $\psi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - неперервні функції та $\alpha \in \mathbb{R}^n$ є фіксованим. Розглянемо задачу оптимального керування

$$\begin{cases} J(u) = \int_{t_0}^{t_1} f(t,x,u)dt + \psi(x(t_1)) \\ \dot{x} = g(t,x,u) \\ x(t_0) = \alpha \\ \max\limits_{u \in C_{t_0,\alpha}} J(u) \end{cases} \tag{1.11}$$

де t_0 і t_1 фіксовані. Тут через $C_{t_{0,\alpha}}$ позначено множину допустимих керувань u:[t_0, t_1]$\to U$ для α в момент часу t_0, яким відповідає єдина траєкторія, визначена на [t_0, t_1] з початковою умовою $x(t_0) = \alpha$.

Визначимо цільову функцію V : [t_0, t_1] $\times \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$ для задачі (1.11) як

$$V(\tau,\xi)=\begin{cases}\sup\limits_{u\in C_{\tau,\xi}}\left(\int_{\tau}^{t_1} f(t,x,u)\mathrm{d}t+\psi(x(t_1))\right) & \text{для } C_{\tau,\xi}\neq\emptyset\\ -\infty & \text{для}\quad C_{\tau,\xi}\neq\emptyset\end{cases}\tag{1.12}$$

Очевидно, що в (1.12) x – траєкторія, яка відповідає керуванню $u\in C_{\tau,\xi}$. Згідно з методом динамічного програмування Беллмана нам потрібно вивчити властивості такої цільової функції. Розглянемо $(\tau, \xi) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ і задачу

$$\begin{cases}J(u)=\int_{\tau}^{t_1} f(t,x,u)\mathrm{d}t+\psi(x(t_1))\\ \dot{x}=g(t,x,u)\\ x(\tau)=\xi\\ \max\limits_{u\in C_{\tau,\xi}} J(u)\end{cases}\tag{1.13}$$

Зауваження 1.6. Якщо існує оптимальне керування $u^*_{\tau,\xi}$ для (1.13), то

$$V(\tau,\xi)=\int_{\tau}^{t_1} f\left(t,x^*_{\tau,\xi},u^*_{\tau,\xi}\right)\mathrm{d}t+\psi(x^*_{\tau,\xi}(t_1)),$$

де $x^*_{\tau,\xi}$ позначає траєкторію, яка відповідає $u^*_{\tau,\xi}$.

Розглянемо задачу (1.11) та її цільову функцію V. У окремому випадку, коли $\tau=t_1$, з означення (1.12) випливає

$$V(t_1,\xi)=\sup_{u\in C_{t_1,\xi}}\left(\int_{t_1}^{t_1} f(t,x,u)\mathrm{d}t+\psi(x(t_1))\right)=\psi(\xi).$$

Тому маємо

Зауваження 1.7.

$$V(t_1,x)=\psi(x),\quad \text{для кожного } x\in\mathbb{R}^n\tag{1.14}$$

Умову (1.14) називають кінцевою умовою цільової функції, зрозуміло, це необхідна умова для функції $V : [t_0,\ t_1] \times \mathbb{R}^n \to [-\infty,\ \infty]$, щоб вона була цільовою функцією задачі (1.11).

Якщо в задачі (1.11) додати кінцеву умову на траєкторію, тобто $x(t_1) = \beta$ з $\beta \in \mathbb{R}^n$ n фіксований, то кінцева умова цільової функції є наступною

$$V(t_1,\beta)=\psi(\beta).$$

Розглянемо принцип оптимальності Беллмана.

Теорема 1.3. (Принцип оптимальності Беллмана) [3] *Друга частина оптимальної траєкторії є оптимальною.*

Дійсно, розглянемо задачу (1.11) і нехай $u^*_{t_0,\alpha}$. і $x^*_{t_0,\alpha}$ – оптимальне керування та оптимальна траєкторія відповідно. Розглянемо задачу (1.13) з (τ, ξ) такими, що $x^*_{t_0,\alpha}$= ξ. Нехай $u^*_{\tau,\xi}$ є оптимальним керуванням для (1.13). Тоді

$$u^*_{t_0,\alpha} = u^*_{\tau,\xi}, \text{в } [\tau, t_1]$$

і, отже, $x^*_{t_0,\alpha} = x^*_{\tau,\xi}$ в $[\tau, t_1]$.

Принцип оптимальності Беллмана відіграє фундаментальну роль у доведенні важливої властивості цільової функції. Сформулюємо необхідну умову оптимальності.

