Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

Студентки 4-го курсу
Вишнівської Діани Олександрівни

Науковий керівник:
Маринич Олександр Віталійович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол №9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Аналітичні випадкові процеси є фундаментальним інструментом у математичному моделюванні випадкових явищ, що відбуваються в часі та просторі. Вони знайшли широке застосування в різних галузях науки та інженерії, таких як фізика, статистика, економіка, фінанси та біологія. Граничні теореми є одним із ключових понять, які дозволяють нам зрозуміти та аналізувати властивості аналітичних випадкових процесів у довгостроковій перспективі.

Метою даної дипломної роботи є дослідження важливого класу стохастичних процесів, а саме аналітичних випадкових процесів а також точкових процесів їх нулів. Основним предметом дослідження є граничні теореми для таких процесів та точкових процесів їх нулів. В роботі детально вивчено два класи аналітичних випадкових процесів: це випадкові тригонометричні поліноми та випадкові ряди Діріхлє. Основні завдання, які ставляться і розв'язуються у дипломній роботі, включають:

1. Огляд властивостей аналітичних випадкових процесів, таких як неперервність, стаціонарність та інші.
2. Дослідження основних граничних теорем, таких як центральна гранична теорема, теореми про граничні розподіли та інші.
3. Вивчення застосувань граничних теорем для аналітичних випадкових процесів у різних галузях науки.

Особлива увага буде приділена аспектам, які відносяться до проблеми збіжності випадкових процесів, зокрема аналізу граничних розподілів та вивченню умов збіжності.

Попередні дослідження в області аналітичних випадкових процесів та граничних теорем показують, що ці теореми можуть мати значну вагу в аналізі та прогнозуванні реальних явищ. Однак, ще багато аспектів залишається недостатньо дослідженими, особливо щодо застосування цих теорем в різних дисциплінах. Наступні частини роботи будуть присвячені детальному вивченню цих питань. Дана дипломна робота спрямована на те, щоб просунути наше розуміння граничних теорем для аналітичних випадкових процесів та їх застосувань.

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Аналітичні випадкові процеси відіграють важливу роль в багатьох галузях науки та техніки, включаючи статистику, фінанси, інженерію та фізику. Вони характеризуються тим, що їх значення в будь-який момент часу є випадковими змінними, але їх еволюція в часі описується детермінованим набором рівнянь або правил.

Математичні моделі аналітичних випадкових процесів зазвичай включають такі основні елементи, як простір станів, перехідні ймовірності та початкові розподіли. Простір станів визначає можливі стани, в яких може перебувати система. Перехідні ймовірності описують ймовірність переходу системи з одного стану в інший за певний проміжок часу, а початкові розподіли визначають ймовірність того, що система перебуватиме в певному стані на початку спостереження.

Аналітичні випадкові процеси - це досить вузький клас випадкових стохастичних процесів, наприклад класичний процес броунівського руху або процеси Леві не належать класу аналітичних процесів, тому що в них траєкторії є негладкими і недостатньо регулярними. Такі процеси ми не вивчаємо. Під аналітичними випадковими процесами розуміємо наступне:

Означення: Нехай $D \subset \mathbb{C}$ − область компактної площини. $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathcal{P})$ − ймовірнісний простір. Відображення $X(z,\omega)$: $D \times \Omega \to \mathbb{C}$ називається випадковою аналітичною функцією в області D якщо:

1) $X(\,\cdot\,,\omega)$ – аналітична в D функція $\forall \omega \in \Omega$;
2) $X(z,\,\cdot\,)$ – $\mathscr{F}$-вимірне відображення з Ω в $\mathbb{C}$, $\forall z \in D$.

Позначення $\mathcal{H}(D)$ – аналітичні в D функції з топологією локально рівномірної збіжності.

Наведемо декілька прикладів аналітичних функцій. Стандартний найпростіший приклад аналітичної випадкової функції це випадкові поліноми.

1) Випадкові поліноми

$$X_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \xi_k z^k,$$

де $(\xi_k)_{k=\overline{0,n}}$ – незалежні однаково розподілені $\mathbb{C}$–значні випадкові величини, $(a_k^{(n)})_{\ k=0,n}$ – послідовність комплексних чисел. Зокрема, поліноми $X_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \frac{z^k}{\sqrt{k!}}$, $\xi_k \sim N_{\mathbb{C}}$ називаються поліномами Вейля.

Другий приклад випадкових аналітичних функцій - це випадкові ряди, та зокрема випадкові ряди Діріхлє. Загальна конструкція таких випадкових аналітичних функцій виглядає так:

2) Випадкові ряди та випадкові ряди Діріхлє

$$X_n(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_k\, \psi_{n,k}(z),$$

де $(\xi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ - незалежні однаково розподілені $\mathbb{C}$–значні випадкові величини з $E\xi_k = 0,\ E\xi_k^2 < \infty$ та
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, \psi_{n,k}(z)|^2 < \infty\ \ \forall z \in D,\ \ \psi_{n,k}$ – аналітична функція в D.

Тоді X_n– аналітична функція в D. Зокрема, при виборі

$$\psi_{n,k}(z) = \frac{1}{k^{\frac{1}{2}+z}},\ \ k \geq 0,\ \ D = \{z \in \mathbb{C}: \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

отримуємо класичний випадковий ряд Діріхлє.

Широкі підкласи аналітичних випадкових процесів утворюють стаціонарні та ергодичні аналітичні процеси.

1. Стаціонарність: Стаціонарний процес - це процес, сатистичні властивості якого не змінюються з часом. Він визначається своїм середнім значенням та коваріацією, які не змінюються з часом.

Часто спостерігаються випадкові процеси, перебіг яких у часі приблизно однаковий, тобто середнє значення процесу залишається сталим, а його характеристики не змінюються. Такі випадкові процеси називаються стаціонарними. Сформулюємо визначення СВП через його характеристики.
Випадкова функція $X(t)$ називається стаціонарною, якщо вона має:
1) стале математичне сподівання, тобто $m_x(t) = m_x = const$;
2) сталу дисперсію: $D_x(t) = D_x = const$;
3) кореляційний момент двох перерізів $K_x(t, t')$, *де* $t' = t + \tau$, не залежить від того, де саме на осі t взято відрізок довжиною τ, а зумовлюється тільки довжиною відрізка, тобто $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$

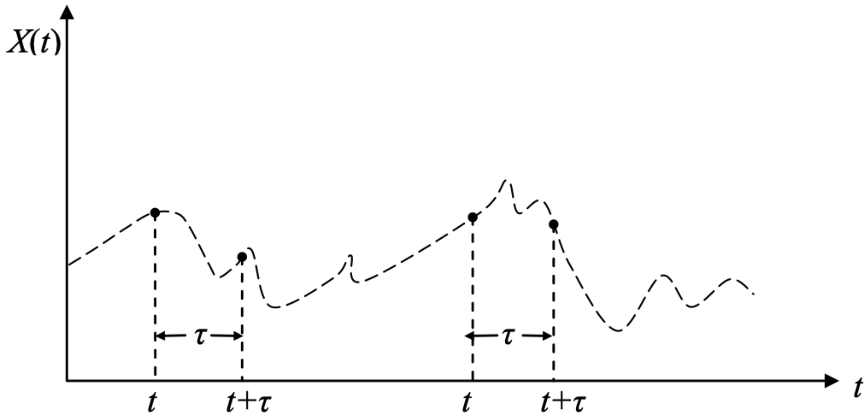

Рисунок 1: Стаціонарний випадковий процес

2. Ергодичність: Ергодичний процес - це процес, в якому довготривалі середні значення можуть бути виведені з короткотривалих спостережень. Ця властивість дозволяє нам використовувати теореми ергодичності для прогнозування довготривалої поведінки процесу.

Якщо СВП $X(t)$ має ергодичну властивість, то для нього середнє за часом (на досить великому інтервалі) приблизно дорівнює середньому значенню за множиною спостережень. Отже, в цьому випадку всі характеристики випадкового процесу $X(t)$ можна визначати за однією реалізацією.

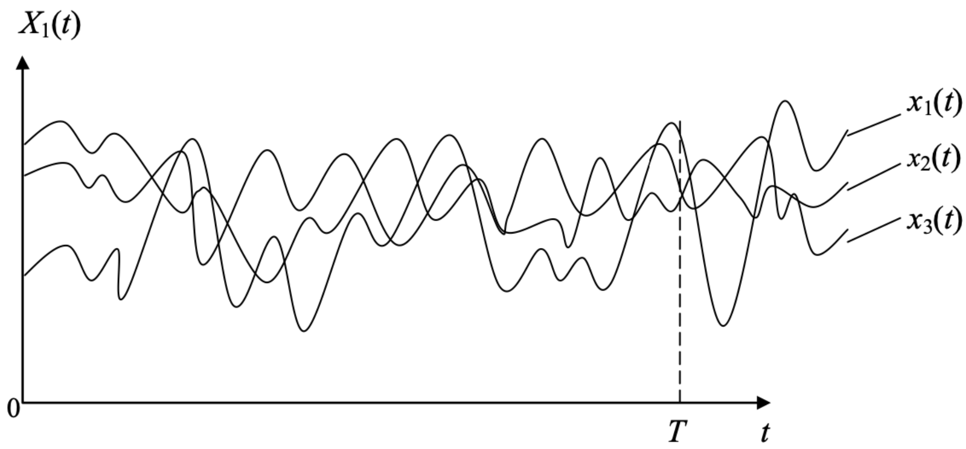

Рисунок 2: Графіки реалізацій стаціонарного процесу X1(t), що має ергодичну властивість

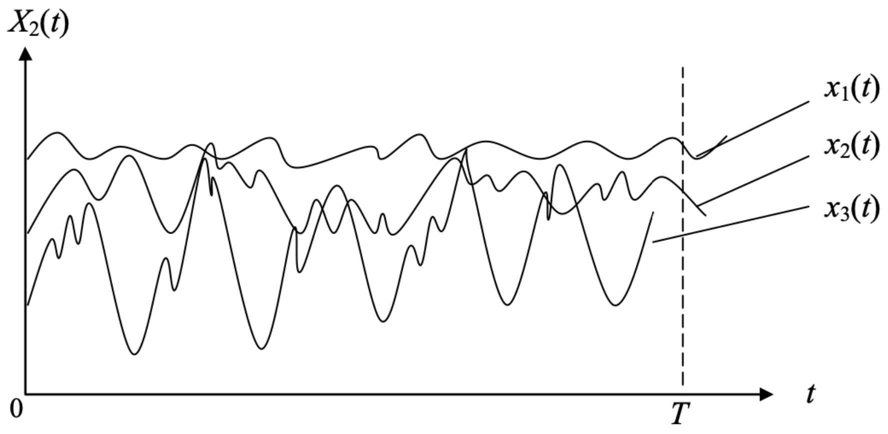

Рисунок 3: Графіки реалізацій стаціонарного процесу X2(t), який не має ергодичної властивості

3. Незалежність та нерозривність: В багатьох моделях, особливо в математичній статистиці та теорії імовірностей, припускається, що окремі спостереження є незалежними та однаково розподіленими. Це дає можливість використання центральної граничної теореми та інших теорем для прогнозування довгострокової поведінки процесу.

