Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра моделювання складних систем

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю 113 «Прикладна математика»

на тему:

АНАЛІЗ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕЧІТКОЇ МОДЕЛІ РЕГУЛЬОВАНОЇ ФІНАНСОВОЇ МОНОПОЛІЇ

Виконавець:

студент четвертого курсу бакалавра

Матійко Ярослав

Науковий керівник:

Професор

Волошин Олексій Федорович

Робота заслухана на засіданні кафедри моделювання складних систем та рекомендована до захисту, протокол №*11* від __ *05.06.* 2023 р.

Завідувач кафедри МСС доктор техн. наук, доцент Дмитро ЧЕРНІЙ

Київ – 2023

Зміст

ВСТУП

Актуальність теми дослідження. Фінансова монополія, що є однією з ключових складових сучасної економіки, має великий вплив на розвиток суспільства та динаміку фінансових ринків. У зв'язку з цим, виникає потреба у регулюванні фінансової монополії з метою забезпечення ефективності та стабільності фінансової системи. Однак, прийняття рішень щодо регулювання фінансових монополій є складним завданням через нечіткість та неоднорідність факторів, що впливають на цей процес.

Дана бакалаврська робота досліджує застосування теорії нечітких множин до класичного завдання розподілу. В роботі розглядаються нечіткі узагальнення класичних методів розподілу та проводиться аналіз деяких їх властивостей.Ця тема є важливою, оскільки справедливий розподіл спільних витрат або спільно виробленого продукту серед агентів з різними внесками або типами ресурсів є ключовою проблемою в теорії ігор з трансферабельною корисністю. Це питання також стало основою для отримання глибоких аксіоматичних результатів у сучасній мікроекономічній теорії.

Структура роботи включає вступ, три розділи, висновки та список літератури. У роботі також представлені результати обчислень, які виконані в рамках дослідження.

РОЗДІЛ 1. НЕЧІТКІСТЬ

1.1. Основні поняття та властивості нечітких систем

Нечіткість – це поняття, яке використовується для опису об’єктів або явищ, що не можуть бути чітко визначені або віднесені до однієї конкретної категорії. Вона виникає, коли об’єкт може належати до певної множини з різними ступенями належності.

Теорія нечітких множин

В основі теорії нечітких множин лежить концепція нечіткої множини, яка визначається функцією належності, яка призначає ступінь належності кожному елементу множини. Давайте розглянемо нечітку множину A, визначену над універсальною множиною X. Кожен елемент x у X пов’язаний зі значенням належності, позначеним як $\mu_A(x)$, яке представляє ступінь, до якої x належить нечіткій множині A. Математично це може бути виражено як:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

Тут A представляє нечітку множину, x є елементом в універсальній множині X, а $\mu_A(x)$ є функцією належності, яка визначає ступінь належності для кожного елемента x. Функція приналежності може приймати різні форми, наприклад, трикутну, трапецієподібну або гауссову, залежно від конкретних характеристик предметної області .

Особливість теорії нечітких множин полягає в її здатності впоратися з невизначеністю та неточністю. На відміну від чітких наборів, які строго класифікують елементи як належні чи не належать до набору, нечіткі набори дозволяють плавний перехід між ступенями належності. Це дозволяє більш деталізовано подавати інформацію, яка за своєю суттю є невизначеною або неоднозначною. Використовуючи нечіткі набори, ми можемо вловити невизначеність і неточність, притаманну концепції членства, що відображає реальну складність регульованої фінансової монополії.

Теорія нечітких множин знайшла застосування в різних сферах, включаючи штучний інтелект, системи управління, прийняття рішень і розпізнавання образів. У контексті регульованої фінансової монополії теорія нечітких множин надає потужний інструмент для моделювання та аналізу складних взаємозв'язків і взаємодій між різними факторами та зацікавленими сторонами. Присвоюючи ступінь членства відповідним елементам, ми можемо кількісно оцінити рівень участі або впливу, який вони мають у фінансовій монополії, дозволяючи отримати більш повне розуміння та аналіз.

Нехай *E* – деяка множина, *A* – її підмножина, тобто $A \subset E$, *x* – деякий елемент множини *E,* причому $x \in A$. Для опису цієї належності можна використовувати характеристичну функцію $\mu_A(x)$, значення якої свідчать про те, належить елемент *x* множині *A* чи ні, а саме:

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Приклад 1.

$E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ і нехай A = { x_2, x_3, x_5}. Випишемо для кожного елемента множини E ступінь його належності множині A:

$\mu_A(x_1)=0, \mu_A(x_2)=1, \mu_A(x_3)=1, \mu_A(x_4)=0, \mu_A(x_5)=1$.

Таким чином, усі елементи множини *A* можна подати через елементи множини *E*, супроводжуючи кожен з них значенням ступеня його належності, а саме:

$A=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Приклад 2.