Теорема 1.4. *Розглянемо задачу (1.11) з неперервними f і g і припустимо, що для кожного (τ, ξ)* $\in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$ *існує оптимальне керування* $u^*_{\tau,\xi}$ *для задачі (1.13). Нехай V – цільова функція для задачі (1.11) і нехай V диференційована. Тоді для кожного (t, x)* $\in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$, *маємо*

$$\frac{dV}{dt}(t,x) + \max_{v\in U}(f(t,x,v) + \nabla_x V(t,x) \cdot g(t,x,v)) = 0 \qquad (1.15)$$

Рівняння (1.15) називається рівнянням Беллмана-Гамільтона-Якобі. Очевидно, що (1.15) є необхідною умовою для того, щоб функція V була цільовою функцією для задачі (1.11). Основна складність динамічного програмування полягає в тому, що таке рівняння загалом є диференціальним рівнянням з частинними похідними. Однією з фундаментальних властивостей динамічного програмування є те, що такий підхід можна застосувати і до стохастичних рівнянь.

Розглянемо задачу (1.11), для якої гамільтоніан для динамічного програмування $H_{DP} : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^{2n} \to (-\infty, +\infty]$ визначається як

$$H_{DP}(t,x,p) = \max_{v \in U}(f(t,x,v) + p \cdot g(t,x,v)) \tag{1.16}$$

Зрозуміло, що в припущенні теореми 1.4 цільова функції розв'язує систему

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(t,x) + H_{DP}(t,x,\nabla_x V(t,x)) = 0) & \text{для } (t,x) \in [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n \\ V(t_1(x) = \psi(x) & \text{для } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.17}$$

Визначимо достатню умову оптимальності.

На даному етапі питання полягає в тому, щоб запропонувати достатні умови, такі, що функція W : [t_0, t_1]× $\mathbb{R}^n$ → ℝ задовольняє рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі (1.15), а кінцева умова (1.14) насправді є цільовою функцією для задачі (1.11). Крім того, ми сподіваємося, що цільова функція дасть нам деяку інформацію про оптимальне керування.

Теорема 1.5. [3] *Розглянемо задачу (1.11). Нехай W : [t_0, t_1]× $\mathbb{R}^n$ → ℝ – це диференційована функція, яка задовольняє системі рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі*

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt}(t,x) + H_{DP}(t,x,\nabla_x W(t,x)) = 0 & \forall (t,x) \in [t_0,t_1] \times \mathbb{R}^n) \\ W(t_1,x) = \psi(x) & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.18}$$

Нехай w : [t_0, t_1] × $\mathbb{R}^n$ → U — кусково неперервна функція по t ∈[t_0,t_1] і неперервно диференційована функція по x ∈ $\mathbb{R}^n$. Більше того, нехай w таке, що в [t_0, t_1] × $\mathbb{R}^n$ маємо

$$w(t,x) \in arg\max_{v \in U}(f(t,x,v) + \nabla_x W(t,x) \cdot g(t,x,v)) \tag{1.19}$$

Нарешті, нехай x буде розв'язком звичайного диференціального рівняння*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t,x,w(t,x) \text{ в } [t_0,t_1] \\ x(t_0) = \alpha \end{cases} \tag{1.20}$$

Тоді x– оптимальна траєкторія і u* , яке визначається за формулою*

$$u^*(t) = w\big(t,x^*(t)\big), \tag{1.21}$$

є оптимальним керуванням для задачі (1.11). Крім того, W є цільовою функцією для задачі (1.11).

Розглянемо цільову функцію V, яка задовольняє рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі для кожного $(t, x) \in [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n$,

$$\frac{dV}{dt}(t,x) + \max_{v\in U}\big(f(t,x,v) + \nabla_x V(t,x)\cdot g(t,x,v)\big) = 0;$$

крім того, якщо ми розглянемо функцію $w = w(t, x)$, яка реалізує максимум в попередньому рівнянні Беллмана-Гамільтона-Якобі, то ми знаємо, що оптимальним є керування $u^*(t) = w(t, x^*(t))$, тобто

$$\max_{v\in U}\big(f(t,x^*(t),v) + \nabla_x V(t,x^*(t))\cdot g(t,x^*(t),v)\big) =$$
$$f(t,x^*(t),u^*(t)) + \nabla_x V(t,x^*(t))\cdot g\big(t,x^*(t),u^*(t)\big),$$

для кожного $t \in [t_0, t_1]$.

Зауваження 1.8. Якщо V – регулярна цільова функція, а u^* є оптимальним керуванням (з траєкторією x^*) для задачі (1.11) маємо

$$\frac{dV}{dt}(t,x^*(t)) + f(t,x^*(t),u^*(t)) + \nabla_x(t,x^*(t))\cdot g\big(t,x^*(t),u^*(t)\big) = 0$$

для кожного $t \in [t_0, t_1]$.