РОЗДІЛ 1 ВИПАДКОВІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА ЇХ НУЛЬОВІ ПРОЦЕСИ

Позначаємо через $D \subset C$ зв'язану (відкриту) область в комплексній площині. Нехай $Q = Q(D)$ — множина невід'ємних цілозначних мір Радона на D. Тут ми говоримо, що борелівська міра ν на D є мірою Радона, якщо $\nu(K) < \infty$ для будь-якої компактної множини $K \subset D$. Елемент $\xi \in Q$ можна виразити як суму $\xi = \sum_i m_i \delta_{z_i}$ дельта-мір, де множина $\{z_i\}_i$ не має точок накопичення та $m_i \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$. Іноді зручно писати $\xi = \sum_i \delta_{z_i}$, де z_i повторюється m_i разів. Для обмеженої вимірної функції компактного носія φ визначимо $\langle\xi,\varphi\rangle = \sum_i m_i \varphi(z_i)$, коли $\xi = \sum_i m_i \delta_{z_i} \in Q$, зокрема, пишемо $\xi(A)$ для $\langle\xi, I_A\rangle$, де I_A є індикаторною функцією підмножини $A \subset D$, яка означає кількість точок всередині A, підраховану з кратністю. Ми наділяємо простір Q з σ-полем $B(Q)$, породженим функціоналами $Q \ni \xi \to \langle\xi,\varphi\rangle \in \mathbb{C}$ для $\varphi \in C_c(D)$, простором неперервних функцій на D з компактним носієм. Тут $\langle\xi,\varphi\rangle$ також можна розуміти як сполучення $\varphi \in C_c(D)$ і $\xi \in C'_c(D)$ як додатного лінійного функціоналу на $C_c(D)$. Ми говоримо, що $\xi = \xi(\omega)$ є точковим процесом на D, якщо це Q-значна випадкова змінна, визначена в імовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$.

Ми вводимо простір $\mathcal{H}(D)$ комплексних аналітичних функцій у D і наділяємо його метрикою

$$\rho(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{||f-g||_{K_j}}{1 + ||f-g||_{K_j}}$$

що індукує локально рівномірну збіжність аналітичних функцій. Тут $||f||_K = max_{z \epsilon K}|f(z)|$ є супремум-нормою, а $\{K_j, j = 1,2,...\}$ є вичерпуючим набором компактних множин D, тобто K_j, $j = 1, 2, . . .$ є зростаючою послідовністю компактних підмножин D, що задовольняє:

1) $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}, j = 1, 2, ...$
2) Для будь-якої компактної множини $K \subset D$ існує n таке, що $K \subset K_n$
3) $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = D$

Відомо, що $(\mathcal{H}(\mathcal{D}), \rho)$ є повним сепарабельним метричним простором. Простір $\mathcal{H}(\mathcal{D})$, оснащений (топологічним) борелівським σ-полем $\mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$, а сукупність імовірнісних мір на $(\mathcal{H}(\mathcal{D}), \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathcal{D})))$, позначається $\mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$. Під випадковою аналітичною функцією на $\mathcal{D}$, ми маємо на увазі $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ - значну випадкову змінну $X(z) = X(z,\omega)$ на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Імовірнісний закон X у $(\mathcal{H}(\mathcal{D}), \mathcal{B}(\mathcal{H}(\mathcal{D})))$ позначається $\mu_X \in \mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$. Зазначимо, що кожна $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$ однозначно визначається значеннями циліндричних множин, тобто ймовірнісний закон випадкової аналітичної функції однозначно визначається її скінченновимірними розподілами. Для простоти ми припускаємо, що випадкова аналітична функція $X(z)$ є квадратично інтегрованою та центрованою, тобто $E[|X(z)|^2] < \infty$ та $E[X(z)] = 0$ для будь-яких $z \in D$. Для випадкової аналітичної функції X ми визначаємо коваріаційну функцію за допомогою $S(z,\omega) = E[X(z)\overline{X(\omega)}]$. Наступне твердження надає нам більшість типових і важливих прикладів випадкових аналітичних функцій.

Твердження 1.1 Нехай $\{\psi_k\}_k \subset \mathcal{H}(\mathcal{D})$ — послідовність незалежних центрованих випадкових аналітичних функцій, визначених на тому самому ймовірнісному просторі. Припустимо, що $\sum_{k=1}^{\infty} E[|\psi_k(z)|^2]$ є локально інтегровною функцією від z в D. Тоді, $X(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(z)$ майже напевно збігається в $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ і, таким чином, визначає випадкову аналітичну функцію на D.

Оскільки другі моменти рівномірно локально обмежені, то з теореми Колмогорова зрозуміло, що для кожного $z \in D$ послідовність $\{X_n(z)\}$ збігається майже напевно. Справа в тому, що майже напевно поточкову збіжність можна посилити, щоб отримати майже напевено локально рівномірну збіжність за допомогою аналітичності.

Для аналітичної функції $f \in \mathcal{H}(\mathcal{D})$ позначимо через Z_f множину нулів f і визначимо невід'ємну цілочисельну міру Радона ξ_f на D за допомогою

$$\xi_f = \sum_{z \in Z_f} m_z \delta_z$$

де δ_z — дельта-міра з одиничною масою при $z \in D$, а m_z — кратність нуля z. Оскільки нетривіальна аналітична функція має лише скінченну кількість нулів у кожній компактній підмножині, то ξ_f є елементом Q. Коли f ніде не обертається в нуль в D, ξ_f розуміється як порожня конфігурація $\emptyset \in Q$, тобто $\langle \emptyset, \varphi \rangle = 0$ для будь-якого $\varphi \in C_c(D)$. Наступна лема є повторним формулюванням теореми Гурвіца, яка показує, що локально рівномірна збіжність аналітичних функцій передбачає грубу збіжність відповідних нулів.

Лема 1.2 Припустимо, що f_n збігається до f в ($\mathcal{H}(\mathcal{D})$,ρ) і f не дорівнює тотожному нулю. Тоді послідовність $\{\xi_{f_n}\}$ нулів збігається до ξ_f грубо, тобто має місце $\langle \xi_{f_n}, \varphi \rangle \to \langle \xi_f, \varphi \rangle$ для будь-якого $\varphi \in C_c(D)$.

Доведення. Нехай K — носій $\varphi \in C_c(D)$. Нехай $z_1, z_2, \ldots, z_L$ — нулі f, розташовані на K з кратністю $m_1, m_2, \ldots, m_L$ відповідно. Для будь-якого достатньо малого $\varepsilon > 0$ ми можемо взяти скінченні відкриті круги $\{U_{i,\varepsilon}$, i = 1, 2, ... , $M_\varepsilon\}$ радіусом меншим за ε, які лежать в середині K так, що $\{U_{i,\varepsilon}$, i = 1, 2, ... , $L\}$ є непересічними, лише $U_{i,\varepsilon}$ містить z_i для кожного i = 1,2,...,L, а $\overline{U_{i,\varepsilon}}$ не містить нуля для кожного $i = L+1, L+2, \ldots, M_\varepsilon$. Згідно з теоремою Гурвіца, існує $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ таке, що для будь-якого $n \geq n_0$, $\xi_{f_n}(U_{i,\varepsilon}) = \xi_f(U_{i,\varepsilon}) = m_i$ для i = 1, 2,...,L та $\xi_{f_n}(U_{i,\varepsilon}) = \xi_f(U_{i,\varepsilon}) = 0$ для $i = L+1$, $L+2, \ldots, M_\varepsilon$. Тоді для $n \geq n_0$ маємо

$$\left|\langle \xi_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \xi_f, \varphi \rangle\right| \leq \sum_{i=1}^{L} \left|\langle \xi_{f_n}, \varphi|_{U_{i,\varepsilon}} \rangle - \langle \xi_f, \varphi|_{U_{i,\varepsilon}} \rangle\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{L} m_i\right) \omega_\varphi(\varepsilon)$$

де $\omega_\varphi(\varepsilon) = sup\{|\varphi(z) - \varphi(\omega)|; |z - \omega| < \varepsilon\}$ — модуль неперервності φ. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} sup\left|\langle \xi_{f_n}, \varphi \rangle - \langle \xi_f, \varphi \rangle\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{L} m_i\right) \omega_\varphi(\varepsilon)$$

Оскільки φ рівномірно неперервна на K, права частина збігається до 0 при $\varepsilon \to 0$.

Зауваження. Кожен функціонал $F_\varphi : \mathcal{H}(\mathcal{D}) \to \mathbb{C}$, визначений F_φ (f) := $\langle \xi_f, \varphi \rangle$ для $\varphi \in C_c(D)$, є неперервним у $\mathcal{H}(\mathcal{D}) \setminus \{0\}$ відносно метрики ρ.

Якщо $X(z, \omega)$ є випадковою аналітичною функцією в D, легко побачити, що $\xi(\omega) := \xi_{X(z,\omega)}$ визначає точковий процес на D. Ми називаємо це нульовим (точковим) процесом X.