Нехай множина *E= [0,5], A =[1,2],* тоді

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1, x \in [1,2], \\ 0, \mathrm{x} \in [0,1)U(2,5], \end{cases}$$

і множину А можна записати таким чином:

$A=\{\mathrm{x} \in \mathrm{E}: \mu_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) = 1\}.$

Нехай $\overline{\mathrm{A}}$ – доповнення множини А відносно Е, тобто $\overline{\mathrm{A}} \subset E$, $A \cup \overline{A} = E$, *і* $A \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$

Якщо х $\in \mathrm{A}$, то х $\notin \overline{\mathrm{A}}$, і ми можемо записати, що коли $\mu_A(x) = 1$, $\mu_{\overline{A}}(x)=0$.

Тоді враховуючи умови прикладу 1, одержимо такі значення ступеня належності елементів множині А:

$\mu_{\overline{A}}(x_1)=1, \mu_{\overline{A}}(x_2)=0, \mu_{\overline{A}}(x_3)=0, \mu_{\overline{A}}(x_4)=1, \mu_{\overline{A}}(x_5)=0,$

й $\overline{\mathrm{A}}= A=\{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}$

З огляду на умови прикладу 1

$$\mu_{\overline{A}}=\begin{cases} 1, \mathrm{x} \in [0;1) \cup (2;5], \\ 0, \mathrm{x} \in [1;2] \end{cases}$$

і $\overline{A}=\{\mathrm{x} \in \mathrm{E}, \mu_{\overline{A}}(\mathrm{x}) = 1\}.$

Тепер розглянемо операції об'єднання й перетину множин, користуючись термінологією характеристичних функцій. Візьмемо дві множини А та В, характеристичні функції яких

$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1, & \mathrm{x} \in \mathrm{A} \\ 0, & \mathrm{x} \notin A \end{cases} \qquad \mu_B(x)=\begin{cases} 1, & \mathrm{x} \in \mathrm{B} \\ 0, & \mathrm{x} \notin \mathrm{B} \end{cases}$$

відповідно. Характеристичною функцією їх перетину буде функція $\mu_{A \cap B}(x)$, яку визначено за такими правилами:

$$\mu_{A \cap B}(x)=\begin{cases} 1, & \mathrm{x} \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \\ 0, & \mathrm{x} \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

Її можна записати у вигляді такої формули:

$\mu_{A\cap B}(x)=\mu_A(x)*\mu_B(x)$,

або

$\mu_{A\cap B}(x)=min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Аналогічно для об'єднання множин $A\cup B$

$$\mu_{A\cup B}(x)=\begin{cases}1, & x\in A\cap B\\ 0, & x\notin A\cap B\end{cases}$$

тобто $\mu_{A\cup B}(x)=\mu_A(x)\oplus\mu_B(x)$, де $\oplus$ – булеве додавання

або $\mu_{A\cup B}(x)=max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Приклад 3. Розглянемо таку множину:

$E=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, і дві її підмножини:

$A=\{(x_1|0), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$ *та*

$B=\{(x_1|1), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

Знайдемо їх об'єднання й перетин:

$A\cap B=\{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$

$A\cup B=\{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

а також доповнення отриманих підмножин:

$\overline{A\cap B}=\{(x_1|1), (x_2|1), (x_3|0), (x_4|1), (x_5|0)\}$

$\overline{A\cup B}=\{(x_1|0), (x_2|0), (x_3|1), (x_4|0), (x_5|1)\}$.

1.2. Постановка задачі

Математична модель задачі розподілу визначається трійкою (N,c,b), де N –

скінченна множина агентів, невід'ємне дійсне число c визначає кількість ресурсів, яку необхідно розподілити, вектор $b = (b_i)_{i \in N}$ визначає для кожного агента i його заявку b_i, причому $\sum_{i=1}^{n} b_i > 0$ та

$$0 \le b_i,\ \forall i \in N:\ 0 \le c \le \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Розв'язком задачі розподілу є вектор $x = (x_i)_{i \in N}$, який ставить у відповідність кожному агенту i його частку x_i, причому

$$0 \le x_i \le b_i$$
$$\forall_i \in N: \sum_{i \in N} x_{i=C}$$

Метод розподілу визначається відображенням r, яке кожній трійці (N, c, b) ставить у відповідність вектор витрат $x = (x_i)_{i \in N}$, $x = r\ (N, c, b)$.

1.3. Випадок нечітких запасів грошей

Нехай запаси грошей агентів є нечіткими числами трикутного вигляду:

$b_i=(\underline{b}_i,\hat{b}_i,\overline{b}_i), \forall_i \in N.$

Позначимо

$$\hat{x}_i^L = \min\{r(N,c,\underline{b}_i), r(N,c,\overline{b}_i)\}, \forall i \in N;$$

$$\hat{x}_i^C = r(N,c,\hat{b}_i), \forall i \in N;$$

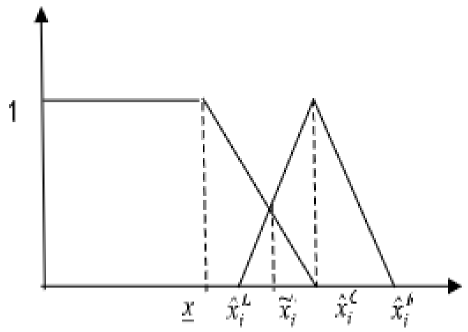
$$\hat{x}_i^R = \max\{r(N,c,\underline{b}_i), r(N,c,\overline{b}_i)\}, \forall i \in N.$$

