

УДК 539.3

Адлуцький В. Я.¹, к.ф.-м.н., с.н.с.,
Годес А. Ю.², к.ф.-м.н.,
Лобода В. В.³, д.ф.-м.н., проф.

V. J. Adlucky¹, Ph. D.,
A. Yu. Hodes², Ph. D.,
V. V. Loboda³, Dr. Sci., Prof.

**Скінченноелементний аналіз
пружно-пластичного стану тріщини
на межі розділу площини з круговим
включенням**

**Finite element analysis of elastic-plastic state
of crack at the interface between infinite plane
and circular inclusion**

¹ Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: adluckiiivy_kkt@dnu.dp.ua

¹ Oles Honchar National University of Dnipro, 49050,
Dnipro, Gagarina av., 72,
e-mail: adluckiiivy_kkt@dnu.dp.ua

² Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: alinej@rambler.ru

² Дніпровський національний університет імені О.
Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: alinej@rambler.ru

³ Дніпровський національний університет імені
О. Гончара, 49050, м. Дніпро, пр. Гагаріна, 72,
e-mail: lobvv@ua.fm

³ Oles Honchar National University of Dnipro, 49050,
Dnipro, Gagarina av., 72,
e-mail: lobvv@ua.fm

Із застосуванням скінченноелементного підходу розглядається задача визначення пружно-пластичного напружено-деформованого стану матриці з включенням з іншого матеріалу при наявності дугової тріщини на межі розділу. Допускається виникнення контактних макрозон між берегами тріщини. Прийнята модель анізотропного зміцнення матеріалів з дволанковою апроксимацією кривих "напруження-деформація". Нескінченна площина моделюється квадратною областю з довжиною сторони на порядок більшою, ніж діаметр включення, контактна взаємодія берегів тріщини відтворюється за допомогою гар-елементів. Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислюються значення інваріантного J -інтеграла Черепанова-Райса вздовж замкнутих контурів, достатньо віддалених від вершин тріщини. Проведено порівняння отриманих результатів з аналітичними розв'язками лінійної теорії пружності. Спостерігається незначне збільшення розбіжностей між цими результатами в процесі переходу від пружного до пружно-пластичного стану внаслідок зростання рівня навантаження.

Ключові слова: дугова тріщина, пружно-пластичний стан, метод скінченних елементів, контактна задача.

The problem on determining of elastic-plastic stress-strain state of infinite plane with a circular inclusion made from another material and an arc crack at the interface under action of arbitrary mechanical loadings applied at infinity is considered using the FEM approach. The problem is resolved within the framework of contact model for which the possibility of appearance of contact macrozones between crack faces is assumed. The isotropic hardening of materials with bilinear approximation of stress-strain curves is considered. The infinite plane is modeled by square domain whose size is of an order of magnitude greater than inclusion diameter. Contact interaction of crack faces is simulated using gap elements. To obtain the energy release rate the J -integrals are calculated along several closed contours around the crack tips. The comparison of obtained results with available analytical solutions for linear elasticity shows that insignificant differences take place during transformation from pure elastic to elastic-plastic stress-strain state.

Key Words: arc crack, elastic-plastic state, finite element method, contact problem.

Статтю представив д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О.

Вступ

Дослідження залежностей параметрів руйнування біматеріалів з міжфазними дуговими

тріщинами від діючих механічних навантажень є важливим з точки зору підвищення надійності та працездатності систем і пристроїв за наявності міжфазних дефектів. У роботах [1–3] розроблено

чисельно-аналітичні підходи й наведено результати досліджень як для безконтактної, так і контактної моделі дугової тріщини у композиті в умовах пружного деформування. Така постановка є виправданою у випадку крихкого руйнування, однак за наявності матеріалів з вираженими пластичними властивостями виникає питання про те, наскільки суттєвою є залежність параметрів руйнування від пружно-пластичного характеру деформування.