Розглянемо взаємозв'язок між збіжністю випадкових аналітичних функцій і асоційованих нульових процесів. Наступне твердження є безпосереднім наслідком леми 1.2 і теореми про представлення Скорохода, викладеної нижче в теоремі 1.4

Твердження 1.3 Припустимо, що послідовність випадкових аналітичних функцій $\{X_n\}$ збігається за законом до X. Тоді нульовий процес ξ_{X_n} збігається за законом до ξ_X за умови, що $X \not\equiv 0$ майже напевно.

Доведення. Відповідно до теореми 1.4 (теореми Скорохода про зображення), наведеної нижче, ми можемо побудувати випадкові аналітичні функції X_n, $n = 1, 2, \ldots$ і X на деякому ймовірнісному просторі так, що $\{X_n\}$ майже напевно збігається до $X(\not\equiv 0)$ у $(\mathcal{H}(\mathcal{D}), \rho)$. Тоді за лемою 1.1 нулі $\{\xi_{X_n}\}$ збігаються до ξ_X нечітко майже напевно. З цього випливає твердження.

Теорема 1.4 (Скорохода про зображення). Нехай (S, ρ) — повний сепарабельний метричний простір. Припустимо, що послідовність ймовірнісних мір $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ на $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ слабо збігається до μ. Тоді в деякому ймовірнісному просторі можна побудувати S-значні випадкові величини X_n, $n = 1,2,\ldots$ і X так, що (1) μ_n, $n = 1,2,\ldots$ і μ є ймовірнісним законом X_n, $n = 1, 2, . .$ і X відповідно, і (2) X_n збігається до X майже напевно.

Наступне твердження є аналітичною версією процесу добре відомої достатньої умови для послідовності неперервних процесів, щоб бути збіжними за законом.

Твердження 1.5 Нехай X_n, $n = 1, 2, \ldots$ - послідовність випадкових аналітичних функцій. Якщо $\|X_n\|_K$, $n = 1,2,\ldots$ є щільним для будь-якої компактної множини K, то μ_{X_n}, $n = 1,2,\ldots$ є щільним у $\mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$. Крім того, якщо $\{X_n\}$ збігається до X у сенсі скінченновимірних розподілів, то $\{\mu_{X_n}\}$ слабо збігається до границі μ_X.

Доведення. Нехай μ_{X_n}, $n = 1,2,\ldots$ — закони випадкових аналітичних функцій X_n, $n = 1,2,\ldots$ відповідно. Нехай $\{K_j\}$ — вичерпання D компактними множинами, як і раніше. Через щільність $\{\|X_n\|_K$, $n = 1,2,\ldots$ $\}$ для кожного j, для кожного $\varepsilon > 0$ можна взяти зростаючу послідовність дійсних чисел $0 < M_1 < M_2 < \ldots$ таку, що $sup_n\ P\ (||X_n||_{K_j} > M_j) \leq 2^{-j}\varepsilon$

Покладемо $\mathcal{K} = \{h \in \mathcal{H}(\mathcal{D}); \left||h|\right|_{K_j} \leq M_j, j = 1, 2, \ldots\}$. Тоді це локально обмежене сімейство і, отже, відносно компактне в $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ за теоремою Монтеля. Крім того, легко бачити, що $\inf_n \mu_{X_n}(\mathcal{K}) \geq 1 - \varepsilon$. Отже, послідовність $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ також щільна в $\mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$. Єдиність граничної точки випливає зі збіжності в сенсі скінченновимірних розподілів. Отже, $\{\mu_{X_n}\}$ слабо сходиться до μ_X.

Для комплексних аналітичних функцій локальна інтегровність означає локальну обмеженість.

Лема 1.6 Для будь-якої компактної множини K у D існує таке $\delta > 0$, що

$$||f||_K^p \leq (\pi\delta^2)^{-1} \int_{\overline{K_\delta}} |f(z)|^p m(dz), \qquad f \epsilon \mathcal{H}(\mathcal{D})$$

для будь-якого $p > 0$, де $\overline{K_\delta} \subset D$ — замикання δ-околу K.

<u>*Доведення*</u>. Візьмемо $\delta > 0$ достатньо малим, щоб $\overline{K_\delta}$ містилося в *D*. Оскільки інтеграл $\int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta}|^p d\theta$ є неспадною функцією *r* для кожного $p > 0$ (теорема опуклості Харді) бачимо, що

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta}|^p d\theta$$

для $0 \leq r < \delta$. Отже, ми маємо

$$\pi\delta^2 |f(z)|^p \leq \int_0^\delta r dr \int_0^{2\pi} |f(z + re^{i\theta}|^p d\theta = \int_{|\zeta - z| \leq \delta} |f(\zeta)|^p m(d\zeta)$$

Тому, беручи обидві частини супремуму над *K*, ми отримуємо шукану нерівність.

Зауваження. Якщо $sup_n\, E[|Xn(z)|^p]$ є локально інтегровним для деякого $p > 0$, то $\{\mu_{X_n}\}_n$ є щільним у $\mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$, оскільки щільність $\{\|X_n\|_K\}_n$ легко випливає з Леми 1.6.

Тепер наведемо доказ твердження 1.1 із застосуванням твердження 1.5.

<u>*Доведення твердження 1.1*</u> Розглянемо часткову суму $X_n(z) = \sum_{k=1}^n \psi_k(z)$. Оскільки $S^{X_n}(z,z) := \sum_{k=1}^n E[|\psi_k(z)|^2] \nearrow \sum_{k=1}^\infty E[|\psi_k(z)|^2] := S(z,z)$ при $n \to \infty$ і $S(z, z)$ є локально інтегровною, послідовність $\{\mu_{X_n}\}_n$ є щільною в $\mathcal{P}(\mathcal{H}(\mathcal{D}))$ згідно з наведеним вище зауваженням. Більше того, згідно з теоремою Колгоморова для суми незалежних випадкових величин, будь-який скінченновимірний випадковий вектор $(X_n(z_j))_{j=1}^M$ збігається як правило, що означає, що граничний розподіл визначено однозначно. Отже, $\{\mu_{X_n}\}$ слабо збігається до єдиної межі, яка визначає випадкову аналітичну функцію.

Тепер ми пригадаємо теорему Іто-Нісіо, яка розширює теорему Леві на суму незалежних випадкових величин із банаховим простором $\{\xi_k\}_k$, стверджуючи, що майже впевнена збіжність, збіжність за ймовірністю та за законом послідовності часткових суми $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,\ n \geq 1$

еквівалентні. З цієї теореми випливає, що для кожної компактної множини $K \subset D$, $\{X_n(z), z \in K\}$ є рівномірно збіжною, а отже $\{X_n(z), z \in D\}$ збіжна в $\mathcal{H}(\mathcal{D})$ майже напевно.

Зауваження. За умови твердження 1.1 нульовий процес ξ_{X_n} частинної суми $X_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(z)$ збігається до ξ_X за законом за умови, що $X \not\equiv 0$ майже напевно.

1.2 Центральна гранична теорема для випадкових аналітичних функцій

Ми позначаємо через $\mathcal{C}_\upsilon$ набір інтегрованих з квадратом комплекснозначних випадкових величин із середнім 0 таким чином, що дійсна та уявна частини є взаємно ортогональними і мають однакову скінченну дисперсію $\upsilon \geq 0$. Ми пишемо $\mathcal{C}$ для $\bigcup_{\upsilon \geq 0} \mathcal{C}_\upsilon$. Очевидно, що якщо $\zeta \in \mathcal{C}$, то $E[(Re\zeta)^2] = E[(Im\zeta)^2] = \frac{1}{2}E[|\zeta|^2]$ та $E[\zeta^2] = 0$. Якщо ζ є комплексною гаусовою випадковою величиною, збурення якої дорівнює $N_{\mathbb{C}}(0, \sigma^2)$то $\zeta \in \mathcal{C}_{\sigma^2}$.

Лема 2.1 Нехай $\{\zeta_k\}_k \subset \mathcal{C}_1$ — незалежні комплекснозначні випадкові величини з одиничною дисперсією, покладемо
$Y = \sum_k \theta_k \zeta_k$ для $\theta_k \in \mathbb{C}$ з $\sum_k |\theta_k|^2 < \infty$. *Тоді* $Y \in \mathcal{C}$.

Доведення. Легко побачити, що (1) $\theta Z \in \mathcal{C}$ для будь-якого $\theta \in \mathcal{C}$ та $Z \in \mathcal{C}$, (2) $Z_1+Z_2 \in \mathcal{C}$, якщо Z_1, $Z_2 \in \mathcal{C}$ є незалежними та (3) клас $\mathcal{C}$ замкнений відносно L^2- збіжності, з чого випливає твердження.

Зауваження. Коли $\{\theta_k\}_k$ є незалежними випадковими величинами, які не залежать від $\{\zeta_k\}_k$, той самий висновок леми 2.1 виконується за умови $\sum_k E[|\theta_k|^2] < \infty$.

Нагадаємо складний варіант центральної граничної теореми за умовою Ліндеберга.

Твердження 2.2 Нехай $\{Z_{n,k}\} \subset \mathcal{C}$ — масив комплексних випадкових величин. Припустимо, що $\{Z_{n,k}\}$ є незалежними при фіксованому n і задовольняють такі дві умови:

$$i) \lim_{n\to\infty} \sum_k E\left[\left|Z_{n,k}\right|^2\right] = \sigma^2$$

$ii)\ \lim_{n\to\infty}\sum_k E[|Z_{n,k}|^2; |Z_{n,k}| > \varepsilon] = 0$

Для будь-яких $\varepsilon > 0$. Тоді, $\{\sum_k Z_{n,k}\}_n$ прямує до $N_{\mathbb{C}}(0,\sigma^2)$ за законом при $n \to \infty$.

Доведення. Центральна гранична теорема за умовою Ліндеберга для масиву дійсних випадкових величин $\{X_{n,k}\}$ із середнім 0 виглядає наступним чином: Нехай $\{X_{n,k}\}_k$ є незалежними при фіксованому n і задовольняють наступні дві умови:

$j)\ \lim_{n\to\infty}\sum_k E\left[|X_{n,k}|^2\right] = \sigma^2$

$jj)\ \lim_{n\to\infty}\sum_k E[|X_{n,k}|^2; |X_{n,k}| > \varepsilon] = 0$

Для будь-яких $\varepsilon > 0$. Тоді, $\{\sum_k X_{n,k}\}$ прямує до $N_{\mathbb{C}}(0,\sigma^2)$ за законом при $n \to \infty$.