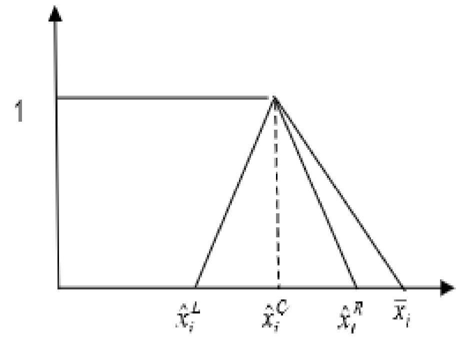
Частки агентів наближено можна представити нечіткими числами трикутного вигляду $\hat{x}_i = (\hat{x}^L_i, \hat{x}^C_i, \hat{x}^R_i)$. В той же час, бажані частки витрат агентів є нечіткими числами трапецеїдального вигляду,

$x_i = (\underline{x}_i, \hat{x}^C_i)$, $\forall i \in N_1$, $x_i = (\hat{x}^C_i, \overline{x}_i)$, $\forall i \in N_2$, **де** $\underline{x}_i = (1\text{-}a)\,\hat{x}^C_i$ і $\overline{x}_i = (1+\beta)\,\hat{x}^C_i$.

Результуюча функція належності часток витрат агентів матиме вигляд

$$\mu_i(\tilde{x}_i) = \min\{\mu_i(\hat{x}_i), \mu_i(x_i)\}, \forall i \in N_1 .$$





Враховуючи вигляд відповідних функцій належності, отримаємо, що $\tilde{x}_i = (\tilde{x}^L_i, \tilde{x}^C_i, \tilde{x}^R_i) = (\tilde{x}^L_i, \tilde{x}^C_i, \tilde{x}^C_i)$, де $\forall i \in N_1$. Знайдемо $\tilde{x}^C_i$. В даній точці має місце рівність:

$$\frac{\hat{x}_i^C - \tilde{x}_i^C}{\hat{x}_i^C - \underline{x}_i} = \frac{\tilde{x}_i^C - \hat{x}_i^L}{\hat{x}_i^C - \hat{x}_i^L},$$

Звідки

$(\hat{x}^C_i - \tilde{x}^C_i)(\hat{x}^C_i - \hat{x}^L_i) = (\hat{x}^C_i - x_i)(\tilde{x}^C_i - \hat{x}^L_i)$,

$\hat{x}^C_i(\hat{x}^C_i - \hat{x}^L_i) - \tilde{x}^C_i(\hat{x}^C_i - \hat{x}^L_i) = a\hat{x}^C_i\tilde{x}^C_i - a\hat{x}^C_i\hat{x}^L_i$,

$\hat{x}^C_i(\hat{x}^C_i - \hat{x}^L_i + a\hat{x}^L_i) = \tilde{x}^C_i(\hat{x}^C_i - \hat{x}^L_i + a\hat{x}^C_i)$.

Отже,

$$\tilde{x}_i^C = \hat{x}_i^C\,\frac{\alpha\hat{x}_i^L + \hat{x}_i^C - \hat{x}_i^L}{\alpha\hat{x}_i^C + \hat{x}_i^C - \hat{x}_i^L}.$$

Оскільки найвищий рівень λ досягається на $\tilde{x}^C_i$, покладемо $x_i = \tilde{x}^C_i$ *для* $\forall i \in N_1$ *і* $\tilde{c} = c - \sum_{i \in N1} x_i$.

Частки витрат агентів другої групи є правосторонніми нечіткими числами трикутного вигляду, $(\hat{x}^{C}_{i}, x_i^{max})$, $\forall_i \in N_{2,}$ де $x_i^{max} = \max\{\hat{x}^{R}_{i}, \overline{x_i}\}$.

Позначивши $x_i^L = \hat{x}^{C}_{i}$, а $x_i^R = x_i^{max}$, отримаємо задачу, аналогічну до задачі пошуку оптимального розподілу витрат у випадку НРП-2.
В даному випадку отримуємо задачу лінійного програмування

$$\lambda \to max,$$

$$\frac{x_i^R - xi}{x_i^R - x_i^L} \geq \forall_i \in N_{2,}$$

$$\sum_{i \in N1} x_i = \tilde{c},$$

$$0 \leq \lambda \leq 1.$$

РОЗДІЛ 2. Модель випадку нечітких запасів грошей

2.1. Повністю нечіткий випадок

Нехай величина витрат і запаси грошей агентів є нечіткими числами трикутного вигляду: відповідно,

$c=(\underline{c}, \hat{c}, \overline{c})$, $b=(\underline{b}_i \hat{b}_i \overline{b}_i)$, $\forall i \in N$.