Постановка задачі

Розглядається ізотропна площина (матриця), яка містить кругове включення радіусу R , що скріплено з площиною уздовж всієї межі за винятком дуги $r = R$, $|\theta| < \beta$, де r – полярний радіус, θ – полярний кут, β – кут піврозхилу тріщини. Береги тріщини є гладкими. Вважається, що в результаті деформування вони можуть взаємодіяти з утворенням контактних макрозон. На нескінченності задані головні напруження N_1 , N_2 та кут α_N між напрямом дії напруження N_1 і віссю абсцис (рис. 1). Вважається, що матеріали матриці та включення мають відмінні механічні властивості й за певних рівнів навантаження здатні деформуватися пружно-пластично. Пружні властивості обох матеріалів описуються модулем Юнга E_i й коефіцієнтом Пуассона ν_i , де $i=1$ відповідає матеріалу включення, $i=2$ – матеріалу матриці. Для кожного з матеріалів прийнято критерій текучості Мізеса [4] з ізотропним зміцненням і застосовано дволанкову апроксимацію діаграми $\sigma - \varepsilon$ напруження-деформація при одновісному розтягванні:

$$\sigma = \begin{cases} E_i \varepsilon, & 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\sigma_i^T}{E_i} \\ \sigma_i^T + E_i^t (\varepsilon - \frac{\sigma_i^T}{E_i}), & \varepsilon > \frac{\sigma_i^T}{E_i} \end{cases} \quad (1)$$

де σ_i^T – межа текучості; E_i^t – тангенціальний модуль.

Скінченноелементна модель деформування тіла з тріщиною

Чисельні розв'язання зазначеної задачі здійснювались в середовищі пакета COSMOSM/M 2.6, що реалізує процедури MCE для широкого кола задач механіки суцільного середовища.

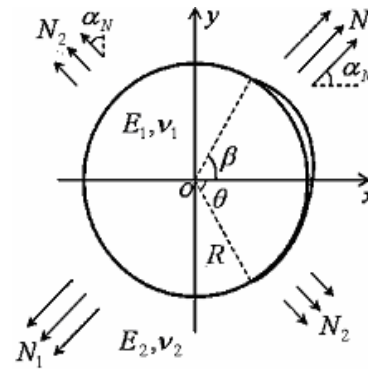


Рис. 1 Схема навантаження біматеріалу з тріщиною

Нескінченна площина моделювалась квадратною областю з довжиною сторони $2L$ при $L/R = 20$, що, як показали чисельні експерименти, забезпечує достатню збіжність з наявними аналітичними результатами для нескінченної області. В процесі дискретизації використовувались чотирикутні 8-вузлові скінченні елементи PLANE2D з поліноміальною апроксимацією переміщень другого порядку. Неоднорідні сітки скінченних елементів згущувались в околі границі між включенням і матрицею й розріджувались з наближенням до зовнішньої границі матриці. У середньому використовувалось близько 10000 скінченних елементів, що забезпечувало практичну незмінність результатів, отриманих при ще більш щільних сітках.

Для моделювання контактної взаємодії берегів тріщини застосовувались контактні елементи GAP, які не перешкоджають розкриттю тріщини й водночас запобігають взаємопроникненню берегів. Такі елементи реалізують односторонні зв'язки за допомогою ітераційного застосування методів штрафних функцій і множників Лагранжа [5].

Напруження на зовнішній границі матриці задавались відповідно до умов навантаження на нескінченності:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= N_1 \sin^2 \alpha_N + N_2 \cos^2 \alpha_N, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha_N, \quad x = \pm L, |y| \leq L; \\ \sigma_y &= N_1 \cos^2 \alpha_N + N_2 \sin^2 \alpha_N, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \sin 2\alpha_N, \quad y = \pm L, |x| \leq L. \end{aligned} \quad (2)$$

Для стабілізації системи від переміщень як жорсткого цілого в кожному куті зовнішньої границі матриці додавався стержневий елемент, жорсткість якого була на декілька порядків меншою, ніж жорсткість матеріалу матриці.

Другий кінець кожного стержня жорстко закріплювався. Така фіксація матриці не вносила помітних змін у напружений стан.

Для отримання інформації про швидкість вивільнення енергії деформації обчислювались значення інваріантного J-інтеграла Черепанова-Райса [6] вздовж замкнутих контурів навколо вершин тріщини. Оскільки концепція інваріантності J-інтеграла виходить з припущення про прямолінійність тріщини в межах контуру інтегрування, початкова й кінцева точки кожного контуру обирались достатньо близько від вершини тріщини, в той час як сам контур проводився за межами можливих пластичних зон, що виникають перед фронтом тріщини.