Отже, метод динамічного програмування Р. Беллмана доцільно використовувати в задачах оптимального керування бізнес-процесами, який вважається більш точним, порівняно з принципом максимуму Понтрягіна.

РОЗДІЛ 2 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ПОБУДОВИ БІЗНЕС-СТРАТЕГІЇ

2.1 Постановка задачі оптимального керування для побудови бізнес-стратегії

Постановка задачі оптимального керування передбачає, по-перше, визначення цільової функції оптимізаційного процесу. Для цього необхідно сформулювати й перекласти задачу у фізичній формі на математичну мову [14]. Задача оптимального керування полягає в тому, щоб знайти таке керування, при якому виконуються деякі обмеження і мінімізується певний функціонал. Вигляд обмежень і функціоналів визначаються умовами реальних задач.

Нехай підприємство виробляє унікальний товар у кількості *x(t)* у момент часу *t*. Кожної миті такого виробництва товар можна або реінвестувати для розширення виробничих потужностей або продати. Початкова продуктивна потужність α>0; така ємність зростає як ставка реінвестування. Введемо функцію *u:* [*0, T*] → [*0, 1*], де *u(t)* – частка від випуску *x(t),* який ми реінвестуємо. Враховуючи, що ціна продажу незмінна, потрібно встановити, яка частка *u(t)* випуску в момент *t* повинна бути реінвестована для максимізації загального обсягу продажів за фіксований період [0, T].

Тоді, відповідно, *(1 − u(t))x(t)* — це частина *x(t)*, яку ми продаємо в момент *t* за фіксованою ціною *P* > 0. Отже, задача оптимального керування побудови бізнес-стратегії буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T (1-u(t))x(t)P\,dt \to \max,\ u \in C, \\ \dot{x} = ux, \\ x(0) = a, \\ C = \{u : [0,T] \to [0,1] \subset \mathbb{R}, u \in KC\}. \end{cases} \qquad (2.1)$$

де *α* і *T* додатні та фіксовані. Розв'язання цієї задачі ми представимо у наступних параграфах даного розділу.

2.2 Застосування принципу максимуму Понтрягіна для побудови бізнес-стратегії

Розв'яжемо спочатку нашу задачу (2.1) за допомогою принципу максимуму.

Розглянемо гамільтоніан $H=(1 - u)x + \lambda xu$. За теоремою 1.1 отримуємо, що

$$H(t, x*, u*, \lambda*) = \max_{v\in[0,1]} H(t, x*, v, \lambda*) \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow (1 - u^*)x^* + \lambda^* x^* u^* = \max_{v\in[0,1]}[(1 - v)x^* + \lambda^* x^* v] \Rightarrow \quad (2.2)$$

спряжене рівняння має вигляд

$$\frac{dH}{dx} = -\dot{\lambda}^* \Longrightarrow 1 - u^* + \lambda^* u^* = -\dot{\lambda}^*, \quad (2.3)$$

$$\frac{dH}{d\lambda} = \dot{x}^* \Longrightarrow \dot{x}^* = x^* u^*, \quad (2.4)$$

а умова трансверсальності –

$$\lambda^*(T)=0. \quad (2.5)$$

Після перетворення рівності (2.2), отримаємо

$$u^* x^* (\lambda^* - 1) + x^* = \max_{v\in[0,1]}[v x^*(\lambda^* - 1)] + x* \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow u^* x^* (\lambda^* - 1) = \max_{v\in[0,1]}[v x^*(\lambda^* - 1)]\,. \quad (2.6)$$

Оскільки x^* неперервна, $x^*(0) = \alpha > 0$ і, згідно з фізичним змістом задачі, $u^* \geq 0$, з (2.4) отримуємо

$$x^{\cdot *} = x^* u^* \geq 0 \quad (2.7)$$

на [0, T]. Отже, $x^*(t) \geq \alpha$ для всіх $t \in [0, T]$. Вираз (2.6) набуває наступного вигляду:

$$u^*(\lambda^* - 1) = \max_{v\in[0,1]} v(\lambda^* - 1)\,.$$

Звідси

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, \ якщо \ \lambda^* - 1 > 0, \\ 0, \ якщо \ \lambda^* - 1 < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

Залишилося знайти, чому дорівнює u^* при $\lambda^* - 1 = 0$.