Функції належності $\hat{x}_i = (\hat{x}_i^L, \hat{x}_i^C, \hat{x}_i^R)$ будуть нечіткими числами трикутного вигляду, причому $\hat{x}_i^L$ розраховуються з розрахунку, що витрати рівні $\underline{c}$, а запаси грошей $\underline{b}_i$, $\hat{x}_i^C$ з розрахунку, що витрати рівні $\hat{c}$, а запаси грошей $\hat{b}_i$, а $\hat{x}_i^R$ взяти частки витрат, розраховані для $\overline{c}$, а в ролі $\hat{x}_i^R$ частки витрат, розраховані для $\overline{c}$.

Бажані частки витрат агентів є нечіткими числами трапецеїдального вигляду, $x_i=(x_i, \hat{x}_i^C)$, $\forall i \in N_1$, $x_i=(\hat{x}_i^C, \overline{x}_i)$, $\forall i \in N_2$, де $x_i = (1\text{-}a)\,\hat{x}_i^C$, i $\overline{x}_i = (1+\beta)\,\hat{x}_i^C$.

Результуючі величини витрат знаходяться аналогічно попередньому випадку.

Оскільки найвищий рівень λ досягається на $\hat{x}_i^C$, покладемо $x_i = \hat{x}_i^C$, для $\forall i \in N_1$. Тоді $\tilde{c}=(\underline{c}-\sum_{i \in N1} x_i;\ \hat{c}-\sum_{i \in N1} x_i;\ \overline{c}-\sum_{i \in N1} x_i)$.

Для агентів другої групи задача зводиться до задачі знаходження часток витрат агентів при нечіткій величині витрат.

2.2 Нечіткі методи розподілу і нерівність

Оскільки наведені вище методи розподілу грунтуються на перерозподілі витрат, який скорочує нерівність, то справедливими є такі твердження:

Твердження 1: Припустимо, що задано деякий метод розподілу *r* (де *r* не рівневий податок) та його деяке нечітке узагальнення. Тоді має місце нерівність $G \geq G'$, де G – це індекс Джині, розрахований для запасу вільних грошей агентів $(b_i - x_i)$ при методі *r*, а G' при його узагальненні.

Твердження 2: Припустимо, що задано деякий метод розподілу r (де r не рівневий податок) та його деяке нечітке узагальнення, і нехай b_i - $\hat{x}_i$ та b_i - є більшими чи рівними 1 для всіх $i \in N_2$. Тоді має місце нерівність $T \geq T'$, де T – це індекс Тейла, розрахований для запасу вільних грошей агентів b_i - x_i) при методі r, а T' при його узагальненні.

З останнього твердження випливає

Наслідок 1: Припустимо, що задано деякий метод розподілу r (де r не рівневий податок) та його деяке нечітке узагальнення, і нехай b_i - $\hat{x}_i$ та b_i - є більшими чи рівними 1 для всіх $i \in N_2$. Тоді має місце нерівність $A \geq A'$, де A – це індекс Аткінсона, розрахований для запасу вільних грошей агентів (b_i - x_i) при методі r, а A' при його узагальненні.

Нехай величини витрат агентів є правосторонніми нечіткими числами. Їх можна представити у вигляді нечітких чисел трапецеїдального вигляду:

(0;0; x_i^L ; x_i^R), де $\mathrm{x}_i^L = \begin{cases} (1-\mathrm{a})\,\hat{x}_i \;, i \in N_1; \\ \hat{x}_i \;, i \in N_2 \end{cases}$, а $\mathrm{x}_i^R = \begin{cases} \hat{x}_i \;, i \in N_1; \\ (1+\beta)\,\hat{x}_i \;, i \in N_2. \end{cases}$

Знайдемо вигляд індесів Джині, Тейла та Аткінсона, користуючись означеннями операцій над трапецеїдальними нечіткими числами. Для цього представимо величини витрат у вигляді ($\varepsilon; \varepsilon;$ x_i^L ; x_i^R), де $\varepsilon >0$. деяке мінімальне значення витрат.

Внаслідок виконання відповідних арифметичних операцій, отримаємо такі нечіткі числа:

$$G=\left(\frac{2\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-x_i^R\right)}{n\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-\varepsilon\right)}-\frac{n+1}{n};\frac{2\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-x_i^L\right)}{n\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-\varepsilon\right)}-\frac{n+1}{n};\frac{2\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-\varepsilon\right)}{n\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-x_i^L\right)}-\frac{n+1}{n};\frac{2\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-\varepsilon\right)}{n\sum_{i=1}^{n} i\left(b_i-x_i^R\right)}-\frac{n+1}{n}\right),$$

$$T=(\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-x_i^R\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}\ln\frac{n\left(b_i-x_i^R\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)};\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-x_i^L\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}\ln\frac{n\left(b_i-x_i^L\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)};$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^L\right)}\ln\frac{n\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^L\right)};\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^R\right)}\ln\frac{n\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^R\right)}),$$

$$A=\left(1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^R\right)}\ln\frac{n\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^R\right)}};1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^L\right)}\ln\frac{n\left(b_i-\varepsilon\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-x_i^L\right)}};1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-x_i^L\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}\ln\frac{n\left(b_i-x_i^L\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}};1-e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(b_i-x_i^R\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}\ln\frac{n\left(b_i-x_i^R\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\varepsilon\right)}}\right).$$

Виконаємо такі дії:

1. Перейдемо до границі при $\varepsilon \to 0$.
2. Зробимо перенесення по осі х таким чином, щоб лівий кінець трапецеідального нечіткого числа змістився в початок координат.
3. Пронормуємо отримане число таким чином, щоб правий кінець співпав з точкою (1;0).

