

Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Міністерство освіти і науки України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Кваліфікаційна наукова  
праця на правах рукопису

**Лисенко Анастасія Володимирівна**

УДК 524.83:530.145

**ДИСЕРТАЦІЯ**  
**ВПЛИВ ЗВОРотної РЕАКЦІЇ ТА ЕФЕКТУ ШВІНГЕРА**  
**НА ГЕНЕРАЦІЮ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ**  
**НА ІНФЛЯЦІЙНІЙ СТАДІЇ ЕВОЛЮЦІЇ ВСЕСВІТУ**

104 — Фізика та астрономія

10 — Природничі науки

Подається на здобуття наукового ступеня  
доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

\_\_\_\_\_ А. В. Лисенко

Науковий керівник:  
**Вільчинський Станіслав Йосипович**  
доктор фіз.-мат. наук, професор

Київ – 2026

## АНОТАЦІЯ

*Лисенко А.В.* Вплив зворотної реакції та ефекту Швінгера на генерацію векторних полів на інфляційній стадії еволюції Всесвіту. — Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії у галузі знань 10 — Природничі науки за спеціальністю 104 — Фізика та астрономія. — Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України. — Київ, 2026.

Дисертацію присвячено теоретичному дослідженню генерації векторних полів на інфляційній стадії еволюції Всесвіту, а також нелінійних явищ, що мають місце в цьому сценарії: зворотної реакції згенерованих полів на інфляційну динаміку та народження заряджених частинок завдяки ефекту Швінгера.

У *першому* розділі здійснено аналіз сучасного стану наукових досліджень, присвячених проблемам інфляційної генерації векторних полів. Викладено основні положення сучасної космології та розглянуто сучасні теоретичні уявлення про ефект Швінгера. Проаналізовано низку актуальних нерозв'язаних проблем сучасної фізики, зокрема проблему походження великомасштабних магнітних полів у Всесвіті та проблему природи й походження темної матерії. Здійснено огляд теоретичних підходів, запропонованих для розв'язання зазначених проблем. Особливу увагу приділено теоріям інфляційної генерації векторних полів, зокрема інфляційному магнітогенезу та механізмам генерації векторної темної матерії під час інфляційної стадії еволюції Всесвіту.

У *другому* розділі розглянуто взаємодію безмасового векторного поля зі скалярним полем інфлатоном у моделі з одночасною наявністю кінетичного та аксіального зв'язків. Для цього застосовано формалізм градієнтного розкладу. Використання вказаного методу дозволило одночасно врахувати можливу при-

сутність двох нелінійних явищ: (i) зворотну реакцію згенерованих електромагнітних полів на еволюцію інфлатона та (ii) створення пар заряджених ферміонів з фізичного вакууму (ефект Швінгера). Останнє явище змодельовано з використанням узагальненого закону Ома для індукованого струму:  $\vec{J} = \sigma_E \vec{E} + \sigma_B \vec{B}$ , де  $\sigma_E$  та  $\sigma_B$  – електрична й магнітна швінгерівські провідності відповідно. Виведено систему рівнянь формалізму градієнтного розкладу для найзагальнішої моделі з одночасною присутністю нетривіальних функцій кінетичного та аксіального зв'язку, а також швінгерівської провідності. Отриману систему рівнянь застосовано для конкретного випадку з кінетичною функцією зв'язку в експоненціальній ратрівській формі та лінійною аксіальною функцією зв'язку — для кількох контрольних точок у просторі параметрів. Показано, що зворотна реакція викликає помітне збільшення тривалості інфляційної епохи, тоді як ефект Швінгера сильно пригнічує згенеровані поля та усуває їх зворотну реакцію.

У *третьому* розділі розглянуто швінгерівське народження пар скалярних заряджених частинок однорідним електричним полем у Всесвіті, що розширюється. Для цього використано квантово-кінетичний підхід: введено адіабатичний вакуум для скалярного поля на основі розв'язку Вентцеля-Крамерса-Бріллюена для модового рівняння в конформному часі, а потім застосовано формалізм коефіцієнтів Боголюбова для виведення системи квантових рівнянь Власова для трьох дійсних кінетичних функцій. Нова система рівнянь має дві значні переваги порівняно з існуючими в літературі аналогами. По-перше, її розв'язки швидше спадають при великих імпульсах, що робить її більш придатною для чисельних розрахунків. По-друге, вона враховує конформну симетрію системи, оскільки передбачає відсутність генерації частинок у випадку конформно зв'язаного безмасового скалярного поля за відсутності електричного поля. Ідентифіковано ультрафіолетові розбіжності у компонентах вектора електричного струму та тензора енергії-імпульсу утворених частинок та введено відповідні контрчлени з метою усунення вказаних розбіжностей.

У *четвертому* розділі досліджено інфляційну генерацію масивного векторного поля шляхом його взаємодії з інфлатоном через кінетичний та аксіальний зв'язки, а також залежну від поля масу — т.зв. масовий зв'язок. Задля цього було розширено формалізм градієнтного розкладу (шляхом включення позовжньої поляризації векторного поля) і виведено зв'язану систему рівнянь руху для набору квадратичних функцій векторного поля. Отримані рівняння руху дозволяють проаналізувати нелінійну динаміку системи, зокрема врахувати зворотну реакцію згенерованих полів на еволюцію інфлатона. Узагальнений формалізм градієнтного розкладу було застосовано до векторного поля з малою масою, кінетичні та масові члени якого пов'язані з інфлатоном через експоненціальну ратрівську функцію. Було доведено, що чистий масовий зв'язок може підсилювати лише позовжні компоненти. Увімкнувши також кінетичну взаємодію, можна отримати різні сценарії. Для спадної функції зв'язку спостерігається послаблення внеску від позовжньої поляризації у порівнянні з внесками поперечних поляризацій. І навпаки, для зростаючої функції зв'язку внесок від позовжньої компоненти стає все більш і більш суттєвим, і система швидко переходить в режим сильної зворотної реакції.

*Ключові слова:* векторні поля, ранній Всесвіт, космологічна інфляція, кінетичний зв'язок, аксіальний зв'язок, формалізм градієнтного розкладу, зворотна реакція, ефект Швінґера, квантова кінетична теорія, векторна темна матерія, масовий зв'язок.

# ABSTRACT

*Lysenko A.V.* The influence of backreaction and the Schwinger effect on the generation of vector fields during the inflationary stage of the Universe evolution. — Qualification scientific work as a manuscript.

Thesis for the degree of Doctor of Philosophy in the field of knowledge 10 — Natural Sciences, specialty 104 — Physics and Astronomy. — Taras Shevchenko National University of Kyiv of the Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2026.

This thesis is devoted to a theoretical study of the generation of vector fields during the inflationary stage of the Universe evolution, as well as to nonlinear phenomena occurring within this scenario, namely: the backreaction of the generated fields on the inflationary dynamics and the production of charged particles due to the Schwinger effect.

In the *first* chapter, an analysis of the current state of research on the problem of inflationary generation of vector fields is presented. The main foundations of modern cosmology are outlined, and contemporary theoretical approaches to the Schwinger effect are reviewed. A number of outstanding problems in modern physics are analyzed, in particular the origin of large-scale magnetic fields in the Universe and the nature and origin of dark matter. An overview of theoretical approaches proposed to address these problems is provided. Special attention is paid to theories of inflationary generation of vector fields, in particular inflationary magnetogenesis and mechanisms of vector dark matter generation during the inflationary stage of the Universe evolution.

In the *second* chapter, the interaction between a massless vector field and the scalar inflaton field is studied within a model that simultaneously includes kinetic and axial couplings. For this purpose, the gradient expansion formalism is employed. The

use of this method makes it possible to consistently take into account two nonlinear phenomena simultaneously: (i) the backreaction of the generated electromagnetic fields on the inflaton evolution and (ii) the creation of charged fermion pairs from the physical vacuum (the Schwinger effect). The latter phenomenon is modeled using a generalized Ohm's law for the induced current,  $\vec{J} = \sigma_E \vec{E} + \sigma_B \vec{B}$ , where  $\sigma_E$  and  $\sigma_B$  are the electric and magnetic Schwinger conductivities, respectively. A system of equations of the gradient expansion formalism is derived for the most general model containing nontrivial kinetic and axial coupling functions, as well as Schwinger conductivity. The obtained system is applied to a specific case with an exponential Ratra-type kinetic coupling function and a linear axial coupling function for several benchmark points in the parameter space. It is shown that backreaction leads to a noticeable increase in the duration of the inflationary epoch, whereas the Schwinger effect strongly suppresses the generated fields and eliminates their backreaction.

In the *third* chapter, Schwinger pair production of charged scalar particles by a homogeneous electric field in an expanding Universe is investigated. A quantum kinetic approach is employed: an adiabatic vacuum for the scalar field is introduced based on the Wentzel–Kramers–Brillouin solution of the mode equation in conformal time, followed by the application of the Bogolyubov coefficients formalism to derive a system of quantum Vlasov equations for three real kinetic functions. The new system of equations possesses two significant advantages compared to analogous formulations existing in the literature. First, its solutions exhibit faster decay at large momenta, making it more suitable for numerical calculations. Second, it respects the conformal symmetry of the system, since it predicts the absence of particle production in the case of a conformally coupled massless scalar field in the absence of an electric field. Ultraviolet divergences in the components of the electric-current vector and the energy–momentum tensor of the created particles are identified, and appropriate counterterms are introduced to remove these divergences.

In the *fourth* chapter, the inflationary generation of a massive vector field is

studied via its interaction with the inflaton through kinetic and axial couplings, as well as a field-dependent mass term (so-called mass coupling). For this purpose, the gradient expansion formalism is extended (by including the longitudinal polarization of the vector field), and a coupled system of equations of motion for a set of quadratic functions of the vector field is derived. The resulting equations make it possible to analyze the nonlinear dynamics of the system, in particular to take into account the backreaction of the generated fields on the inflaton evolution. The generalized gradient expansion formalism is applied to a light vector field whose kinetic and mass terms are coupled to the inflaton via an exponential Ratra-type function. It is demonstrated that a pure mass coupling enhances only the longitudinal components. When kinetic coupling is also included, different scenarios become possible. For a decreasing coupling function, the contribution of the longitudinal polarization is suppressed compared to that of the transverse polarization. Conversely, for an increasing coupling function, the contribution of the longitudinal component becomes progressively more significant, and the system rapidly enters a regime of strong backreaction.

*Keywords:* vector fields, early Universe, cosmological inflation, kinetic coupling, axial coupling, gradient expansion formalism, backreaction, Schwinger effect, quantum kinetic theory, vector dark matter, mass coupling.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

*Статті у наукових виданнях*

- 1\*. O.O. Sobol, **A. V. Lysenko**, E.V. Gorbar, S.I. Vilchinskii, *Gradient expansion formalism for magnetogenesis in the kinetic coupling model*, Phys. Rev. D **102**, 123512 (20 pages) (2020). DOI: [10.1103/PhysRevD.102.123512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.123512) – (Q1).
- 2\*. **A. V. Lysenko**, O. O. Sobol, *Quantum kinetic approach to the Schwinger production of scalar particles in an expanding universe*, Gen. Relativ. Gravit. **56**, 39 (22 pages) (2024). DOI: [10.1007/s10714-024-03226-8](https://doi.org/10.1007/s10714-024-03226-8) – (Q1).
- 3\*. **A. V. Lysenko**, *Gradient expansion formalism for a generic model of inflationary magnetogenesis*, Eur. Phys. J. C **85**, 525 (13 pages) (2025). DOI: [10.1140/epjc/s10052-025-14269-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-14269-9) – (Q1).
- 4\*. **A. V. Lysenko**, O.O. Sobol, S.I. Vilchinskii, *Vector dark matter production during inflation in the gradient-expansion formalism*, Phys. Rev. D **113**, 063525 (18 pages) (2026). DOI: [10.1103/lpph-hrdr](https://doi.org/10.1103/lpph-hrdr) – (Q1).

*Матеріали, що засвідчують апробацію дисертації*

- 5\*. **А. Лисенко**, О. Соболев, С. Вільчинський, *Формалізм градієнтного розкладу для опису інфляційного магнітогенезу в присутності кінетичного та аксіонного зв'язків*, Міжнародна наукова конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “ЕВРИКА-2022” (18-20 жовтня 2022, Львів, Україна): Збірник тез, ст. D2.  
URL: [https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2022/ua\\_index.php?](https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2022/ua_index.php?).
- 6\*. **A. Lysenko**, O. Sobol, S. Vilchinskii, *Gradient expansion formalism for a generic model of inflationary magnetogenesis*, Rencontres Jeunes Physicien.ne.s 2025 (June 13, 2025, Lyon, France): Abstracts book, Abstract ID 21.  
URL: <https://indico.in2p3.fr/event/35494/overview>.

# ЗМІСТ

|                                                                                                             |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Вступ</b>                                                                                                | <b>12</b> |
| <b>Розділ 1 Інфляційна генерація векторних полів у космології раннього Всесвіту: сучасний стан проблеми</b> | <b>20</b> |
| 1.1 Базові відомості з космології . . . . .                                                                 | 20        |
| 1.1.1 Основні поняття . . . . .                                                                             | 20        |
| 1.1.2 Метрика Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера . . . . .                                                  | 22        |
| 1.1.3 Рівняння Фрідмана . . . . .                                                                           | 23        |
| 1.1.4 Космологічна модель $\Lambda$ CDM . . . . .                                                           | 25        |
| 1.1.5 Проблеми моделі гарячого Великого вибуху . . . . .                                                    | 26        |
| 1.1.6 Стадія інфляції . . . . .                                                                             | 27        |
| 1.2 Великомасштабні магнітні поля . . . . .                                                                 | 31        |
| 1.2.1 Магнітні поля у Всесвіті. Спостережні свідчення . . . . .                                             | 31        |
| 1.2.2 Походження великомасштабних магнітних полів . . . . .                                                 | 33        |
| 1.2.3 Інфляційний магнітогенез . . . . .                                                                    | 35        |
| 1.3 Ефект Швінгера . . . . .                                                                                | 38        |
| 1.3.1 Загальні відомості . . . . .                                                                          | 38        |
| 1.3.2 Ефект Швінгера під час інфляції . . . . .                                                             | 40        |
| 1.4 Темна матерія . . . . .                                                                                 | 41        |
| 1.4.1 Спостережні свідчення існування прихованої маси у Всесвіті . . . . .                                  | 41        |
| 1.4.2 Теорії щодо природи темної матерії . . . . .                                                          | 44        |
| 1.4.3 Темний фотон . . . . .                                                                                | 46        |
| 1.4.4 Генерація векторної темної матерії під час інфляції . . . . .                                         | 49        |
| 1.5 Система одиниць та позначення . . . . .                                                                 | 51        |
| 1.6 Висновки . . . . .                                                                                      | 51        |

|                 |                                                                                           |           |
|-----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Розділ 2</b> | <b>Формалізм градієнтного розкладу у найзагальнішій моделі інфляційного магнітогенезу</b> | <b>52</b> |
| 2.1             | Вступ . . . . .                                                                           | 52        |
| 2.2             | Модель з кінетичним та аксіальним зв'язками . . . . .                                     | 55        |
| 2.3             | Формалізм градієнтного розкладу . . . . .                                                 | 58        |
| 2.3.1           | Рівняння руху . . . . .                                                                   | 58        |
| 2.3.2           | Швінґерівська провідність . . . . .                                                       | 60        |
| 2.3.3           | Граничні доданки . . . . .                                                                | 63        |
| 2.3.4           | Помодовий розклад . . . . .                                                               | 67        |
| 2.4             | Чисельні результати . . . . .                                                             | 69        |
| 2.5             | Висновки до розділу 2 . . . . .                                                           | 74        |
| <b>Розділ 3</b> | <b>Кінетичний підхід для опису ефекту Швінґера у Всесвіті, що розширюється</b>            | <b>77</b> |
| 3.1             | Вступ . . . . .                                                                           | 77        |
| 3.2             | Квантові рівняння Власова для скалярного поля . . . . .                                   | 79        |
| 3.3             | Фізичні спостережувані величини . . . . .                                                 | 86        |
| 3.3.1           | Електричний струм . . . . .                                                               | 86        |
| 3.3.2           | Тензор енергії-імпульсу . . . . .                                                         | 87        |
| 3.4             | Перенормування . . . . .                                                                  | 88        |
| 3.4.1           | Асимптотична поведінка кінетичних функцій при високих енергіях . . . . .                  | 89        |
| 3.4.2           | Електричний струм . . . . .                                                               | 91        |
| 3.4.3           | Густина енергії . . . . .                                                                 | 94        |
| 3.4.4           | Слід тензора енергії-імпульсу . . . . .                                                   | 96        |
| 3.5             | Висновки до розділу 3 . . . . .                                                           | 98        |

|                                   |                                                            |            |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Розділ 4</b>                   | <b>Генерація векторної темної матерії під час інфляції</b> | <b>101</b> |
| 4.1                               | Вступ . . . . .                                            | 101        |
| 4.2                               | Модель векторної темної матерії . . . . .                  | 105        |
| 4.3                               | Поперечні поляризації векторного поля . . . . .            | 108        |
| 4.3.1                             | Еволюція мод у просторі Фур'є . . . . .                    | 108        |
| 4.3.2                             | Формалізм градієнтного розкладу . . . . .                  | 111        |
| 4.4                               | Поздовжні поляризації векторного поля . . . . .            | 116        |
| 4.4.1                             | Еволюція мод у просторі Фур'є . . . . .                    | 116        |
| 4.4.2                             | Формалізм градієнтного розкладу . . . . .                  | 121        |
| 4.5                               | Повна система рівнянь . . . . .                            | 124        |
| 4.6                               | Чисельні результати . . . . .                              | 126        |
| 4.6.1                             | Конкретизація моделі . . . . .                             | 126        |
| 4.6.2                             | Чистий масовий зв'язок . . . . .                           | 128        |
| 4.6.3                             | Кінетичний та масовий зв'язки . . . . .                    | 131        |
| 4.7                               | Висновки до розділу 4 . . . . .                            | 136        |
| <b>Висновки</b>                   |                                                            | <b>138</b> |
| <b>Список використаних джерел</b> |                                                            | <b>140</b> |
| <b>Додаток А</b>                  |                                                            | <b>165</b> |

## ВСТУП

**Обґрунтування теми дослідження.** Проблема інфляційної генерації абелевих калібрувальних полів (як безмасових, так і масивних) останніми роками активно досліджується в науковій літературі. Такі дослідження спрямовані на пояснення двох важливих астрофізичних феноменів: (1) існування великомасштабних магнітних полів у космічних войдах та (2) наявності прихованої маси у Всесвіті в межах сценарію векторної темної матерії.