Оскільки множник є неперервною функцією, яка задовольняє (2.5), то існує таке $\tau' \in [0, T]$, що

$$\lambda^*(t) < 1, \ \forall t \in [\tau', T]. \quad (2.9)$$

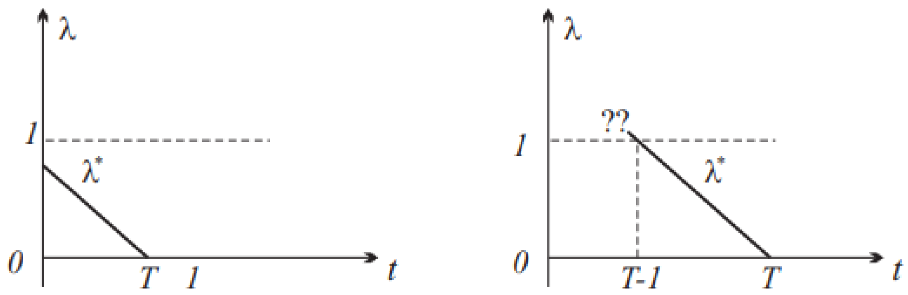
Використовуючи (2.8) і (2.9), ми маємо розв'язати звичайне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^* = -1 \ в \ [\tau', T], \\ \lambda^*(\mathrm{T}) = 0, \end{cases}$$

звідки одержимо

$$\lambda^*(t) = T - t, \qquad \forall t \in [\tau', T]. \quad (2.10)$$

Очевидно, ми маємо два випадки: $\mathrm{T} \le 1$ і $\mathrm{T} > 1$ (рис. 2.1).



Випадок $T \le 1$ і випадок $T > 1$

Рис. 2.1

Розглянемо окремо кожен випадок.

1. Випадок $T \le 1$

У даному випадку отримуємо $\tau' = 0$ *і*, отже, $u^* = 0$ *і* $x^* = \alpha$ на $[0, T]$ (рис. 2.2).

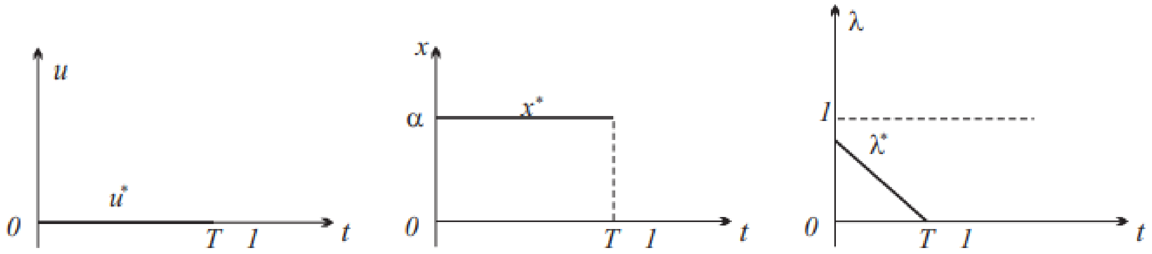


Рис. 2.2

З економічної точки зору, якщо оптимальна стратегія будується на короткий термін часу, то краще продати всю вироблену продукцію без будь-яких інвестицій. Зауважимо, що стратегія u^*, яку ми виявили, є екстремальною. Щоб гарантувати достатні умови для такого екстремуму, ми розглянемо випадок 2.

2. Випадок $T > 1$.

У цій ситуації, враховуючи (2.8), маємо $\tau' = T - 1$. Отже,

$$\lambda^*(T - 1) = 1. \tag{2.11}$$

Перш за все, якщо існує інтервал $I \subset [0, T - 1)$ такий, що $\lambda^*(t) < 1$, то $u^*=0$ і спряжене рівняння (2.3) набуде вигляду $\dot{\lambda}^* = -1$, а це неможливо, оскільки $\lambda^*(T - 1) = 1$.

По-друге, якщо існує інтервал $I \subset [0, T - 1)$ такий, що $\lambda^*(t) = 1$, тоді $\dot{\lambda}^* = 0$ і в спряженому рівнянні (2.3) не буде рівності.

Припустимо, що існує інтервал $I = [\tau'', T - 1) \subset [0, T - 1)$ такий що $\lambda^*(t)>1$. Тоді, використовуючи (2.8), ми повинні розв'язати звичайне диференціальне рівняння

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^* + \lambda^* = 0 \ \ в \ [\tau'', T-1], \\ \lambda^*(\mathrm{T}-1) = 1, \end{cases}$$

Це означає, що

$$\lambda^*(t) = e^{T-t-1}, \text{ для } t \in [0, T - 1].$$

Зауважимо, що вибір $\tau'' = 0$ відповідає усім необхідним умовам.