В результаті отримаємо нечіткі числа трапецеїдального вигляду типу $(0;\gamma;\ \delta;1)$.

Тоді відповідне значення індексу обчислюватиметься за формулою:

$I=\ \frac{1}{3}\left(1+\gamma+\delta-\frac{1+\delta}{1+\delta-\gamma}\right).$

2.3 Регульована монополія

Для моделей регульованої монополії можливі кілька підходів. Так, при чіткому підході задання певних принципів розподілу (вирівнювання прибутків чи витрат, пропорційний принцип) призводить до спрощення задачі, і в деяких випадках дозволяє знайти розв’язок аналітично.

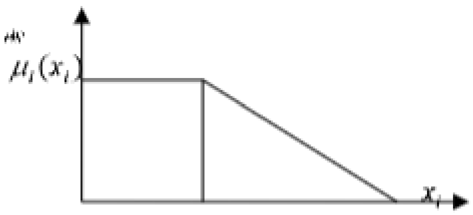
Розглянемо нечіткий підхід.

Нехай розглядається модель виробництва суспільного продукту. Нехай переваги агентів описуються квазілінійними функціями корисності. Тоді оптимальний рівень випуску суспільного продукту визначається з умови Самуельсона.

Припустимо, що точний розв’язок рівняння Самуельсона знайти важко, але, базуючись на певних міркуваннях, y можна представити у формі нечіткого числа трикутного вигляду:

$$\mu_y = \begin{cases} \dfrac{y-\underline{y}}{\hat{y}-\underline{y}}, \underline{y} \leq y \leq \hat{y}; \\ \dfrac{\overline{y}-y}{\overline{y}-\hat{y}}, \hat{y} \leq y \leq \overline{y}; \\ 0 \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

Функція належності витрат c(y) теж буде нечітким числом, вигляд якого визначатиметься функцією c(y). В результаті отримуємо задачу розподілу витрат, де значення витрат є нечітким числом. При інших чітких даних пропонується вибрати y= $\breve{y}$ і застосувати відомі механізми розподілу. Розглянемо випадок, коли x_i – нечіткі числа з функціями належності $\mu(x_i)$ (i= $\overline{1, n}$) Для всіх i функція належності агента i визначається за наступною формулою і має усічено-трапецеїдальний вигляд:



$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} 1, x_i \leq \alpha_i; \\ \dfrac{\beta_i - x_i}{\beta_i - \alpha_i}, \alpha_i < x_i \leq \beta_i; \\ 0, \beta_i < x_i. \end{cases}$$

Такий вигляд функцій належності долей витрат агентів можна інтерпретувати наступним чином: агент I готовий виділити до a_i грошових одиниць на виробництво y одиниць суспільного продукту; менш бажаним є випадок, в якому потрібно виділити більше a_i; варіанти, коли необхідно виділити більше β_i грошових одиниць є категорично неприйнятними.

Нехай агенти поділені на три групи, залежно від рівня b_i - на «бідних» ($i = \overline{1, n_1}$), «середняків» ($i = \overline{n_1 + 1, n_2}$) та «багатих» ($i = \overline{n_2 + 1, n}$), де $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n$.

Тоді

$$a_i = \begin{cases} \gamma_1 b_1, i = \overline{1, n} \\ \gamma_2 b_1, i = \overline{n_1 + 1, n_2}\ ; \\ \gamma_3 b_1, i = \overline{n_2 + 1, n}\ . \end{cases}$$

$$\beta_i = \begin{cases} \delta_1 b_1, i = \overline{1, n}; \\ \delta_2 b_1, i = \overline{n_1 + 1, n_2}; \\ \delta_3 b_1, i = \overline{n_2 + 1, n}. \end{cases}$$

де $0 \leq \gamma_i \leq 1 (i = \overline{1,3})$, $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3$, $0 \leq \delta_j \leq 1$ $(j = \overline{1,3})$, $\delta_1 \leq \delta_2 \leq \delta_3$ - деякі коефіцієнти.

Введемо функцію

$$v\ (x_1, x_{,} \ldots, . x_R; y) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = c(y); \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \neq c(y). \end{cases}$$

Функція належності обмеженням шуканого вектору $(x_1, x_2 \ldots . x_n; y)$, матиме вигляд

$\mu_c (x_1, x_2 \ldots . x_n; y) = min \{\mu_1 (x_1), \mu_2(x_2), \ldots \ldots, \mu_R(x_R), \mu_{c(y)}(y), v\ (x_1, x_2, \ldots, . x_\pi; y)\}$.

Розв'язком цієї задачі будемо вважати вектор, що максимізує $\mu_c (x_1, x_2 \ldots . x_n; y)$.