Згідно з поширеним підходом, калібрувальні поля могли утворитися на інфляційній стадії внаслідок підсилення квантових флуктуацій. Необхідною умовою такої генерації є порушення конформної інваріантності дії. Для масивних  $U(1)$ -полів ця умова виконується автоматично, оскільки масовий доданок порушує конформну інваріантність. У найпростішій моделі при цьому ефективно генеруються лише поздовжні моди. Генерація поперечних мод істотно посилюється в моделях із немінимальним зв'язком калібрувального поля з гравітацією або інфлатоном. Такі моделі також розглядаються при дослідженні генерації безмасових калібрувальних полів, які мають лише поперечні ступені вільності.

Для опису часової еволюції калібрувальних полів, згенерованих під час інфляції, зазвичай застосовується метод помодового розкладу, який передбачає аналіз еволюції окремих мод у просторі Фур'є з подальшим інтегруванням за спектром. Проте цей підхід втрачає придатність за наявності нелінійних ефектів, зокрема зворотної реакції згенерованих полів на динаміку інфлатона або народження з вакууму пар заряджених частинок і античастинок (ефект Швінгера). У таких умовах моди перестають еволюціонувати незалежно одна від одної,

що унеможливилює застосування помодового підходу та зумовлює необхідність використання альтернативного математичного підходу, здатного самоузгоджено враховувати зазначені явища.

Одним із таких підходів є формалізм градієнтного розкладу, що формулюється в координатному просторі та забезпечує одночасне врахування внесків усіх фізично значущих мод. Цей формалізм є ефективним інструментом для опису зворотної реакції згенерованих полів. Крім того, він дозволяє врахувати вплив ефекту Швінгера за умови, що калібрувальні поля змінюються адіабатично повільно, а індукований струм заряджених частинок може бути поданий у формі узагальненого закону Ома.

У разі, якщо еволюція полів не є адіабатично повільною, омічне наближення для електричного струму стає непридатним. Тоді необхідно розглядати динаміку заряджених частинок, народжених унаслідок ефекту Швінгера, на рівні з динамікою самого породжуючого поля. Одним із підходів, що забезпечує такий самоузгоджений опис, є кінетична теорія, заснована на рівняннях Больцмана або Власова. Зазвичай ці рівняння формулюються у фізичному часі, однак у низці космологічних задач зручніше використовувати конформний час, що потребує відповідного узагальнення кінетичного формалізму.

**Актуальність теми.** Попри значну кількість проведених досліджень, формалізм градієнтного розкладу досі не був розроблений для найзагальнішої моделі інфляційної генерації  $U(1)$ -полів, яка одночасно враховує аксіальний і кінетичний зв'язки з інфлатоном та ефект Швінгера. Крім того, зазначений формалізм раніше не застосовувався до задачі інфляційної генерації масивних векторних полів у контексті сценарію векторної темної матерії.

Квантово-кінетичний опис ефекту Швінгера добре відомий для плоского простору-часу Мінковського та був узагальнений на випадок Всесвіту, що розширюється, де відповідну систему рівнянь сформульовано в термінах фізичного часу. Однак практичне застосування цього підходу ускладнюється двома обста-

винами. По-перше, кінетичні функції повільно спадають зі зростанням імпульсу, що створює труднощі для чисельних розрахунків. По-друге, внески від електричного поля та нестаціонарного інфляційного фону виявляються змішаними, що ускладнює їхнє розділення та фізичну інтерпретацію. Обидві зазначені проблеми можуть бути усунуті шляхом формулювання кінетичних рівнянь у термінах конформного часу. Проте в літературі такий підхід досі не було реалізовано.

Таким чином, існує потреба у побудові узагальненого самоузгодженого підходу до опису інфляційної генерації як безмасових, так і масивних калібрувальних полів із урахуванням нелінійних ефектів. Розроблення відповідного формалізму та його застосування до широкого класу моделей становить актуальну наукову задачу, що має важливе значення для розуміння фізики раннього Всесвіту, а також природи космологічних магнітних полів і темної матерії.

**Зв'язок роботи з науковими програмами та темами.** Робота виконана у рамках досліджень, що проводяться на кафедрі квантової теорії поля та космофізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка: тема №22БФ051-06 (ДР №0122U001957) “Фундаментальні закони фізики в космології раннього Всесвіту” (науковий керівник — д. ф.-м. н., проф. Горбар Едуард Володимирович), тема №25БФ051-01 (ДР №0125U002260) “Пошук темної матерії та частинок за межами Стандартної моделі” (науковий керівник — д. ф.-м. н., проф. Горбар Едуард Володимирович). Робота також виконувалася в рамках проєкту №2020.02/0060 (ДР №0120U105439) “Генерація і еволюція первинних магнітних полів”, фінансованого Національним фондом досліджень України (науковий керівник — д. ф.-м. н., проф. Горбар Едуард Володимирович), проєкту №2023.01/0077 (№26207S1) “Космічний вальс баріонної та ультралегкої темної матерії: зв'язок і динамічна взаємодія”, фінансованого Швейцарським національним науковим фондом (наукові керівники — д-р. Реваз Ів та д. ф.-м. н., проф. Горбар Едуард Володимирович).

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є дослідження ефектів, пов'язаних з інфляційною генерацією безмасових і масивних векторних полів, зокрема зворотної реакції згенерованих полів на еволюцію інфлатона та масштабного фактора, а також швінґерівське народження пар у сильних калібрувальних полях. Для досягнення мети дослідження було поставлено і виконано наступні **завдання**:

1. Розробити метод опису інфляційної генерації безмасових калібрувальних полів у найзагальнішій моделі, що містить аксіальний і кінетичний зв'язки векторного поля з інфлатоном та передбачає наявність нелінійних явищ, зокрема зворотної реакції на фонову динаміку й ефекту Швінґера.
2. Здійснити кількісний опис генерації безмасових векторних полів із немінимальним (аксіальним та кінетичним) зв'язком з інфлатоном у межах моделі хаотичної інфляції з урахуванням зворотної реакції та ефекту Швінґера.
3. Дослідити вплив часової залежності безмасових калібрувальних полів на динаміку народження швінґерівських пар скалярних частинок у межах кінетичного підходу.
4. Розробити теоретичний опис народження швінґерівських пар скалярних частинок у Всесвіті, що розширюється, на основі квантових кінетичних рівнянь Власова, сформульованих у конформному часі.
5. Розробити метод опису інфляційної генерації масивних калібрувальних полів (векторної темної матерії) у моделі, що містить аксіальний, кінетичний і масовий зв'язки векторного поля з інфлатоном та враховує зворотну реакцію на фонову інфляційну динаміку.
6. Здійснити кількісний опис генерації масивних векторних полів (векторної темної матерії) з немінимальним (кінетичним та/або масовим) зв'язком з інфлатоном у моделі хаотичної інфляції з урахуванням зворотної реакції.

**Об'єктом дослідження** є безмасові та масивні векторні поля, що генеруються під час інфляції в ранньому Всесвіті.

**Предметом дослідження** є величина згенерованих векторних полів, явище зворотної реакції згенерованих полів на інфляційну динаміку, народження швінгерівських пар заряджених скалярних частинок та ферміонів.

**Методи дослідження.** У дисертаційній роботі було застосовано методи квантової теорії поля, загальної теорії відносності, теорії диференціальних рівнянь та математичної фізики, а саме: квантування векторних полів у викривленому просторі-часі, квантову кінетичну теорію, регуляризацію та перенормування розбіжностей у фізичних спостережуваних величинах, різноманітні чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь, зокрема пов'язані з використанням спеціальних функцій.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основними науковими результатами, що виносяться на захист, є такі:

1. Вперше розроблено формалізм градієнтного розкладу — новий метод для опису інфляційного магнітогенезу, що дозволяє відслідкувати нелінійну динаміку згенерованих векторних полів, інфлатона та масштабного фактора — для найзагальнішої моделі, яка одночасно містить кінетичний та аксіальний зв'язок векторного поля з інфлатоном, а також передбачає наявність ефекту Швінгера.
2. Вперше показано, що в режимі сильної зворотної реакції, для найзагальнішої моделі інфляційного магнітогенезу, мають місце наступні ефекти: коливання густини енергії згенерованих полів та сповільнення скочування інфлатона наприкінці інфляції, подовження тривалості інфляційної епохи. Наявність швінгерівської провідності, навпаки, призводить до послаблення полів, зникнення зворотної реакції та вчасного завершення інфляції.

3. Вперше отримано систему квантових кінетичних рівнянь Власова в конформному часі, що описують народження швінґерівських пар скалярних частинок змінним у часі електричним полем у Всесвіті, що розширюється. Отримано перенормовані вирази для фізичних спостережуваних величин (сліду тензора енергії-імпульсу, густини енергії та електричного струму) народжених скалярних частинок.
4. Вперше запропоновано розширений варіант формалізму градієнтного розкладу, що може бути застосованим до задачі про інфляційну генерацію векторної темної матерії в найзагальнішій моделі та включає в себе рівняння на поздовжні моди згенерованого векторного поля.
5. Вперше протестовано розширений варіант формалізму градієнтного розкладу для кількох моделей інфляційної генерації векторної темної матерії (з кінетичним та/або масовим зв'язком векторного поля з інфлатоном) і доведено його узгодженість зі стандартним помодовим розкладом за відсутності явища зворотної реакції.
6. Вперше доведено можливість існування нового режиму зворотної реакції з домінуванням у густині енергії внеску від поздовжніх мод.

**Теоретичне та практичне значення одержаних результатів.** Отримані в дисертаційній роботі результати мають фундаментальне значення та спрямовані на поглиблення кількісного розуміння поведінки калібрувальних полів, згенерованих під час інфляції. Розроблений та узагальнений у дисертації формалізм градієнтного розкладу є новим інструментом дослідження інфляційної генерації калібрувальних полів із урахуванням нелінійних ефектів, зокрема зворотної реакції та ефекту Швінґера. Запропонований метод уже набув практичного застосування в сучасних дослідженнях, зокрема і в роботах інших авторів, завдяки тому, що він дає змогу виконувати чисельний аналіз у режимах, де традиційні підходи, такі як помодовий розклад у просторі Фур'є або ґраткові

обчислення, виявляються недостатніми або технічно заскладними для реалізації. Розвинутий у роботі квантово-кінетичний опис ефекту Швінгера забезпечує врахування часової нелокальності процесу народження заряджених частинок і дозволяє більш послідовно описувати їхню динаміку в нестационарному космологічному фоні. Представлені результати становлять інтерес для задач космології раннього Всесвіту та квантової теорії поля в умовах космологічного розширення і можуть бути використані для

1. проведення чисельних розрахунків у межах широкого класу задач, пов'язаних з інфляційною генерацією масивних і безмасових векторних полів;
2. чисельного дослідження нелінійних ефектів, що виникають під час інфляції, зокрема ефекту Швінгера та зворотної реакції згенерованих полів на фонову інфляційну динаміку;
3. аналітичного й чисельного аналізу процесу народження швінгерівських пар скалярних частинок у Всесвіті, що розширюється, під дією залежного від часу електричного поля;
4. оцінювання сучасних значень великомасштабних магнітних полів і густини векторної темної матерії у Всесвіті, які можуть бути згенеровані в межах інфляційних моделей.

**Публікації.** Основні результати дисертаційної роботи опубліковано у чотирьох наукових статтях у фахових виданнях, що індексуються в міжнародній наукометричній базі даних *Scopus*. Усі статті опубліковано в закордонних наукових журналах, які належать до першого квартиля (Q1) за рейтингом *SCImago Journal and Country Rank*. Список праць за темою дисертації, що включає наукові статті [1]\*–[4]\* та тези доповідей на конференціях [5]\*–[6]\*, наведено після анотації та в додатку А.

**Особистий внесок здобувача.** У роботах, виконаних зі співавторами, здобувачеві належить:

1. У роботі [1]\*: чисельне розв’язування модового рівняння та визначення спектру згенерованих полів в моделі з немонотонною функцією зв’язку за допомогою методу помодового розкладу.
2. У роботі [2]\*: виведення квантових кінетичних рівнянь Власова в конформному часі, отримання виразів для фізичних спостережуваних величин (сліду тензора енергії-імпульсу, густини енергії та електричного струму) народжених скалярних частинок.
3. У роботі [4]\*: ідея про можливість застосування формалізму градієнтного розкладу для опису інфляційної генерації векторної темної матерії, проведення всіх аналітичних розрахунків, отримання чисельних результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Результати досліджень доповідалися на наукових семінарах кафедри квантової теорії поля та космомікрофізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, а також на наступних наукових конференціях:

1. Міжнародна наукова конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “ЕВРИКА-2022”, 18-20 жовтня 2022, Львів, Україна. URL: <https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2022/>
2. Міжнародна конференція “Rencontres Jeunes Physiciens 2025”, 13 червня 2025, Ліон, Франція. URL: <https://indico.in2p3.fr/event/35494/>

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 242 найменування на 25 сторінках та додаток. Дисертаційна робота містить 11 рисунків, загальний обсяг її складає 166 сторінок.

## РОЗДІЛ 1

# ІНФЛЯЦІЙНА ГЕНЕРАЦІЯ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ У КОСМОЛОГІЇ РАННЬОГО ВСЕСВІТУ: СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ

## 1.1 Базові відомості з космології

### 1.1.1 Основні поняття

На сьогодні достеменно відомо, що наш Всесвіт розширюється з додатнім прискоренням. Величиною, що характеризує розширення Всесвіту, є так званий масштабний фактор  $a(t)$  (відстань між деякими двома космічними об'єктами можна вважати пропорційною масштабному фактору). Досить часто в космології використовується інша величина — параметр Габбла, або ж відносна зміна масштабного фактору за одиницю часу [1]:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.1)$$

Нинішнє значення параметру Габбла називається константою Габбла і позначається  $H_0$ . Згідно результатів сучасних астрофізичних спостережень [2]:

$$H_0 = (67.3 \pm 1.2) \frac{\text{км}}{\text{с} \cdot \text{Мпк}}. \quad (1.2)$$

Легко помітити, що константа Габбла має обернену до часу розмірність. Отже, величина  $1/H_0$  є характерним часовим масштабом у нашому Всесвіті

(можна вважати, що це вік Всесвіту у першому найпростішому наближенні):

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \approx 14 \cdot 10^9 \text{ років} . \quad (1.3)$$

Масштаб відстаней у Всесвіті (або ж груба оцінка космологічного горизонту) визначатиметься за формулою

$$l_H = c \cdot t_0 = \frac{c}{H_0} \approx 4.3 \cdot 10^3 \text{ Мпк} , \quad (1.4)$$

де  $c$  — швидкість світла у вакуумі.

