

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ
ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

ПРИХОДЬКО
Дмитро Федорович

УДК 539.3

**КОЛИВАННЯ КОНСОЛЬНОГО СТРИЖНЯ ІЗ ЗАКРИТИЧНИМ
СТАТИЧНИМ СТАНОМ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНІЙ ВІБРАЦІЇ
ЗАКРІПЛЕННЯ**

01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Краснопольська Тетяна Сігізмундівна,
Інститут гідромеханіки НАН України,
провідний науковий співробітник відділу вихрових рухів;

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Сенченков Ігор Костянтинович,
Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
головний науковий співробітник відділу термопружності;

доктор технічних наук, професор
Аврамов Костянтин Віталійович,
Інститут проблем машинобудування
ім. А.М. Підгорного НАН України,
завідувач відділом надійності та динамічної міцності.

Захист відбудеться “30” червня 2016 р. о 14¹⁵ год. на засіданні спеціалізованої вченої ради К.26.001.21 у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою: м. Київ просп. Акад. Глушкова, 4-е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці імені М.Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розіслано “28” травня 2016 р.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми дисертаційної роботи визначається важливістю розуміння законів динаміки консольно-стрижневих конструкцій в наслідок їх широкого застосування в сучасній техніці і новітніх технологіях. Математичне моделювання процесів коливання консольних стрижнів дозволяє виявити нові аспекти їх динаміки, що раніше не привертало увагу вчених.

Динаміка найрізноманітніших і важливих елементів сучасної техніки таких як, висотні споруди, об'єкти ракетно-космічної техніки, чутливі елементи конденсаторів в подушках безпеки автомобілів – моделюються за допомогою консольно-стрижневих систем. Однією з важливих задач динаміки та дослідження стійкості таких систем є вивчення їх поведінки в умовах зовнішнього вібраційного впливу, при реалізації резонансних параметричних коливань. При цьому, як правило, виникають небезпечні динамічні напруження і значні амплітуди коливань. З іншої сторони, відомо, що високо частотний вібраційний вплив призводить до виникнення таких несподіваних динамічних явищ, як стабілізація верхнього положення перевернутого маятника при вертикальній вібрації його осі підвісу (маятник Стефенсона-Капіци), як рух кільця вгору на оберненому маятнику (маятник Челомея) і стабілізація кільця в деякому стійкому положенні. Іншим захоплюючим прикладом є стабілізація у вертикальному положенні гнучкого каната і навіть рух чародіїв вгору по такому канату, так званий ефект магічного індійського каната (the 'Indian rope trick'). Ці ефекти покладені в основу функціонування деяких приладів і технологічних процесів. Спосіб вібраційної стабілізації прямолінійної форми осі може використовуватись для самоцентрування при подачі гнучкої проволочки (нитки, шланга) з намоточного барабана модуля для подальшої її технологічної обробки.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась в рамках наукових напрямків кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Зокрема, результати ввійшли у звіт НД теми 14БП038-02 "Математичні та експериментальні методи механіки спряжених коливальних процесів і хвильових полів та їх застосування в гіроскопічних геонавігаційних та мікроелектромеханічних системах".

Мета і задачі дослідження. Мета роботи полягає у встановленні закономірностей регулярних і хаотичних динамічних режимів коливань при згинних деформаціях та дослідженні ефекту вібраційної стабілізації консольних стрижнів із закритичним статичним станом. Поставлена мета досягається на основі експериментального і теоретичного вивчення стабілізації і згинних коливань гнучких стрижневих систем.

Для досягнення поставленої мети були сформульовані наступні наукові задачі:

- експериментально дослідити ефект стабілізації та коливань закритичного стрижня при згинних деформаціях та при вертикальних вібраціях з різними частотами;
- визначити основні динамічні характеристики та ідентифікувати параметри стрижня із закритичним статичним станом;

– побудувати математичні моделі резонансних параметричних коливань стрижня із закритичним статичним станом при двохмодовій апроксимації нелінійних згинних деформацій стрижня при урахуванні початкових напружень і без їх урахування;

– вивчити закономірності регулярних і хаотичних режимів коливань закритичного стрижня при згинних деформаціях.

Об'єкт дослідження – коливання при згинних деформаціях та вібраційна стабілізація стрижня із закритичним статичним станом.

Предмет дослідження – динамічні характеристики (власні частоти та форми) і регулярні та хаотичні режими сталих коливань стрижнів із закритичним статичним станом при згинних деформаціях.

Методи дослідження. Використовувався комплексний метод дослідження, який складається з об'єднання експериментальних, аналітичних та чисельних методів дослідження динамічних стрижневих систем. Розробка розрахункових моделей досліджуваної системи виконана на основі класичних методів нелінійної механіки. Для розрахункового аналізу використовувались аналітичні методи: Бубнова-Гальоркіна, багатомаштабних розкладів, усереднення по швидкому часу, визначення показників Ляпунова, фазових портретів, часових реалізацій та спектральних щільностей.

Наукова новизна полягає в наступному:

– експериментально визначені частотні значення вертикальних вібрацій для резонансних коливань по другій і третій власним формам згинних коливань і вертикальній стабілізації стрижня із закритичним статичним станом;

– побудовані математичні моделі резонансних нелінійних параметричних коливань стрижня із закритичним статичним станом з урахуванням початкових напружень і без їх урахування;

– доведено існування і визначені характеристики регулярних та хаотичних режимів усталених коливань стрижнів із закритичним статичним станом.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому, що встановлені значення параметрів, при яких виникає стабілізація стрижня із закритичним статичним станом, і встановлено закономірності регулярних та хаотичних режимів доцільно використовувати при моделюванні та аналізі коливань консольно-стрижневих систем при згинних деформаціях.

Особистий внесок здобувача. Результати роботи відображені в шести статтях. З них одна робота опублікована в міжнародному періодичному журналі, який включено до міжнародних наукометричних баз. Формулювання загальної проблеми динаміки закритичних стрижнів належить д.ф.-м.н. професору В.В. Мелешку [1], який її сформулював у 2011 році. Постановка основних задач та ідей належать науковому керівнику д.ф.-м.н. Т.С. Краснопольській [2–6, 8, 10, 11]. Деякі ідеї та допомога при розрахунках резонансних характеристик належать д.ф.-м.н. професору О.А. Гуржію [2–5, 9]. Побудова аналітичних моделей, експериментальні дослідження і чисельне моделювання були виконані автором самостійно.

Апробація результатів дисертації. Основні результати роботи доповідалися і обговорювалися на Міжнародній конференції «Шевченкова весна» (Київ, Україна,

2012); Міжнародній конференції «Сучасні математичні методи досліджень в механіці», Міжнародна наукова школа-семінар, (Київ, Україна, 2012); 6 Chaotic Modeling and Simulation International Conference (Istanbul, Turkey, 2013); 8th European Nonlinear Oscillations Conference (Vienna, Austria, 2014); III Міжнародній конференції «Сучасні проблеми механіки» (Київ, Україна, 2015).

Результати досліджень також доповідалися і обговорювалися на науковому семінарі «Сучасні проблеми механіки» (керівники: академік НАН України В.Т. Грінченко, чл.-корр. НАН України А.Ф. Улітко) Київського національного університету імені Тараса Шевченка (січень 2012).

У повному обсязі дисертація доповідалась та обговорювалася на науковому семінарі «Сучасні проблеми механіки» (керівники: академік НАН України В.Т. Грінченко, д.ф.-м.н. Я.О. Жук) Київського національного університету імені Тараса Шевченка (січень 2016).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 11 наукових праць: серед них 6 статей, 5 з яких [1–3, 5, 6] у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України, одна стаття [4] опублікована в міжнародному науковому періодичному журналі, який має DOI (Digital Object Identifier), і яка включена до міжнародних наукометричних баз, 5 публікацій [7–11] у збірниках абстрактів конференцій.