Тобто для знаходження $(x_1, x_2 \ldots . x_n; y)$ потрібно розв'язати наступну оптимізаційну задачу:

$\lambda \rightarrow max$

$\mu_c (x_1, x_2 \ldots . x_n; y) \geq \lambda$

Враховуючи вигляд $\mu_c\,(x_1, x_2 \ldots.. x_n; y)$, маємо:

$\lambda \to max$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y);$

$\mu_i\,(x_i) \geq \lambda,\ \forall i = \overline{1, n}$.

$\mu_{c(y)}\,(y) \geq \lambda$

Дану задачу пропонується розв'язувати у декілька етапів:

1) Розглядаємо всі можливі комбінації проміжків змін x_i ,$c(y)$.

2) На кожному такому наборі за допомогою відомих методів розв'язуємо задачу лінійного програмування

$\lambda \to max$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y);$

$\mu_i\,(x_i) \geq \lambda,\ \forall I = \overline{1, n}$

$c(y)$ розглядаємо як незалежну змінну, що змінюється у відповідних межах ($c(\underline{y}) \leq c(y) \leq c(\hat{y})$ або $c(\hat{y}) \leq c(y) \leq c(\overline{y})$).

3) Підставляємо знайдені значення у наступну нерівність:

$\mu_{c(y)}\,(y) \geq \lambda$

Якщо знайдені значення c(y) та λ задовольняють, то зупиняємось. Якщо ні – ставимо λ таким, щоб нерівність виконувалась як рівність.

4) Порівнюємо всі знайдені набори на всіх проміжках. Оптимальним розподілом рахуємо той набір, для якого λ є максимальним.

Припустимо, що вдалося знайти оптимальний план випуску $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, але допустимі деякі відхилення від нього, величина яких визначається особою, що приймає рішення.

Нехай $y_1, y_2, \ldots, y_k$ можуть бути представлені у вигляді нечітких чисел трикутного вигляду $y_i = (\underline{y}_i, \hat{y}_i, \overline{y}_i)$ із відповідними функціями належності:

$$\mu_{y_i}(y_i) = \begin{cases} \frac{y_i - \underline{y_i}}{\hat{y}_i - \underline{y_i}}, \underline{y_i} \le y_i \le \hat{y}_i; \\ \frac{\overline{y_i} - y_i}{\overline{y_i} - \hat{y}_i}, \hat{y}_i \le y_i \le \overline{y_i}; \\ 0 \text{ в інших випадках} \end{cases}$$

Тоді $\sum_{i=1}^{n} y$ також є трикутним числом, причому y = $(\sum_{i=1}^{n} \underline{y_i}, \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i, \sum_{i=1}^{n} \overline{y_i})$

Якщо функція витрат лінійна, то *c(y)* також буде нечітким числом трикутного вигляду. В іншому випадку функція належності *c(y)* визначається за допомогою визначених операцій над нечіткими числами.

Нехай x_i є правосторонніми нечіткими числами трикутного вигляду, функції належності яких мають вигляд

$$\mu_i(x_i) = \begin{cases} 1, x_i \le a; \\ \frac{\beta_i - x_i}{\beta_i - a_i}, a_i < x_i \le \beta_i; \\ 0, \beta_i < x_i. \end{cases}$$

При цьому $\beta_i < M_i$. Аналогічно попередньому випадку, введемо функцію

$$v(x_1, x, \ldots, x_R; y) = \begin{cases} 1, \sum_{i=1}^{n} x_i = c(y); \\ 0, \sum_{i=1}^{n} x_i \ne c(y). \end{cases}$$

Функція належності обмеженням шуканого вектору

$\mu_c(x_1, x_2 \ldots x_n; y) = min\,\{\mu_1(x_1), \mu_2(x_2), \ldots, \mu_R(x_R), \mu_{c(y)}(y), v(x_1, x_2, \ldots, x_\pi; y)\}$.

Розв'язком цієї задачі будемо вважати вектор, що максимізує $\mu_c(x_1, x_2 \ldots x_n; y)$.

Тож для знаходження $(x_1, x_2 \ldots x_n; y)$ потрібно розв'язати оптимізаційну задачу вигляду

$\lambda \to max$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = c(y);$

$\mu_i(x_i) \ge \lambda, \forall_{i} = \overline{1, n}$.

$\mu_{c(y)}(y) \ge \lambda$

Розділ 3. Практичне застосування і опис задачі

3.1 Задача призначена для сільського господарства

В рамках аналізу властивостей нечіткої моделі регульованої фінансової монополії розглянемо нечітку задачу для сільського господарства. Дана задача призначення має на меті вирішення проблем ефективного розподілу ресурсів у сільськогосподарському секторі з урахуванням нечітких параметрів та багатьох цілей.

Для розгляду призначення з трьома цілями в сільському господарстві, ми використовуємо інформацію про вартість, час та якість використовуваних ресурсів.