Розширення Всесвіту спричиняє явище космологічного червоного зміщення. За проміжок часу від випромінювання до поглинання довжина хвилі фотона збільшується пропорційно до масштабного фактора. Кількісною характеристикою червоного зміщення є однойменна фізична величина  $z$ , що визначається наступним чином [1, 3]:

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{ab}}}{\lambda_{\text{em}}} , \quad (1.5)$$

де  $\lambda_{\text{ab}}$  та  $\lambda_{\text{em}}$  — це довжини хвилі фотона в момент поглинання та момент випромінювання, відповідно. Виходячи з фізичних міркувань, можна ідентифікувати  $\lambda_{\text{em}}$  фотона, що надійшов від певного джерела.  $\lambda_{\text{ab}}$  визначається шляхом безпосереднього вимірювання. Вказані дії дозволяють розрахувати значення червоного зміщення даного джерела.

Знаючи червоне зміщення джерела, можна розрахувати відстань до нього (проте слід відмітити, що дана задача є досить нетривіальною). Для об'єктів з невеликим значенням червоного зміщення справедливим є закон Габбла [4]

$$z = (H_0/c) \cdot r , \quad z \ll 1 , \quad (1.6)$$

де  $r$  — шукана відстань до джерела. Для дуже віддалених космічних об'єктів формула для обрахунку відстаней є більш складною [5].

### 1.1.2 Метрика Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера

Однорідний та ізотропний Всесвіт, що розширюється, описується метрикою Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ) [6]:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (1.7)$$

де  $\gamma_{ij}(x)$  — метрика одиничної 3-сфери, 3-гіперболоїда чи 3-площини. Метрика  $\gamma_{ij}(x)$  може бути записана двома різними способами. Перша формула виглядає наступним чином:

$$dl^2 = d\rho^2 + r^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.8)$$

де

$$r(\rho) = \begin{cases} \sin \rho, & \text{3-сфера;} \\ \rho, & \text{3-площина;} \\ \sinh \rho, & \text{3-гіперболоїд.} \end{cases} \quad (1.9)$$

Якщо за радіальну координату обрати  $r$  (1.9), то формула (1.8) запишеться так:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.10)$$

де

$$\kappa = \begin{cases} +1, & \text{3-сфера;} \\ 0, & \text{3-площина;} \\ -1, & \text{3-гіперболоїд.} \end{cases} \quad (1.11)$$

Розрахуємо символи Крістоффеля для метрики ФЛРУ

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_{\nu}g_{\lambda\sigma} + \partial_{\lambda}g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\nu\lambda}). \quad (1.12)$$

Маємо наступні вирази для ненульових символів Крістоффеля:

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{ik}\partial_0 g^{jk} = \frac{\dot{a}}{a}\delta_j^i, \quad (1.13)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij}, \quad (1.14)$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i, \quad (1.15)$$

де  ${}^{(3)}\Gamma_{jk}^i$  — символи Крістоффеля для просторової метрики  $\gamma_{ij}$ .

### 1.1.3 Рівняння Фрідмана

Щоб вивести диференціальне рівняння на масштабний фактор, треба записати рівняння Айнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

для метрики ФЛРУ. Тут  $R_{\mu\nu}$  — тензор Річі,  $R$  — скалярна кривина,  $T_{\mu\nu}$  — тензор енергії-імпульсу.

Тензор Річі рахуємо, підставляючи знайдені вище символи Крістоффеля у формулу

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma. \quad (1.17)$$

Маємо наступні вирази для ненульових компонент тензора Річі:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.18)$$

$$R_{ij} = (\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2\kappa)\gamma_{ij}. \quad (1.19)$$

Тепер ми маємо змогу розрахувати скаляр кривини, застосовуючи формулу

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (1.20)$$

Нескладні обчислення дають наступний результат:

$$R = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\kappa}{a^2} \right). \quad (1.21)$$

Розписавши 00-компоненту рівнянь Айнштайна та врахувавши, що  $T_{00} = \rho(t)$  — залежна від часу густина енергії, отримуємо т. зв. рівняння Фрідмана

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (1.22)$$

Дане рівняння відображає той факт, що динаміка еволюції Всесвіту (квадрат параметру Габбла в лівій частині) залежить від двох факторів: густини енергії матерії, що наповнює Всесвіт, та просторової кривини (вираз у правій частині).

Якщо розписати  $(ij)$ -компоненти рівнянь Айнштайна, підставивши  $T_{ij} = -p(t)g_{ij}$ , де  $p$  — залежний від часу тиск, отримаємо наступне рівняння:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (1.23)$$

Щоб замкнути систему рівнянь (1.22) та (1.23), використовують рівняння стану матерії

$$p = p(\rho). \quad (1.24)$$

Часом трапляється, що розв'язання рівняння (1.23) супроводжується технічними незручностями, спричиненими наявністю другої похідної по часу від масштабного фактора. Тому досить часто замість вказаного рівняння застосовують інше, а саме:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (1.25)$$

Його можна отримати, записавши коваріантний закон збереження тензора енергії-імпульсу

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.26)$$

### 1.1.4 Космологічна модель $\Lambda$ CDM

Відповідно до сучасних уявлень, наш Всесвіт заповнений нерелятивістською матерією, релятивістськими частинками (т. зв. радіацією), а також темною енергією. Окрім цього, цілком можливо, що для Всесвіту характерним є певне ненульове значення просторової кривини  $\kappa$ . Тоді рівняння Фрідмана (1.22) для нашого Всесвіту матиме наступний вигляд:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_M + \rho_{\text{rad}} + \rho_\Lambda + \rho_{\text{curv}}), \quad (1.27)$$

де  $\rho_M$ ,  $\rho_{\text{rad}}$  та  $\rho_\Lambda$  — внески від нерелятивістської та релятивістської матерії і темної енергії, відповідно.  $\rho_{\text{curv}}$  визначається за формулою

$$\rho_{\text{curv}} = -\frac{3}{8\pi G} \cdot \frac{\kappa}{a^2}. \quad (1.28)$$

З міркувань зручності введемо т. зв. критичну густину — сучасне значення сумарної густини енергії у Всесвіті

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}, \quad (1.29)$$

де  $H_0$  — сучасне значення параметра Габбла (константа Габбла). Введемо також наступні величини:

$$\Omega_M = \frac{\rho_{M,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_{\text{rad}} = \frac{\rho_{\text{rad},0}}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\rho_{\Lambda,0}}{\rho_c}, \quad \Omega_{\text{curv}} = \frac{\rho_{\text{curv},0}}{\rho_c}, \quad (1.30)$$

де  $\rho_{M,0}$ ,  $\rho_{\text{rad},0}$ ,  $\rho_{\Lambda,0}$  та  $\rho_{\text{curv},0}$  — сучасні значення густин енергій різних складових Всесвіту. Очевидно, що

$$\Omega_M + \Omega_{\text{rad}} + \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{curv}} = 1. \quad (1.31)$$

Чисельні значення величин (1.30) на сьогодні оцінюються так [7]:

$$\Omega_M \simeq 0.31, \quad \Omega_{\text{rad}} \lesssim 10^{-4}, \quad \Omega_\Lambda \simeq 0.69, \quad |\Omega_{\text{curv}}| \leq 0.003. \quad (1.32)$$

Враховуючи, що  $\rho_M \propto a^{-3}$ ,  $\rho_{\text{rad}} \propto a^{-4}$ ,  $\rho_{\text{curv}} \propto a^{-2}$ , а також припускаючи, що густина темної енергії не залежить від часу, переписуємо рівняння Фрідмана (1.33):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \left[ \Omega_M \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_{\text{rad}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{\text{curv}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 \right]. \quad (1.33)$$

### 1.1.5 Проблеми моделі гарячого Великого вибуху

Теорія гарячого Великого вибуху була розроблена Георгієм Гамовим в 1947 році. Згідно даної теорії, Весвіт на ранніх етапах свого розвитку був заповнений гарячою плазмою, а початковим моментом його еволюції була так звана сингулярність: момент, коли масштабний фактор був рівним нулю, а густина енергії та тиск прямували до нескінченності. Стартуючи з сингулярності, Весвіт розширювався, і для його опису можна застосовувати метрику ФЛРУ. Одним із найвагоміших передбачень теорії Гамова стало твердження про існування в космосі теплового випромінювання з температурою в кілька кельвінів, що виникло на стадії рекомбінації, і для якого речовина Всесвіту є практично прозорою — реліктового випромінювання. Реліктове випромінювання було експериментально зафіксоване в 1965 році Арно Пензіасом та Робертом Вудро Вільсоном.

Проте згодом виявилось, що модель гарячого Великого вибуху містить внутрішні протиріччя. Серед основних проблем теорії Гамова — проблема горизонту, проблема плоскості, проблема первинних неоднорідностей [8–10].

Проблема горизонту полягає в тому, що згідно моделі гарячого Великого вибуху, розміри видимого сьогодні Всесвіту за планківських часів сягали близько  $10^{90}$  причинно незв'язаних областей. Це протирічить тому факту, що нинішній Всесвіт є однорідним та ізотропним на великих масштабах (реліктове випромі-

нювання є ізотропним з точністю близько  $10^{-5}$ – $10^{-4}$ ).

Щодо проблеми плоскості. Природньо припустити, що за планківських часів внесок від кривини в загальну густину енергії був досить значним, тобто  $|\Omega_{\text{curv}}(t_{\text{Pl}})| \simeq 1$ . Проте теорія гарячого Великого Вибуху дає інший результат: для того, щоб в наш час Всесвіт був таким, яким ми його спостерігаємо, необхідно покласти  $|\Omega_{\text{curv}}(t_{\text{Pl}})| \leq 10^{-60}$ . Іншими словами, у перші миті після Великого Вибуху Всесвіт мав би бути практично плоским. Дане твердження виглядає дуже штучним та неочевидним і потребує серйозного пояснення.

Як вже казалося вище, Всесвіт на великих масштабах є однорідним та ізотропним. Але на малих масштабах спостерігаються локальні неоднорідності: галактики, їх скупчення, надскупчення, великі міжгалактичні пустоти (т. зв. войди). В рамках теорії гарячого Всесвіту можна пояснити виникнення зазначених структур із початкових неоднорідностей  $\delta\rho/\rho \simeq 10^{-5}$ . Проблема полягає в тому, що появу в ранньому Всесвіті початкових неоднорідностей саме такої амплітуди неможливо пояснити, базуючись лише на теорії Гамова. Початкові умови доводиться накладати штучно без глибокого розуміння їх природи та механізму утворення.

### 1.1.6 Стадія інфляції

Всі перелічені в попередньому розділі проблеми знаходять своє вирішення в теорії космічної інфляції. Її суть полягає в наступному. Відповідно до вказаної теорії, стадії гарячого Великого вибуху передувала епоха інфляції, під час якої Всесвіт розширювався за квазіекспоненційним законом (лінійні розміри Всесвіту збільшилися як мінімум у  $10^{26}$  разів, при чому сама інфляція тривала в періоді між  $10^{-36}$  –  $10^{-32}$  секунд).

Приймаючи теорію інфляції, ми приходимо до висновку, що, дійсно, перед гарячим Великим вибухом розміри Всесвіту уже були надзвичайно великими. При цьому останній походив від однієї причинно зв'язаної області планківських

розмірів, яка розширилася за час інфляції.

Проблема плоскості також має просте пояснення в рамках інфляційної моделі. Якщо перед інфляцією кривина була досить значною, то після неї маємо  $|\Omega_{\text{curv}}| \lesssim 10^{-60}$ .

Первині неоднорідності, що стали основою для утворення структур у Всесвіті, є нащадками вакуумних флуктуацій полів, що сильно посилюлися під час інфляції. Даний процес забезпечується швидкою часовою зміною гравітаційного поля на інфляційній стадії.

Вказане вище надзвичайно швидке розширення Всесвіту можна забезпечити модифікацією гравітаційного лагранжіану. Наприклад, у відомій моделі Старобінського [11], окрім доданку, пропорційного скаляру кривини  $R$ , існує доданок, пропорційний  $R^2$ :

$$S = -\frac{M_{\text{Pl}}}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[ R - \frac{R^2}{6\mu^2} \right], \quad (1.34)$$

де  $M_{\text{Pl}} = (8\pi G)^{-1/2}$  — т. зв. редукована маса Планка, а  $\mu$  — вільний параметр. В моделі Старобінського ми отримуємо модифіковане рівняння Фрідмана, розв'язком якого є масштабний фактор, що зростає експоненційним чином відносно довгий проміжок часу.

Модель інфляції з модифікованою гравітацією є повністю еквівалентною до моделі Всесвіту, що розширюється за рахунок спеціального скалярного поля (інфлатонного поля або інфлатона). У такому формалізмі інфляція завершується тоді, коли інфлатон скочується в мінімум свого потенціалу, де починає коливатися, віддаючи свою енергію на народження частинок, які заповнюють Всесвіт.

Розглянемо більш детально теорію космічної інфляції, в якій розширення Всесвіту забезпечується інфлатонним полем. Будемо працювати в метриці ФЛРУ у рівнянні (1.7). Усі подальші розрахунки будемо проводити для просто-

рово-плоского Всесвіту, і, отже, у формулі (1.7) обираємо  $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ .

Швидкість розширення Всесвіту описується рівнянням Фрідмана (1.22) з  $\kappa = 0$ . Будемо враховувати лише інфлатонне поле (інфлатон) — дійсне скалярне поле, що відповідає за розширення Всесвіту на інфляційній стадії. Відповідна дія запишеться наступним чином:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (1.35)$$

де  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ ,  $V(\phi)$  — потенціал інфлатонного поля.

Застосувавши принцип найменшої дії, отримуємо рівняння руху для інфлатона. При цьому вважаємо інфлатон просторово-однорідним (залежним лише від часу). Отримане рівняння (рівняння Кляйна-Гордона-Фока) буде таким:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (1.36)$$

Тензор енергії-імпульсу інфлатонного поля має вигляд

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.37)$$

Густина енергії інфлатона — це 00-компонента тензора енергії-імпульсу:

$$\rho \equiv T_0^0 = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi). \quad (1.38)$$

Отже, рівняння (1.22) набуде наступного вигляду:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right]. \quad (1.39)$$

Остаточно маємо, що еволюція масштабного фактора та інфлатонного поля описуватиметься системою із рівнянь Кляйна-Гордона-Фока (1.36) та Фрідмана (1.39).

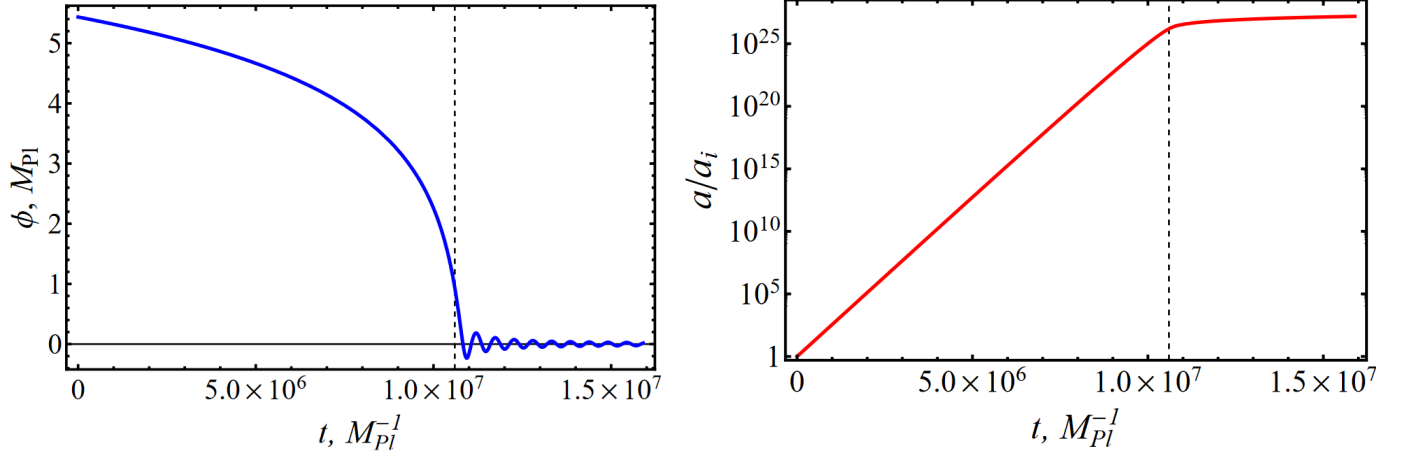


Рис. 1.1: Залежності інфлатона (ліва панель) та масштабного фактора (права панель) від часу, отримані в результаті чисельного розв'язку системи рівнянь Кляйна-Гордона-Фока та Фрідмана для потенціалу Старобінського. Штрихованою лінією позначено момент закінчення інфляції. Добре видно, що під час інфляції масштабний фактор зростає експоненційно. Інфлатон наприкінці інфляції скочується в мінімум потенціалу, де починає коливатися.