Досить показати, що для кожного $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\{\lambda \mathrm{Re} Z_{n,k} + \mu \mathrm{Im} Z_{n,k})_n$ задовольняє (1) з $(\lambda^2 + \mu^2)\sigma^2/2$ та (2) для будь-якого $\varepsilon > 0$. Невелике міркування показує, що це так.

Ця теорема важлива, оскільки вона дозволяє використовувати нормальний розподіл для апроксимації розподілу суми великої кількості випадкових величин. Це може бути використано для прогнозування розподілу суми (або середнього) випадкового процесу на довгострокову перспективу.

Наслідок 2.3 Нехай $\{\zeta_k\}_k \subset \mathcal{C}_1$ — незалежні та однаково розподілені комплексні випадкові величини, а $\{f_{n,k}\}_{n,k}$ — масив комплексних випадкових величин, незалежних від $\{\zeta_k\}k$. Припустимо, що (1) $\{f_{n,k}\}_k$ для фіксованого n є незалежними, (2) $\lim_{n\to\infty}\sum_k E[|f_{n,k}|^2] = \sigma^2$ та (3) $\lim_{n\to\infty}\sum_k E[|f_{n,k}|^{2+\delta}] = 0$ для деяких $\delta > 0$. Тоді $\{\sum_k X_{n,k}\}$ прямує до $N(0,\sigma^2)$ за законом.

Доведення. Умова (i) у твердження 2.2 очевидна з (2). Досить перевірити умову (ii) у твердженні 2.2, поклавши $Z_{n,k} = f_{n,k}\zeta_k$. Нехай $F(t) = E[|\zeta_1|^2; |\zeta_1| > t]$ для $t \geq 0$. Оскільки $\{f_{n,k}\}_{n,k}$ не залежить від $\{\zeta_k\}_k$, маємо

$$R_{n,\varepsilon} := \sum_k E\left[|f_{n,k}\zeta_k|^2; |f_{n,k}\zeta_k| > \varepsilon\right]$$

$$= \sum_k E\left[|f_{n,k}\zeta_k|^2 F(\tfrac{\varepsilon}{|f_{n,k}|}); |f_{n,k}\zeta_k| > 0\right]$$

$= \sum_k E\left[\left|f_{n,k}\zeta_k\right|^2 F(\frac{\varepsilon}{|f_{n,k}|}); |f_{n,k}\zeta_k| > \eta\right] + \sum_k E\left[\left|f_{n,k}\zeta_k\right|^2 F(\frac{\varepsilon}{|f_{n,k}|}); 0 < |f_{n,k}\zeta_k| \leq \eta\right] \leq F(0)\eta^{-\delta} \sum_k E\left[\left|f_{n,k}\right|^{2+\delta} + F(\frac{\varepsilon}{\eta}) \sum_k E[|f_{n,k}|^2]\right]$

Для будь-якого $\eta > 0$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty} supR_{n,\varepsilon} \leq \sigma^2 F(\frac{\varepsilon}{\eta})$$

Оскільки η > 0 є довільним, то $R_{n,\varepsilon} \to 0$ при n → ∞ для кожного ε > 0.

Теорема 2.4 Нехай $\{\zeta_k\}_k \subset \mathcal{C}_1$ — незалежні та однаково розподілені комплексні випадкові величини та $\{\psi_{n,k}(z)\}$ - незалежний масив випадкових аналітичних функцій на D, незалежних від $\{\zeta_k\}_k$, такий, що $\sum_k E[|\psi_{n,k}(z)|^2] < \infty$ для всіх $z \epsilon D$. Розглядаємо послідовність $\{X_n(z)\}$ випадкових аналітичних функцій на D виду

$$X_n(z) = \sum_k \zeta_k \psi_{n,k}(z), \qquad z \epsilon D$$

зі скінченним коваріаційним ядром $S_n(z,\omega) = \sum_k E\left[\psi_{n,k}(z)\overline{\psi_{n,k}(\omega)}\right]$. Припустимо, що

(A1) Ядро коваріації $S_n(z,\omega)$ збігається до $S(z,\omega)$ дпя кожного $z,\omega \in D$.

(A2) Існує локально інтегрована функція g(z), така що $\sup_n S_n(z, z) \leq g(z)$.

(A3) Існує додатна стала δ > 0 така, що $\lim_{n\to\infty} \sum_k E[|\psi_{n,k}(z)|^{2+\delta}] = 0$ для кожного $z \in D$.

Тоді, $\{X_n\}$ збігається за законом до гаусової аналітичної функції X з коваріаційним ядром $S(z,\omega)$. Зокрема, послідовність $\{\xi_{X_n}\}$ нульових процесів збігається за законом до ξ_X за умови, що $X \not\equiv 0$ майже напевно.

<u>*Доведення*</u> теореми 2.4 Застосуємо наслідок 2.3 до випадкової величини

$$Y_n(\lambda) = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j X_n(z_j) = \sum_k (\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \psi_{n,k}(z_j))\ \zeta_k =: \sum_k f_{n,k}\zeta_k$$

для $\lambda := (\lambda_1,...,\lambda_M) \in \mathbb{C}^M$ та різних точок $z_1,...,z_M \in D$. Для (2) у наслідку 2.3 при n → ∞

$$\sum_k E\left[\left|f_{n,k}\right|^2\right] = \sum_{j,l=1}^{M} \lambda_j \overline{\lambda_l} S_n(z_j, z_l) \to \sum_{j,l=1}^{M} \lambda_j \overline{\lambda_l} S(z_j, z_l)$$

з (A1). Для (3) у наслідку 2.3, для p > 2, за нерівністю Гельдера

$$\sum_k E[|f_{n,k}|^p] = \sum_k E[|\sum_{j=1}^{M} \lambda_j \psi_{n,k}(z_j)\,|^p) \le C_{p,\lambda} \sum_{j=1}^{M} \sum_k E[|\,\psi_{n,k}(z_j)\,|^p] \ \to 0$$

з (A3). Тоді $\{X_n\}$ збігається до гаусового процесу з коваріаційним ядром $S(z,\omega)$ у сенсі скінченномірних розподілів.

Візьмемо δ > 0 таким малим, щоб замикання δ-околу K містилося в D. З леми 1.6 при p = 2 бачимо, що

$$\pi\delta^2 E\left[||X_n||_K^2\right] \le \int_{\overline{K_\delta}} E[|X_n(z)|^2]m(dz) = \int_{\overline{K_\delta}} S_n(z,z)m(dz).$$

Відповідно до (A2) має місце $\sup_n E[||X_n||_K^2] < \infty$. Отже, за твердженням 1.5 послідовність $\{\|X_n\|_K\}_n$ є щільною. Отже, послідовність випадкових аналітичних функцій $\{X_n\}$ збігається за законом до гаусової аналітичної функції X з коваріаційним ядром $S(z,\omega)$. Остання частина теореми випливає з твердження 1.3.

Зауваження. Теорема 2.4 також справедлива, коли ζ_n тотожно дорівнює 1 для кожного n.

1.3 Граничні теореми розподілу

Нехай H_0 – права півплощина комплексної площини. Для кожного фіксованого $z \in H_0$ і $s > 0$ покладемо

$$D\left(\alpha; \frac{1}{2} + sz\right) = \sum_{k\ge 2} \frac{(\log k)^\alpha}{k^{\frac{1}{2}+sz}} (\eta_k + i\theta_k).$$

Нехай $\mathcal{H}(H_0)$ — простір аналітичних функцій на H_0, наділений топологією рівномірної збіжності на компактних підмножинах H_0. Наш наступний результат — функціональна гранична теорема в просторі $\mathcal{H}(H_0)$ для масштабованих процесів $(D(\alpha; ½ + sz))\ z \in H_0$, коли дійсний параметр s прямує до 0+.

Теорема 3.1 Припустимо, що $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\theta = 0, 0 < \mathbb{E}\eta^2 + \mathbb{E}\theta^{\,2} < \infty$ і $\alpha > -\frac{1}{2}$. Тоді в просторі ймовірнісних мір на $\mathcal{H}(H_0)$ має місце слабка збіжність:

$$(s^{\frac{1}{2}+\alpha} D(\alpha; \frac{1}{2} + sz))_{z\in H_0} \Rightarrow \big(\mathcal{J}(\alpha; z)\big)_{z\in H_0}, \qquad s \to 0+$$

Зауважимо, що якщо $(f(z))_{z\in H_0} \in \mathcal{H}(H_0)$, то $(f(x))_{x>0} \in C((0,\infty),\mathbb{C})$де $C\big((0,\infty),\mathbb{C}\big)$ є простором $\mathbb{C}$ -значних неперервних функцій, визначених на $(0,\infty)$ і наділених топологією локально рівномірної збіжності.

Доведення. Спочатку доведемо слабку збіжність скінченновимірних розподілів, а потім перевіримо щільність у просторі $\mathcal{H}(H_0)$.

$$s^{\frac{1}{2}+\alpha}D\left(\alpha;\,\frac{1}{2}+sz\right)=s^{\frac{1}{2}+\alpha}\sum_{k\geq 2}\frac{(\log k)^{\alpha}}{k^{\frac{1}{2}+sz}}(\eta_k+i\theta_k)$$

є нескінченною сумою центрованих незалежних випадкових величин із кінцевими секундними моментами. Таким чином, щоб перевірити слабку збіжність скінченновимірних розподілів достатньо перевірити збіжність коваріацій, а потім умову Ліндеберга-Феллера.