Структура і об'єм дисертації. Дисертаційна робота складається з вступу, п'яти розділів, висновків і списку використаних літературних джерел з 94 найменувань. Основний текст роботи займає 122 сторінки. В роботі приведено 30 рисунків і 9 фотографій. Повний об'єм роботи складає 131 сторінку.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовується актуальність теми, формулюється мета досліджень, розглядаються питання про наукову новизну, теоретичне і практичне значення, задачі досліджень, апробацію одержаних результатів, кількість публікацій.

У першому розділі наведено огляд досліджень за темою дисертації.

Першочергово такі задачі розглядалися в спрощеній лінійній постановці та зводилися до визначення власних частот та форм коливань, до виявлення та прогнозування можливих резонансних ситуацій. Розв'язкам таких задач присвячені роботи таких видатних вчених, як В.Т. Грінченко, О.М. Гузь, В.В. Мелешко, А.Ф. Улітко. Починаючи з середини минулого століття становище суттєво змінилося. Прогрес машинобудівної, авіаційної, будівельної та інших областей нової техніки, що супроводжується збільшенням робочих швидкостей та підвищенням інтенсивності динамічних навантажень, створив передумови для розвитку теорії нелінійних коливань пружних тіл. В роботах таких видатних вчених, як В.В. Болотін, А.С. Вольмір, Р.Ф. Ганієв, В.О. Кононенко, Я.Г. Пановко, Г.С. Писаренко, С.П. Тимошенко, В.М. Челомей показано, що лінійне трактування недостатнє для опису і пояснення таких явищ, як залежність частот від амплітуд деформацій, зриви коливань, затягування коливань по частоті та інші. Тоді ж почалися дослідження параметрично збудованих коливань стрижнів. Найбільш суттєвий внесок в нього зробили В.К. Аврамов, В.В. Болотін, А.С. Вольмір, О.М. Гузь, Я.О. Жук, В.Д. Кубенко, Ю.В. Міхлін, Я.Г. Пановко, І.К. Сенченков. При параметричному збудженні

можливе виникнення різних ефектів: втрата стійкості вертикальної форми осі стрижня, зникнення старих і поява нових положень рівноваги та видів руху, зміна характеру положення рівноваги. Перераховані ефекти спостерігаються вже у поведінці найпростішої системи у вигляді жорсткого стрижня, що шарнірно закріплений на рухомій опорі, – маятника. Ця система, стала класичною в теорії параметричних коливань, демонструє, що нижнє положення статичної рівноваги при вібрації основи, в залежності від певних параметрів збурення, може виявитися не стійким, а стійким буде верхнє положення (обернений маятник). Проблема динамічної стійкості оберненого математичного маятника відома ще з початку двадцятого століття, починаючи з класичних експериментів А. Стефенсона. Роботами Д. Ачесона М.М. Боголюбова, В.В. Болотіна, Р.Ф. Ганієва, П.Л. Капіци, В.М. Челомея та інших видатних вчених минулого була створена теорія коливань такого маятника при динамічному гармонічному збуренні точки підвіса.

У *другому розділі* розглядається експериментальне дослідження коливань і стабілізації „закритичного” стрижня при наявності вертикальних вібрацій. Згідно теорії Тимошенка стрижень із закритичним статичним станом є таким що, при відсутності зовнішнього впливу, окрім рівномірно розподіленої сили ваги, буде спостерігатися явище випучування гнучкого стрижня, яке полягає в тому, що він втрачає прямолінійний вигляд і його вісь викривляється. Такий стрижень називається „закритичним”.

Для збудження гармонічних коливань у вертикальному напрямі використовувався електродвигун “ИНТЕРСКОЛ МП-65/550Э”, приєднаний до жорсткої платформи, двигун був з’єднаний з кривошипно-шатунним механізмом. Закритичний стрижень жорстко заземлювався на кінці шатуна, який рухався у вертикальному напрямі з постійною амплітудою. Частота коливань зчитувалась фотодатчиком та обраховувалась за допомогою осцилографа. Керування частотою збурення відбувалося за допомогою транзистора, що дає змогу проходити частоти від 0 Гц до 50 Гц з амплітудою вібрацій рівною $\Delta = 9 \cdot 10^{-3}$ м. Експериментальна модель стрижня складалася із сталеві проволочки, яка являла собою щільну кругову намотанку у вигляді жгута з 35 сталевих струн діаметра $25 \cdot 10^{-5}$ м, вага 1 м проволочки дорівнює $12 \cdot 10^{-3}$ кг, довжина використаного зразка в моделі $l = 26,7 \cdot 10^{-2}$ м. Такий стрижень закріплювався консольно, тобто один кінець жорстко закріплений та приєднаний до кривошипно-шатунного механізму, який з’єднаний з валом електродвигуна, інший кінець був вільним.

При малій частоті коливань стрижень з закритичною жорсткістю рухався у вертикальній площині, при цьому він не змінював свою форму, показану на фотографії на Рис. 1.

При збільшенні частоти коливань точка закріплення стрижня з закритичною жорсткістю збільшувала свою швидкість коливань. При збільшенні частоти до 7 Гц спостерігали, що стрижень з закритичною жорсткістю на згин починав коліватись по другій власній формі, в якій є два вузли – один рухався разом з точкою жорсткого закріплення, а другий на самому стрижні і рухався вертикально з тією ж амплітудою, що і точка жорсткого закріплення. Таким чином, спостерігали, що

стрижень з закритичною жорсткістю має другу власну форму коливань у вертикальній площині, яка утримувалася від 7 Гц до 9 Гц та дана на Рис. 2.

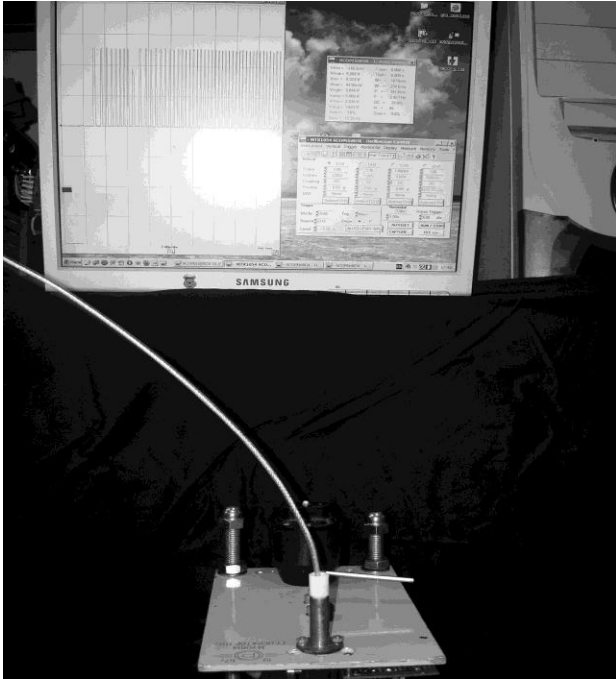


Рис. 1. Початкове положення стрижня.

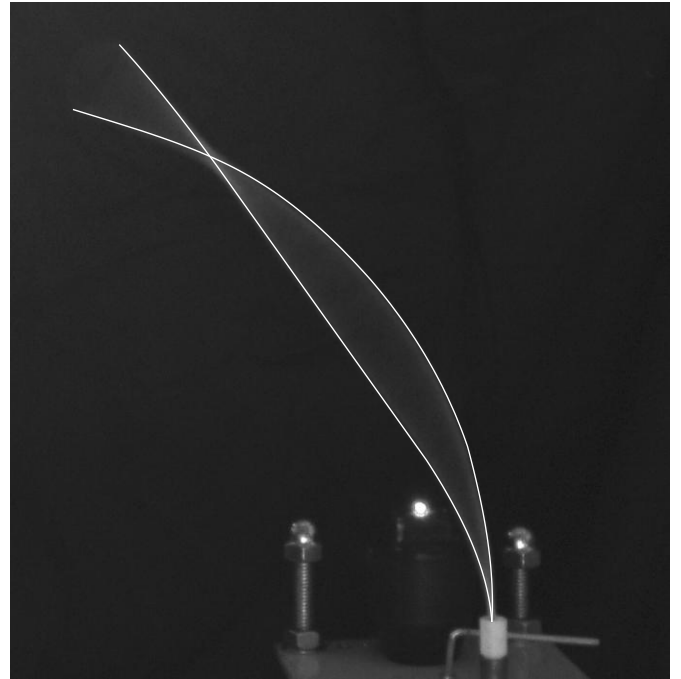


Рис. 2. Коливання стрижня по другій власній формі (білим наведено положення стрижня).