Наприклад, для моделі Старобінського (1.34), що в айнштайнівській системі полів характеризується потенціалом

$$V(\phi) = \frac{3\mu^2 M_{\text{Pl}}^2}{4} \left( 1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}} \right)^2, \quad (1.40)$$

чисельний розв'язок рівнянь руху зображено на рис. 1.1. Ліва панель демонструє часову залежність інфлатона, який спочатку повільно скочується вздовж схилу потенціалу (інфляція), а потім швидко осцилює в околі мінімуму потенціалу (розігрів). Права панель показує еволюцію масштабного фактора, що зростає квазіекспоненційно під час інфляції.

Серед величезної кількості моделей інфляції, запропонованих у літературі (систематична класифікація великого набору моделей наведена в роботі [12]) найкраще узгодження зі спостереженнями анізотропії реліктового випромінювання мають моделі плато (наприклад, модель Старобінського), а також моделі нової інфляції з малим полем [13].

## 1.2 Великомасштабні магнітні поля

### 1.2.1 Магнітні поля у Всесвіті. Спостережні свідчення

На сьогодні, завдяки результатам численних астрофізичних спостережень, є очевидним той факт, що магнітні поля наявні всюди у Всесвіті. Вони присутні як в окремих планетах [14], зорях [15] і галактиках [16, 17], так і в скупченнях [18] та надскупченнях галактик [19]. Значення магнітної індукції становить 1–10 мкГс для галактик та порядку 0.1–1 мкГс для скупчень.

У літературі згадується велика кількість спостережних методів, що дозволяють виявляти магнітні поля в космічному просторі [20]. Наприклад, застосування синхротронного випромінювання — випромінювання електромагнітних хвиль релятивістськими електронами, які рухаються по спіральних траєкторіях вздовж ліній магнітного поля. В літературі наявні приклади застосування синхротронного випромінювання для дослідження магнітних полів в міжзоряному середовищі нашої Галактики [21], в короні подвійної зоряної системи V404 Cygni з чорною дірою [22].

Також для вимірювання величини магнітного поля можна використовувати явище фарадеївського обертання. Його суть полягає в наступному: при проходженні електромагнітної хвилі через область з наявним магнітним полем, стани з лівою та правою круговою поляризацією характеризуються різними фазовими швидкостями. Для лінійно-поляризованих хвиль це призводить до повороту площини поляризації на кут

$$\phi = \text{RM} \cdot \lambda^2, \quad (1.41)$$

де  $\lambda$  — довжина хвилі, а  $\text{RM}$  — т. зв. міра обертання, що визначається за формулою

$$\text{RM} \simeq 810 \frac{\text{рад}}{\text{м}^2} \int_0^{l_s} \left( \frac{n_e}{\text{см}^{-3}} \right) \left( \frac{B_{\parallel}}{\text{мкГс}} \right) \left( \frac{dl}{\text{кпк}} \right). \quad (1.42)$$

Тут  $n_e(l)$  — концентрація теплових електронів вздовж променя зору,  $l_s$  — від-

стань між спостерігачем та джерелом,  $B_{\parallel}(l)$  — поздовжня складова вектора магнітної індукції. Вважається, що в загальному випадку міра обертання є сумою трьох внесків: від Молочного Шляху, міжзоряного середовища та джерела.

Ще одним дієвим методом виявлення космічних магнітних полів є застосування ефекту Зеемана. Суть указанного ефекту є загальновідомою: мається на увазі розщеплення енергетичного рівня атома з повним моментом  $J$  на  $2J + 1$  підрівні в зовнішньому магнітному полі. При цьому величина розщеплення між сусідніми підрівнями визначається за допомогою виразу

$$\Delta E = g\mu B, \quad (1.43)$$

де  $g$  — фактор Ланде,  $\mu$  — магнетон Бора,  $B$  — зовнішнє магнітне поле. Ефект Зеемана було успішно застосовано для виявлення магнітних полів у плямах на Сонці [23], а також великомасштабних полів нашої Галактики [24].

Для виявлення великомасштабних магнітних полів у нашій Галактиці, а також в галактиках, що знаходяться недалеко від неї, можна застосовувати поляризоване оптичне світло від зірок. Той факт, що властивості зоряного видимого світла залежать від галактичного магнітного поля, було доведено в роботі [25]. На думку авторів, витягнуті пилинки, що заповнюють міжзоряний простір, мають орієнтуватися перпендикулярно до магнітного поля. Оскільки пилинки поглинатимуть в основному світло, поляризоване вздовж їхніх головних осей (перпендикулярно до поля), земний спостерігач буде детектувати видиме випромінювання з поляризацією, паралельною до напрямку магнітного поля.

Відносно нещодавно (у 2010 році) з'явилися свідчення того, що магнітні поля присутні навіть у міжгалактичних пустотах — войдах [26–31]. Зокрема, у статті А. Неронова та Є. Вовка [26] проведено аналіз результатів спостережень гамма-випромінювання від далеких блазарів, що велися за допомогою телескопа *Fermi/LAT*. Гамма-фотони ТеВ-них енергій, взаємодіючи з фоновим позагалактичним світлом (з енергією близько 0.1–1 eV), народжують електрон-

позитронні пари (енергія останніх — порядку  $\text{TeV}$ ). Після цього електрони та позитрони зазнають зворотного комптонівського розсіяння на реліктових фотонах, породжуючи каскад гамма-променів  $\text{GeV}$ -діапазону. В результаті спостережень було з'ясовано, що потік гамма-променів у  $\text{GeV}$ -діапазоні є значно меншим від очікуваного. Цей феномен можна пояснити, припустивши існування великомасштабного магнітного поля з індукцією принаймні  $10^{-17}$  Гс, що відхиляє електрони й позитрони від їхньої початкової прямолінійної траєкторії.

Максимально можливе значення індукції великомасштабного магнітного поля можна встановити, наприклад, аналізуючи його вплив на космічні промені надвисоких енергій. Так, у роботі [32] було розглянуто джерело ультрарелятивістських космічних променів у надскупченні Персей-Риби. Поряд з ним на небесній сфері знаходиться “гаряча пляма” — місце приходу космічних променів. В реальному космічному просторі між цими двома об’єктами знаходиться вояд Тельця. Магнітне поле вояду Тельця відхиляє космічні промені на відносно невеликий кут — інакше надскупчення Персей-Риби і гаряча пляма знаходилися б далеко один від одного на небесній сфері. Виходячи з вище вказаних міркувань, автори статті прийшли до висновку, що магнітне поле у досліджуваному вояді не може перевищувати  $10^{-10}$  Гс.

Походження магнітного поля у воядах на сьогодні є однією із нерозв’язаних проблем сучасної фізики.

### 1.2.2 Походження великомасштабних магнітних полів

Для пояснення описаного вище явища науковцями було запропоновано чимало найрізноманітніших теорій (для огляду див. роботи [20, 33–36]). Усі ці теорії можна поділити на дві великі групи: астрофізичні та космологічні.

Згідно астрофізичних теорій, великомасштабне магнітне поле утворилося на досить пізніх стадіях еволюції Всесвіту — після рекомбінації, в епоху формування структур (приблизно через кілька сотень мільйонів років після Великого

вибуху). Під час формування структур у Всесвіті магнітне поле могло утворюватись завдяки ряду механізмів. Один із них — так звана батарея Бірмана [37–39], процес спонтанного утворення магнітного поля в плазмі. Він має місце тоді, коли градієнти густини та температури плазми не є колінеарними:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim [\vec{\nabla} n_e \times \vec{\nabla} T]. \quad (1.44)$$

Окрім цього, вважається, що магнітне поле підсилюється через адіабатичне стиснення під час гравітаційного колапсу, а також через різноманітні типи динамо [40–42]. Процес динамо полягає в утворенні магнітного поля всередині провідної рідини, яка обертається. Відповідне диференціальне рівняння має наступний вигляд:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times [\vec{u} \times \vec{B}] + \frac{1}{4\pi\sigma} \nabla^2 \vec{B}, \quad (1.45)$$

де  $\sigma$  — провідність рідини, а  $\vec{u}$  — швидкість її руху.

На жаль, перелічені вище астрофізичні теорії добре описують генерацію магнітних полів лише в галактиках та їх скупченнях — у войдах ці механізми не працюють через надзвичайно малу густину матерії. (Хоча насправді з цього приводу існує кілька оригінальних гіпотез — наприклад, що магнітні поля були занесені у войди разом з викидами речовини із активних ядер галактик [43–45].)

Усі космологічні теорії базуються на припущенні, що великомасштабні магнітні поля були згенеровані у ранньому Всесвіті — наприклад, на стадіях інфляції чи розігріву [46, 47] або ж під час фазових переходів [48–50].

Найбільш природно виглядає гіпотеза про генерацію магнітних полів під час епохи інфляції. По-перше, саме тоді згенерувалися первинні збурення, що в подальшому стали основою для утворення сучасної великомасштабної структури Всесвіту. По-друге, інфляція — найдавніша відома сучасній науці стадія еволюції Всесвіту, з того часу він розширився у максимальну кількість разів. Це дозволяє нам сподіватися, що кореляційна довжина згенерованих магнітних

полів буде достатньо великою — сягатиме мегапарсеків.

### 1.2.3 Інфляційний магнітогенез

Розглянемо більш детально гіпотезу про інфляційний магнітогенез. Зауважимо, що метрика Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера (яка використовується для опису Всесвіту, що розширюється) є конформно-плоскою. Це означає, що вона може бути записана в наступному вигляді:

$$g_{\mu\nu} = a^2 \eta_{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

де  $\eta_{\mu\nu}$  — метрика Мінковського. Стандартна максвелівська дія електромагнітного поля є конформно-інваріантною, а тому “не відчуває” розширення Всесвіту:

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right] = \\ &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} \right], \end{aligned} \quad (1.47)$$

де  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензор електромагнітного поля ( $A_\mu$  — відповідний 4-потенціал). Іншими словами, електромагнетизм у Всесвіті, що розширюється, описується такою ж дією, як і в плоскому просторі-часі Мінковського. Тому магнітогенез в такому Всесвіті відбуватися не може [51].

Для генерації магнітних полів шляхом підсилення квантових флуктуацій необхідно порушити конформну інваріантність дії електромагнітного поля. Це можна зробити кількома способами. Зокрема, дуже популярними в літературі є моделі, в яких інфляційний магнітогенез відбувається за рахунок взаємодії електромагнітного поля з інфлатоном — дійсним скалярним полем, що відповідає за надзвичайно швидке розширення Всесвіту під час інфляції. Однією із таких

моделей є модель аксіального зв'язку:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4}I(\phi)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (1.48)$$

де  $\phi$  — інфлатонне поле,  $I(\phi)$  — функція аксіального зв'язку,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензор електромагнітного поля,  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$  — дуальний тензор електромагнітного поля. Зазначена модель особливо цікава тим, що магнітні поля в ній мають ненульову спіральність, що робить їх більш стійкими під час подальшої еволюції. Після завершення інфляції функція  $I(\phi)$  має прямувати до нуля (або до довільної константи), щоб більше не давати внеску в рівняння руху електромагнітного поля. Найпростішою функцією, що задовольняє цю умову є  $I(\phi) = b\phi$ , де  $b$  — деяка константа [52–54]. Саме таким чином взаємодіє з калібрувальними полями гіпотетичне псевдоскалярне поле — аксіон. Саме це зумовило назву цієї моделі магнітогенезу.

Іншою не менш відомою є модель кінетичного зв'язку:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4}f^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.49)$$

де  $f(\phi)$  — функція кінетичного зв'язку. Після завершення інфляції функція  $f(\phi)$  має стати рівною одиниці, щоб відновити стандартний вигляд лагранжіану електромагнітного поля. У більшості випадків функції кінетичного зв'язку обираються монотонними [55–58], але трапляються і винятки [59, 60]. Варто зазначити, що функція зв'язку  $f(\phi)$  не має бути значно меншою за одиницю, щоб не породжувати проблему сильного зв'язку [61]. Справді, за наявності кінетичного зв'язку ефективний заряд усіх частинок модифікується  $q_{\text{eff}} = q/f$ ; при  $f \ll 1$  заряди стають дуже великими. Це робить неможливим застосування теорії збурень для опису процесів у квантовій електродинаміці, переводячи її у непертурбативний режим. Хоча безпосередньо на еволюцію інфлатона це не впливає, досить складно передбачити вплив радіаційних поправок на форму

потенціалу, тому проблеми сильного зв'язку варто уникати.

Один із можливих механізмів порушення конформної інваріантності дії — ввімкнення взаємодії електромагнітного поля із кривиною простору-часу [62, 63]. Загальний лагранжіан такої моделі, де тензори кривини входять лише в першому степені, виглядає наступним чином:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = & c_1 R F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + c_2 R_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} F^{\nu\beta} + c_3 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \\ & + c_4 R F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + c_5 R_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} F^{\mu\alpha} \tilde{F}^{\nu\beta} + c_6 R_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} \tilde{F}^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (1.50)$$

де  $c_1, \dots, c_6$  — певні константи,  $R_{\mu\nu\alpha\beta}$  — тензор кривини Рімана,  $R_{\mu\nu}$  — тензор Річчі,  $R$  — скалярна кривина.

Під час інфляції у Всесвіті домінує скалярне поле інфлатон. Рівняння стану має приблизно такий вигляд:  $p \simeq -\rho$ . Масштабний фактор зростає з часом квазіекспоненційно:  $a(t) \sim e^{Ht}$ . В такому разі тензор кривини Рімана та тензор Річчі (з точністю до поправок вищого порядку за параметрами повільного скочування) можна виразити через скаляр кривини наступним чином:  $R_{\mu\nu\alpha\beta} \simeq \frac{1}{12} R (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha})$ ,  $R_{\mu\nu} \simeq \frac{1}{4} R g_{\mu\nu}$ . Під час інфляції  $R$  є функцією інфлатона  $R(\phi)$ . Отже, формула (1.50) запишеться у спрощеному вигляді:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \simeq C_1 R(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + C_2 R(\phi) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (1.51)$$

де  $C_1$  та  $C_2$  — деякі конкретні числа. Узагальнюючи  $R(\phi)$  в цьому виразі на довільні функції інфлатона, отримуємо вирази для лагранжіанів моделей аксіального та кінетичного зв'язку. Нижче будуть обговорені особливості двох зазначених моделей.

Як правило, для опису інфляційного магнітогенезу в літературі досліджується еволюція окремих мод електромагнітного поля, а згенеровані поля обчислюються шляхом інтегрування по спектру. На жаль, такий підхід стає незастосовним, якщо у Всесвіті має місце ефект Швінгера, або ж згенеровані поля

чинять зворотну реакцію на еволюцію інфлатона. Зазначені явища є суттєво нелінійними, моди перестають еволюціонувати незалежно одна від одної. Підхід з помодовим розкладом має бути замінений на інший математичний апарат, що самоузгоджено враховує згадані вище явища.