Розглядалося пропорційне навантаження системи, при якому напруження N_1 і N_2 водночас змінювались лінійно в залежності від значення параметра навантаження. Покроковий процес навантаження дозволяв відслідковувати поступовий перехід від чисто пружного деформованого стану до пружно-пластичного.

Чисельні результати

Певні відмінності результатів пружно-пластичного деформування від чисто пружного були найбільш помітними у випадку безконтактного деформування, коли тріщина розкривається по всій довжині. В табл. 1 наведені дані, що ілюструють залежність відносних значень J-інтеграла від рівня навантаження для різних кутів піврозхилу тріщини β для наступних значень параметрів матеріалу (середньовуглецева сталь) і навантаження:

$$E_1 = E_2 = 0,21 \text{ ГПа}, \quad \nu_1 = \nu_2 = 0,28, \quad E_1' = E_2' = 0,1E_1, \quad \sigma_1^T = \sigma_2^T = 250 \text{ МПа}, \quad N_2 = 0, \quad \alpha_N = 0^\circ.$$

Перший рядок табл.1 містить дані, обчислені з використанням аналітичних результатів [2] для коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для дугової тріщини в однорідному матеріалі:

$$\frac{J}{J_0} = \frac{343 + 168 \cos \beta - 20 \cos 2\beta + 24 \cos 3\beta - 3 \cos 4\beta}{128(\cos \beta - 3)^2},$$

де $J_0 = (1 - \nu_1^2) E_1^{-1} \pi N_1^2 R \sin \beta$ – значення J-інтеграла для прямолінійної тріщини, довжина якої дорівнює довжині хорди, що з'єднує вершини дугової тріщини.

Залежність J/J_0 від рівня навантаження для різних кутів піврозхилу тріщини β

Таблиця 1

$\frac{N_1}{\sigma_1^T}$	β (град.)		
	15	45	90
пружний стан	0,95	0,67	0,31
0,1	0,96	0,68	0,32
0,2	0,98	0,68	0,34
0,3	1,00	0,69	0,37
0,4	1,01	0,70	0,41
0,5	1,02	0,73	0,44
0,6	1,03	0,76	0,46

З наведених даних випливає, що при урахуванні пружно-пластичної поведінки матеріалу значення J-інтеграла дещо зростають, особливо для більш довгих тріщин. З іншого боку, вказане підвищення не є істотним до моменту вичерпання тріщиностійкості внаслідок досягнення J-інтегралом критичного значення J_C . Так, наприклад, при $J_C = 10^4 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$, $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$ і врахуванні пластичної поведінки матеріалу межа тріщиностійкості досягається при навантаженні $N_1 = 0,5\sigma_1^T$, що лише на 3% нижче, ніж для чисто пружного розв'язку.

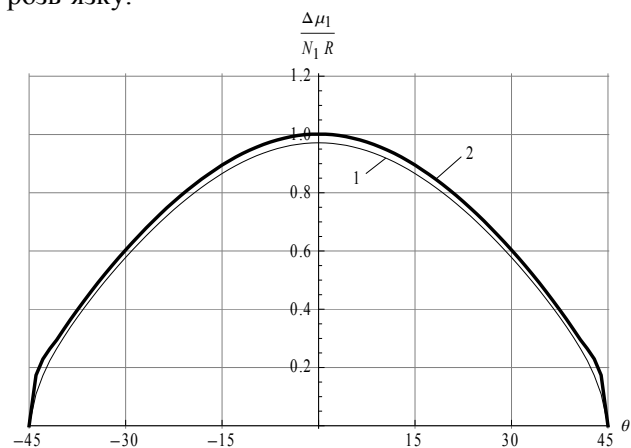


Рис. 2 Розкриття тріщини Δ для $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$ на межі тріщиностійкості: 1 – пружна модель; 2 – пружно-пластична модель

На рис. 2 наведені порівняльні графіки розкриття тріщини Δ для пружного розв'язку й при урахуванні пластичного деформування для тріщини $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 45^\circ$, $\mu_1 = \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}$ при досягненні межі тріщиностійкості. Очевидно, що відмінності головним чином обумовлені пластичними деформаціями в околах вершин тріщини. Водночас, загальний характер

розкриття тріщини залишається майже незмінним.