Продовжували збільшувати частоту обертань двигуна поки візуально починали спостерігати сумісні коливання стрижня по двох формах коливань одночасно: по другій та третій власних формах коливань стрижня. Фотографія сумісних коливань стрижня приведена на Рис. 3.

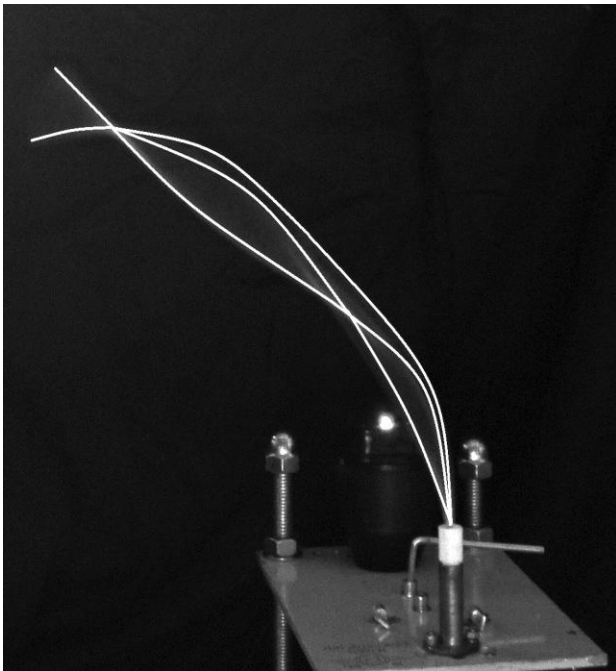


Рис. 3. Одночасні коливання стрижня по другій та третій власним формам (білим наведено положення стрижня).

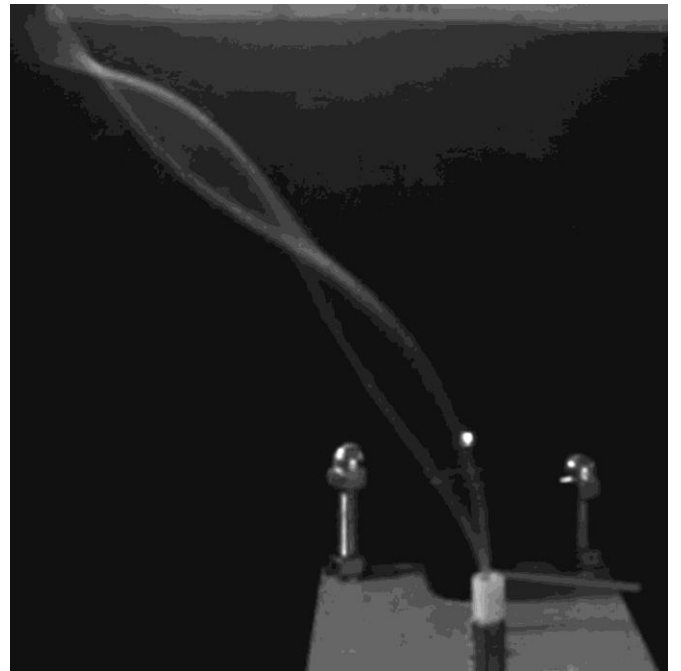


Рис. 4. Коливання стрижня по третій формі.

При збільшенні частоти реалізуються перехідні коливання стрижня, при частоті 24 Гц реалізовувались коливання по третій власній формі, що показано на Рис. 4. У цьому випадку спостерігали три вузли: один – точка закріплення, а два інші знаходяться на стрижні. Такі коливання спостерігалися при збільшенні частоти до 26 Гц. Та вже при збільшенні частоти до 28,5 Гц стрижень займає стійке вертикальне положення, тобто стабілізується.

Критерій стабілізації “закритичного” консольного стрижня при наявності вертикальних вібрацій точки закріплення отримано на основі аналізу з застосуванням методу послідовних наближень в роботах Шамні і Фрейсера. Умова для стабілізації згідно цього критерія має вигляд

$$\omega_{cr}^2 \Delta^2 > 1,275 l \cdot g \left(1 - \frac{l_{cr}^3}{l^3} \right), \quad (1)$$

де ω_{cr} – критична кругова частота коливань, при якій стрижень стабілізується у вертикальному положенні, Δ – амплітуда коливань закріплення, l – довжина стрижня, l_{cr} – критична довжина стрижня, g – прискорення вільного падіння, де $g = 9,8 \frac{м}{с^2}$. У використаній в експериментах моделі стрижня $l_{cr} = 16,5 \cdot 10^{-2} м$. Зауважимо, що ця критична довжина визначалась експериментальним шляхом для досліджуваного стрижня, вона дорівнює максимальній довжині досліджуваного стрижня, при якій стрижень зберігає вертикальне положення без впливу зовнішніх навантажень, тобто в стані спокою.

Використовували перехід від кругової частоти до звичайної, коли $\omega = 2\pi f$, та підставивши значення довжин і амплітуди коливань, які використовувалися у експерименті, отримали, що $f_{cr} > 28,25 Гц$. Порівнюючи значення частоти стабілізації “закритичного” стрижня в більшості проведених експериментів, коли частота була приблизно рівна 28,5 Гц, зі значенням отриманим з критерія стабілізації, приходимо до висновку про добре співпадання з похибкою порядку 1%.

У третьому розділі розглянута математична модель коливань консольного стрижня, визначені динамічні характеристики та ідентифіковані параметри системи.

В недеформованому стані вісь стрижня співпадала з вертикальною віссю x прямокутної системи координат xOy , початок координат знаходився в закріпленні стрижня. Припускалося, що поперечні перетини стрижня залишаються плоскими та перпендикулярними до zdeформованої вісі, а нормальні напруження на площадках паралельних осі дуже малі порівняно з повздовжніми напруженнями, вісь стрижня залишається нерозтяжною (гіпотеза Кіргофа). Нехай N x – повздовжня сила зв’язана з масою стрижня, що знаходиться над розглядуваним елементом, F – площа поперечного перетину стрижня, E – модуль Юнга, J – момент інерції стрижня відносно вісі y , ρ – густина стрижня, $Q = \frac{\partial}{\partial x} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$ – перерізуюча сила, тоді рівняння згинних коливань стрижня при розподіленому зовнішньому навантаженні q x,t має вигляд:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad x, t . \quad (2)$$

Якщо в перетинах стрижня діє продольна сила N_x , то рівняння (2) запишеться в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q \quad x, t . \quad (3)$$

Якщо місце кріплення пружної системи до кривошипно-шатунного механізму здійснює вертикальні коливання $A \cos \omega t$, тоді вздовжня сила N_x , яка виникає під дією сили тяжіння, сили інерції коливань частини стрижня від перетину x до його кінця l має вид:

$$N_x = \rho F \times \left\{ g(l-x) + (l-x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} A \cos \omega t \right\}. \quad (4)$$

Коли $q(x, t) = 0$, $A = \text{const}$, проведемо обезрозмірювання. Для цього введемо безрозмірні змінні:

$$w^* = \frac{w}{l}, t^* = t\omega, x^* = \frac{x}{l}, \varepsilon^* = \frac{A\omega^2}{g}, B^* = \frac{EJ}{\rho F g l^3}, I^* = \frac{l\omega^2}{g}. \quad (5)$$

Підставивши змінні (5) в рівняння (3) при умові (4) маємо (опустивши *):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{B}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{I} (1 - \varepsilon \cos t) \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7)$$

Математичне формулювання граничних умов має вид:

$$\begin{cases} x=0: w=0, w'=0 \\ x=1: w''=0, w'''=0 \end{cases} \quad (8)$$

Динамічна поведінка пружних систем при періодичному навантаженні суттєво залежить від динамічних характеристик самої системи, а саме: від власних форм і власних частот коливань. Як відомо власні форми та власні частоти коливань пружної системи визначаються як загальний розв'язок рівняння пружної системи вільної від зовнішніх впливів. Таким чином, щоб визначити такі характеристики як власні форми та власні частоти коливань системи в рівнянні (7) покладемо $\varepsilon = 0$. Тоді рівняння (7) прийме вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{B}{I} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{1}{I} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (9)$$

Для знаходження власних форм $\phi_n(x)$ та власних частот γ_n , $n=1, \dots, \infty$ використаємо метод Бубнова-Гальоркіна розділення змінних. Тоді розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$w(x, t) = \sum \phi_n(x) [A_n \cos \gamma_n t + B_n \sin \gamma_n t]. \quad (10)$$

Кожна власна форма повинна задовольняти рівняння:

$$B \frac{\partial^4 \phi_n}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(l - x \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) - \lambda_n \phi_n = 0, \quad (11)$$

де $\lambda_n = \gamma_n^2 I$.