Таким зокрема є метод градієнтного розкладу. Його суть полягає в тому, щоб розглянути набір квадратичних функцій електромагнітного поля в координатному просторі, не проводячи розклад Фур'є. Вони одночасно містять в собі всі фізично значущі моди електромагнітного поля, що робить можливим застосування цього методу навіть при наявності нелінійності в системі. Вперше він був застосований у роботі [60] для моделі кінетичного зв'язку. Також він використовувався для дослідження моделі з аксіальним [53, 64–66] та аксіально-кінетичним зв'язком [67].

## 1.3 Ефект Швінгера

### 1.3.1 Загальні відомості

До цього часу ми говорили про генерацію лише магнітних полів. Але не треба забувати, що разом з ними під час інфляції утворюються ще й електричні поля, і вони, часом, набагато сильніші за магнітні. Згенеровані електричні поля є настільки потужними, що можуть народжувати з вакууму пари заряджених частинок і античастинок (ефект Швінгера) [68–70].

Спочатку розглянемо ефект Швінгера, не вдаючись до космологічних проявів цього явища. Користуючись квазікласичним наближенням у квантовій механіці, можна розрахувати кількість пар (наприклад, електронів і позитронів), які утворюються за одиницю часу в одиниці об'єму в однорідному електричному полі [71]:

$$\frac{\Gamma}{V} = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3 \hbar^2 c} \exp\left(-\frac{\pi m^2 c^3}{e E \hbar}\right). \quad (1.52)$$

Тут  $e$  — заряд електрона,  $m$  — його маса,  $E$  — напруженість однорідного електричного поля,  $\hbar$  — стала Планка,  $c$  — швидкість світла у вакуумі. В 1951-му році Джуліан Швінгер, стартуючи з принципів квантової електродинаміки, отримав вираз для імовірності розпаду вакууму  $P_{\text{dec}}(t) = 1 - \exp(-wVt)$  за рахунок народження частинок і античастинок у сильному електричному полі, де величина  $\omega$  має вигляд:

$$\omega = \frac{e^2 E^2}{4\pi^3 \hbar^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n\pi m^2 c^3}{eE\hbar}\right). \quad (1.53)$$

Як видно, доданок ряду з  $n = 1$  дає вираз для темпу народження пар  $\Gamma/V$ , наведений вище.

З формул (1.52) та (1.53) можна зробити наступний висновок: щоб процес народження пар не був експоненційно подавленим, електричне поле має перевищувати т. зв. критичне значення:

$$E_{\text{cr}} = \frac{2m^2 c^3}{e\hbar} \sim 10^{18} \text{ В/м}. \quad (1.54)$$

Це значення має зрозумілий фізичний зміст. Електричне поле розносить віртуальні частинку і античастинку, що присутні у фізичному вакуумі завдяки квантовим флуктуаціям, на відстань порядку їх комптонівської довжини  $l \sim \lambda_c = \hbar/(mc)$  і при цьому виконує роботу достатню, щоб надати їм енергію  $W = 2mc^2$ , тобто зробити їх реальними частинками.

Відмітимо, що знайдене критичне значення є надзвичайно великим числом. Людство ще не навчилося створювати настільки сильні електричні поля, а тому ефект Швінгера ще ніколи не спостерігався в лабораторії. Експериментально вченим вдалося відтворити лише аналог ефекту Швінгера в графені [72]. В такого роду досліджах роль частинки та античастинки грають електрон і дірка. Швидкість світла у формулах змінюється на т. зв. швидкість Фермі  $v_F \simeq 10^6$  м/с. Критичне значення електричного поля, необхідне для генерації електронно-діркових

пар в графені, є набагато меншим за (1.54):  $E_{\text{cr}} \sim 10^7 \text{ В/м}$ .

В ряді теоретичних робіт було показано, що в нейтронних зірках [73] та пульсарах [74] можуть виникати електромагнітні поля надкритичних значень, спричиняючи ефект Швінгера. На жаль, поки що можливість протікання ефекту Швінгера у вказаних астрофізичних об'єктах залишається не підтвердженою спостереженнями.

### 1.3.2 Ефект Швінгера під час інфляції

В ранньому Всесвіті легко могли реалізуватися надзвичайно сильні електромагнітні поля, тому важливо розуміти, який вплив має ефект Швінгера на магнітогенез. Вказаний процес призводить до послаблення електричного поля, завершення інфляційного магнітогенезису та подальшого розігріву Всесвіту. Можливість протікання ефекту Швінгера під час інфляції була розглянута у багатьох роботах [56, 75–83].

Густину струму частинок, народжених в результаті ефекту Швінгера, для випадку сильного поля ( $|eQE| \gg H^2$ , де  $e$  — калібрувальна стала зв'язку,  $Q$  — заряд частинки) можна розрахувати за формулою

$$J = \frac{e |Q|}{6\pi^2 H} E |B| \psi\left(\frac{\pi |B|}{E}\right) \exp\left[-\frac{\pi m^2}{e |Q| E}\right], \quad (1.55)$$

де  $B$  — проєкція вектора індукції магнітного поля на напрямок електричного поля,  $\psi(x) = \coth x$  для діраківських ферміонів та  $\psi(x) = 1/(2 \sinh x)$  для комплексних скалярів.

У літературі, як правило, індуквану густину струму записують у вигляді узагальненого закону Ома

$$\vec{J} = \sigma_E \vec{E}, \quad (1.56)$$

де  $\sigma_E = \sigma_E(\vec{E}, \vec{B})$  — так звана швінгерівська провідність, яка залежить від електричної напруженості  $\vec{E}$ , магнітної індукції  $\vec{B}$ , параметру Габбла  $H$ , а також

від зарядів та мас утворених частинок

$$\sigma_E = \frac{e |Q|}{6\pi^2 H} |B| \psi\left(\frac{\pi |B|}{E}\right) \exp\left[-\frac{\pi m^2}{e |Q| E}\right]. \quad (1.57)$$

Узагальнений закон Ома також може бути записаним в дещо іншій формі:

$$\vec{J} = \sigma_B \vec{B}, \quad (1.58)$$

$$\sigma_B = \frac{e |Q|}{6\pi^2 H} \text{sign}(B) E \psi\left(\frac{\pi |B|}{E}\right) \exp\left[-\frac{\pi m^2}{e |Q| E}\right]. \quad (1.59)$$

Можливим також є більш загальне формулювання закону Ома:

$$\vec{J} = \sigma_E \vec{E} + \sigma_B \vec{B}. \quad (1.60)$$

Вираз для швінгерівської провідності відомий лише для випадку сильних постійних електромагнітних полів у просторі-часі де Сіттера [76, 79, 80]. Якщо врахувати, що поля змінюються в часі, то можуть спостерігатися відхилення від омичного закону [81, 82]. В такому разі слід користуватися кінетичним підходом для опису ефекту Швінгера, розглядаючи рівняння Больцмана [81] або кінетичні рівняння Власова [82, 84].

## 1.4 Темна матерія

### 1.4.1 Спостережні свідчення існування прихованої маси у Всесвіті

Темна матерія — одна зі складових частин нашого Всесвіту, що займає близько чверті густини енергії всього Всесвіту. Існування темної матерії було засвідчено рядом астрофізичних спостережень, які вказали на присутність у космосі невидимої масивної субстанції, що проявляє себе лише в гравітаційній взаємодії [8, 85, 86]. Склад та природа темної матерії досі залишаються невідомі.

мими для сучасної науки.

Один із найвідоміших доказів існування темної матерії — поведінка кривих обертання галактик на великих відстанях від їх центрів [87, 88]. Згідно теоретичних передбачень швидкість зірок на відстані  $R$  від центру галактики визначається за формулою

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}, \quad (1.61)$$

де  $M(R)$  — маса всієї матерії, що знаходить всередині шару радіусу  $R$ . Очікується, що на краю галактики  $M(R)$  прямуватиме до константи, і  $v(R)$  поводитиме себе як  $R^{-1/2}$ . Однак для великої кількості спіральних галактик  $v(R)$  не спадає за вказаним законом, а виходить на константу. Вказаний спостережувальний факт свідчить про те, що маса галактики продовжує зростати навіть в тих областях, де видимий диск вже закінчився. Отже, ми маємо справу з певною “прихованою масою”, що відома під назвою темної матерії.

Темну матерію також можна виявити, використовуючи результати спостережень явища гравітаційного лінзування [89, 90]. Суть явища полягає в наступному: траєкторії світлових променів деформуються при їх проходженні поблизу локальних мас, а це в свою чергу призводить до спотворення зображень далеких космічних об’єктів. Яскравим проявом описаного явища є сильне гравітаційне лінзування далеких галактик, що знаходяться за галактичними скупченнями. В такому випадку спотворені зображення галактик розташовуються вздовж т. зв. кола Айнштайна. Кутовий радіус кола Айнштайна залежить від маси лінзи, це дозволяє нам вимірювати маси галактичних скупчень. В результаті такого роду вимірювань виявилося, що скупчення галактик лише на 10-20 відсотків складаються із видимої матерії, решта маси припадає на темну матерію.

У зв’язку з явищем гравітаційного лінзування варто згадати один з найпереконливіших доказів існування темної матерії — маються на увазі дослідження

скупчення галактик Куля в сузір'ї Кіля [91]. Якщо говорити більш точно, Куля — це не одне, а два галактичних скупчення, що зіткнулися. Гарячий газ, який спостерігався рентгенівською обсерваторією *Chandra*, зазнав дії сил опору і прийняв форму кулі. Незалежно від спостережень *Chandra*, за допомогою гравітаційного лінзування було задетектовано загальну масу Кулі. Виявилося, що основна маса скупчення відділена від газу — тобто на неї не діють сили опору. Це доводить, що окрім видимої баріонної матерії (гарячий газ) у скупченні Куля присутня прихована маса (темна матерія).

Вплив темної матерії проявляється не лише на масштабах галактик і галактичних скупчень. Вона відіграє важливу роль в еволюції Всесвіту та формуванні його структур. Після рекомбінації баріонна матерія у Всесвіті перебуває у формі нейтральних атомів і взаємодіє переважно гравітаційно. Згодом під дією гравітаційного колапсу матерія починає збиратися у згустки, формуючи великомасштабну структуру Всесвіту. Слід зазначити, що формування структур лише з баріонної речовини потребувало б значно більше часу, ніж вік нашого Всесвіту. Натомість темна матерія, яка практично не взаємодіє з іншими видами матерії, окрім гравітаційної взаємодії, починає формувати згустки раніше. Вона створює гравітаційні потенціальні ями, у які згодом потрапляє видима речовина, формуючи в них галактики та інші структури. Таким чином, наявність темної матерії робить можливим формування великомасштабної структури Всесвіту за час його існування до сьогодні.

У 2005-му році вийшла робота з результатами комп'ютерної симуляції *Millennium*, в рамках якої було проведено моделювання еволюції великомасштабної структури Всесвіту [92]. Симуляції дозволяють отримати не реальну картину нашого Всесвіту, а модель схожої великомасштабної структури, тому для порівняння результатів моделювання зі спостережуваними даними слід використовувати статистичний аналіз. З даною метою будують т. зв. спектр потужності (фур'є-образ кореляційної функції матерії), який можна отримати і зі спосте-

режень. Як виявилось, загальноприйнята серед науковців космологічна модель  $\Lambda$ CDM дає чудове узгодження результатів теоретичних передбачень з даними спостережень [93].

### 1.4.2 Теорії щодо природи темної матерії

Стосовно природи прихованої маси у Всесвіті науковцями була висунута величезна кількість різноманітних теорій (для огляду див. [85, 94, 95]).

Спочатку чимало вчених притримувалося думки, що темна матерія, скоріше за все, складається із баріонної речовини. Іншими словами, темну матерію складають компактні об'єкти (коричневі та білі карлики, нейтронні зірки, чорні діри тощо), які є набагато менш яскравими, ніж звичайні зорі [96, 97]. Для таких об'єктів було введено спеціальну назву MACHOs [98] (скорочено від massive astrophysical compact halo objects — масивні астрофізичні компактні гало-об'єкти). Проте згодом результати досліджень різних науковців показали, що MACHOs не складають більшу частину темної матерії у Всесвіті [99–101]. Сьогодні вважається доведеним той факт, що звичайна баріонна речовина не є домінуючою компонентою темної матерії. Єдиним баріонним кандидатом на роль темної матерії сьогодні залишаються первинні чорні діри, утворені в ранньому Всесвіті [102].

Після того, як наукова спільнота накопичила достатньо доказів безперспективності теорій баріонної темної матерії, загальноприйнятим стало уявлення про холодну темну матерію, яка складається із невідомих сучасній науці елементарних частинок.

Одним із найвідоміших кандидатів на роль темної матерії є т. зв. WIMP (weakly interacting massive particle — слабо взаємодіюча масивна частинка) [103, 104]. Вважається, що такі частинки зазнали теплового відщеплення в ранньому Всесвіті подібно до відщеплення фотонів під час рекомбінації. Для них є характерною відносно значна маса (більша за 1-100 кеВ), а також переріз

анігіляції, який співпадає з масштабом слабкої взаємодії. Вказані умови є необхідними для того, щоб передбачена реліктова густина WIMPів співпадала з сучасним значенням густини темної матерії. Оскільки WIMPи можуть брати участь в слабкій взаємодії, в науковців є гіпотетичний шанс їх задетектувати. В останні роки було створено чимало експериментальних програм, пов'язаних з пошуком WIMPів (для прикладу, див. [105–107]), але поки що вони не дали однозначного позитивного результату.

Аксіони, нейтральні псевдоскалярні частинки, спочатку з'явилися в теорії Печчеї-Квінн, при вирішенні сильної CP-проблеми в квантовій хромодинаміці [108]. Ряд експериментів та астрофізичних спостережень показав, що аксіони мають бути “невидимими” і надзвичайно легкими. Такі частинки характеризуються високою стабільністю в космологічних часових масштабах. Іншими словами, якщо вони були утворені в ранньому Всесвіті, то мають існувати і сьогодні. Зазначені вище властивості аксіона роблять його цікавим кандидатом на роль частинки темної матерії.

Нейтрино Стандартної моделі, на перший погляд, також можуть бути частинками темної матерії [109, 110], адже вони є стабільними та не беруть участі в електромагнітній та сильній взаємодії. Проте, як виявилось, модель темної матерії, що складається з нейтрино, не здатна пояснити сучасну великомасштабну структуру Всесвіту [111]. Щоправда, цей висновок не стосується т. зв. стерильних нейтрино (гіпотетичних нейтрино з правою спіральністю, що не беруть участі в слабкій взаємодії). Темна матерія, яка складається зі стерильних нейтрино, була розглянута в ряді робіт [112–115].

Досить цікавим кандидатом в темну матерію є т. зв. темний фотон [116, 117]. Відповідний лагранжіан складається з двох доданків: перший є повністю аналогічним до звичайного електромагнітного лагранжіану, інший є масовим доданком. Гіпотетично темний фотон може бути задетектованим, адже він кінетично змішаний зі звичайним видимим фотоном. Іншими словами, вказане кінетичне

змішування формує портал між темним і видимим секторами.

Останніми роками досить популярною є теорія скалярної темної матерії. Згідно даної теорії, галактичні гало сформувалися в результаті процесу бозе-айнштайнівської конденсації фундаментального скалярного поля в ранньому Всесвіті [118, 119]. Частинкою вказаного поля вважається надлегкий бозон масою порядку  $10^{-22}$  еВ.

Слід зазначити, що окрім загальноприйнятої моделі  $\Lambda$ CDM існує ряд альтернативних пояснень ефектів темної матерії. Одна з таких теорій була озвучена в 1983-му році Мордехаєм Мілгромом [120]. Вчений припустив, що в наближенні надзвичайно малих прискорень другий закон Ньютона для гравітаційної сили виглядає так:

$$F = \frac{ma^2}{a_0}. \quad (1.62)$$

Тут  $a \ll a_0$ , де  $a_0 \sim 1.2 \cdot 10^{-10}$  м/с<sup>2</sup> — деякий фундаментальний масштаб прискорення, де змінюється форма закону Ньютона. Теорія Мілгрона отримала назву модифікованої ньютонівської динаміки (або ж MOND, скорочено від MOdified Newtonian Dynamics). Вона змогла пояснити криві обертання галактик без застосування концепції темної матерії [121]. Пізніше різні вчені намагалися пояснити результати астрофізичних спостережень без використання уявлень про приховану масу, висуваючи альтернативні теорії гравітації [122, 123].