Отже, з (2.8) маємо

$$u^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } 0 \le t \le \mathrm{T} - 1 \\ 0 & \text{для } \mathrm{T} - 1 < t \le T \end{cases} \tag{2.12}$$

З неперервності функції x^* і початкової умови $x(0) = \alpha$ одержимо, що

$$\begin{cases} \dot{x}^* = x^* & \text{на } [0, T-1] \\ x^*(0) = \alpha \end{cases}$$

звідки отримаємо $x^*(t) = \alpha e^t$. Отже,

$$\begin{cases} \dot{x}^* = 0 & \text{в } [T-1, T], \\ x^*(T-1) = \alpha e^{T-1} \end{cases}$$

це означає $x^*(t) = \alpha e^{T-1}$. Відповідно,

$$x^*(t) = \begin{cases} \alpha e^t & \text{для } 0 \le t \le \mathrm{T}-1, \\ \alpha e^{T-1} & \text{для } T-1 < t \le T \end{cases}$$

Зважаючи, що

$$\lambda^*(t) = \begin{cases} e^{T-t-1} & \text{для } 0 \le t \le \mathrm{T}-1 \\ T-t & \text{для } \mathrm{T}-1 < t \le T \end{cases} \tag{2.13}$$

можемо зобразити графічно відповідно u^*, x^*, λ^* (рис. 2.3):

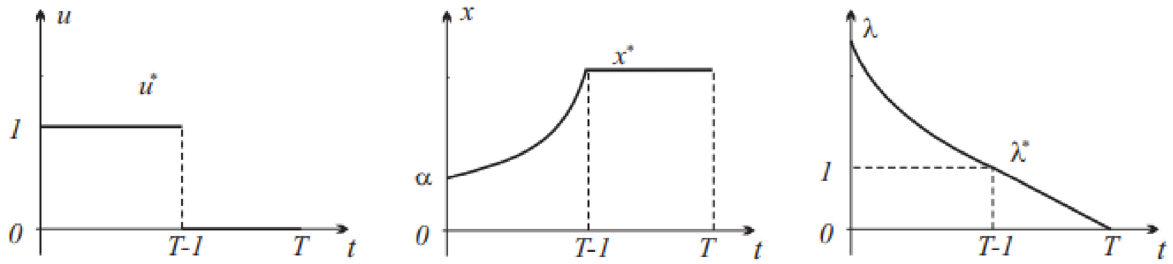


Рис. 2.3

У економічній інтерпретації, коли вибір бізнес-стратегії може здійснюватися у середньостроковій або довгостроковій перспективі, оптимальною стратегією є спрямування всього випуску на збільшення виробництва, а потім продати все, щоб отримати прибуток за останній період.

Зауважимо, що ми повинні довести деякі достатні умови для задачі (x^*,u^*,λ^*), щоб гарантувати, що u^* – це дійсно оптимальна стратегія.

Обчислення показують, що гамільтоніан не є увігнутим. Ми вивчаємо максимізований гамільтоніан (1.10), враховуючи, що $x(t) \ge \alpha > 0$, тобто ми отримуємо

$$\mathrm{H}^0(t,x,\lambda) = \max_{v\in[0,1]}[(1-v)x+\lambda xv] = x + x\max_{v\in[0,1]}[(\lambda-1)v].$$

Для того, щоб застосувати теорему 1.2, скориставшись виразом (2.13), отримуємо

$$\mathrm{H}^0(t,x,\lambda^*(t)) = \begin{cases} e^{T-t-1} & \text{якщо } t\in[0,T-1) \\ x & \text{якщо } t\in[T-1,T] \end{cases}$$

Зауважимо, що для кожного фіксованого t функція $x \to H^0(t, x, \lambda^*(t))$ є увігнутою відносно x, а отже, виконуються умови теореми 1.2. Тоді ми отримаємо, що $H(t, x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t)) = \alpha e^{T-1}$для всіх $t \in [0, T]$.

2.3 Прикладний аспект застосування динамічного методу програмування Беллмана для побудови бізнес-стратегії

Будемо розглядати задачу (2.1), сформульовану в параграфі 2.1:

$$\begin{cases} \max\limits_{u\in C}\int_0^T \big(1-u(t)\big)x(t)Pdt \\ x = ux \\ x(0)=\alpha \\ C = \{u{:}\,[0,T]\longrightarrow[0,1]\subset\mathbb{R}, u\in KC\} \end{cases}.$$

де α і T є додатними і фіксованими константами. Будемо шукати функцію V : $[0, T] \times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє необхідні умови Беллмана-Гамільтона-Якобі (1.15) і кінцеву умову (1.14).