Нижче представлені результати, отримані у випадку наявності зони контакту між берегами тріщини. Матеріал матриці залишався таким же, як і в попередньому прикладі, $N_2 = 0$, $\alpha_N = 70^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Розглядалися три варіанти матеріалу включення: $E_1 = kE_2$, $\nu_1 = \nu_2$, $E_1^t = kE_2^t$, $\sigma_1^T = k\sigma_2^T$ при $k = 0,5; 1; 2$.

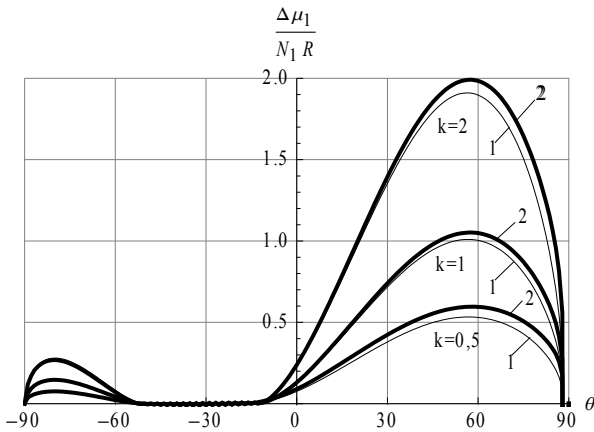


Рис. 3 Розкриття тріщини для $\alpha_N = 70^\circ$, $\beta = 90^\circ$ на межі тріщиностійкості: 1 – пружна модель; 2 – пружно-пластична модель

На рис. 3 наведені графіки розкриття тріщини

Δ для пружного розв'язку і при урахуванні пластичного деформування для тріщини $R = 0,1 \text{ м}$, $\beta = 90^\circ$ на межі тріщиностійкості при вказаних вище значеннях k . Як і в попередніх випадках, дані для пружної й пружно-пластичної моделей деформування є доволі близькими, а основні відмінності обумовлені пластичним деформуванням в околі вершини тріщини, більш віддаленої від зони контакту.

Висновки

З наведених результатів випливає, що врахування пластичних властивостей матеріалів в задачі про визначення напружено-деформованого стану дугової тріщини на межі включення й матриці призводить до певного підвищення значень параметрів руйнування, таких як розкриття тріщини і J-інтеграл, в порівнянні з результатами пружного розв'язку. Проте, в докритичному стані зазначені відмінності не являються суттєвими, а отже, використання моделі пружного деформування для даної задачі є виправданим.

Список використаних джерел

1. Тоуа, М.А. A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid / М.А. Тоуа // J. Mech. and Phys. Solids. – 1974. – 22(5). – P.325-348.
2. Cottrell, B. Slightly curved or kinked cracks / B. Cottrell, J.R. Rice // Int. J. of Fracture. – 16(2). – 1980. – P. 155-169.
3. Годес, А.Ю. Контактная задача для межфазной дуговой трещины / А.Ю. Годес, В.В. Лобода // Вісник Дніпропетровського університету: Серія Механіка. – 2015. – Т. 19 (2). – С. 3-17.
4. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука. – 1969. – 420 с.
5. Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – 6th ed. – Elsevier. – 2005. – 631 p.
6. Керштейн, И.М. Основы экспериментальной механики разрушения / И.М. Керштейн, В.Д. Ключников, Е.В. Ломакин, С.А. Шестериков. – М.: Изд. Московского ун-та. – 1989. – 140 с.

References

1. TOYA, M.A. (1974) A crack along the interface of a circular inclusion embedded in an infinite solid. *J. Mech. and Phys. Solids*. 22(5). p. 325-348.
2. COTTRELL, B., RICE, J.R. (1980) Slightly curved or kinked cracks. *Int. J. of Fracture*. p. 155-169.
3. HODES, A.YU., LOBODA, V.V. (2015) A contact problem for an arc interfacial crack. *Bulletin of Dnepropetrovsk University: Mechanics*. 19 (2). p. 3-17.
4. KACHANOV, L.M. *Foundations of theory of plasticity* (1969). M.: Nauka.
5. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. (2005) *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. Elsevier.
6. KERSTAIN, I.M., KLYUSHNIKOV, V.D., LOMAKIN, E.V., SHESTERIKOV, S.A. (1989) *Foundations of experimental fracture mechanics*. M.: Publishing house of Moscow University.

Надійшла до редколегії 19.06.19