### 1.4.3 Темний фотон

Розглянемо більш детально гіпотезу про те, що частинкою темної матерії є темний фотон. Дана теорія також отримала назву векторної темної матерії. Як уже зазначалося вище, лагранжіан векторної темної матерії записується подібно до електромагнітного лагранжіану, але при цьому додається масовий доданок. До того ж, має місце кінетичне змішування між звичайним і темним фотонами. Загальний лагранжіан, який описує звичайне електромагнітне і “темне” поля та

взаємодію між ними, має наступний вигляд:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}F'^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A'_\mu A'^\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\varepsilon}{2}F'_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (1.63)$$

Тут штрихами позначено величини, які стосуються темного фотона. Для електромагнітних величин штрихи відсутні. В подальшому, коли мова буде йти лише про векторну темну матерію (не розглядатиметься взаємодія з електромагнітним полем), штрихи будемо опускати.

Існування порталу (який створюється кінетичним змішуванням) між темним і видимим секторами, можливо, забезпечить в майбутньому експериментальне виявлення темного фотона. Станом на сьогодні темний фотон жодного разу не був задетектований і поки що залишається гіпотетичною частинкою. Тим не менше, різноманітні експерименти, а також космологічні та астрофізичні спостереження дають науковцям обмеження на масу темного фотона та параметр його кінетичного змішування зі звичайним фотоном (див. рис. 1.2).

Явище, яке в майбутньому, можливо, призведе до відкриття вказаної частинки — перетворення фотона Стандартної моделі (наприклад, реліктового фотона) на темний фотон [124]. Цей процес чимось нагадує осциляції нейтрино. У більшості випадків, імовірність такого перетворення є незначною. Але при проходженні фотоном міжгалактичного середовища, він взаємодіє з частинками останнього, в результаті чого набуває ненульової ефективної маси  $m_{\text{eff}}$ . При цьому змінюється і значення параметру змішування  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon_{\text{eff}}^2 = \frac{\varepsilon^2 m^4}{(m_{\text{eff}}^2 - m^2)^2}. \quad (1.64)$$

Тут  $m$  — маса темного фотона. Отже, в міжгалактичному середовищі імовірність перетворення реліктового фотона на темний може значно зрости. Іншими словами, має місце явище резонансної конверсії.

Слід також відмітити, що використання концепції темного фотона дозво-

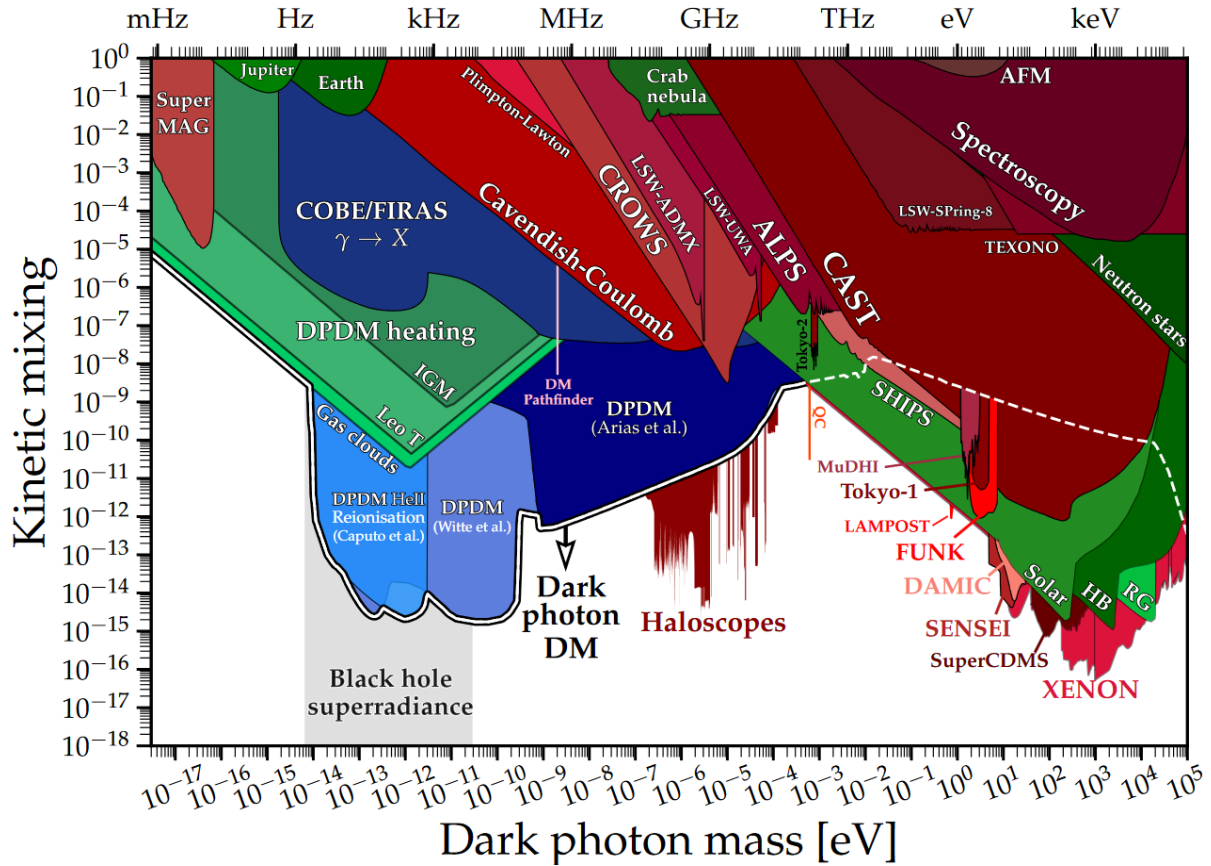


Рис. 1.2: Обмеження на масу та параметр кінетичного змішування темного фотона [117].

ляє з непоганою точністю пояснити криві обертяння галактик. Так, у статті [125] стверджується, що частинки темної матерії, що утворюють галактичне гало, можуть взаємодіяти одна з одною через темний фотон. Окрім цього, саме за рахунок темних фотонів гало може охолоджуватися (темне гальмівне випромінювання) та нагріватися. Нагрівання гало реалізується звичайними надновими типу II. Енергія колапсу ядра наднової “перекачується” в темний сектор за допомогою темних фотонів (цей механізм можливий завдяки кінетичному змішуванню темного і звичайного фотонів). Автори розглядають темну матерію гало як рідину, що описується рівняннями гідродинаміки Ейлера, і показують, що її густина залежить від розподілу наднових. Отримані в рамках описаного підходу криві обертяння галактик добре узгоджуються з даними астрофізичних спостережень.

#### 1.4.4 Генерація векторної темної матерії під час інфляції

З першого погляду можна перекоонатися, що лагранжіан векторної темної матерії

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu \quad (1.65)$$

дуже схожий на лагранжіан електромагнітного поля і по суті відрізняється від нього лише присутністю масового доданку. Враховуючи можливість генерації електромагнітного поля під час інфляції за рахунок розглянутих раніше механізмів, природно припустити, що утворення темного векторного поля також могло мати місце в інфляційну епоху.

Як уже зазначалося вище, генерація електромагнітного поля за відсутності взаємодії з іншими полями є неможливою у Всесвіті, що розширюється, через конформну інваріантність метрики. Для векторної темної матерії ця проблема не є актуальною, адже наявність масового доданку автоматично призводить до порушення конформної інваріантності. Отже, описати генерацію темного векторного поля можна навіть без залучення взаємодії з гравітацією чи інфлатоном [126–129].

Проте слід відмітити, що в такій найпростішій моделі генерація буде ефективною лише для поздовжніх мод. Густина енергії поперечних мод буде спадати експоненційно. Суттєва генерація поперечних мод може бути забезпечена немінімальним зв'язком векторного поля з інфлатоном (енергія інфлатона передаватиметься до поперечних мод). Як і в аналогічній задачі для електромагнітних полів, в літературі розглядаються моделі кінетичного [130–132], аксіального [133–135] та аксіально-кінетичного [136, 137] зв'язку з інфлатонним полем. Для останньої моделі маємо наступний лагранжіан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi g^{\mu\nu} - V(\phi) - \frac{1}{4}I_1(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}I_2(\phi)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{m^2(\phi)}{2}A_\mu A^\mu, \quad (1.66)$$

де перші два доданки стосуються інфлатонного поля, наступні два доданки від-

повідують за взаємодію векторної темної матерії з інфлатоном ( $I_1(\phi)$  та  $I_2(\phi)$  — функції кінетичного та аксіального зв'язку відповідно), а останній доданок є масовим доданком векторного поля.

Також досить розповсюдженими в літературі є моделі з взаємодією масивного векторного поля та гравітації [138–141]. Для прикладу, у роботах [140, 141] використовувався лагранжіан такого типу:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\xi_1 R A_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\xi_2 R^{\mu\nu} A_\mu A_\nu. \quad (1.67)$$

Цікаво відмітити, що для інфляційної генерації темного векторного поля (як і для електромагнітного) має місце явище зворотної реакції [137, 142], а також ефект Швінгера, в результаті якого у Всесвіті відбувається народження т. зв. “темних електронів” та їхніх античастинок [143, 144].

На основі всього вище сказаного можна зробити очевидний висновок, що задача про генерацію векторної темної матерії під час інфляції є дуже подібною до задачі про інфляційний магнітогенез (єдина відмінність: у першій задачі відбувається утворення поперечних і поперечних мод, тоді як під час магнітогенезу генеруються лише поперечні моди). Для розв'язання обох задач у літературі зазвичай використовується стандартний метод помодового розкладу. І якщо для інфляційного магнітогенезу було не раз застосовано формалізм градієнтного розкладу (який працює в суттєво нелінійних режимах, коли помодовий розклад є неефективним), то для векторної темної матерії вказаний формалізм ще жодного разу не був використаний. Застосування цього підходу дозволило б проаналізувати вплив зворотної реакції та ефекту Швінгера на процес генерації темного векторного поля на інфляційній стадії.

## 1.5 Система одиниць та позначення

У всіх наступних розділах ми припускаємо, що простір-час описується просторово плоскою метрикою ФЛРУ,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j = a^2(\eta) (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j) , \quad (1.68)$$

де  $a$  — масштабний фактор,  $t$  — фізичний час,  $\eta$  — конформний час; грецькі індекси використовуються для 4-векторів, а латинські — для евклідових 3-векторів.

Усі результати подано в натуральних одиницях,  $c = \hbar = 1$ , і виражено через зведену планківську масу  $M_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c / (8\pi G)} \approx 2.435 \times 10^{18}$  ГеВ. Відповідно, час і довжина вимірюються в  $M_{\text{Pl}}^{-1}$ , густина енергії в  $M_{\text{Pl}}^4$  тощо.

## 1.6 Висновки

Отже, проблема інфляційної генерації векторних полів, а також пов'язаних із нею явищ зворотної реакції та ефекту Швінгера є надзвичайно актуальною для сучасної космології та квантової теорії поля у викривленому просторі-часі. З одного боку, інфляційні моделі відкривають природний механізм формування великомасштабних магнітних полів і можливого походження векторної темної матерії. З іншого боку, наявність нелінійних процесів, таких як народження заряджених частинок і вплив згенерованих полів на фонову динаміку, суттєво ускладнює теоретичний опис і вимагає розробки нових самоузгоджених методів дослідження. Попри значну кількість робіт, присвячених інфляційному магнітогенезу та генерації масивних векторних полів, низка принципових питань залишається відкритою. Саме розв'язанню цього кола задач і побудові відповідного теоретичного апарату присвячено подальші розділи цієї роботи.

## РОЗДІЛ 2

# ФОРМАЛІЗМ ГРАДІЄНТНОГО РОЗКЛАДУ У НАЙЗАГАЛЬНІШІЙ МОДЕЛІ ІНФЛЯЦІЙНОГО МАГНІТОГЕНЕЗУ

### 2.1 Вступ

Спостереження гамма-випромінювання від далеких блазарів [26–30, 145, 146] вказують на наявність у міжгалактичних порожнечах Всесвіту магнітних полів з індукцією не меншою за  $10^{-17}$  Гс. З іншого боку, аналіз впливу великомасштабних магнітних полів на космічні промені надвисоких енергій дозволяє встановити верхню межу для їх індукції на рівні близько  $10^{-10}$  Гс [32].

Для пояснення походження великомасштабних магнітних полів було запропоновано чимало теоретичних моделей. Загалом їх поділяють на дві основні категорії: астрофізичні та космологічні. У рамках астрофізичних сценаріїв вважається, що такі поля сформувалися на відносно пізніх стадіях еволюції Всесвіту — після рекомбінації, під час епохи утворення структур (приблизно через кілька сотень мільйонів років після Великого вибуху). У процесі формування космічних структур магнітні поля могли виникати завдяки різним механізмам, зокрема завдяки так званій батареї Бірмана [37, 38, 147]. Подальше підсилення магнітного поля, як вважається, відбувається через адіабатичне стиснення під час гравітаційного колапсу [33, 148], а також завдяки різним механізмам динамо [40–42, 149]. Проте ці моделі здатні ефективно пояснити генерацію магнітних

полів переважно у галактиках та їх скупченнях. У міжгалактичних порожнечах такі механізми практично не працюють через надзвичайно малу густину речовини.

Згідно з космологічними сценаріями, великомасштабні магнітні поля могли виникнути ще в ранньому Всесвіті: під час фазових переходів [48–50, 150–152], на стадії розігріву [46, 47] або ж у період інфляції [62, 153, 154]. Особливо привабливою виглядає гіпотеза інфляційного магнітогенезу. Саме в епоху інфляції були згенеровані первинні збурення [155–159], які згодом призвели до формування сучасної великомасштабної структури Всесвіту. Крім того, інфляція є найранішою відомою стадією космічної еволюції, після якої Всесвіт зазнав надзвичайно сильного розширення. Завдяки цьому кореляційна довжина згенерованих магнітних полів може досягати дуже великих масштабів, аж до мегапарсеків.

Магнітогенез не може відбуватися в однорідному та ізотропному Всесвіті, що розширюється, через конформну інваріантність стандартної дії Максвелла [51]. Отже, для виникнення магнітних полів під час інфляції шляхом посилення квантових флуктуацій має бути порушена конформна інваріантність дії електромагнітного поля. Це можна зробити, увімкнувши взаємодію електромагнітного поля з інфлатоном — скалярним полем, відповідальним за надзвичайно швидке розширення Всесвіту під час інфляції. У літературі переважно досліджуються два типи таких моделей: кінетичний та аксіальний зв'язок.

Для моделі кінетичного зв'язку [62, 153]

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4}f^2(\phi)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

де  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензор електромагнітного поля ( $A_\mu$  — відповідний 4-потенціал),  $\phi$  — інфлатонне поле,  $f(\phi)$  — функція кінетичного зв'язку. Після закінчення інфляції функція  $f(\phi)$  повинна стати рівною одиниці, щоб відновити стандартний вигляд електромагнітного лагранжіану. Як правило, функції кінетичного зв'язку обираються монотонними [55–58, 160], але трапляються винятки

[59, 60].

Для моделі аксіального зв'язку [62, 154]

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{1}{4}I(\phi)F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

де  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2\sqrt{-g}}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\lambda\rho}$  — дуальний тензор електромагнітного поля,  $I(\phi)$  — функція зв'язку аксіального зв'язку. Після завершення інфляції функція  $I(\phi)$  має наближатися до константи, щоб більше не робити внеску в рівняння руху електромагнітного поля. Найпростішою функцією, що задовольняє вказану умову, є лінійна функція  $I(\phi) = \beta\phi$ , де  $\beta$  — деяка константа [52–54, 161, 162].

Іноді в літературі розглядається одночасна присутність аксіального та кінетичного зв'язків [67, 163–166].

Конформна інваріантність максвеллівської дії може також порушуватися через взаємодію електромагнітного поля з гравітацією [62, 63, 164, 167, 168]. Проте такий механізм генерації еквівалентний описаному вище механізму, який забезпечується взаємодією електромагнітного поля з інфлатоном [169]. Іншими словами, скалярна кривина  $R$  під час інфляції повільного скочування виражається як функція інфлатона  $R(\phi)$  і, таким чином, представляє специфічну форму кінетичної та/або аксіальної функцій зв'язку.