1. Збіжність коваріацій. Для фіксованих z_1, $z_2 \in H_0$,

$$s^{1+2\alpha}\mathbb{E}(D\left(\alpha;\,\tfrac{1}{2}+sz_1\right)D(\alpha;\,\tfrac{1}{2}+sz_2))$$

$$=s^{1+2\alpha}\mathbb{E}(\sum_{l\geq 2}\frac{(\log l)^{\alpha}}{l^{\frac{1}{2}+sz_1}}(\eta_l+i\theta_l))(\sum_{j\geq 2}\frac{(\log j)^{\alpha}}{l^{\frac{1}{2}+sz_2}}\big(\eta_j+i\theta_j\big))$$

$$=s^{1+2\alpha}\sum_{k\geq 2}\frac{(\log k)^{2\alpha}}{k^{1+s(z_1+z_2)}}\mathbb{E}(\eta_k+i\theta_k)^2$$

$$=(\sigma_1^2-\sigma_2^2+2i\rho)s^{1+2\alpha}\textstyle\sum_{k\geq 2}\frac{(\log k)^{2\alpha}}{k^{1+s(z_1+z_2)}}$$

$$\to\ \frac{\Gamma(1+2\alpha)(\sigma_1^2-\sigma_2^2+2i\rho)}{(z_1+z_2)^{1+2\alpha}},\qquad s\to 0+,$$

де збіжність забезпечується лемою 3.2. Права частина дорівнює $\mathbb{E}\big(\mathcal{J}(\alpha;\,z_1)\mathcal{J}(\alpha;\,z_2)\big)$. Конвергенція

$$s^{1+2\alpha}\mathbb{E}\left(D\left(\alpha;\,\frac{1}{2}+sz_1\right)\overline{D\left(\alpha;\,\frac{1}{2}+sz_2\right)}\right)\to\ \mathbb{E}\big(\mathcal{J}(\alpha;\,z_1)\overline{\mathcal{J}(\alpha;\,z_2)}\big),$$
$$s\to 0+$$

випливає аналогічно з іншим застосуванням леми 3.2.

Лема 3.2 Нехай $\beta > -1$ фіксоване. Тоді

$$\lim_{z\to 0, z\in H_0} z^{1+\beta} \sum_{k\geq 2} \frac{(\log k)^{\beta}}{k^{1+z}} = \Gamma(1+\beta)$$

2. Достатня умова Ліндеберга-Феллера. Досить показати, що для кожного фіксованого $z \in H_0$ і всіх $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{s\to 0+} s^{1+2\alpha} \sum_{k\geq 2} \mathbb{E}\left(\left| \frac{(\log k)^{\alpha}}{k^{\frac{1}{2}+2+sz}} (\eta_k + i\theta_k) \right|^2 1_{\left\{ s^{1+2\alpha} \left| (\log k)^{\alpha} k^{-\frac{1}{2}-sz} (\eta_k + i\theta_k) \right| > \varepsilon \right\}} \right) = 0. \qquad (3.3)$$

Оскільки $(log x)^{\alpha} x^{-\frac{1}{2}} \leq A_{\alpha}$ для деякого $A_{\alpha} > 0$ і всіх $x \geq 2$, ми робимо висновок, що для цілого $k \geq 2$, $s > 0$ і $z \in H_0$,

$$\left| (\log k)^{\alpha} k^{-\frac{1}{2}-sz} \right| = (\log k)^{\alpha} k^{-\frac{1}{2}-sRe(z)} \leq A_{\alpha}.$$

Отже, вираз під лімітом в (3.1) є обмеженим зверху наступним виразом:

$$\left(s^{1+2\alpha} \sum_{k\geq 2} \frac{(\log k)^{2\alpha}}{k^{1+2sRe(z)}} \right) \mathbb{E}(\eta^2 + \theta^2)\, 1_{\left\{ \sqrt{\eta^2+\theta^2} > \varepsilon A_{\alpha}^{-1} s^{-1-2\alpha} \right\}}.$$

Як наслідок $\mathbb{E}(\eta^2 + \theta^2) < \infty$, сподівання збігається до 0, при $s \to 0+$. Перший множник збігається до $\Gamma(1+2\alpha)/(2Re(z))^{1+2\alpha}$. На цьому (3.3) доведено.

3. Щільність. Нехай K — довільна компактна підмножина H_0 і $T > 0$. Щоб довести, що сімейство розподілів процесів $(s^{\frac{1}{2}+\alpha} D(\alpha; \frac{1}{2} + s(\cdot)))_{s\in(0,T]}$ щільне на $\mathcal{A}(H_0)$, достатньо показати, що

$$\sup_{s\in(0,T]} \sup_{z\in K} \mathbb{E} \left| s^{\frac{1}{2}+\alpha} D\left(\alpha; \frac{1}{2} + sz\right) \right|^2 < \infty, \qquad (3.4)$$

Зауважимо, що

$$\mathbb{E}\left|D\left(\alpha;\frac{1}{2}+sz\right)\right|^2 = \mathbb{E}\left(D\left(\alpha;\frac{1}{2}+sz\right)\overline{D\left(\alpha;\frac{1}{2}+sz\right)}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(\sum_{l\geq 2}\frac{(\log l)^{\alpha}}{l^{\frac{1}{2}+sz}}(\eta_l+i\theta_l)\right)\left(\sum_{j\geq 2}\frac{(\log j)^{\alpha}}{l^{\frac{1}{2}+s\bar{z}}}(\eta_j+i\theta_j)\right)$$

$$= \ \mathbb{E}(\eta^2+\theta^2)\sum_{k\geq 2}\frac{(\log k)^{2\alpha}}{k^{1+2sRe(z)}}$$

і що

$$\sup_{z\in K}\mathbb{E}\left|s^{\frac{1}{2}+\alpha}D\left(\alpha;\ \frac{1}{2}+sz\right)\right|^2 \leq \ \mathbb{E}(\eta^2+\theta^2)s^{1+2\alpha}\sum_{k\geq 2}\frac{(\log k)^{2\alpha}}{k^{1+2sx_0}},$$

де $x_0 \coloneqq inf_{z\in K}Re(z) > 0$. Оскільки права частина обмежена в s ∈ (0, T] за лемою 3.2, випливає нерівність (3.4). Теорему 3.1 доведено.

1.4 Нулі аналітичних функцій

Через $\boldsymbol{Zeros_D}(f)$ позначаємо точковий процес нулів цієї аналітичної функції f : ℂ → ℂ, яка є аналітичною в області $D \subset \mathbb{C}$ і не дорівнює тотожному нулю.

$$\boldsymbol{Zeros_D}(f) = \sum_{\{x:f(k)=0\}}\delta_x$$

- точковий процес нулів функції *f*.

Твердження 4.1: (теорема Ліувілля) Якщо *f*-аналітична в D, $f \not\equiv 0$, то

$$\boldsymbol{Zeros_D}(f)\ \in\ M_p(D)$$

Твердження 4.2: (теорема Гурвіца) Відображення $A(D) \ni f\ \mapsto \boldsymbol{Zeros_D}(f)\ \in\ M_p(D)$ є неперервним у грубій топології. Доведення наведено аналогічно з с 152 в [6]

РОЗДІЛ 2 ВИПАДКОВІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОЛІНОМИ

Нехай $(\xi_k, \eta_k)_{k\geq 0}$ – незалежені однаково розподілені випадкові величини.

$$\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0,\ \ \mathbb{E}\xi_1^2 = \mathbb{E}\eta_1^2 = 1,\ \ \mathbb{E}\xi_1\eta_1 = 0$$

можна визначити випадково тригонометричний поліном, який очевидно є випадковою аналітичною функцією в усій комплексній площині

$$X_n(z) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k\cos(kz) + \eta_k\sin(kz)),\ \ z\in\mathbb{C}$$

2.1 Випадок скінченних других моментів коефіцієнтів

Для дійсної аналітичної функції *f*, яка не дорівнює тотожному нулю, позначимо через $N_f[a, b]$ кількість нулів *f* на інтервалі $[a, b]$. З наших доказів стане зрозуміло, що результати справедливі незалежно від того, чи рахуються нулі з кратністю чи ні.

Теорема 5.1 Нехай (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2),... є незалежними однаково розподіленими випадковими векторами з нульовим середнім та одиничною коваріаційною матрицею, тобто

$\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0,\ \mathbb{E}[\xi_1^2] = \mathbb{E}[\eta_1^2] = 1,\ \mathbb{E}[\xi_1\eta_1] = 0$. Для будь-якого $s\in\mathbb{R}$ та $[a, b]\subset\mathbb{R}$ маємо

$$N_{X_n}[s+\frac{a}{n}, s+\frac{b}{n}] \xrightarrow{d} N_Z[a,b],\qquad n\to\infty$$

Де $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ є стаціонарним гауссівським процесом.

Для дійсної аналітичної функції *f*, яка не дорівнює тотожно нулю, позначаємо через $Zeros_{\mathbb{R}}(f)$ локально скінченну точкову міру на $\mathbb{R}$, яка рахує дійсні нулі *f* з кратностями.

Теорема 5.2 Нехай (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ... - незалежні та однаково розподілені випадкові величини з нульовим середнім і одиничною коваріаційною матрицею, тобто

$$\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0,\qquad \mathbb{E}[\xi_1^2] = \mathbb{E}[\eta_1^2] = 1,\qquad \mathbb{E}[\xi_1\eta_1] = 0$$

Нехай $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$— будь-яка послідовність дійсних чисел, а $[a, b] \subset \mathbb{R}$ — скінченний інтервал, має місце збіжність точкових процесів нулів:

$$Zeros_{\mathbb{R}}\left(X_n\left(s_n + \frac{\cdot}{n}\right)\right)_{n\to\infty} \overset{\omega}{\to} Zeros_{\mathbb{R}}(Z(\cdot))$$

у $M_p(\mathbb{R})$ просторі

У наступній теоремі розглядаємо незалежні та однаково розподілені випадкові вектори з довільною коваріаційною матрицею. Зокрема, ця теорема охоплює випадкові тригонометричні поліноми виду $\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sin(kt)$ та $\sum_{k=1}^{n} \eta_k \cos(kt)$.

Теорема 5.3 Нехай (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ... - незалежні та однаково розподілені випадкові вектори з

$$\mathbb{E}\xi_k = \mathbb{E}\eta_k = 0, \qquad \mathbb{E}[\xi_k^2] = \sigma_1^2 < \infty, \qquad \mathbb{E}[\eta_k^2] = \sigma_2^2 < \infty, \qquad \mathbb{E}[\xi_k\eta_k] = \rho$$

де $0 < \sigma^1 + \sigma^2 < \infty$. Тоді для всіх фіксованих $s \in \mathbb{R}$,

$$Zeros_{\mathbb{R}}\left(X_n\left(s_n + \frac{\cdot}{n}\right)\right)_{n\to\infty} \overset{\omega}{\to} Zeros_{\mathbb{R}}(G(\cdot))$$

на $M_p(\mathbb{R})$, де $(G(t))_{t\in\mathbb{R}}$ − центрований процес Гауса з коваріацією

$$\mathbb{E}[G(t_1)G(t_2)] = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} sinc(t_1 - t_2), & s \notin \pi\mathbb{Z}, \\ \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} sinc(t_1 - t_2) - \dfrac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} sinc(t_1 + t_2) + \rho\dfrac{1-\cos(t_1+t_2)}{t_1+t_2}, & s \in \pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

з умовою, що $x \to (1 - \cos x)/x$ дорівнює 0 при $x = 0$.

