

УДК 531/534

<https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/1.9>

Білий В.О.¹, к.ф.-м.н.
Білий О.Г.², ст. викладач

V. O. Bilyi¹, Ph.D.
O. G. Bilyi², Senior Lecturer.

**Порівняльна динаміка витікання
рідини із ємностей певних геометричних
форм в залежності від зміни осі
обертання.**

**Comparative dynamics of liquid outflow from
containers of certain geometric shapes
depending on the change in the axis of
rotation.**

¹ Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м. Київ, проспект
Берестейський, 37.
e-mail: valeri_y@ukr.net

¹ National Technical University of Ukraine “Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Beresteysky Avenue, 37.
e-mail: valeri_y@ukr.net

² Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря
Сікорського», 03056, м.Київ, проспект
Берестейський, 37.
e-mail: belyi.oleksandr@gmail.com

² National Technical University of Ukraine “Igor
Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 03056, Kyiv,
Beresteysky Avenue, 37.
e-mail: belyi.oleksandr@gmail.com

В металургійних підприємствах, на деяких заводах та фабриках в технологічних процесах застосовується розливання різного роду рідин (чавун, сталь, золото, срібло, шоколад тощо) із великих ємностей різних геометричних форм в менші стандартні форми методом повороту ємності відносно закріпленої точки або фіксованої осі і виливанні через край. Важливо, щоб при цьому потік рідини був рівномірним, що в дійсності не справджується навіть при постійній кутовій швидкості обертання. В даній роботі розглянуто процес розливу із ємностей конічної та параболічної форм – найбільш уживаних на практиці. В розвиток робіт авторів по цій темі, розглянуто інший механізм повороту, що часто зустрічається, а саме, поворот відносно діаметра верхньої частини котла. Отримані результати вивчення динаміки зміни розходу рідини в залежності від кута нахилу, аналізуємо в порівнянні з результатами попередніх робіт авторів і подаємо висновок-рекомендації. Враховуючи ці теоретичні дослідження, роботу поворотних механізмів в кожному конкретному випадку можна підкорегувати, виробивши алгоритм послідовних дій, що забезпечують рівномірність процесу виливання.

Ключові слова: геометрична форма, обертання відносно закріпленої точки або осі, кутова швидкість обертання, кут нахилу, розхід рідини при розливі, динаміка витікання, рівномірний витік

In metallurgical enterprises, in some plants and factories, in technological processes, pouring of various types of liquids (cast iron, steel, gold, silver, chocolate, etc.) from large containers of various geometric shapes into smaller standard forms by the method of turning the container relative to a fixed point or a fixed axis and pouring over the edge. It is important that the flow of liquid is uniform, which in reality is not true even at a constant angular speed of rotation. This paper examines the process of pouring from containers of conical and parabolic shapes, which are the most widely used in practice. In the development of the authors' works on this topic, another mechanism of rotation, which is often found, is considered, namely, rotation relative to the diameter of the upper part of the boiler. We analyze the obtained results of the study of the dynamics of changes in fluid consumption depending on the angle of inclination in comparison with the results of the previous works of the authors and provide conclusions and recommendations. Taking into account these theoretical studies, the operation of rotary mechanisms in each specific case can be adjusted by developing an algorithm of sequential actions that ensure the uniformity of the pouring process.

Key Words: geometric shape, rotation relative to a fixed point or axis, angular speed of rotation, angle of inclination, liquid flow during pouring, flow dynamics, uniform flow.

Вступ

В роботах [1] та [2] розглянуто динаміку промислового розливу рідини із ємностей певних геометричних форм при повороті відносно осі, що проходить через нижню точку ємності. Розглянемо тут динаміку витікання, якщо вісь обертання це діаметр верхньої частини геометричної форми.

Основна частина

I. Нехай ємність – це конус з параметрами R та H , наповнений рідиною і повертається відносно закріпленої осі FQ з постійною кутовою швидкістю ω . На Рис. 1, L – коло дотику рідини на початку нахилу конуса, L' – після нахилу на кут φ , A – точка вилливу.