Для того, щоб провести ідентифікацію параметрів, ми повинні повернутися до результатів наших експериментальних досліджень. В стані спокою пружний стрижень з малою жорсткістю на згин довжини 26,7 см знаходиться в стані випучування, коли стрижень не має прямолінійної вісі. Було проведено цілий ряд експериментів по коливанням і стабілізації стрижня. В цих експериментах другу власну форму коливань (Рис. 2) можна було спостерігати при частоті вертикальних коливань всієї системи від 7 Гц до 9 Гц. Тому ми зробили висновок, що коливання закритичного стрижня в більшості наших експериментів проходили по другій формі в зоні основного параметричного резонансу, коли частота цієї власної форми була вдвічі менша за частоту коливань вертикальних вібрацій, тобто дорівнювала

$$f_2 = \frac{\gamma_2}{2\pi} \approx \frac{1}{2} 8\text{Гц} = 4\text{Гц}. \text{ На Рис. 5 показані результати обчислень власних значень}$$

$\lambda_n = \gamma_n^2 I$, зроблених на підставі рівняння (11) при різних значеннях параметра B .

Обрахуємо, що $\lambda_2 = 18.031$ коли

$$\gamma_2 = \frac{2\pi}{2} 8\text{Гц} = 8\pi\text{Гц}. \quad \text{Даному}$$

значенню λ_2 на Рис. 5 відповідає $B = 0.055$. Такому $B = 0.055$ відповідає $\lambda_3 = 184.32$. Оскільки

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = \frac{\gamma_3^2}{\gamma_2^2} = 3.17^2, \text{ то легко зробити}$$

висновок, що власні частоти коливань досліджуваного стрижня γ_2 і γ_3 мають відношення одна до другої приблизно, як один до трьох (різниця між $3\gamma_2$ і γ_3 менш ніж $0.053\gamma_3$). Це означає, що в системі (коливання закритичного стрижня) є внутрішній резонанс, обумовлюючий взаємодію коливань по другій власній формі та по третій власній формі.

Конкретний вигляд першої, другої та третьої форм для значення жорсткості на згин, ідентифікованого з проведених експериментів, були побудовані чисельно з рівняння (11). Знайдені значення власних частот свідчать, що в розглянутій системі є внутрішній резонанс, коли друга і третя власні частоти мають співвідношення близьке до співвідношення один до трьох.

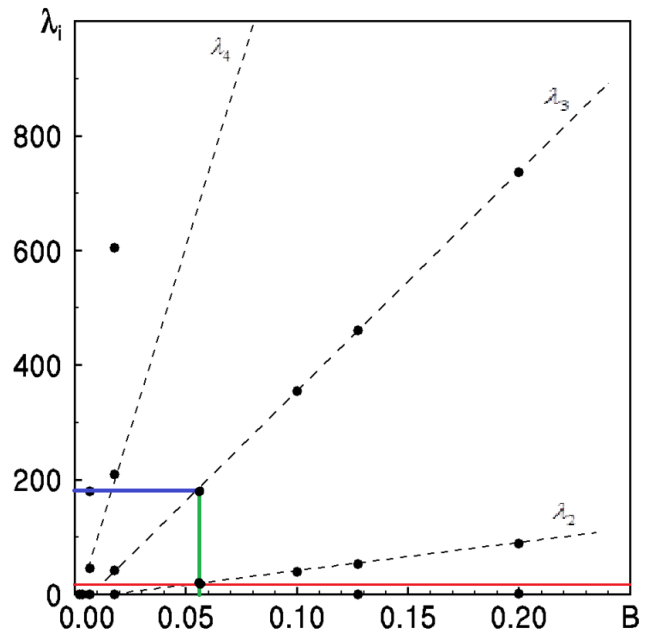


Рис. 5. Графік власних значень λ_i ($i = 2, 3, 4$) при зміні B .

У четвертому розділі дисертаційної роботи побудовані математичні моделі нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стрижня при двомодовій їх апроксимації, яка обумовлена внутрішнім резонансом власних частот та результатами експериментальних спостережень. Розглянуто в прямокутній системі координат x, y, z стрижень довжини l , поперечний перетин якого симетричний відносно двох взаємно перпендикулярних осей. Нехай для недеформованого стрижня його вісь співпадає з віссю x (тобто є вертикальною), а вісі симетрії паралельні осям y та z . Матеріал стрижня нехай слідує нелінійному закону пружності, причому скористаємось нелінійною технічною теорією згину. Прийmemo, що функція $f \varepsilon, x$, яка описує зв'язок між напруженням у волокні і видовженням волокна ε_x можна представити у вигляді:

$$f \varepsilon_x = E \left(1 - \alpha_3 E^2 \varepsilon_x^2 \right) \varepsilon_x, \quad (12)$$

де E – модуль пружності $E = \frac{9KG}{3K+G}$; $\alpha_3 = \frac{2}{9} \frac{3K}{3K+G} \frac{\gamma_2}{G^2}$, K – модуль стиску, G – модуль зсуву. Позначимо прогин точки x вісі стрижня в напрямку y в момент часу t через $\eta(x, t)$, згинний момент в цьому місці – через $M(x, t)$, площу поперечного перетину Q – через F та густину матеріала стрижня – через ρ . Тоді, незалежно від вигляду закону пружності, основним рівнянням динаміки для елемента dx стрижня в момент часу t буде:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = -\rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad (13)$$

при умові, що можна не враховувати інерцію обертання елементів стрижня. Згинний момент M визначається формулою $\iint_Q f A_* y y dy dz = M$. Замінивши в ній

кривину A_* осі стрижня, згідно рівності $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = A_*$ і враховуючи (12), отримаємо

$$M(x, t) = EJ_0 \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \alpha_3 E^2 \frac{J_2}{J_0} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right)^3 \right]. \quad (14)$$

Підставивши цей вираз в рівняння (13) і врахувавши, що в перетині стрижня діє поздовжня сила $N(x)$, отримаємо для $\eta(x, t)$ нелінійне диференціальне рівняння в часткових похідних четвертого порядку:

$$EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0. \quad (15)$$

Якщо місце жорсткого закріплення стрижня виконує вертикальні коливання вигляду $A \cos \omega t$, тоді рівняння (15) запишеться у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & EJ_0 \frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x + l - x \frac{d^2 A}{dt^2} \frac{\cos \omega t}{g} \right] \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} - \\
 & - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

Дане рівняння описує нелінійні згинні коливання стрижня відносно вертикального положення його осі, коли стрижень в початковому положенні в стані спокою є вертикальним. Припустимо, що вісь стрижня має початковий прогин $\eta_0 = \varphi_0$ з постійним за часом відхиленням (Рис. 6). Нехай при заданому початковому прогині η_0 згинний момент в стрижні рівний нулю, тобто ми розглядаємо згин закритичного стрижня без урахування початкових напружень. Тоді рівняння (16) можна записати в наступному вигляді відносно загального прогину $\eta_* = \eta_0 + \eta$, де η – динамічний прогин коливань стрижня відносно викривленої вісі η_0 :