Випадок притягання до стійких розподілів

Нехай (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2),... є незалежними однаково розподіленими векторами зі строгої області притягання деякого двовимірного α-стійкого розподілу, $0 < \alpha < 2$. Отже, існує послідовність $b_n > 0$, що

$$\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k, \sum_{k=1}^{n}\eta_k\right) \overset{d}{\to} S_{\alpha,v}, \qquad n\to\infty \qquad (5.4)$$

де $S_{\alpha,v}$ – невироджений α-стійкий випадковий вектор з мірою Леві ν, без зсуву та без гауссівської компоненти. Зокрема, припускаємо: $\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\eta_1 = 0$ у випадку, якщо α > 1. Міра ν - локально скінченна на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ за визначенням і задовольняє умові однорідності:

$$v(\lambda B) = \lambda^{-\alpha} v B$$

для всіх λ > 0 та всіх борелівських $B \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Теорема 5.5 Припустимо, що виконується умова (5.4) та зафіксуємо $s \in \mathbb{R}$. Тоді

$$Zeros_{\mathbb{R}}\left(X_n\left(s + \frac{\cdot}{n}\right)\right) \Longrightarrow Zeros_{\mathbb{R}}\big(Z_v(\cdot)\big), \qquad n \to \infty$$

на $M_p(\mathbb{R})$ з грубою топологією, де $(Z_v(t))_{t\in\mathbb{R}}$ визначається рівністю

$$Z_v(t) = \operatorname{Im} \int_0^1 e^{itu} dL(u)$$
$$= \int_0^1 \sin(tu)\, d \operatorname{Re} L(u) + \int_0^1 \operatorname{sicosn}(tu)\, d \operatorname{Im} L\,(u) \qquad (5.6)$$

$t \in \mathbb{R}$, а $(L(u))_{u\in[0,1]}$ - $\mathbb{C}$-значний α-стійкий процес Леві з нульовим зсувом, без гауссівської компоненти та з мірою Леві $\tilde{v}$:

$$\tilde{v}(B) := \begin{cases} \int_0^1 v\big(e^{2\pi i y} B\big) dy, & s \notin \pi\mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{q} v\left(e^{\frac{2\pi i k}{q}} B\right), & s = \frac{2\pi p}{q}, \quad \text{з } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad (5.7)$$

взаємно прості для всіх борелівських $B \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$, а ν є мірою Леві $S_{\alpha,\nu}$ в (5.4).

Теорема 5.8 Нехай (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), . . . є незалежними однаково розподіленими центрованими випадковими векторами з одиничною коваріаційною матрицею. Для будь-якого $s \in \mathbb{R}$, s – фіксоване, покладемо

$$Y_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} X_n\left(s + \frac{t}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k \sin\left(k\left(s + \frac{t}{n}\right)\right) + \eta_k \cos\left(k\left(s + \frac{t}{n}\right)\right)\right).$$

Отже $Y_n \Rightarrow Z$ при $n \to \infty$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ із локально рівномірною топологією.

<u>*Доведення.*</u> Для доведення даної теореми ми повинні довести збіжність скінченновимірних розподілів та щільність.

1. *Збіжність скінченновимірних розподілів:*

   Нехай довільні фіксовані $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{C}$. Маємо $Y_n(t) = V_{n,1}(t) + \cdots + V_{n,n}(t)$, де

$$V_{n,k}(t) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\xi_k \sin\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right) + \eta_k \cos\left(k\left(s+\frac{t}{n}\right)\right)\right).$$

   $Y_n := (Y_n(t1), \dots, Y_n(t_d))$ - комплексний випадковий вектор, він може бути представлений у вигляді суми незалежних центрованих векторів $(V_{n,k}(t_1), \dots, V_{n,k}(t_d))$ по $k = 1, \dots, n$. Для доведення збіжності за розподілом Y_n до $Y := (Z(t_1), \dots, Z(t_d))$, скористаємось центральною граничною теоремою Ліндеберга. Спочатку перевіримо, що при $i, j = 1, \dots, d$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n(t_i)Y_n(t_j)\right] = \mathbb{E}\left[Z(t_i)Z(t_j)\right] = sinc(t_i - t_j),$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[Y_n(t_i)\overline{Y_n(t_j)}\right] = \mathbb{E}\left[Z(t_i)\overline{Z(t_j)}\right] = sinc(t_i - \overline{t_j}).$$

   З формули наведеної в теоремі маємо:

$$\mathbb{E}\left[Y_n(t_i)Y_n(t_j)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} cos\frac{k(t_i - t_j)}{n} \to \int_0^1 \cos\left(u(t_i - t_j)\right) du = sinc(t_i - t_j)$$

   та відповідно

$$\mathbb{E}\left[Y_n(t_i)\overline{Y_n(t_j)}\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} cos\,\frac{k(t_i - \overline{t_j})}{n} \to \int_0^1 \cos\left(u\left(t_i - \overline{t_j}\right)\right)du = sinc(t_i - \overline{t_j}),$$

при $n \to \infty$. Перевіримо умову Ліндеберга. Нехай $t \in \mathbb{C}$ і t - фіксоване. Для будь-яукого $\varepsilon > 0$ перевіримо, що

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|V_{n,k}(t)\right|^2 1_{\{|V_{n,k}(t)|\geq\varepsilon\}}\right] = 0.$$

Використаємо такі нерівності: $|z_1 + z_2|^2 \leq 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$ та $|sin\ z| \leq cosh(\mathrm{Im}\ z)$, $|cos\ z| \leq \cosh(\mathrm{Im}\ z)$, отримуємо для $k = 1, \ldots, n$,

$$\left|V_{n,k}(t)\right|^2 \leq \frac{2}{n}\left(cosh^2(\mathrm{Im}\ t)\right)(\xi_k^2 + \eta_k^2).$$

Покладемо $C = 2\ cosh^2(\mathrm{Im}\ t)$

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[\left|V_{n,k}(t)\right|^2 1_{\{|V_{n,k}(t)|\geq\varepsilon\}}\right] \leq \frac{C}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(\xi_k^2 + \eta_k^2)1_{\{C(\xi_k^2+\eta_k^2)\geq n\varepsilon^2\}}\right] = C\mathbb{E}\left[(\xi_k^2 + \eta_k^2)1_{\{\xi_k^2+\eta_k^2\geq n\varepsilon^2/C\}}\right]$$

Внаслідок припущення $E[\xi_1^2 + \eta_1^2] < \infty$ права частина збігається до нуля при $n \to \infty$.

2. *Щільність:*

Щоб перевірити щільність $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ у просторі $\mathcal{H}$ достатньо показати, що для будь-якого $R > 0$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{|t|\leq R}\mathbb{E}|Y_n(t)|^2 < \infty,$$

Для будь-яких $|t| \leq R$ та $n \in \mathbb{N}$ маємо

$$\mathbb{E}|Y_n(t)|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} cos\frac{k(t-\bar{t})}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} cosh\frac{2k(\operatorname{Im} t)}{n} \le \cosh(2R) < \infty,$$

так як $-R \le \frac{k}{n}\operatorname{Im} t \le R$ для будь-яких $k = 1, \dots, n$.

Отже, Y_n слабко збігається до Z у просторі $\mathcal{H}$ при $n \to \infty$. Має місце слабка збіжність у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ так як $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ є замкненим в $\mathcal{H}$ та всі процеси мають траєкторії в $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ м.н.

Теорема 5.9 Нехай s ∈ ℝ і s - фіксоване, визначимо випадковий процес $(Y_n(t))_{t\in C}$ такою рівністю

$$Y_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} X_n(s + \frac{t}{n})$$

За умов теореми 5.3 маємо таке, що $Y_n \Rightarrow G$ у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$

Якщо вектор (ξ_1, η_1) належить області притягання стійкого закону, то функціональна гранична теорема для тригонометричних поліномів має ось такий вигляд.

Доведення використовує аналогічні міркування, що і попередня теорема.

Теорема 5.10 Нехай s ∈ ℝ і s – фіксоване. За умов теореми 5.5 маємо таке, що

$$\frac{1}{b_n} X_n\left(s + \frac{t}{n}\right) \Rightarrow Z_v(t), \qquad n \to \infty$$

у просторі $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$.

Доведення даної теореми досить об'ємне і наведено в [2].

Побудуємо аналітичні продовження процесів Z, G та Z_v, що будуть використовуватись в наступних теоремах.