Якщо електричне поле, що створюється під час інфляції, перевищує певне критичне значення, воно може генерувати пари заряджених частинок і античастинок із вакууму (ефект Швінгера) [51, 70, 75, 76, 170]. Наприклад, для електронів це критичне значення поля становить  $E_{\text{cr}} \sim 10^{18}$  В/м. Утворені частинки можуть бути як скалярами [82, 84, 171], так і ферміонами [80, 83]. Ефект Швінгера призводить до послаблення електричного поля та сприяє повторному розігріву Всесвіту.

Зазвичай інфляційний магнітогенез у моделях із кінетичним та аксіальним зв'язками описують за допомогою помодового розкладу у просторі Фур'є. У такому підході досліджується еволюція окремих мод електромагнітного по-

ля, а фізичні характеристики згенерованих полів отримують інтегруванням по всьому спектру мод. Однак цей метод втрачає застосовність у ситуаціях, коли згенеровані поля стають достатньо сильними, щоб істотно впливати на динаміку Всесвіту, або коли важливу роль відіграє ефект Швінгера. У таких випадках система поводить себе нелінійно, тому різні моди електромагнітного поля вже не еволюціонують незалежно. Через це виникає потреба у використанні іншого математичного підходу, який, на відміну від помодового розкладу, дозволяє коректно врахувати подібні нелінійні ефекти.

Одним із таких підходів є формалізм градієнтного розкладу. У його межах аналізується еволюція набору квадратичних комбінацій електромагнітного поля без застосування розкладу у просторі Фур'є. Цей формалізм неодноразово використовувався для дослідження різноманітних задач інфляційного магнітогенезу [53, 60, 64–67, 83, 162]. Водночас варто підкреслити, що досі він не був побудований для найзагальнішої моделі інфляційного магнітогенезу, у якій одночасно враховуються ефект Швінгера та обидва типи зв'язку — аксіальний і кінетичний. Усуненню цієї прогалини присвячено цей розділ дисертації.

## 2.2 Модель з кінетичним та аксіальним зв'язками

Ми розглядаємо генерацію електромагнітних полів<sup>1</sup> під час інфляції в моделі з кінетичними та аксіальним зв'язками. Відповідна дія має такий вигляд:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} I(\phi) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{ch}}(\chi, A_\nu) \right], \quad (2.3)$$

де  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ ,  $\phi$  — інфлатонне поле,  $V(\phi)$  — потенціал інфлатона,  $f(\phi)$  — функція кінетичного зв'язку,  $I(\phi)$  — функція аксіального зв'язку,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu -$

---

**Примітка 1.** Під “електромагнітним полем” ми маємо на увазі будь-яке абелеве калібрувальне поле, не обов'язково те, що відповідає підгрупі  $U(1)_{\text{ЕМ}}$  Стандартної моделі.

$\partial_\nu A_\mu$  — тензор напруженості калібрувального поля,  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu\sigma\rho}F_{\sigma\rho}$  — відповідний дуальний тензор,  $\mathcal{L}_{\text{ch}}(\chi, A_\nu)$  — частина лагранжіану, що відповідає частинкам, утвореним ефектом Швінгера, та їх взаємодії з електромагнітним полем,  $\eta^{\mu\nu\sigma\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}/\sqrt{-g}$  і  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  — повністю антисиметричний символ Леві-Чівіта з  $\varepsilon^{0123} = +1$ .

Проваріювавши дію (2.3) по  $\phi$ , отримуємо рівняння руху для поля інфлатона:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha [\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi] + \frac{dV}{d\phi} + \frac{f}{2} \frac{df}{d\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{dI}{d\phi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \quad (2.4)$$

Проваріювавши дію (2.3) по 4-потенціалу, ми отримуємо рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta [\sqrt{-g} f^2 F^{\beta\alpha}] + \frac{dI}{d\phi} \tilde{F}^{\beta\alpha} \partial_\beta \phi = j^\alpha, \quad (2.5)$$

де  $j^\alpha$  — 4-вектор електричного струму, що задається виразом

$$j^\alpha = -\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ch}}(\chi, A_\alpha)}{\partial A_\alpha}. \quad (2.6)$$

Крім рівнянь (2.4) і (2.5), ми також маємо тотожність Біанкі для дуального тензора

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g} \tilde{F}^{\mu\nu}] = 0. \quad (2.7)$$

Розрахувавши варіацію від дії (2.3) по метриці, отримаємо вираз для тензора енергії-імпульсу:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - f^2(\phi) g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} f^2(\phi) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right] + T_{\mu,\nu}^\chi, \quad (2.8)$$

де останній доданок відповідає за внесок від пар, створених ефектом Швінгера.

Оскільки Всесвіт весь час залишається квазінейтральним (усі частинки

утворюються в парі з відповідними античастинками), ми можемо працювати в кулонівській калібровці ( $A_0 = 0$ ,  $\partial_i A^i = 0$ ). Тоді електричне і магнітне поля можна визначити як

$$\vec{E} = \frac{1}{a} \partial_0 \vec{A} \quad \text{та} \quad \vec{B} = -\frac{1}{a^2} \text{rot} \vec{A}, \quad (2.9)$$

відповідно. Ненульові компоненти тензора калібрувального поля та відповідного дуального тензора представлені в термінах цих полів наступним чином:

$$F_{0i} = -aE^i, \quad F_{ij} = a^2 \epsilon_{ijk} B^k, \quad \tilde{F}_{0i} = -aB^i, \quad \tilde{F}_{ij} = -a^2 \epsilon_{ijk} E^k. \quad (2.10)$$

Беручи до уваги рівняння (2.10), розраховуємо густину енергії як 00-компоненту тензора енергії-імпульсу:

$$\rho = T_0^0 = \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + \frac{f^2}{2} \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle + \rho_\chi, \quad (2.11)$$

де кутові дужки позначають вакуумне середнє значення операторів електричного та магнітного полів. Цей вираз згодом буде використано для запису рівняння Фрідмана.

Розпишемо рівняння (2.4), (2.5) і (2.7) докладніше. Рівняння (2.5) містить 4-вектор електричного струму  $j^\alpha = \left(0, \frac{1}{a} \vec{J}\right)$ . Знову ж таки, тут ми використали квазінейтральність Всесвіту, встановивши 0-компоненту 4-струму рівним нулю. У той же час 3-вектор густини струму  $\vec{J}$  може бути відмінним від нуля за наявності електромагнітного поля.

Отримуємо таку систему рівнянь Фрідмана, Кляйна–Гордона і Максвелла:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{\text{Pl}}^2} \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{f^2}{2} \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle + \rho_\chi \right\}, \quad (2.12)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = f(\phi) \frac{df(\phi)}{d\phi} \langle \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \rangle + \frac{dI}{d\phi} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle, \quad (2.13)$$

$$\dot{\vec{E}} + 2H\vec{E} - \frac{1}{a}\text{rot}\vec{B} + 2\frac{df}{d\phi}\frac{\dot{\phi}}{f}\vec{E} + \frac{dI}{d\phi}\frac{\dot{\phi}}{f^2}\vec{B} + \frac{\vec{J}}{f^2} = 0, \quad (2.14)$$

$$\dot{\vec{B}} + 2H\vec{B} + \frac{1}{a}\text{rot}\vec{E} = 0, \quad (2.15)$$

$$\text{div}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{B} = 0. \quad (2.16)$$

Далі будемо вважати, що  $\vec{J} = \sigma_E \vec{E} + \sigma_B \vec{B}$  [83, 162], де  $\sigma_E$  і  $\sigma_B$  — електрична та магнітна швінґерівські провідності відповідно.

## 2.3 Формалізм градієнтного розкладу

### 2.3.1 Рівняння руху

Наше завдання — розв’язати систему рівнянь (2.12)–(2.16). У літературі, як правило, використовується метод помодового розкладу, тобто еволюція кожної окремої Фур’є-моди електромагнітного поля розглядається незалежно від інших. Однак цей підхід є незастосовним, якщо система є нелінійною. Прикладом такого нелінійного явища є зворотна реакція. Якщо згенеровані поля достатньо сильні (права частина рівняння Кляйна–Гордона (2.13) порівнюється з тертям Габбла та градієнтом потенціалу в лівій частині), поле інфлатона починає “відчувати” присутність електромагнітних полів і припиняє розвиватися незалежно від останніх. Динаміка розширення Всесвіту також змінюється, оскільки стає помітним внесок електромагнітних полів у густину енергії, а вона, у свою чергу, включається в рівняння Фрідмана (2.12). Виявляється, що у випадку зворотної реакції моди більше не є незалежними одна від одної. Ефект Швінґера викликає додаткову взаємодію між модами, оскільки величини  $\sigma_E$  і  $\sigma_B$  є нелінійними функціями електромагнітного поля. У такій ситуації для правильного опису інфляційного магнітогенезу потрібен підхід, який одночасно враховує внески всіх фізично значущих мод. Одним із таких підходів є формалізм градієнтного розкладу.

Введемо такі фізичні величини:

$$\mathcal{E}^{(n)} = \frac{f^2}{a^n} \langle \vec{E} \cdot \text{rot}^n \vec{E} \rangle, \quad (2.17)$$

$$\mathcal{G}^{(n)} = -\frac{f^2}{a^n} \langle \vec{E} \cdot \text{rot}^n \vec{B} \rangle, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \frac{f^2}{a^n} \langle \vec{B} \cdot \text{rot}^n \vec{B} \rangle. \quad (2.19)$$

Використовуючи рівняння Максвелла (2.14)–(2.16), ми можемо вивести такі рівняння для величин (2.17)–(2.19):

$$\dot{\mathcal{E}}^{(n)} + [(n+4)H + 2\tilde{\sigma}_E] \mathcal{E}^{(n)} - 2 \left[ \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} + \tilde{\sigma}_B \right] \mathcal{G}^{(n)} + 2 \frac{df}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f} \mathcal{E}^{(n)} + 2\mathcal{G}^{(n+1)} = [\dot{\mathcal{E}}^{(n)}]_b, \quad (2.20)$$

$$\dot{\mathcal{G}}^{(n)} + [(n+4)H + \tilde{\sigma}_E] \mathcal{G}^{(n)} - \mathcal{E}^{(n+1)} + \mathcal{B}^{(n+1)} - \left[ \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} + \tilde{\sigma}_B \right] \mathcal{B}^{(n)} = [\dot{\mathcal{G}}^{(n)}]_b, \quad (2.21)$$

$$\dot{\mathcal{B}}^{(n)} + (n+4)H \mathcal{B}^{(n)} - 2\mathcal{G}^{(n+1)} - 2 \frac{df}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f} \mathcal{B}^{(n)} = [\dot{\mathcal{B}}^{(n)}]_b, \quad (2.22)$$

де  $\tilde{\sigma}_E = \sigma_E/f^2$  та  $\tilde{\sigma}_B = \sigma_B/f^2$ .

Система диференціальних рівнянь (2.20)–(2.22) є нескінченною. Це видно з того, що рівняння для величин з індексом  $n$  містить величини з індексом  $(n+1)$ . Для того, щоб хоча б приблизно розв'язати цю систему, необхідно її обірвати. Ми будемо використовувати наступну схему обриву. Для великих значень індексу  $n$  можна вважати, що основний внесок в електромагнітні величини (2.17)–(2.19) в деякий момент часу  $t$  дають моди з найбільшими імпульсами, що входять до них. (Ми маємо на увазі моди, які щойно перетнули горизонт  $k \simeq k_h(t)$ .) Тоді, беручи до уваги, що  $X^{(n+1)}$  відрізняється від  $X^{(n-1)}$  двома просторовими похідними, а також оберненим квадратом масштабного фактора, можна запропонувати таке

наближене співвідношення:

$$X^{(n+1)} \approx \left( \frac{k_h}{a} \right)^2 X^{(n-1)}. \quad (2.23)$$

( $X$  — будь-яка з величин  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{B}$  або  $\mathcal{G}$ .) Таку заміну можна зробити в рівняннях для певного порядку  $n_{\max}$ , і тоді система рівнянь буде обірвана в цьому порядку. Далі число  $n_{\max}$  буде називатися порядком обриву. Отриману таким чином замкнену систему диференціальних рівнянь можна розв'язати чисельними методами. Необхідно знайти таке значення порядку обриву, щоб від нього не залежали результати обчислень.

У правих частинах рівнянь (2.20)–(2.22) розміщено спеціальні доданки — так звані граничні доданки. Необхідність їх впровадження пояснюється наступними міркуваннями. Під час інфляції в певний момент часу електромагнітні поля генеруються тільки тими модами, які до цього моменту перетнули горизонт. Очевидно, що з часом кількість таких мод збільшуватиметься, оскільки нові моди будуть постійно проходити через горизонт. Саме для врахування цього явища в систему рівнянь (2.20)–(2.22) введено граничні доданки. Виведення відповідних виразів буде розглянуто пізніше.

### 2.3.2 Швінгерівська провідність

Електромагнітні поля, що утворюються під час інфляції, можуть бути дуже сильними. Під дією таких полів з вакууму генеруються пари частинок та античастинок (так званий ефект Швінгера). Густина струму частинок, що утворюються в результаті цього процесу, для випадку сильного поля ( $|eQE| \gg H^2$ , де  $e$  — калібрувальна константа зв'язку,  $Q$  — заряд частинки) і колінеарних електричного та магнітного полів можна розрахувати таким чином:

$$J = \frac{e |Q|}{6\pi^2 H} E |B| \psi \left( \frac{\pi |B|}{E} \right) \exp \left[ -\frac{\pi m^2}{e |Q| E} \right], \quad (2.24)$$

де  $B$  — проекція вектора індукції магнітного поля на напрямок електричного поля,  $\psi(x) = \coth x$  [76] для діраківських ферміонів та  $\psi(x) = 1/(2 \sinh x)$  для комплексних скалярів [172].

Щоб включити цей струм у формалізм градієнтного розкладу, потрібно лінеаризувати його в операторах електромагнітного поля. Для цього струм представляється у вигляді закону Ома  $\hat{J} = \sigma_E \hat{E}$ , де символ  $\hat{\phantom{x}}$  показує квантовий оператор, а  $\sigma_E = \sigma_E(\vec{E}, \vec{B})$  розглядається як класична функція середнього електричного та магнітного полів. Однак цей вираз дійсний лише в системі, де електричні, магнітні поля та індукційний струм колінеарні, що загалом не відповідає дійсності. Для загальної ситуації, коли 3-вектори електричного та магнітного полів не є колінеарними, індукційний струм можна розкласти на них у формі узагальненого закону Ома [83]

$$\vec{J} = \sigma_E \vec{E} + \sigma_B \vec{B}. \quad (2.25)$$

Явні вирази для електричної та магнітної провідності залежать від вмісту частинок у моделі. У нашій роботі ми будемо припускати, що абелеве калібрувальне поле відповідає полю гіперзарядів Стандартної моделі та враховуватимемо внески в струм від усіх ферміонів Стандартної моделі. У цьому випадку вирази для провідностей Швінгера матимуть такий вигляд [83]:

$$\tilde{\sigma}_E = \frac{41e^3}{72\pi^2 f^3 H} \frac{|\mathcal{G}^{(0)}|}{\sqrt{\Sigma}} \sqrt{\frac{\mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} + \Sigma}{\mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)} + \Sigma}} \coth \left( \pi \sqrt{\frac{\mathcal{B}^{(0)} - \mathcal{E}^{(0)} + \Sigma}{\mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} + \Sigma}} \right), \quad (2.26)$$

$$\tilde{\sigma}_B = -\frac{41e^3}{72\pi^2 f^3 H} \frac{\mathcal{G}^{(0)}}{\sqrt{\Sigma}} \sqrt{\frac{\mathcal{B}^{(0)} - \mathcal{E}^{(0)} + \Sigma}{\mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)} + \Sigma}} \coth \left( \pi \sqrt{\frac{\mathcal{B}^{(0)} - \mathcal{E}^{(0)} + \Sigma}{\mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} + \Sigma}} \right), \quad (2.27)$$

де

$$\Sigma = \sqrt{(\mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)})^2 + 4(\mathcal{G}^{(0)})^2}. \quad (2.28)$$

Саме ці вирази, (2.26) і (2.27), з'являться в рівняннях руху (2.20)–(2.22).