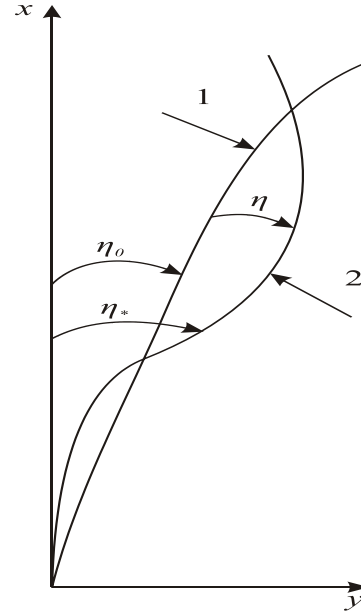


Рис. 6. Схема системи:

1 – початкове положення стрижня η_0 , 2 – деформований стан $\eta_* = \eta_0 + \eta$, де η коливання стрижня відносно початкового положення η_0 .

$$\begin{aligned}
 & EJ_0 \frac{\partial^4 \eta_*}{\partial x^4} - EJ_0 \frac{\partial^4 \eta_0}{\partial x^4} + \rho F g \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[l - x + l - x A \omega^2 \cos \omega t \right] \frac{\partial \eta_*}{\partial x} \right\} - \\
 & - 3\alpha_3 E^3 J_2 \left[\left(\frac{\partial^4 \eta_*}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 \eta_0}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial^2 \eta_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \left. + 2 \left(\frac{\partial^3 \eta_*}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 \eta_0}{\partial x^3} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 \eta_*}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} \right) + \rho F \frac{\partial \eta^2}{\partial t^2} = 0.
 \end{aligned} \quad (17)$$

Далі підставляючи співвідношення $\eta_* = \eta_0 + \eta$ в рівняння (17), отримаємо рівняння для коливань закритичного стрижня у безрозмірних змінних у вигляді:

$$\begin{aligned}
 & B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] + \\
 & + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_3 \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.
 \end{aligned} \quad (18)$$

Будемо знаходити розв'язки рівняння для випадку, коли виконуються умови головного параметричного резонансу по другій власній формі, та апроксимуємо згин стрижня, як коливання по двох власних модах функцією виду

$$w = \varepsilon_0 \phi_2 x \left[A_2 \tau \cos \frac{t}{2} + B_2 \tau \sin \frac{t}{2} \right] + \varepsilon_0 \phi_3 x \left[A_3 \tau \cos \frac{3t}{2} + B_3 \tau \sin \frac{3t}{2} \right]. \quad (19)$$

Доповнюючи рівняння (18) членом, що враховує демпфування (пропорційне швидкості $\frac{\partial w}{\partial t}$) та використовуючи метод усереднення Боголюбова-Митропольського отримаємо таку систему рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно амплітуд резонансних форм коливань стрижня у випадку відсутності початкових напружень:

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} B_2 - \frac{\alpha_2}{2} B_3 - \beta B_2 - \right. \\ &\left. -2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} B_2 A_2^2 + B_2^2 + \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + 2A_2 B_2 A_3 + \frac{\alpha_7}{4} B_2 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\ \frac{dB_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} A_2 + \frac{\alpha_2}{2} A_3 + \beta A_2 + \right. \\ &\left. +2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} A_2 A_2^2 + B_2^2 + \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2A_2 B_2 B_3 + \frac{\alpha_7}{4} A_2 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\ \frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_3 + \left\{ -\frac{\alpha_3}{6} B_2 - \beta_3 B_3 - \right. \\ &\left. -\frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} 3A_2^2 B_2 - B_2^3 + \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} B_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \quad (20) \\ \frac{dB_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_3 + \left\{ \frac{\alpha_3}{6} A_2 + \beta_3 A_3 + \right. \\ &\left. +\frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} A_2 A_2^2 - 3A_2 B_2 + \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} A_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \end{aligned}$$

Розглянемо математичну модель коливань стрижня при урахуванні початкових напружень відносно амплітуд резонансних мод. Якщо стрижень вже «випучився» і друга і третя форми коливаються навколо випученого стану, враховуємо згинний момент M , що виникає при початковій кривині стрижня $\frac{\partial^2 \eta_0}{\partial x^2} = \xi_0$. Тоді до

кривинини від динамічних коливань по другій та третій формах $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$ (де η коливання стрижня відносно початкового положення η_0) ми додаємо початкову ξ_0 ,

яку вважаємо рівній кривині $\xi_0 = A_0 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2}$ $A_0 - const$ по першій власній моді (формі) коливань ϕ_1 . Рівняння (18) з безрозмірними змінними має тепер вигляд:

$$\begin{aligned} & B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{A_0 B}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} + 1 - \varepsilon \cos t \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right) \right] + \\ & + I \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_3 \left[\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^4 \phi_1}{\partial x^4} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial x^3} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{A_0}{l} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Підставляючи апроксимацію коливань стрижня по двох модах (19) у рівняння (21) при урахуванні початкових напружень відносно амплітуд резонансних мод отримаємо систему рівнянь у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_2 - \frac{2I_3 \alpha_{15} a_0^2}{I} B_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} B_2 - \frac{\alpha_2}{2} B_3 - \beta B_2 - \right. \\ & \left. - 2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} B_2 A_2^2 + B_2^2 + \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 B_3 - B_2^2 B_3 + 2A_2 B_2 A_3 + \frac{\alpha_7}{4} B_2 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\ \frac{dB_2}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_2 + \frac{2I_3 \alpha_{15} a_0^2}{I} A_2 + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} A_2 + \frac{\alpha_2}{2} A_3 + \beta A_2 + \right. \\ & \left. + 2 \frac{I_3}{I} \left[\alpha_5 \frac{3}{8} A_2 A_2^2 + B_2^2 + \frac{\alpha_6}{8} A_2^2 A_3 - B_2^2 A_3 + 2A_2 B_2 B_3 + \frac{\alpha_7}{4} A_2 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\ \frac{dA_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} A_3 - \frac{2I_3 \alpha_{16} a_0^2}{3I} B_3 + \left\{ -\frac{\alpha_3}{6} B_2 - \beta_3 B_3 - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} 3A_2^2 B_2 - B_2^3 + \frac{\alpha_{10}}{8} B_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} B_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}; \\ \frac{dB_3}{d\tau} &= -\frac{\xi_2}{2} B_3 + \frac{2I_3 \alpha_{16} a_0^2}{3I} A_3 + \left\{ \frac{\alpha_3}{6} A_2 + \beta_3 A_3 + \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \frac{I_3}{I} \left[\frac{\alpha_9}{8} A_2 A_2^2 - 3A_2 B_2 + \frac{\alpha_{10}}{8} A_3 A_2^2 + B_2^2 + \alpha_{12} \frac{3}{8} A_3 A_3^2 + B_3^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Неконсервативні системи рівнянь (20) та (22) відрізняються членами з постійними коефіцієнтами $\frac{2I_3 \alpha_{15} a_0^2}{I}$ та $\frac{2I_3 \alpha_{16} a_0^2}{3I}$, які обумовлюють зсув резонансних зон при урахуванні початкових напружень.

У п'ятому розділі проведені чисельні розрахунки по дослідженню властивостей усталених режимів коливань динамічних систем четвертого порядку.