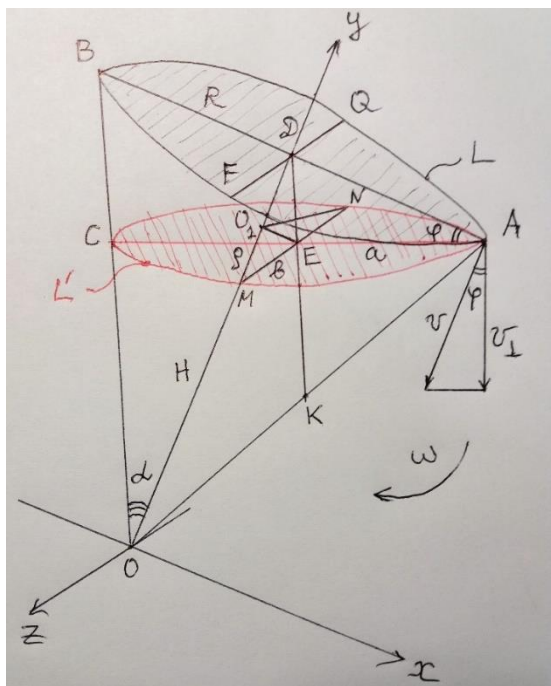


Рис. 1 Конічна ємність

Ясно, що L' – еліпс, параметри якого a та b змінюються в залежності від φ .

E – центр еліпса лежить на лінії центрів еліпсів, DK – середня лінія $\triangle OAB$, $AC = 2a$ – велика вісь, $MN = 2b$ – мала вісь. В системі координат, вибраній як на Рис. 1, в площині XOY кутовий коефіцієнт прямої AC буде

$$k_{AC} = k = \operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{R}{H} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Неважко бачити [1], якщо $C(x_c, y_c)$, то $x_c = R \frac{kR-H}{kR+H}$, $y_c = H \frac{H-kR}{kR+H}$, $AC = 2a = \frac{2RH\sqrt{1+k^2}}{kR+H}$. Знайдемо тепер b . На лінії MN перетинаються

круг з центром в точці O_1 радіуса ρ та еліпс, велика вісь якого $AC = 2a$. Тоді із $\triangle O_1EM$ маємо, $b^2 = \rho^2 - (O_1E)^2$, де $O_1E = x_E = \frac{x_A+x_C}{2} = \frac{kR^2}{kR+H}$, $\rho = \frac{R}{H} y_E = \frac{R y_A+y_C}{2} = \frac{RH}{kR+H}$. Тобто $b = R \sqrt{\frac{H-kR}{H+kR}}$, $H - kR \geq 0$, $k = \operatorname{tg} \varphi \leq \frac{H}{R} = \operatorname{ctg} \alpha$.

Таким чином,

$$S_{L'} = \pi ab = \pi R^2 H \sqrt{\frac{(H-kR)(1+k^2)}{(H+kR)^3}}.$$

Тут $S_{L'}$ – площа поверхні рідини після нахилу на кут φ .

Знайдемо розхід рідини P_φ , який визначається як об'єм витікаючої рідини за одиницю часу і дорівнює добутку площі поверхні витіку рідини на вертикальну складову v_\perp швидкості руху точки A відносно осі обертання FQ .

Маємо, $v = \omega R$, $v_\perp = v \cos \varphi = \omega R \cos \varphi$, тобто

$$\begin{aligned} P_\varphi &= S_{L'} \cdot v_\perp = \\ &= \pi R^2 H \omega R \sqrt{\frac{(H-kR)(1+k^2)}{(H+kR)^3}} \cos \varphi = \\ &= \pi R^3 \omega \cos \alpha \sqrt{\frac{\cos(\alpha+\varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^3(\alpha-\varphi)}}. \end{aligned}$$

Дослідимо P_φ на екстремум, маємо

$$\begin{aligned} \left(\frac{\cos(\alpha+\varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^3(\alpha-\varphi)} \right)' &= \frac{\cos \varphi}{\cos^4(\alpha-\varphi)} \times \\ &\times (-3 \sin(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) \cos \varphi - \\ &- 2 \sin \varphi \cos(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) - \\ &- \cos \varphi \cos(\alpha-\varphi) \sin(\alpha+\varphi)) = 0. \end{aligned}$$

Або

$$\begin{aligned} \cos \varphi (-3 \sin(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) - \\ - \cos(\alpha-\varphi) \sin(\alpha+\varphi)) - \\ - 2 \sin \varphi \cos(\alpha-\varphi) \cos(\alpha+\varphi) = \\ = \cos \varphi (\sin 2\varphi - 2 \sin 2\alpha) - \\ - \sin \varphi (\cos 2\alpha + \cos 2\varphi) = \\ = \sin \varphi - 2 \cos \varphi \sin 2\alpha - \sin \varphi \cos 2\alpha = \\ = \sin \varphi (1 - \cos 2\alpha) - 2 \cos \varphi \sin 2\alpha = 0, \end{aligned}$$

тобто

$$\operatorname{tg} \varphi = 2 \frac{\sin 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha,$$

що неможливо, бо $\operatorname{tg} \varphi \leq \operatorname{ctg} \alpha$.