Для розв'язання задачі, необхідно визначити рейтинговий індекс Ягера для вартості, часу та якості, представлені у вигляді трапецієподібних нечітких чисел. Для цього застосовується метод рейтингу Ягера. Позначимо α як розріз нечіткого числа (4,6,7,9), де C для α L + C α U = (2α + 4, 9 − 2α). Припустимо $Y(C$) = Y(4,6,7,9) = 0.5(+)d = 6.5 11 ∼ 0 1 ∫ C α L C α U α Y(4,6,7,9) = 10; Y(0.15, 0.16, 0.19, 0.21) = 0.1775. Аналогічно, отримуємо рейтинговий індекс Ягера для відповідних елементів.

Отримавши нормалізовані значення вартості, часу та якості (позначені як $Max\{Y$ =10,75= 1/ , = 1/ , = 1/ , де c } k 1 $Max\{Y\ t$ } k 2 $Max\{Y\ in$ } k 3 Y , , вказують на рейтинг Ягера щодо вартості, часу та якості відповідно), можна сформулювати задачу призначення в сільському господарстві.

Метою цієї задачі є пошук мінімальних витрат, мінімального часу та максимальної якості. Для цього задачу призначення можна сформулювати у вигляді математичного програмування. Встановлюючи ваги для кожної цілі як w , , . 1 $w2$ $w3$ (де $w1$, $w2$, $w3$ - ваги для вартості, часу та якості відповідно), а також значення k_1, k_2, k_3, отримані розв'язки можна представити у вигляді математичної форми:

$Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Y(a\tilde{c}_{ij} + b\tilde{t}_{ij} + c\tilde{q}_{ij})x_{ij}$,

де $x_{ij} \in \{0, 1\}$ та обмеження:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$,

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$,

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$,

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$,

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$,

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$,

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$,

$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1$.

Оскільки метод ранжування Ягера задовольняє властивості лінійності та адитивності, задачу призначення можна спростити:

Min, де $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{4} \{aY(\tilde{c}_{ij}) + bY(\tilde{t}_{ij}) + cY(\tilde{q}_{ij})\}x_{ij}$,

де $x_{ij} \in \{0, 1\}$ та обмеження:

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1$,

$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1$,

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1$,

$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1$,

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1$,

$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1$,

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1$,

x 14 + x 24 + x 34 + x 44 = 1.

Встановлюючи значення $w1$, $w2$, $w3$ та $k1$, $k2$, $k3$, отримуємо оптимальні розв'язки задачі призначення для вартості, часу та якості відповідно.

Таким чином, використовуючи метод ранжування Ягера, можна розв'язувати задачі призначення в сільському господарстві, де потрібно забезпечити оптимальний розподіл ресурсів з урахуванням критеріїв вартості, часу та якості.

3.2 Приклад задачі щодо призначення завдань працівникам на підприємстві

Припустимо, що у нас є 4 робітника (А, Б, В, Г) та 4 завдання (1, 2, 3, 4), і нам потрібно призначити кожному робітнику по одному завданню. У наступній таблиці представлені рейтинги робітників для кожного завдання:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник А	7	4	6	8
Робітник Б	5	6	7	6
Робітник В	6	8	5	7
Робітник Г	8	7	6	5

Також ваги для критеріїв вартості, часу та якості будуть мати значення $w1$ = 0.4, $w2$ = 0.3 та $w3$ = 0.3.

За допомогою методу Ягера, визначимо ранжування робітників для кожного завдання. Спочатку обчислимо нормовані матриці вартості, часу та якості для кожного робітника та завдання:

Нормована матриця вартості:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник А	0.875	0.25	0.625	1
Робітник Б	0.375	0.5	0.875	0.375
Робітник В	0.5	1	0.375	0.625
Робітник Г	1	0.875	0.625	0.375

Нормована матриця часу:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник А	0.4	0.6	0.5	0.75
Робітник Б	0.6	0.8	1.0	0.6
Робітник В	0.5	0.75	0.4	0.7
Робітник Г	0.8	0.7	0.6	0.4

Нормована матриця якості:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник А	0.714	0.444	0.625	0.556
Робітник Б	0.556	0.625	0.714	0.625
Робітник В	0.625	0.778	0.556	0.667
Робітник Г	0.778	0.714	0.625	0.556

Тепер обчислимо агреговані значення для кожного робітника та завдання, використовуючи ваги критеріїв:

Агреговане значення для Робітника А та Завдання 1: (0.4 * 0.875) + (0.3 * 0.4) + (0.3 * 0.714) = 0.645

Агреговане значення для Робітника А та Завдання 2: (0.4 * 0.25) + (0.3 * 0.6) + (0.3 * 0.444) = 0.365

Агреговане значення для Робітника А та Завдання 3: (0.4 * 0.625) + (0.3 * 0.5) + (0.3 * 0.625) = 0.555

Агреговане значення для Робітника А та Завдання 4: (0.4 * 1) + (0.3 * 0.75) + (0.3 * 0.556) = 0.785

Аналогічно розраховуємо агреговані значення для інших робітників та завдань.