Приведемо спочатку результати дослідження усталених розв'язків системи рівнянь (20). Ця система є детермінованою нелінійною системою диференціальних рівнянь з чотиривимірним фазовим простором. Тому існує можливість виникнення в системі хаотичних атракторів. Для побудови фазових портретів системи застосовувався метод Рунге-Кутта п'ятого порядку зі змінним шагом чисельного інтегрування по процедурі Дормана-Принса, який забезпечує точність обчислення до $O 10^{-7}$. При проведенні чисельних розрахунків вважалось, що початкові параметри дорівнюють:

$$A_2 0 = 0.06, B_2 0 = 0.06, A_3 0 = 0.03, B_3 0 = 0.0, \quad (23)$$

При цьому фізичні параметри системи дорівнюють:

$$\rho = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/см}^3, \quad g = 980 \text{ см/с}^2, \quad A = 0,9 \text{ см}, \quad B = 0,055, \quad l = 26,7 \text{ см}, \quad r = 0,15 \text{ см},$$

$$G = 0,1398 \cdot 10^6 \text{ кг/см} \cdot \text{с}, \quad g_2 = 0,0547 \cdot 10^6, \quad \text{коли}$$

$$\lambda_2 = 18,031, \lambda_2 = 184,32, J_0 = \frac{\pi r^4}{4}, J_2 = \frac{2\pi r^6}{9}, \rho Fl = \frac{EJ_0}{Bl^3}, E = \frac{9KG}{3K + G}. \quad (24)$$

Тоді розрахункові параметри для стрижня з круговим перетином вибирались наступними:

$$E = 1,4227 \text{ г} \cdot 10^5 \text{ кг/см} \cdot \text{с}^2, \quad F = \pi r^2, \quad \zeta_2 = \frac{8 \cdot 10^{-7}}{\rho Fl} = 0,0017 \text{ с}^{-1}, \quad \gamma_0 = \frac{g}{l}, \quad \alpha_3^* = \frac{2Eg_2}{27G^3},$$

$$\omega = 2\pi f, \quad I_3 = 3V\alpha_3^* E^2 \frac{4}{6} \cdot 25 \cdot 10^{-6}. \quad (25)$$

При наших розрахунках як біфуркаційний параметр ми змінювали частоту коливань стрижня $\omega = 2\pi f$, де f – частота, що вимірюється в Гц.

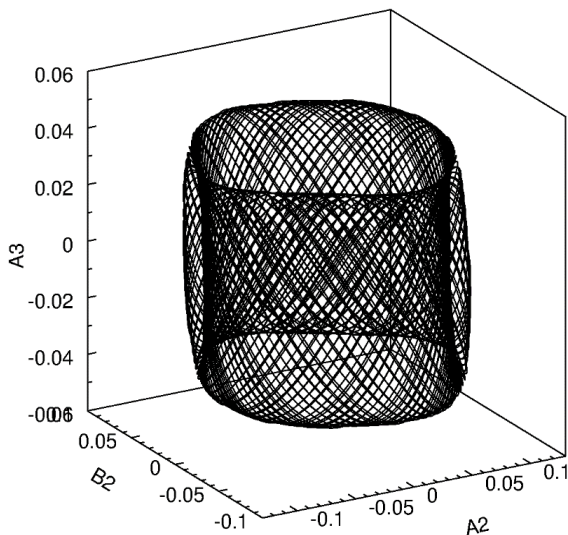


Рис. 7. Проекції фазових портретів при $\omega = 60 \text{ рад/с}$.

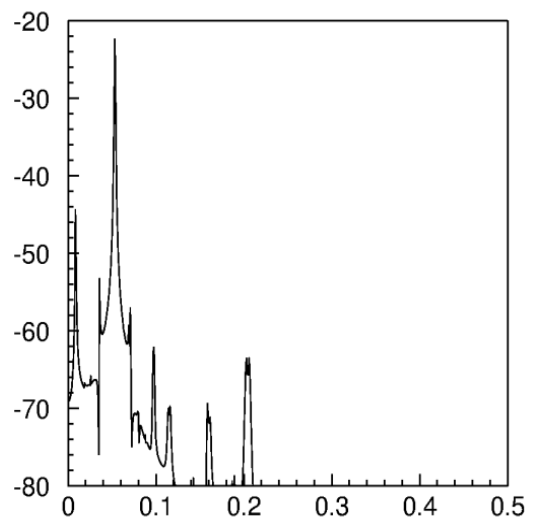


Рис. 8. Спектральні щільності при $\omega = 60 \text{ рад/с}$.

Проекція фазового портрету усталеного режиму при $\omega = 60 \text{ рад}/\text{с}$ має вигляд, наведений на Рис. 7. Для цього режиму спектральна щільність показана на Рис. 8. Старший показник Ляпунова є нульовим. Тому розв'язки для цього значень ω відповідають квазіперіодичному циклу, який повністю покриває тор з плином часу.

Хаотичні усталені коливання спостерігаються, починаючи з $\omega = 47 \text{ рад}/\text{с}$ до $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$, коливання стрижня при цьому значно ускладнюються. На Рис. 9 дана проекція чотиривимірному атратора на тривимірний простір для системи (22) при частоті $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$ при наступних початкових умовах $A_2(0) = 0.06$, $B_2(0) = 0.1$, $A_3(0) = 0.01$, $B_3(0) = 0.0$. Як добре помітно, траєкторія атратора блукає хаотично по простору. Реалізація функції коливань $A_2(t)$ у часі показана на Рис. 10., де добре помітні неупорядковані коливання, для яких спектральна щільність приведена на Рис. 11. Графік щільності є неперервним, що свідчить про хаотичність атратора. Додамо, що всі графіки усталених режимів коливань в системі аналізувались та будувались після закінчення перехідних режимів, принаймні, після більше 500000 кроків у часі, коли старші показники Ляпунова стабілізуються біля усталених значень.

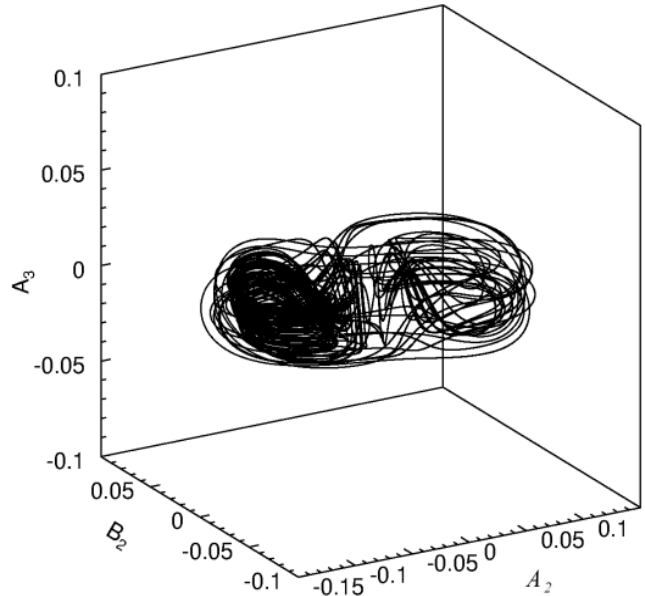


Рис. 9. Фазовий портрет хаотичного атратора при $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$.

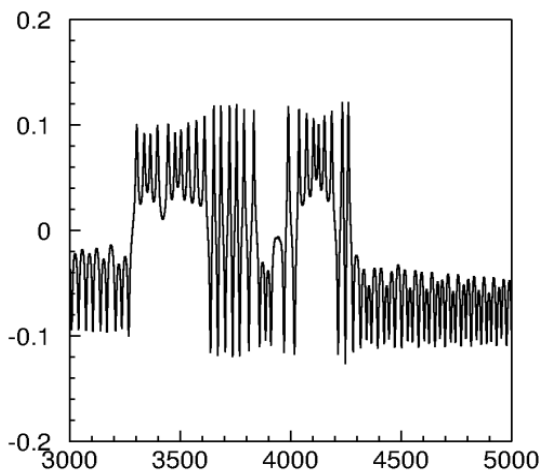


Рис. 10. При частоті $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$ – часова реалізація $A_2(t)$.

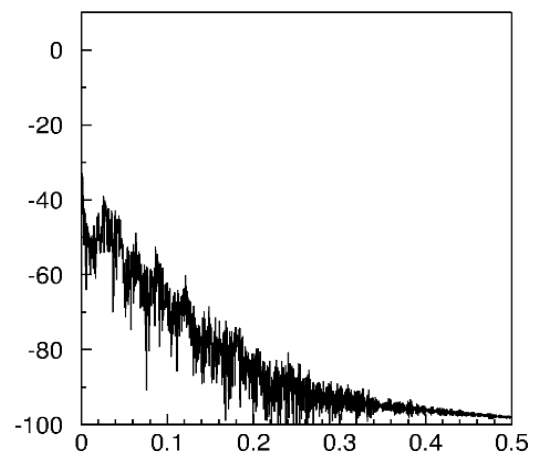


Рис. 11. При частоті $\omega = 37 \text{ рад}/\text{с}$ – спектральна щільності цієї реалізації.