Також $\cos \varphi \neq 0$, бо $\varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$, аналогічно $\cos(\alpha-\varphi) \neq 0$. Таким чином, $P_\varphi' < 0$ для $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha$ і P_φ – монотонно спадає від

максимального $P_\varphi|_{\varphi=0} = \pi R^3 \omega$ до мінімального $P_\varphi|_{\varphi=\frac{\pi}{2}-\alpha} = 0$.

II. Далі розглянемо ємність – **параболоїд** обертання з параметрами R та H , наповнений рідиною, обертається відносно осі FQ з постійною кутовою швидкістю ω . На Рис. 2, L – коло дотику рідини на початку нахилу параболоїда, L' – після нахилу на кут φ , A – точка виливу.

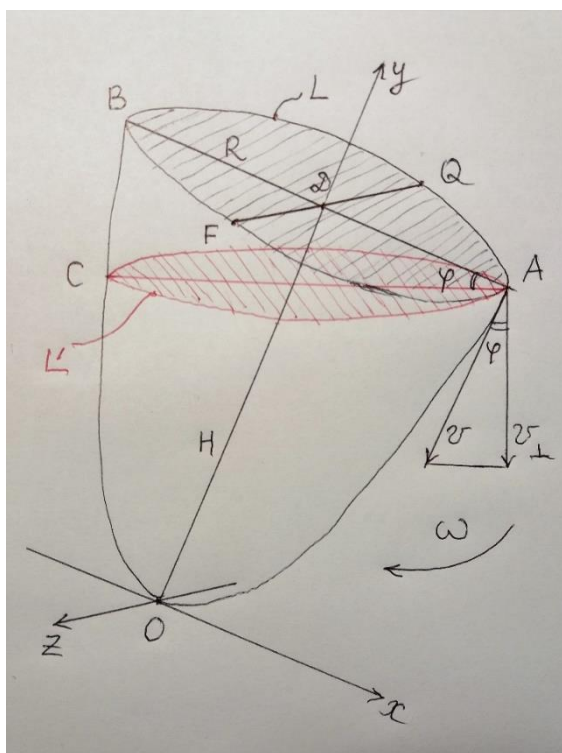


Рис. 2 Параболоїд

У вибраній таким чином системі координат, можна показати [2], що проекція L' на XOZ – це коло із зміщеним центром, рівняння якого

$$\left(x - \frac{kR^2}{2H}\right)^2 + z^2 = \frac{R^2}{4H^2} (2H - kR)^2,$$

де $k = \operatorname{tg} \varphi$.

Радіус цього кола $r = R \left(1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi\right)$, тому

$$\begin{aligned} S_{L'} &= \frac{\operatorname{Pr}_{xOz} S_{L'}}{\cos \varphi} = \\ &= \frac{\pi r^2}{\cos \varphi} = \frac{\pi R^2 (2H - R \operatorname{tg} \varphi)^2}{4H^2 \cos \varphi}, \end{aligned}$$

де $2H - R \operatorname{tg} \varphi \geq 0$ або $\operatorname{tg} \varphi \leq \frac{2H}{R} = \operatorname{tg} \varphi_{\max}$ (дотична до параболи в точці A має кутовий коефіцієнт $k = \operatorname{tg} \varphi_{\max} = \frac{2H}{R}$).

Знайдемо тепер розхід рідини P_φ , маємо:

$$P_\varphi = S_{L'} \cdot v_\perp,$$

де $v_\perp = v \cos \varphi = \omega R \cos \varphi$.

Тобто

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \frac{\pi R^2 (2H - R \operatorname{tg} \varphi)^2}{4H^2 \cos \varphi} \omega R \cos \varphi = \\ &= \frac{\pi \omega R^3}{4H^2} (2H - R \operatorname{tg} \varphi)^2 = \\ &= \pi \omega R^3 \left(1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi\right)^2. \end{aligned}$$

Дослідимо P_φ на екстремум

$$P_\varphi' = 2\pi \omega R^3 \left(1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi\right) \left(-\frac{R}{2H} \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right) = 0$$

$$1) 1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi = 0,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2H}{R} = \operatorname{tg} \varphi_{\max}, \quad \varphi = \varphi_{\max}.$$

При цьому $P_\varphi = 0$ – найменше значення.

$$2) \frac{1}{\cos^2 \varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi \neq 0.$$

Тобто $P_\varphi' \leq 0$, P_φ – спадає від

$$P_\varphi|_{\varphi=0} = \pi \omega R^3 - \max \text{ до } P_\varphi|_{\varphi=\varphi_{\max}} = 0 - \min.$$

III. Порівняльна динаміка

A) Розглянемо конічну ємність та два способи виливу.