Оскільки через $x(t)$ позначено кількість продукту (у момент t,), логічно припустити в $V(\tau, \xi)$, що ξ (тобто виробництво в момент τ) не є від'ємним. Отже, ми шукаємо V : $[0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ з рівняння

$$\frac{dV}{dt} + \max_{v\in[0,1]}\left((1-v)x + \frac{dV}{dx}xv\right) = 0 \quad \forall(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R} \qquad (2.14)$$

з умовою

$$V(T, x) = 0 \qquad \forall x > 0. \qquad (2.15)$$

Як і в підрозділі 2.2, ми можемо перевірити, що з того, що $x(0) = \alpha > 0$ і $\dot{x} = ux \geq 0$ випливає, що $x(t) \geq \alpha$ для кожного $t \in [0, T]$. Отже, маємо $x > 0$ і рівняння в (2.14) набуває вигляду

$$\frac{dV}{dt} + x + x \max_{v\in[0,1]} \left[v\left(\frac{dV}{dx} - 1\right)\right] = 0, \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^+ \quad (2.16)$$

Таким чином, якщо $\frac{dV}{dx} - 1 > 0$, то отримаємо максимум у (2.16) для $v = 1$; з іншого боку, якщо $\frac{dV}{dx} - 1 < 0$, то максимум у (2.16) реалізується для $v = 0$. Тепер зазначимо, що рівняння (2.15) дає $\frac{dV}{dx}$ (T, x) = 0, для всіх x > 0. Отже, припустимо, що існує точка $\tau \in [0, T)$ така, що

$$\frac{dV}{dx}(t,x) < 1, \quad \text{для усіх } t \in [t,T]. \quad (2.17)$$

За цим припущенням рівняння (2.16) на множині $[\tau, T]$ набуде вигляду

$$\frac{dV}{dt} + x = 0 \quad \Longrightarrow \quad V(t,x) = -xt + g(x),$$

де $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ – диференційована функція. Використовуючи (2.15), можемо показати, що

$$V(x, T) = -xT + g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = xT.$$

Отже,

$$V(t, x) = x(T - t), \quad \forall (t, x) \in [\tau, T] \times (0, \infty)$$

і $\frac{dV}{dx} = T - t$ для усіх $t \in [\tau, T]$. Оскільки попередні аргументи мають місце в припущенні (2.17), тобто $T - t < 1$, для часу τ маємо

$$\tau = \max\{T - 1, 0\}.$$

Розглянемо два різні випадки: $T \leq 1$ і $T > 1$.

1. Випадок $T \leq 1$.

У цій ситуації маємо $V : [0, T]\times(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, визначене як $V(t, x) = x(T - t)$, що задовольняє рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі і кінцеву умову. Функція w, яка реалізує максимум в (2.14), тотожно дорівнює нулю, а теорема 1.5 гарантує, що оптимальне керування – це $u^*=0$. Крім того, ми отримуємо оптимальну траєкторію за допомогою

$$\dot{x}^* = u^* x^* \quad \Longrightarrow \quad \dot{x}^* = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = \alpha.$$

У економічній інтерпретації це означає, що коли бізнес-стратегію необхідно побудувати на короткостроковий термін часу, найкращий вибір – продати всю продукцію.

2. Випадок T > 1.

Оскільки у даній ситуації маємо $\tau = T - 1$, функція $V : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ з $[T - 1, T] \times \mathbb{R}$ визначається як

$$V(t, x) = x(T - t)$$

і задовольняє рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі і кінцеву умову. Ми повинні побудувати цільову функцію $V \in [0, T - 1] \times (0, \infty)$.

Згідно з припущенням щодо диференційованістю функції V, для неперервності V маємо

$$V(T - 1, x) = x \quad \text{для всіх } x > 0. \tag{2.18}$$

Припустимо, що існує $\tau' < T - 1$ таке, що $\frac{dV}{dx}(t, x) < 1$ в $[\tau', T - 1] \times (0, \infty)$. Отже, з (2.14) отримаємо [27]

$$\frac{dV}{dx} + x = 0 \;\Rightarrow\; V(t, x) = -x\,t + h(x),$$

де $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ − породжена диференційована функція. Відношення (2.18) забезпечує той факт, що для всіх $x \in \mathbb{R}$

$$V(x; T) = -x\,T + h(x) = x \;\Rightarrow\; h(x) = x\,T:$$

Тоді ми отримаємо, $V(x; T) = x(T - t)$ для $\forall (t, x) \in [\tau', T - 1] \times (0, \infty)$, звідки отримаємо, що $\frac{dV}{dx} = T - t$ і умова $\frac{dV}{dx}(t, x) < 1$ не виконується. Отже, такого τ' не існує.