Розглянемо усталені розв'язки динамічної системи (22), яка описує осереднену систему взаємодії коливань стрижня по двох власних формах при урахуванні початкових напружень та при початкових умовах (23).

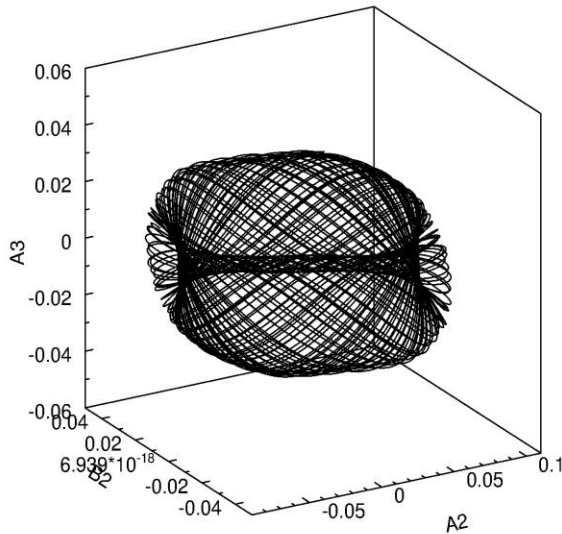


Рис. 12. Проекція фазового портрету при частоті $\omega = 45 \text{ рад/с}$.

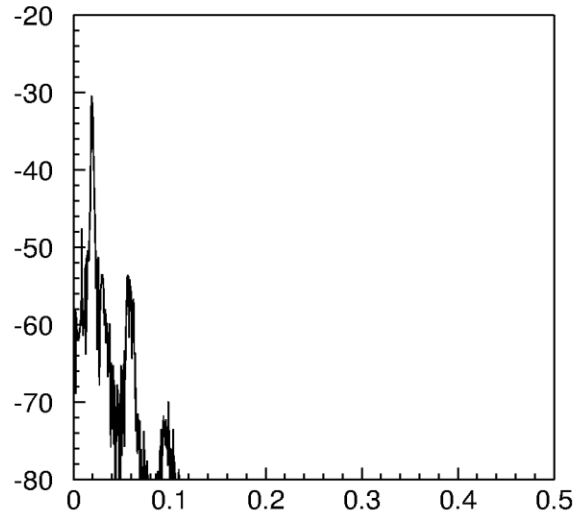


Рис. 13. Спектральна щільність при частоті $\omega = 45 \text{ рад/с}$.

При частоті $\omega = 45 \text{ рад/с}$ проекція фазового портрету усталеного режиму має вигляд, наведений на Рис. 12, а спектральна щільність показана на Рис. 13 відповідно. Обчислений старший показник Ляпунова є нульовим. Тому розв'язок для цього значення ω є квазіперіодичним циклом, який повністю покриває тор з плином часу. Графіки параметрів розв'язків, які наведені на Рис. 12 та Рис. 13 дуже схожі на характеристики розв'язку, що показані на Рис. 7 та Рис. 8, які отримано в моделі без урахування початкових напружень для більшої частоти, а саме для $\omega = 60 \text{ рад/с}$. Крім того ми можемо помітити, що коливання по третій моді мають меншу амплітуду A_3 .

На Рис. 14 показана проекція чотиривимірної траєкторії атрактора на тривимірний простір для системи (22) при початкових умовах, які використовували для побудови Рис. 9 та Рис. 10 при $a_0 = 3A_2$. На Рис. 14 траєкторія атрактора блукає хаотично по простору вже при $\omega = 43 \text{ рад/с}$, яка є меншою ніж у попередньому випадку, коли в системі (20) хотичні рішення були отримані при $\omega = 47 \text{ рад/с}$.

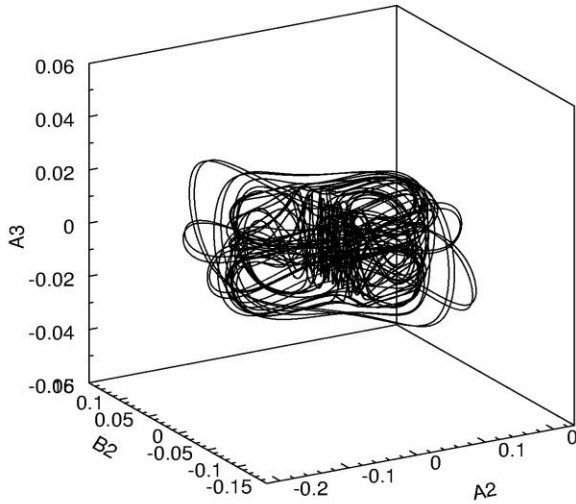


Рис. 14. Проекція фазового портрету при частоті $\omega = 43 \text{ рад/с}$.

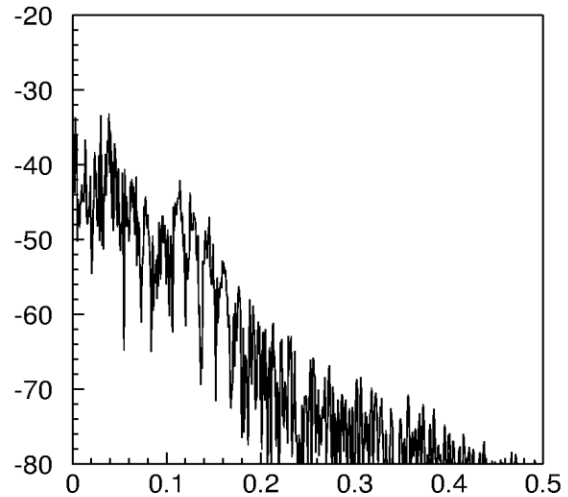


Рис. 15. Спектральна щільність при частоті $\omega = 43 \text{ рад/с}$.

Графік щільності на Рис. 15 є неперервним, що свідчить про хаотичність атрактора. Всі графіки усталених режимів коливань аналізували та будували після закінчення перехідних режимів, принаймні, після більше 500000 кроків у часі, коли старші показники Ляпунова стабілізуються біля усталених значень.

ВИСНОВКИ

На захист виносяться наступні наукові результати.

Побудовано математичні моделі нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стрижня при двохмодовій їх апроксимації, яка обумовлена внутрішнім резонансом власних частот та результатами експериментальних спостережень, як при урахуванні початкових напружень, так і при їх відсутності.

Методами сучасної теорії динамічних систем встановлено основні класи режимів усталених коливань в побудованих моделях: регулярні та хаотичні.

Аналізуючи показники Ляпунова, фазові портрети, спектральні щільності усталених режимів доведено існування і визначено характеристики регулярних і хаотичних режимів моделей.

Показано, що урахування початкових напружень призводить до зменшення частот, коли реалізуються хаотичні усталені режими та до зменшення амплітуд коливань по третій формі.

Визначено та проаналізовано власні форми і власні частоти згинних коливань стрижня із закритичним статичним станом, що консольно закріплений.

Показано, що ефекти стабілізації і резонансних згинних коливань стрижня із закритичним статичним станом підтверджуються експериментальними результатами. Експериментально отримано частоти стабілізації добре співпадають з обрахованими по теоретичному критерію стабілізації, аналітично побудованому в роботах Шамні і Фрейсера.