<u>*Процес Z*</u>. Стаціонарний гауссівський процес $(Z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ можна аналітично продовжити на всю комплексну площину, використавши представлення

$$Z(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc(t-\pi k)N_k, \qquad t \in \mathbb{C} \qquad\qquad (5.11)$$

де є $(N_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ незалежними стандартними нормальними величинами. Ряд в (5.11) збігається локально рівномірно м.н. на $\mathbb{C}$, оскільки локально рівномірно збігається ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |sinc(t-\pi k)|^2$. Це означає, що $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ є аналітичною на $\mathbb{C}$ з ймовірністю 1. Далі, $\mathbb{R}^2$ - значний процес $((\mathrm{Re}\, Z(t), \mathrm{Im}\, Z(t)))_{t\in\mathbb{C}}$ є гауссівським в сенсі, що для всіх $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{C}$, випадковий вектор

$$(Re\, Z(t_1), Im\, Z(t_1), \ldots, Re\, Z(t_d), Im\, Z(t_d))$$

є гауссівським. Очевидно, $\mathbb{E}Z(t) = 0$ для всіх $t \in \mathbb{C}$. Коваріаційна структура

$(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ задається рівностями

$$\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] = sinc(t-s),$$
$$\mathbb{E}\left[Z(t)\overline{Z(s)}\right] = sinc(t-\bar{s}), \qquad t, s \in \mathbb{C}, \qquad (5.12)$$

Наприклад, якщо $t, s \notin \pi\mathbb{Z}$, то

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z(t)Z(s)] &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{sin(t-\pi k)}{t-\pi k}\left(\overline{\frac{sin(t-\pi k)}{s-\pi k}}\right) \\
&= (\sin t)(\sin \bar{s}) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(t-\pi k)(\bar{s}-\pi k)} \\
&= \frac{(\sin t)(\sin \bar{s})}{\bar{s}-t} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(t-\pi k)} - \frac{1}{(\bar{s}-\pi k)}\right) \\
&= \frac{(\sin t)(\sin \bar{s})}{\bar{s}-t} (\cot t - \cot \bar{s}) = \frac{\sin(t-\bar{s})}{t-\bar{s}},
\end{aligned}$$

де ми використали розклад котангенса на прості дроби. Якщо $t = \pi j$ для деякого $j \in \mathbb{Z}$, то

$$\mathbb{E}\left[Z(t)\overline{Z(s)}\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc(t-\pi k)\overline{sinc(s-\pi k)} = \overline{sinc(s-\pi j)} = sinc(t-\bar{s})$$

оскільки $sinc(t - \pi k) = 1$ при $k = j$ та 0 при $k \neq j$. Доведення першого співвідношення в (5.12) аналогічне.

Зауважимо, що аналітично продовжений процес $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$ є стаціонарним відносно зсувів вздовж дійсної осі, але не є стаціонарним відносно зсувів вздовж уявної осі.

<u>*Процес G*</u>. Якщо $s \notin \pi\mathbb{Z}$ можемо покласти

$$G(t) := \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2}} Z(t), \qquad t \in \mathbb{C}$$

з вже побудованим процесом $(Z(t))_{t\in\mathbb{C}}$. У випадку $s \in \pi\mathbb{Z}$ візьмемо центрований $\mathbb{C}$ -значний броунівський рух $(\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(\mathrm{u}))_{\mathrm{u}\in[0,1]}$ з коваріаційною структурою

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Re}\,\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1)\right)^2\right] = \sigma_1^2, \qquad \mathbb{E}\left[\left(\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1)\right)^2\right] = \sigma_2^2,$$
$$\mathbb{E}[(\mathrm{Im}\,\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))(\mathrm{Re}\,\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(1))] = \rho,$$

та покладемо

$$U(t) = \int_0^1 e^{itu} d\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(\mathrm{u}), \qquad t \in \mathbb{C}$$

де інтеграл визначається формулою інтегрування частинами. Очевидно, що так визначена U є випадковою аналітичною функцією на $\mathbb{C}$. Визначимо

$$G(t) = \frac{U_v(t) - \overline{U_v(\bar{t})}}{2i} = \int_0^1 \sin(tu)\, dRe\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(\mathrm{u}) + \int_0^1 \cos(\mathrm{tu}) dRe\mathcal{S}_2^{\mathbb{C}}(\mathrm{u})\,,$$
$$t \in \mathbb{C}$$

Інтегруючи частинами та використовуючи формули

$$\int_0^1 \sin(t_1 u)\sin(t_2 u)\, du = \frac{1}{2} sinc(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} sinc(t_1 + t_2),$$

$$\int_0^1 \cos(t_1 u)\cos(t_2 u)\, du = \frac{1}{2} sinc(t_1 - t_2) - \frac{1}{2} sinc(t_1 + t_2),$$

$$\int_0^1 \sin(t_1u)\cos(t_2u)\,du = \frac{1-\cos(t_1+t_2)}{2(t_1+t_2)} - \frac{1-cos(t_1-t_2)}{2(t_1-t_2)}.$$

Процес Z_V. Нехай *(L(u))*$_{u\in[0,1]}$ є $\mathbb{C}$-значним α-стійким процесом Леві. Так само, як при побудові *G*, покладемо

$$U_v(t) = \int_0^1 e^{itu} dL(u), \qquad t \in \mathbb{C}$$

Очевидно, що U_v є випадковою аналітичною функцією на $\mathbb{C}$ і можемо взяти

$$Z_v(t) = \frac{U_v(t) - \overline{U_v(\bar{t})}}{2i} = \int_0^1 \sin(tu)\, dReL(u) + \int_0^1 \cos(\mathrm{tu}) dReL(u)\,, \qquad t \in \mathbb{C}$$

Має місце така збіжність (збіжність тут розуміється як збіжність на просторі ймовірнісних мір на аналітичних функціях в усій комплексній площині):

Теорема 5.13 $X_n(z) \Longrightarrow Z(z),\ n \to \infty$ у просторі ймовірнісних мір на *A*($\mathbb{C}$), де

$$Z(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} sinc(z - \pi k) N_k$$

(N_k) – незалежні стандартні нормальні величини, *sinc*(*z*) = $\begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

Тепер ми можемо сформулювати та довести функціональні граничні теореми для випадкових тригонометричних поліномів.

2.2 Збіжність нулів

Лема 6.1 Нехай $A = A[a, b] \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ — множина, що складається з усіх $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, які не мають кратних дійсних нулів у $[a, b]$ і задовольняють $f(a) \neq 0$, $f(b) \neq 0$. Тоді множина A відкрита, а відображення N локально постійне на А (тобто для кожного $f \in A$ існує відкрите оточення f у $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, на якому N постійне).

<u>*Доведення.*</u> Розглянемо будь-яку послідовність $(f_n)_{n\in N} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, яка збігається до $f \in A$ локально рівномірно. Нам потрібно показати, що для достатньо великих n ми маємо $f_n \in A$ і $N(f_n) = N(f)$. Нехай $R > 0$ настільки велике, що $[a,b]$ міститься у відкритому крузі $\mathbb{D}_R = \{|z| < R\}$. Нехай $z_1,...,z_d$ — сукупність усіх нулів f у $\mathbb{D}_R$ з відповідними кратностями $m_1, . . . , m_d$. Без втрати загальності припустимо, що f не має нулів на межі $\mathbb{D}_R$ (в іншому випадку просто збільште R). Нехай $\varepsilon > 0$ настільки мале, що відкриті ε-круги $z_1 + \mathbb{D}_\varepsilon. . . , z_d + \mathbb{D}_\varepsilon$ не перетинають один одного, межу $\mathbb{D}_R$ і дійсну вісь (за винятком випадків, коли нуль сам є дійсним). За теоремою Гурвіца для всіх достатньо великих n функція f_n має рівно m_k нулів (з кратністю) у крузі $z_k + \mathbb{D}_\varepsilon$, для всіх $k = 1, . . . , d$, і в $\mathbb{D}_R$ немає інших нулів. Якщо $z_k \in (a, b)$, то $m_k = 1$ (з огляду, що $f \in A$) і відповідний нуль f_n у крузі $z_k + \mathbb{D}_\varepsilon$ також є дійсним, оскільки інакше f_n мав би два різних комплексних спряжених нулів ($f_n(\bar{z}) = \overline{f_n(z)}$) що є суперечністю. З цього випливає, що всі дійсні нулі f_n в (a, b) є простими і їх кількість дорівнює $N(f)$. Зрозуміло, що $f_n(a) \neq 0$, $f_n(b) \neq 0$ для достатньо великих n. Отже, $f_n \in A$ і $N(f_n) = N(f)$ для великих n.

Нагадаємо, що $\boldsymbol{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ є локально скінченною мірою на $\mathbb{R}$, яка підраховує дійсні нулі $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ із кратністю.

Лема 6.2 Нехай $A(\mathbb{R})$ — множина всіх $f \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$, які не мають кратних дійсних нулів. Розглянемо відображення $f \to \boldsymbol{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$ від $\mathcal{H}_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$ до простору $M_p(\mathbb{R})$ локально скінченних точкових мір на $\mathbb{R}$, наділеного невизначеною топологією. Тоді це відображення неперервне на $A(\mathbb{R})$.

<u>*Доведення.*</u> Нехай $(f_n)_{n\in N} \subset \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$ — послідовність, яка збігається до $f \in A(\mathbb{R})$ локально рівномірно. Зафіксуємо $R > 0$. Нехай $z_1,...,z_l$ — дійсні нулі f у $[-R, R]$ і припустимо, що немає нулів у $-R$ і R. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Аргументуючи, як у доказі леми 6.1 можна показати, що для достатньо великих n функція f_n має рівно один дійсний нуль у будь-якому з кругів $z_1 + \mathbb{D}_\varepsilon,..., z_l + + \mathbb{D}_\varepsilon$, і більше немає дійсних нулів f_n у $[-R, R]$. Але це означає, що $\boldsymbol{Zeros}_{\mathbb{R}}(f_n)$ нечітко сходиться до $\boldsymbol{Zeros}_{\mathbb{R}}(f)$

2.2.1 Доведення теорем 5.1, 5.2 та 5.3

З огляду на дві останні леми, теореми 5.8, 5.9 і 5.10 і теорему про неперервне відображення, збіжність нулів у теоремах 5.2 і 5.3 випливає, якщо ми можемо показати, що

$$\mathbb{P}[Z \in A(\mathbb{R})] = \mathbb{P}[G \in A(\mathbb{R})] = \mathbb{P}[Z_v \in A(\mathbb{R})] = 1 \qquad (6.3)$$

Тобто, що граничні процеси Z, G, Z_v для кожного $a < b$. Для перевірки цих тверджень нам знадобиться результат Є. В. Булінської. Він забезпечує загальні умови, які гарантують, що стохастичний процес (який не обов'язково повинен бути Гаусовим) не має множинних нулів з імовірністю 1.

Лема 6.4 (Булінська) Нехай $(Q(t))_{t\in[a,b]}$ — стохастичний процес із безперервно диференційованими траєкторіями вибірки. Припустимо, що випадкові величини $Q(t)$ є абсолютно неперервними з рівномірно обмеженими по $t\in[a,b]$ густинами. Тоді з ймовірністю 1 не існує такого $t \in [a,b]$, що $Q(t) = Q'(t) = 0$.