Далі, припустимо, що існує $\tau' < T - 1$ таке, що $\frac{dV}{dx}(t, x) = 1$ в $[\tau', T - 1] \times (0, \infty)$. Тоді, з (2.14) отримаємо

$$\frac{dV}{dt} + x = 0 \;\Rightarrow\; V(t, x) = -x\,t + k(x),$$

а також будемо мати

$$\frac{dV}{dx} = 1 \;\Rightarrow\; V(t, x) = x + l(t),$$

де $k, l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ − диференційовані функції. З двох останніх рівностей одержимо протиріччя, а це означає, що такого τ' не існує.

Тож тепер припустимо, що існує $\tau' < T - 1$ таке, що $\frac{dV}{dx}(t, x) > 1$ в $[\tau', T - 1] \times (0,\infty)$. Отже, з (2.14) отримаємо

$$\frac{dV}{dt} + x\frac{dV}{dx} = 0.$$

Розв'язок даного диференціального рівняння з частинними похідними [27] має вигляд $V(t, x) = a\, x\, e^{-t}$ при $a \in \mathbb{R}$. За умовою (2.18) маємо $V(t, x) = x\, e^{-t+T-1}$ з $[\tau', T - 1] \times \mathbb{R}$.

Зауважимо, що $\frac{dV}{dx} = e^{-t+T-1} > 1$ тоді і лише тоді, коли $t < T - 1$, а отже, ми можемо вибрати $\tau' = 0$. Отже, функція $V : [0, T] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ визначена як

$$V(t,x) = \begin{cases} xe^{-t+T-1} \text{ для } (t,x) \in [0, T-1] \times (0,\infty), \\ x(T-t) \text{ для } (t,x) \in \{T-1, T] \times (0.\infty) \end{cases}$$

задовольняє рівняння Беллмана-Гамільтона-Якобі і кінцеву умові. Зауважимо, що V є диференційованим.

Використовуючи теорему 1.5, оптимальне керування визначається через функцію w у (1.21), що реалізує максимум у (1.21) (тобто в (2.14)), тоді для нашого випадку отримуємо, враховуючи, що $w(t, x^*(t)) = u^*(t)$,

$$w(t,x) = \begin{cases} 1 \text{ якщо } 0 \le t \le T-1, \\ \\ 0 \text{ якщо } T-1 < t \le T. \end{cases} \Longrightarrow u^*(t) = \begin{cases} 1 \text{ якщо } 0 \le t \le T-1, \\ \\ 0 \text{ якщо } T-1 < t \le T. \end{cases}$$

Будуємо оптимальну траєкторію за динамікою та початковою умовою як у попередньому параграфі 2.2:

$$x^*(t) = \begin{cases} \alpha e^{t} \quad \text{для } 0 \le t \le T-1, \\ \alpha e^{T-1} \text{ для } T-1 < t \le T \end{cases}$$

У ситуації, коли бізнес-стратегія середньострокова або довгострокова, найкращий вибір полягає в тому, щоб інвестувати все у виробництво, щоб збільшити його до моменту часу $T-1$, а потім продати все, щоб отримати максимальний прибуток.

ВИСНОВКИ

У роботі була розв’язана задача оптимального керування, яка описується звичайним диференціальним рівнянням.

Щоб досягти мети, ця задача оптимального керування була досліджена двома основними методами – варіаційним підходом (принцип максимуму Понтрягіна) та підходом динамічного програмування.

Постановка дослідженої задачі носить прикладний характер, зокрема, з її допомогою побудовано бізнес-стратегію для підприємства, яке виробляє унікальний товар. Встановлено, що так побудована бізнес-стратегія є екстремальною.