Агреговані значення для Робітника Б:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник Б	0.512	0.558	0.671	0.495

Агреговані значення для Робітника В:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник В	0.575	0.828	0.561	0.642

Агреговані значення для Робітника Г:

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**

	Завдання 1	**Завдання 2**	**Завдання 3**	**Завдання 4**
Робітник Г	0.755	0.686	0.661	0.536

За допомогою агрегованих значень, ми можемо ранжувати робітників для кожного завдання:

Ранжування для Завдання 1:

- Робітник Г (0.755)
- Робітник В (0.575)
- Робітник А (0.645)
- Робітник Б (0.512)

Ранжування для Завдання 2:

- Робітник В (0.828)
- Робітник Г (0.686)
- Робітник Б (0.558)
- Робітник А (0.558)

Ранжування для Завдання 3:

- Робітник Б (0.671)
- Робітник Г (0.661)
- Робітник А (0.555)
- Робітник В (0.561)

Ранжування для Завдання 4:

- Робітник А (0.785)
- Робітник В (0.642)
- Робітник Б (0.495)
- Робітник Г (0.536)

Отже, ранжування робітників для кожного завдання з використанням методу Ягера виглядає так:

Завдання 1: Робітник Г > Робітник В > Робітник А > Робітник Б

Завдання 2: Робітник В > Робітник Г > Робітник Б > Робітник А

Завдання 3: Робітник Б > Робітник Г > Робітник А > Робітник В

Завдання 4: Робітник А > Робітник В > Робітник Б > Робітник Г

Це є результуючим ранжуванням, враховуючи ваги критеріїв та нормовані матриці.

Висновок

За допомогою дослідження було продемонстровано, що нечітка модель регульованої фінансової монополії є потужним інструментом для осіб, які приймають рішення, у навігації у складному ландшафті фінансового регулювання. Інтегруючи нечітку логіку, нечіткі множини та системи нечіткого висновку, ми могли б ефективно вирішувати проблеми невизначеності, невизначеності та суперечливих цілей, властивих регулюванню фінансової монополії.

У даній роботі розглядається задача багатоцільового призначення з нечіткими параметрами. Для вирішення цієї задачі використовується метод ранжування Ягера, який дозволяє перетворити задачу багатоцільового призначення в еквівалентну задачу призначення з однією ціллю. Цей метод є досить простим і одночасно ефективним. Для підтвердження ефективності та обґрунтованості запропонованого підходу, в роботі був розглянутий числовий приклад, пов'язаний з сільськогосподарською справою.

Список використаних джерел

1. Волошин О. Ф., Мащенко С. Моделі та методи прийняття рішень // К.: «КНУ ім. Тараса Шевченка», 2010. - С. 336.
2. Волошин О. Ф., Лавер В. О. Узагальнення методів розподілу для нечітких задач // "Інформаційні теорії та додатки", Вип. 20, No 4, 2013. - С. 303-310.
3. Волошин О. Ф., Лавер В. Аксіоматична характеристика методів нечіткого нормування // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізика і математика, No 2, 2014.
4. Ягер, Р. Р. Процедура впорядкування нечітких підмножин одиничного інтервалу // Інформаційні науки 24, 1981 - С. 143-161.
5. Волошин О.Ф., Лавер В.О. Нечітка математика // КНУ імені Тараса Шевченка 2023р.- 112с
6. Lebedeva, M. Fuzzy Logic in Economics – the Formation of a New Direction. Ideas and Ideals, 11(1), 2019, pp. 197- 212. doi: 10.17212/2075-0862-2019-11.1.1-197- 212
7. Kuzmenko, O., Šuleř, P., Lyeonov, S., Judrupa, I., & Boiko, A. Data mining and bifurcation analysis of the risk of money laundering with the involvement of financial institutions. Journal of International Studies, 13(3), 2020, pp. 332-339. doi:10.14254/2071-8330.2020/13-3/22
8. Mamatova T.V., Chykarenko I.A., Moroz E.G., Yepifanova I.Y., Kudlaieva N.V. Management of enterprises and organizations under the conditions of sustainable development. International Journal of Management, 11(4), 2020, pp. 151–159
9. Zadeh, L. A. Fuzzy sets. Information and Control, 8 (3), 1965, pp. 338-353, doi: 10.1016/S0019-9958(65)90241-X
10. S. Bodjanova. Median value and median interval of a fuzzy number. Inf.

Sci., 172(1–2):73–89, June 2005.
11. Мулен Г. Аксіоми спільного прийняття рішень // М: Мир, 1991. - С. 464.
12. Янг, Г.П. Справедливість розподілу в оподаткуванні // Подорож. екон.теорії, 1988, - С. 321-335.
13. Khayut B., Fabri L., Avikhana M. The Reasonable and Conscious Understanding System of reality Under Uncertainty. International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing, 14, 2020, pp. 296- 308.
14. Вільям Томсон. Аксіоматичний та теоретичний аналіз проблем банкрутства та оподаткування: оновлення // Working Papers 578, University of Rochester, 2013. - С. 157-182.
15. Гіллер, С. Ф., Ліберман, Дж. Г. 2001 Введення в дослідження операцій // 7-е видання. Макгроу Хілл, Бостон.