Частина (6.3) щодо гаусових процесів Z і G (у випадку $s \notin \pi\mathbb{Z}$) безпосередньо випливають із леми 6.4. Дійсно, дисперсії як Z, так і G є ненульовими константами, що означає, що існують рівномірні верхні межі густин $Z(t)$ і $G(t)$. Зауважимо також, що вибіркові шляхи Z і G є аналітичними функціями. Розглянемо $G(t)$ у випадку $s \in \pi\mathbb{Z}$.

Лема 6.5 Нехай $s \in \pi\mathbb{Z}$. Тоді з ймовірністю 1 не існує такого $t \in \mathbb{R}$, що $G(t) = G'(t) = 0$.

<u>*Доведення*</u>. Ми розглядаємо тільки $t \geq 0$, тому що випадок $t < 0$ подібний. Для всіх $t > 0$ маємо

$$\operatorname{Var} G(t) = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2} - \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{2}\operatorname{sinc}(2t) + \rho\frac{1-\cos(2t)}{2t}$$

Функція $t \to t \operatorname{Var} G(t)$ є неспадною, оскільки

$$\frac{d}{dt}\big(2t \operatorname{Var} G(t)\big) = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)\cos(2t) + 2\rho\sin(2t) \geq 0,$$

де в останній нерівності ми використали $|\rho| \leq \sigma_1\sigma_2$ (нерівність Коші–Шварца) і максимум функції $a\cos(2t) + b\sin(2t)$ дорівнює $\sqrt{a^2+b^2}$.

Якщо Var $G(0) = \sigma_2^2 > 0$. Ми можемо знайти ε > 0 таке, що Var $G(t) > \frac{1}{2}\sigma_2^2 > 0$ для всіх $0 \le t \le \varepsilon$. Для $t \ge \varepsilon$ ми отримуємо Var $G(t) \ge \varepsilon\sigma_2^2/(2t)$ і, отже, Var$G(t)$ обмежено знизу на компактних множинах, таким чином виправдовуючи використання леми 6.4.

Якщо Var $G(0) = \sigma_2^2 = 0$. Тоді ρ = 0 і Var $G(t) = \frac{1}{2}\sigma_1^2\,(1 - \mathrm{sinc}(2t))$ залишається рівномірним відмежованим від нуля на $[a, b]$ для всіх $0 < a < b < \infty$. За лемою 6.4 не існує декілька нулів G на $(0, \infty)$, з імовірністю 1. Щоб побачити, що 0 є майже напевно не кратний нулю, зауважимо, що хоча $G(0) = 0$, ми маємо $G'(0) = \int_0^1 u \,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}\, W(u)$, яка є гаусовою змінною із строго додатною дисперсією (оскільки Var Re $W(1) = \sigma_1^2 > 0$) і, отже, незрівнянною з нулем майже напевно

Перевіряємо $\mathbb{P}[Z_v \in A(\mathbb{R})] = 1$ за допомогою леми 6.4.

Лема 6.6 З імовірністю 1 не існує такого $t \in \mathbb{R}$, що $Z_v(t) = Z_v'(t) = 0$.

Доведення. Z_v є випадковою аналітичною функцією. Ми маємо намір показати, що $Z_v(t)$ має рівномірно обмежену густину по $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}$ для фіксованого ε > 0. Відповідно до леми 3.8 це означає, що процес Z_v майже напевно не має кратних нулів у жодному інтервалі, відмежованому від нуля. Зафіксуємо ε > 0. Досить показати, що

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\mathbb{E}e^{iaZ_{v(t)}}\right| da \le C, \qquad (6.7)$$

де C не залежить від $\varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}$. Це означає, що характеристична функція випадкової величини $Z_v(t)$ має обмежену L^1 - норму, яка за допомогою інверсії Фур'є означає, що ця випадкова величина має щільність Лебега, скажімо p_t, і

$$\rho_t(x) = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\mathbb{R}} \left|e^{-iax}\mathbb{E}e^{iaZ_{v(t)}} da\right| \le \frac{C}{2\pi}, \; x \in \mathbb{R}, \qquad \varepsilon < |t| < \varepsilon^{-1}.$$

Доведемо (6.7). Зауважимо, що

$$aZ_v(t) = \int_0^1 a\sin(tu)\, d\mathrm{Re}L(u) + \int_0^1 a\cos(tu) d\mathrm{Im}L(u)$$

За формулою для характеристичної функції такого стохастичного інтеграла маємо

$$log\ \mathbb{E}e^{iaZ_{v(t)}} = \int_0^1 \psi(a\sin(tu), a\cos(tu))du, \qquad (6.8)$$

де

$$\psi(x,y) = \ log\ \mathbb{E}e^{i(x\mathrm{Re}L(1)+y\mathrm{Im}L(1))}, \qquad x,y \in \mathbb{R}.$$

Випадковий вектор (Re *L(1)*, Im *L(1)*) є α-стабільним. Позначимо їх спектральну міру через Γ (яка є скінченною мірою на одиничному колі T = $\{z \in \mathbb{C}$*:* |z| = *1*$\}$, який можна легко виразити в члени $\tilde{v}$). Ми маємо

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\psi(a\sin(tu), a\cos(tu))\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} \left|\mathrm{Im}e^{i(tu+\phi)}\right|^\alpha \Gamma(d\phi)\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} |\sin(tu+\phi)|^\alpha \Gamma(d\phi).\end{aligned}$$

Поклавши це в (6.8), отримуємо

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}log\ \mathbb{E}e^{iaZ_{v(t)}}\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} \int_0^1 \left||\sin(tu+\phi)|\right|^\alpha du\Gamma(d\phi)\\ &= -|a|^\alpha \int_{[0,2\pi)} \int_\phi^{t+\phi} |\sin v|^\alpha dv\Gamma(d\phi).\end{aligned}$$

Функція *(φ, t) 7⟶ t*$^{-1}$ $\int_\phi^{t+\phi} |\sin v|^\alpha dv$ є неперервним і строго додатним на компакті [0, 2π] × [ε, ε^{-1}], отже, досягає свого мінімального значення, скажімо δ > 0. Отже,

$$\mathrm{Re}log\ \mathbb{E}e^{iaZ_{v(t)}} \le -\delta\Gamma\big([0,2\pi)\big)|a|^\alpha, \qquad a \in \mathbb{R},$$

отримано (6.7) і доведено, що в $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ немає кратних нулів.

Залишається показати, що $t = 0$ майже напевно не є кратним нулю. Зауважимо, що якщо спектральна міра Γ підтримується {0, π}, то Im*L(u)* = 0 і, отже, $Z_v(0) = 0$ майже напевно. В іншому випадку $Z_v(0)$ = Im*L(1)* є невиродженою стабільною випадковою величиною, отже

$\mathbb{P}[Z_v(0) = 0] = 0$. Отже, припустимо, що Γ зосереджено на {0, π}. Ми маємо

$$Z_v'(0) = \int_0^1 ud\ \mathrm{Re}\ L(u)$$

випливає, що $Z_v'(0)$ має невироджений стійкий розподіл, отже, $\mathbb{P}[Z_v(0) = 0] = 0$. Це завершує доведення леми.

У цьому підрозділі в повній загальності доведено локальну універсальність дійсних нулів тригонометричних поліномів.

ВИСНОВКИ

В ході виконання цієї дипломної роботи ми здійснили глибокий аналіз граничних теорем для аналітичних випадкових процесів. По-перше, ми детально оглянули основні аспекти аналітичних випадкових процесів, розглядаючи їх ключові властивості та методи аналізу. Далі, ми зосередилися на граничних теоремах, розглянувши їх визначення, доведення та основні властивості. Зокрема, було показано, що граничні теореми відіграють ключову роль у розумінні їх довгострокової поведінки.

У роботі продемонстровано, що доведення функціональних граничних теорем для аналітичних випадкових процесів, зазвичай, є простішою задачею ніж для інших класів випадкових процесів. Це пов’язано з наявністю простого критерія щільності відповідних ймовірнісних мір, що забезпечується аналітичністю вибіркових функцій.

Іншим важливим аспектом теорії випадкових аналітичних процесів є питання про збіжність точкових процесів їх нулів. У роботі показано, що з відомої теореми Гурвіца випливає, що відображення, яке ставить у відповідність ненульовій аналітичній функції точковий процес її нулів є неперервним відносно локально рівномірної топології у просторі аналітичних функцій та грубої топології у просторі точкових процесів.

У роботі було детально досліджено два класи випадкових аналітичних процесів, це випадкові тригонометричні поліноми та випадкові ряди Діріхлє. Отримано ряд достатніх умов, що забезпечують слабку збіжність випадкових тригонометричних поліномів до аналітичних випадкових процесів та досліджено точкові процеси їх нулів. Доведено збіжність випадкових рядів Діріхлє у правому околі їх абсциси збіжності.

В підсумку, дана робота внесла значний вклад у вивчення граничних теорем для аналітичних випадкових процесів. Ми сподіваємося, що наші результати зможуть слугувати основою для подальших досліджень в цій важливій області. Крім того, важливим є розвиток нових чисельних методів та алгоритмів для обчислення аналітичних випадкових процесів, особливо в контексті великих даних та комп'ютерного моделювання. В майбутньому, такі методи можуть відкрити нові можливості для застосування цих теорій на практиці.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

[1] Yu. K. Belyaev. *Analytic Random Processes* / Yu. K. Belyaev., 1959.

[2] S. Resnick. *Point processes, regular variation and weak convergence*. Adv. Appl. Probab., 18(1):66–138, 1986.

[3] Bharucha-Reid, A. T., & Sambandham, M. (1986). *Random Polynomials*. Academic Press.

[4] Ahlfors, L. (1979). *Complex Analysis: An Introduction to the Theory of Analytic Functions of One Complex Variable* (3rd ed.). McGraw-Hill.

[5] Wentzel, E.S. *Probability theory* / E.S. Wentzel. - M.: Nauka, 1964. - 576 p.

[6] John B. Conway. *Functions of one complex variable, volume 11 of Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.

[7] Remmert, R. (1991). *Theory of Complex Functions. Springer.*

[8] SHIRAI, Tomoyuki. *Limit theorems for random analytic functions and their zeros*. 2012. – 335 p.

[9] Loeve, M. (1977). *Probability Theory I (4th ed.). Springer.*