СПИСОК ОСНОВНИХ ПУБЛІКАЦІЙ ПО ТЕМІ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Мелешко В. В. Хаотичні коливання П-подібного маятника / В. В. Мелешко, Д. Ф. Приходько // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2011. – № 4. – С. 95–98.
2. Краснопольська Т.С. Динамічні характеристики консольного закріпленого стрижня з малою жорсткістю на згин / Т.С. Краснопольська, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій // Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2012. – № 4. – С. 52–55.
3. Краснопольська Т. С. Нелінійні моделі коливань консольного стрижня з малою жорсткістю на згин / Т. С. Краснопольская, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій. – Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 158–161.
4. Krasnopolskaya T.S. Chaos in parametrically excited continuous systems. / T.S. Krasnopolskaya, A.A. Gourjii, V.M. Spektor, D.F. Prykhodko // Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM) – 2013. – № 3. – P. 413–422.
5. Краснопольська Т. С. Сталі режими коливань консольно закріпленого стрижня малої жорсткості на згин / Т. С. Краснопольская, Д. Ф. Приходько, О. А. Гуржій. – Вісн. Київського нац. ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2014. – № 2. – С. 67–70
6. Приходько Д. Ф. Стабілізація за критичного стрижня при вертикальній вібрації / Д. Ф. Приходько, А. М. Кір'єв, Т. С. Краснопольська // – Вісн. Київського ун-ту імені Тараса Шевченка Серія фізико-математичні науки. – 2015, № 5. – С. 219–222.
7. Приходько Д. Ф. Хаотичні режими коливань П-подібного маятника / Д. Ф. Приходько. – Матеріали міжнар. наук. конф. Шевченкова весна 19–23 березня, 2012, Київ, Україна
8. Приходько Д. Ф. Явище стабілізації у пружних механічних системах при вертикальних високочастотних вібраціях / Д. Ф. Приходько – Сучасні математичні методи досліджень в механіці, Міжнародна наукова школа–семінар, 8–11 жовтня, 2012, Київ, Україна.
9. Gourjii A. A. Chaos in parametrically excited continuous systems / A. A. Gourjii, V. M. Spektor, D. F. Prykhodko // Abstracts of the Sixth chaotic modeling and simulation international conference, 11–14 June 2013, Istanbul, Turkey.
10. Krasnopolskaya T.S. Modelling of parametric resonance oscillations by two coupled modes / T. S. Krasnopolskaya, V. M. Spektor, D. F. Prykhodko, A. A. Gourjii // Abstracts of the 8th European Nonlinear Oscillations Conference, July 6–11, 2014, Vienna, Austria.
11. Приходько Д. Ф. Стабілізація та нелінійні коливання консольного стрижня з малою жорсткістю на згин / Д. Ф. Приходько, Т. С. Краснопольська, А. М. Кір'єв, О. А. Гуржій // III Міжнарод. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки», 27–29 серпня, 2015, Київ, Україна.

АНОТАЦІЯ

Приходько Д.Ф. Коливання консольного стрижня із закритичним статичним станом при вертикальній вібрації закріплення. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.04 – механіка деформівного твердого тіла. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка МОН України, Київ, 2016.

Дисертацію присвячено дослідженню закономірностей усталених коливань та вібраційній стабілізації стержня із закритичним статичним станом.

Експериментально зафіксовані ефекти стабілізації і резонансних коливань закритичного стержня. Знайдено інтервали частот параметричних коливань по другій та третій власних формах коливань, а також знайдено ефект сумісних одночасних коливань стержня по двох (по другій та третій) власних формах коливань. Експериментально отримано частоти стабілізації добре співпадають з обрахованими по теоретичному критерію стабілізації закритичного консольного стержня, аналітично побудованому у роботі Шамні і Фрейсера.

Побудовано чисельно власні форми і знайдено власні частоти коливань пружного закритичного стержня, що консольно закріплений, для значення жорсткості на згин, ідентифікованого з проведених експериментів, побудовано чисельно. Знайдено значення власних частот свідчать, що в розглянутій системі є внутрішній резонанс.

Побудовано математичні моделі нелінійних резонансних параметричних коливань закритичного стержня при двомодовій їх апроксимації, яка обумовлена внутрішнім резонансом власних частот та результатами експериментальних спостережень, як при урахуванні початкових напружень, так і при їх відсутності. Аналітично визначено зсуви резонансних частот при урахуванні початкових напружень.

Проведено ряд чисельних експериментів і виявлено та проаналізовано наступні два основні класи усталених режимів: регулярні (які відповідають квазіперіодичним коливанням) та хаотичні (які мають позитивні старші показники Ляпунова та неперервні спектральні щільності). Хаотичні усталені режими в системі при урахуванні початкових напружень, реалізуються при менших приблизно на 10 % частотах коливань. Крім того, урахування напружень призводить до зменшення амплітуд коливань по третій формі.

Ключові слова: закритичний стержень, усталені режими, коливання.

АННОТАЦІЯ

Приходько Д.Ф. Колебания консольного стержня с закритическим статическим состоянием при вертикальной вибрации закрепления – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка МОН Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена исследованию закономерностей установившихся колебаний и вибрационной стабилизации стержня с закритическим статическим состоянием.

Экспериментально зафиксировано эффекты стабилизации и резонансных колебаний закритического стержня. Найденны интервалы частот параметрических

колебаний по второй и третьей собственным формам колебаний, а также найден эффект совместных одновременных колебаний стержня по двум (по второй и третьей) собственным формам колебаний. Экспериментально полученные частоты стабилизации хорошо совпадают с рассчитанным по теоретическому критерию стабилизации закритического консольного стержня, аналитически построенного в работе Шамни и Фрейсера.

Построены численно собственные формы и найдены собственные частоты колебаний консольно закрепленного упругого закритического стержня, для значения жесткости на изгиб, идентифицированного из проведенных экспериментов, построены численно. Найденные значения собственных частот свидетельствуют, что в рассматриваемой системе есть внутренний резонанс.

Построены математические модели нелинейных резонансных параметрических колебаний закритического стержня при двомодовой их аппроксимации, которая обусловлена внутренним резонансом собственных частот и результатами экспериментальных наблюдений, как при учете начальных напряжений, так и при их отсутствии. Аналитически определены сдвиги резонансных частот при учете начальных напряжений.

Проведено ряд численных экспериментов, были обнаружены и проанализированы следующие два основных класса установившихся режимов: регулярные (которые соответствуют квазипериодическим колебаниям) и хаотические (которые имеют положительные старшие показатели Ляпунова и непрерывные спектральные плотности). Хаотические установившиеся режимы в системе при учете начальных напряжений, реализуются при меньших приблизительно на 10 % частот колебаний. Кроме этого, учет напряжений приводит к уменьшению амплитуды колебаний по третьей форме.

Ключевые слова: закритический стержень, установившиеся режимы, колебания.

ANNOTATION

Prykhodko D. F. Oscillations of a cantilever rod with the supercritical static state with the base vertical vibrations. – Manuscript.

The thesis for the degree of Candidate in Physics and Mathematics, speciality 01.02.04 – mechanics of deformable solids. – Taras Shevchenko National University of Kyiv of MES of Ukraine, Kyiv, 2016.

The dissertation (thesis) work is devoted to the laws of oscillations and stabilization of the rod with static supercritical state.

Experimentally fixed effects of stabilization and resonance oscillations of a supercritical rod. Found parametric oscillation frequency range of the second and third eigenmodes and found the effect of simultaneous oscillations of the rod by two eigenmodes (the second and third). Experimentally derived frequencies of stabilization coincide well with theoretically calculated by the criterion of supercritical stabilizing rod, analytically constructed by Champneys and Fraser.

Eigenmodes and its eigenfrequencies of supercritical rod oscillations for bend stiffness values, identified from the experiments, constructed numerically. Found values

of eigenfrequencies indicate that the system under consideration has an internal resonance.

A mathematical model of non-linear parametric resonance vibrations of a supercritical rod at their two-mode approximation, which is caused by an internal resonance of eigenfrequencies and results of experimental observations, as taking into account of the initial stress, and with its absence is derived. Shifts the resonance frequencies in the model with the initial stress are analytically obtained.

A series of numerical experiments were conducted in order to identify and analyze the following two main classes of steady-state regimes: regular (which correspond to quasi-periodic oscillations) and chaotic (with positive largest Lyapunov exponents and continuous spectral densities). Chaotic steady-state regimes in the system with the initial stress are realized at less than about 10% frequency fluctuations. In addition, taking into account initial stress leads to a reduction in amplitude of the third eigenmode.

Key words: supercritical rod, steady-state regimes, oscillations.