1. В [1] було розглянуто виливання рідини обертанням навколо вершини конуса. При такому способі виливу

$$\begin{aligned} P_\varphi &= \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2} \cos \alpha \sqrt{\frac{\cos(\alpha + \varphi)}{\cos^3(\alpha - \varphi)}} \times \\ &\quad \times \sin(\alpha + \varphi). \end{aligned}$$

Було показано, що P_{\max} за умови $\frac{1}{3} < \cos 2\alpha < 1$ буде при гострому куті φ , що задовольняє рівності

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \alpha \frac{3 \cos 2\alpha - 1}{3 \cos 2\alpha + 1},$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} - \alpha = \varphi_{\max}.$$

якщо ж умова $\frac{1}{3} < \cos 2\alpha < 1$ не виконана, то

$$P_{\max} = P(\varphi = 0) = \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2} \sin \alpha,$$

$$P_{\min} = P\left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

2. У випадку, розглянутому в цій статті

$$P_\varphi = \pi R^3 \omega \cos \alpha \sqrt{\frac{\cos(\alpha + \varphi) \cos^2 \varphi}{\cos^3(\alpha - \varphi)}}, \quad P_\varphi \downarrow, \text{ причому}$$

$$P_{\max} = P(\varphi = 0) = \pi R^3 \omega,$$

$$P_{\min} = P\left(\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0.$$

B) Розглянемо тепер параболічну ємність

1. При обертанні навколо закріпленої вершини [2], маємо при $H > R$, $P_{\max} = P(\varphi_1)$, де

$$0 \leq \varphi_1 = \arctg \left(\frac{2H^2 + R^2}{3RH} \right) < \\ < \varphi_{max} = \arctg \frac{2H}{R}, \\ P_{max} = \frac{\pi R^2}{4H^2} \omega \sqrt{R^2 + H^2} \frac{(2H - R \operatorname{tg} \varphi_1)^2}{\cos \varphi_1} \times \\ \times \cos \left(\arctg \frac{H}{R} - \varphi_1 \right).$$

При $H \geq R$,

$$P_{max} = P(\varphi = 0) = \pi R^2 \omega \sqrt{R^2 + H^2} \times \\ \times \cos \left(\arctg \frac{H}{R} \right), \\ P_{min} = P(\varphi_{max}) = 0.$$

2. Якщо обертання буде відносно діаметра FQ , то

$$P_\varphi = \pi \omega R^3 \left(1 - \frac{R}{2H} \operatorname{tg} \varphi \right)^2 - \text{монотонно спадає і} \\ P_{max} = P(\varphi = 0) = \pi \omega R^3,$$

$$P_{min} = P(\varphi_{max}) = 0.$$

Висновки

Маючи ці дані про динаміку розходу рідини для ємностей різних геометричних форм при різних способах виливу, можна в кожному конкретному випадку виробити алгоритм послідовних дій управління механізмів, які забезпечують процес виливання так, що він стає достатньо рівномірним.

На завершення висловлюємо подяку професору Василюк О.І. за увагу та корисні поради.

Список використаних джерел

1. Білий В.О., Білий О.Г. Динаміка витікання рідини із ємностей класичних геометричних форм. Частина I. Znanstvena Misel Journal, 2022, 70, 24–28. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676>
2. Білий В.О., Білий О.Г. Динаміка витікання рідини із ємностей класичних геометричних форм. Частина II. Znanstvena Misel Journal, 2022, 71, 38-44. <https://DOI: 10.5281/zenodo.7248072>

References

1. Bilyi V., Bilyi O. (2022). DYNAMICS OF LIQUID OUTFLOW FROM CONTAINERS OF CLASSIC GEOMETRIC SHAPES. PART I. Znanstvena Misel Journal, 70, 24–28. <https://doi.org/10.5281/zenodo.7095676>
2. Bilyi V., Bilyi O. (2022). DYNAMICS OF LIQUID OUTFLOW FROM CONTAINERS OF CLASSIC GEOMETRIC SHAPES. PART II. Znanstvena Misel Journal, 71, 38-44. <https://DOI: 10.5281/zenodo.7248072>

Надійшла до редколегії 15.05.23