Обидва підходи показують, що якщо оптимальна стратегія будується на короткий термін часу, то краще продати всю вироблену продукцію без будь-яких інвестицій. У ситуації, коли бізнес-стратегія є середньостроковою або довгостроковою, найкращим вибором є інвестування всієї виробленої продукції у виробництво, щоб збільшити його до прикінцевого часу, а потім продати все, щоб отримати зрештою максимальний прибуток.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. [3-є вид.]. – М.: Физматлит, 2007. – 408 с.
2. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования / Р. Беллман, С. Дрейфус. – М.: Наука, 1965. – 459 с.
3. Беллманн Р.Э. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 402 с.
4. Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – К.: Вища школа, 1975. – 327 с.
5. Вдовиченко Ю.В. Особливості використання стратегій економічної діяльності міжнародним бізнесом // *Ефективна економіка*. № 11, 2010. – URL: http://www.economy.nayka.com.ua/?op=1&z=390
6. Горєлов Д.О., Большенко С.Ф. Стратегія підприємства. – Харків: Вид-во ХНАДУ, 2010. – 133 с.
7. Григорків В.С. Оптимальне керування в економіці. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – 200 с.
8. Дикань В. Л. Стратегічне управління : навч. посіб. [Електронний ресурс] / В. Л. Дикань, В. О. Зубенко, О. В. Маковоз, [та ін.]. – К.: ЦУЛ, 2013. URL: http://westudents.com.ua/knigi/-strategchne-upravlnnya-dikan-vl.html
9. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / Пер. с англ. М.: Айрис-Пресс, 2002. – 553 с.
10. Казаков О.Л., Царькова Н.И. Теория оптимального управления в экономике: Учебно-методическое пособие. – М.: МГИУ, 2009.
11. Колмановский В.Б. Задачи оптимального управления // Соросовский образовательный журнал. Математика, 1997. – С.121–126. URL: http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9706_121.pdf
12. Копп Р. Принцип максимума Понтрягина / Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. – М.: Наука, 1965. – С. 307 – 337.

13. Корнієнко В.І., Гусєв О.Ю., Герасіна О.В., Щокін В.П. Теорія систем керування: підручник. – Дніпро: Нац. гірн. ун-т, НГУ, 2017. – 497 с.
14. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
15. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: Учебное пособие. – М.: МГУ экономики, статистики и информатики, 2004. – 133 с.
16. Луцька Н.М. Оптимальні системи управління: конспект лекцій для студентів напряму підготовки 6.050202 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» професійного спрямування «Автоматизоване управління технологічними процесами» денної та заочної форм навчання. – К.: НУХТ, 2013. – 44 с.
17. Методичні рекомендації щодо складання стратегічних планів підприємствами державного сектору. Доступно за посиланням: URL: https://www.me.gov.ua/Documents/Download?id=3e1db9ca-68ce-4064-a3a7-d45d5a61d621
18. Ногин В.Д. Введение в оптимальное управление. Учебно-методическое пособие. – СПб: Изд-во «ЮТАС», 2008. – 92 с. URL: http://www.apmath.spbu.ru/ru/staff/nogin/publ/publ5.pdf
19. Перестюк М.О., Станжицький О.М., Капустян О.В., Ловейкін Ю.В. Варіаційне числення та методи оптимізації. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2010. – 121 с.
20. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М. :Наука, 1969. – 384 с.
21. Рильська Н. В. Бізнес-стратегія торговельного підприємства як алгоритм досягнення концептуальної стратегічної мети // *Економічні науки. Економіка підприємств.* № 5.– URL: http://nauka.kushnir.mk.ua/?p=525
22. Самойленко В.И., Пузырев В.А., Грубрин И.В. Техническая кибернетика: учеб. пособие. – М.: Изд-во МАИ, 1994. – 280 с.

23. Чернышев С. И. Об использовании метода динамического программирования Р. Беллмана в задачах экономического содержания. *БІЗНЕС ІНФОРМ. Економіка. Економіко-математичне моделювання.*- 2013. – № 6. – С. 110–119.
24. Arrow A., Intriligator M. D., Hildenbrand W., Sonnen-Schein H. Handbook of mathematical economics. – Amsterdam: North Holland, 1991. – 750 p.
25. Barro R., Sala-i-Martin X. Economic growth. Boston: MIT Press, 2003. – 672 p.
26. Bellman R. Dynamic programming and modern control theory (ЧАСОВЫЕ ДОКЛАДЫ. ONE-HOUR REPORTS). – URL: http://www.mathunion.org/ICM/ICM1966.1/Main/icm1966.1.0065.0082.ocr.pdf
27. Calogero A. Notes on optimal control theory with economic models and exercises. – Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Universita di Milano-Bicocca. – May 14, 2018. – 152 p.
28. Fleming W.H. and Rishel P.W. Deterministic and stochastic optimal control. Springer-Verlag, 1975.
29. Kapustian O., Reznichenko I. The optimal control problem with application to business strategy // XX Міжнародна науково-практична конференція «Шевченківська весна – 2022: Математика, статистика, механіка. Прикладна математика, комп'ютерні науки, інженерія програмного забезпечення, системний аналіз» (on-line, Київ, 14 березня 2022 р., с. 45–46. URL: https://probability.knu.ua/shv2022/ShV_2022.pdf)
30. Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control nonlinear systems // *SIAM Journal on control*, № 4, 1966. – С. 139–15.