Слід зазначити, що калібрувальна стала зв'язку насправді є біжучою константою [173] гіперзарядової калібрувальної взаємодії  $e = g'$ ,

$$g'(\mu) = \left( \left[ g'(m_Z) + \frac{41}{48\pi^2} \ln \frac{m_Z}{\mu} \right]^{-2} \right)^{-1/2}. \quad (2.29)$$

Тут  $m_Z \approx 91,2$  ГеВ — маса  $Z$ -бозона,  $g'(m_Z) \approx 0,35$ , а характерний енергетичний масштаб процесу народження пар вважається рівним

$$\mu = (\rho_E + \rho_B)^{1/4} = \left( \frac{\mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)}}{2} \right)^{1/4}. \quad (2.30)$$

Щоб замкнути систему рівнянь (2.12), (2.13), (2.20)–(2.22), необхідно вивести диференціальне рівняння для величину  $\rho_\chi$  — густину енергії заряджених частинок, створених ефектом Швінгера. Ми зробимо це подібно до статті [53] за допомогою коваріантного закону збереження енергії. Спочатку ми множимо рівняння (2.13) на  $\dot{\phi}$  і отримуємо рівняння для густини енергії інфлатона  $\rho_{\text{inf}} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)$ :

$$\dot{\rho}_{\text{inf}} + 3H(\rho_{\text{inf}} + p_{\text{inf}}) = \frac{df}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f} \left( \mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} \right) - \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} \mathcal{G}^{(0)}. \quad (2.31)$$

Тут  $p_{\text{inf}} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)$  — тиск поля інфлатона. Рівняння для густини енергії електромагнітного поля  $\rho_{\text{em}} = \frac{f^2}{2} \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)})$  отримано за допомогою рівнянь (2.20) і (2.22), для  $n = 0$ :

$$\dot{\rho}_{\text{em}} + 4H\rho_{\text{em}} = [\dot{\rho}_{\text{em}}]_b - \frac{df}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f} \left( \mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} \right) + \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} \mathcal{G}^{(0)} - \tilde{\sigma}_E \mathcal{E}^{(0)} + \tilde{\sigma}_B \mathcal{G}^{(0)}. \quad (2.32)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (2.32) є граничним доданком (природа таких доданків уже обговорювалася в попередньому підрозділі). Другий і третій доданки відрізняються лише знаком від правої частини рівняння (2.31). Це дозволяє зробити висновок, що ці доданки відповідають за передачу енергії

від інфлатона до електромагнітного поля. Останні два доданки описують втрати енергії через ефект Швінгера. Ці доданки (але з протилежними знаками) будуть розміщені в рівнянні для  $\rho_\chi$ :

$$\dot{\rho}_\chi + 4H\rho_\chi = \tilde{\sigma}_E \mathcal{E}^{(0)} - \tilde{\sigma}_B \mathcal{G}^{(0)}. \quad (2.33)$$

Зверніть увагу, що тут ми припустили, що отримані частинки є ультрарелятивістськими.

Додамо ще одне зауваження щодо впливу ефекту Швінгера на різні Фур'є-моди електромагнітного поля. У принципі, як обговорювалося в [83], існує характерний імпульс, пов'язаний з утворенням пар,  $k_S \sim (|eQE|)^{1/2}$ . Фур'є-моди електромагнітного поля з  $k > k_S$  коливаються дуже швидко і не “відчувають” присутності зарядженого середовища. Лише моди з імпульсами  $k < k_S(t)$  затухають у момент часу  $t$ . Однак у [83] також було показано, що чисельно цей пороговий імпульс відносно близький до моменту перетину горизонту  $k_h(t)$ . Тому цілком виправдано використовувати наступне наближення: Фур'є-мода електромагнітного поля відчуває затухання Швінгера лише за межами горизонту, тобто коли виконується нерівність  $k < k_h(t)$ . Ми застосовуємо це наближення і в даній роботі.

### 2.3.3 Граничні доданки

Граничні доданки в правих частинах рівнянь (2.20)–(2.22) є внеском від нових мод, що перетинають горизонт під час інфляції. Оскільки, відповідно до наближення, яке обговорювалося вище, ефект Швінгера не впливає на моди під горизонтом, провідність Швінгера не буде відображатися у виразах для граничних доданків. Тому при виведенні цих виразів наявність ефекту Швінгера можна не враховувати.

Розглянемо квантоване електромагнітне поле

$$\hat{A}_j(t, x) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} f(t)} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[ \epsilon_j^\lambda(k) \hat{a}_{k,\lambda} \mathcal{A}_\lambda(t, k) e^{ikx} + \epsilon_j^{*\lambda}(k) \hat{a}_{k,\lambda}^\dagger \mathcal{A}_\lambda^*(t, k) e^{-ikx} \right], \quad (2.34)$$

де  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  — модові функції,  $\epsilon_j^\lambda(k)$  — вектори правої ( $\lambda = +1$ ) і лівої ( $\lambda = -1$ ) кругових поляризацій із такими властивостями:

$$(\vec{\epsilon}^\lambda \cdot \vec{\epsilon}^{\lambda'}) = \delta^{\lambda\lambda'}, \quad (\vec{\epsilon}^\lambda \cdot \vec{k}) = 0, \quad \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_i^\lambda(\vec{k}) \epsilon_j^{*\lambda}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}. \quad (2.35)$$

Для бозонних операторів знищення та народження виконується таке комутаційне співвідношення:

$$[\hat{a}_{\vec{k},\lambda}, \hat{a}_{\vec{q},\lambda'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}) \cdot \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (2.36)$$

Використовуючи вираз (2.34), а також рівняння (2.17)–(2.19), отримуємо спектральні розклади для величин  $\mathcal{E}^{(n)}$ ,  $\mathcal{G}^{(n)}$  і  $\mathcal{B}^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(n)} &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+3}}{2\pi^2 a^{n+2}} f^2 \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{f} \right) \right|^2 = \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} |\mathcal{D}_\lambda|^2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n)} &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^{n+1} \frac{k^{n+4}}{4\pi^2 a^{n+3}} f^2 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\mathcal{A}_\lambda}{f} \right|^2 = \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^{n+1} \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} \Re [\mathcal{A}_\lambda^* \mathcal{D}_\lambda], \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} |\mathcal{A}_\lambda|^2. \quad (2.39)$$

Для зручності було використано позначення

$$\mathcal{D}_\lambda(t, k) = \frac{fa}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{f} \right) = \frac{f}{k} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{f} \right). \quad (2.40)$$

Зауважте, що у виразах (2.37)–(2.39) верхньою межею інтегрування є  $k_h = k_h(t)$  — хвильове число моди, що перетинає горизонт у даний момент часу  $t$ . Очевидно, що саме факт залежності  $k_h(t)$  від часу призводить до появи граничних доданків у рівняннях руху.

Для модової функції  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  маємо наступне рівняння (як уже зазначалося вище, під час виведення виразів для граничних доданків ми нехтуємо ефектом Швінгера):

$$\ddot{\mathcal{A}}_\lambda + H \dot{\mathcal{A}}_\lambda + \left[ \frac{k^2}{a^2} - \lambda \frac{k}{a} \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} - \frac{\ddot{f} + H\dot{f}}{f} \right] \mathcal{A}_\lambda = 0. \quad (2.41)$$

Зробимо підстановку  $z = k\eta$  у рівнянні (2.41), де  $\eta$  — конформний час,  $d\eta = dt/a(t)$ . Тоді вказане рівняння можна переписати як:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_\lambda}{\partial z^2} + \left[ 1 + \frac{2\lambda\xi}{z} - \frac{\varsigma}{z^2} \right] \mathcal{A}_\lambda = 0, \quad (2.42)$$

де

$$\xi = \frac{I'_\phi \dot{\phi}}{2Hf^2}, \quad \varsigma = \frac{\ddot{f} + H\dot{f}}{fH^2}. \quad (2.43)$$

Глибоко під горизонтом, коли перший доданок у квадратних дужках у рівнянні (2.42) домінує, виконується умова Банча–Девіса [174]:

$$\mathcal{A}_\lambda \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-iz}, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (2.44)$$

Будемо вважати, що мода перетинає горизонт у момент, коли другий та третій доданки в квадратних дужках у рівнянні (2.42) дорівнюють першому доданку, тобто одиниці. Користуючись цим визначенням, знаходимо явний вигляд

$k_h$ :

$$k_h = aH \cdot r, \quad r = |\xi| + \sqrt{\xi^2 + |\varsigma|} = \left| \frac{I'_\phi \dot{\phi}}{2f^2} \right| + \sqrt{\left( \frac{I'_\phi \dot{\phi}}{2f^2} \right)^2 + \left| \frac{\ddot{f} + H\dot{f}}{f} \right|}. \quad (2.45)$$

Якщо розглядати моменти часу, близькі до моменту перетину горизонту, коефіцієнти  $\xi$  та  $\varsigma$  у рівнянні (2.42) можна вважати приблизно постійними. Тоді ми можемо знайти наближений розв'язок цього рівняння, який узгоджується з граничною умовою Банча–Девіса та виражається через спеціальну функцію Віттекера:

$$\mathcal{A}_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{\lambda\pi\xi(t_h)/2} W_{\kappa, \mu}(2iz), \quad (2.46)$$

де

$$\kappa = -i\lambda\xi(t_h), \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \varsigma(t_h)}. \quad (2.47)$$

Тепер у нас є все необхідне для обчислення граничних доданків, що містяться в правих частинах рівнянь (2.20)–(2.22). Нехай  $X$  — будь-яка з білінійних електромагнітних величин (2.17)–(2.19), спектральний розклад якої має вигляд:

$$X = \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \frac{dX}{d \ln k}. \quad (2.48)$$

Величина  $X$  залежить від часу з двох причин. По-перше, її спектральна густина  $dX/d \ln k$  є функцією часу. По-друге, верхня межа інтеграла (2.48) також залежить від часової змінної. Ліві частини рівнянь руху (2.20)–(2.22) дозволяють врахувати першу залежність від часу. А щоб врахувати другу, необхідно ввести граничні доданки. Граничний доданок для величини  $X$  задається наступним виразом:

$$(\dot{X})_b = \frac{d \ln k_h}{dt} \cdot \frac{dX}{d \ln k} \Big|_{k=k_h(t)}. \quad (2.49)$$

Як видно з рівняння (2.49), для обчислення граничного доданку нам потрібно знати спектральну густину величини  $X$  у момент, коли мода перетинає горизонт.

Застосовуючи рівняння (2.48)–(2.49), отримуємо вирази для потрібних нам граничних доданків:

$$[\dot{\mathcal{E}}^{(n)}]_b = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{k_h(t)}{a(t)} \right)^{n+4} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^n \frac{e^{\lambda\pi\xi}}{r^2} \times \\ \times \left| \left( ir - i\lambda\xi - \frac{\dot{f}}{fH} \right) W_{-i\lambda\xi, \mu}(-2ir) + W_{1-i\lambda\xi, \mu}(-2ir) \right|^2, \quad (2.50)$$

$$[\dot{\mathcal{G}}^{(n)}]_b = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{k_h(t)}{a(t)} \right)^{n+4} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^n \frac{e^{\lambda\pi\xi}}{r} \times \\ \times \left\{ \Re [W_{i\lambda\xi, \mu}(2ir) W_{1-i\lambda\xi, \mu}(-2ir)] - \frac{\dot{f}}{fH} |W_{-i\lambda\xi, \mu}(-2ir)|^2 \right\}, \quad (2.51)$$

$$[\dot{\mathcal{B}}^{(n)}]_b = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{k_h(t)}{a(t)} \right)^{n+4} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^n e^{\lambda\pi\xi} |W_{-i\lambda\xi, \mu}(-2ir)|^2. \quad (2.52)$$

Тепер система рівнянь (2.12), (2.13), (2.20)–(2.22) та (2.33) повністю визначена. Її числові розв'язки будуть представлені в розділі 2.4.

### 2.3.4 Помодовий розклад

Щоб зробити висновок про точність розв'язків, отриманих за допомогою формалізму градієнтного розкладу, необхідно порівняти їх з результатами помодового розкладу. Нам потрібно описати останній підхід, враховуючи наявність ефекту Швінгера.

Ми використовуємо проквантоване електромагнітне поле (2.34). Тоді рівняння Максвелла передбачають наступне рівняння руху для модової функції

$\mathcal{A}_\lambda(t, k)$ :

$$\ddot{\mathcal{A}}_\lambda + (H + \tilde{\sigma}_E \theta) \dot{\mathcal{A}}_\lambda + \left[ \frac{k^2}{a^2} - \lambda \frac{k}{a} \left( \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} + \tilde{\sigma}_B \theta \right) - \frac{\ddot{f} + (H + \tilde{\sigma}_E \theta) \dot{f}}{f} \right] \mathcal{A}_\lambda = 0, \quad (2.53)$$

де  $\theta(t, k) = \theta(k_h(t) - k)$ . Цей множник, разом зі швінґерівськими провідностями, дозволяє врахувати, що мода починає відчувати ефект Швінґера лише після перетину горизонту.

Граничною умовою для  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  є умова Банча–Девіса (2.44) глибоко під горизонтом.

Рівняння (2.53) є диференціальним рівнянням другого порядку. Чисельне розв’язання такого рівняння може бути досить проблематичним. Для полегшення обчислень краще ввести систему диференціальних рівнянь першого порядку. Використаємо величину  $\mathcal{D}_\lambda(t, k)$ , яка була визначена рівнянням (2.40) у попередньому розділі. Часова еволюція величин  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  та  $\mathcal{D}_\lambda(t, k)$  описується наступною системою диференціальних рівнянь:

$$\dot{\mathcal{A}}_\lambda = \frac{k}{a} \mathcal{D}_\lambda + \frac{\dot{f}}{f} \mathcal{A}_\lambda, \quad (2.54)$$

$$\dot{\mathcal{D}}_\lambda = - \left[ \frac{k}{a} - \lambda \left( \frac{dI}{d\phi} \frac{\dot{\phi}}{f^2} + \tilde{\sigma}_B \theta \right) \right] \mathcal{A}_\lambda - \left( \frac{\dot{f}}{f} + \tilde{\sigma}_E \theta \right) \mathcal{D}_\lambda. \quad (2.55)$$

Знаючи часову еволюцію величин  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  та  $\mathcal{D}_\lambda(t, k)$  для кожної моди, ми можемо обчислити густини електричної, магнітної та так званої “змішаної” енергій:

$$\rho_E(t) = \frac{f^2}{2} \langle \vec{E}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_h(t)} dk \left( \frac{k}{a} \right)^4 \left[ |\mathcal{D}_{+1}|^2 + |\mathcal{D}_{-1}|^2 \right], \quad (2.56)$$

$$\rho_B(t) = \frac{f^2}{2} \langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_h(t)} dk \left( \frac{k}{a} \right)^4 \left[ |\mathcal{A}_{+1}|^2 + |\mathcal{A}_{-1}|^2 \right], \quad (2.57)$$

$$\rho_{EB}(t) = -\frac{f^2}{2} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{k_h(t)} dk \left( \frac{k}{a} \right)^4 \Re \left[ \mathcal{A}_{+1}^* \mathcal{D}_{+1} - \mathcal{A}_{-1}^* \mathcal{D}_{-1} \right]. \quad (2.58)$$

Якщо ми працюємо в рамках формалізму градієнтного розкладу, ті ж самі густини енергії можна легко виразити через білінійні електромагнітні функції (2.17)–(2.19):

$$\rho_E(t) = \frac{\mathcal{E}^{(0)}}{2}, \quad \rho_B(t) = \frac{\mathcal{B}^{(0)}}{2}, \quad \rho_{EB}(t) = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{(0)}. \quad (2.59)$$

Отже, результати двох математичних підходів (формалізму градієнтного розкладу та помодового розкладу) можна порівняти один з одним наступним чином. Якщо нелінійні ефекти вимкнені (наприклад, зворотна реакція відсутня та утворення частинок не відбувається), можна використовувати помодовий розклад незалежно від формалізму градієнтного розкладу, використовуючи лише звичайний розв’язок у режимі повільного скочування як фон для утворення електромагнітного поля. Тоді результат, отриманий за допомогою підходу помодового розкладу, можна розглядати як орієнтир для оцінки точності формалізму градієнтного розкладу. З іншого боку, якщо діють зворотна реакція та/або ефект Швінгера, можна використовувати часові залежності масштабного фактора та інфлатона, визначені у формалізмі градієнтного розкладу, як фон для методу помодового розкладу. У цьому випадку останній не є повністю незалежним від формалізму градієнтного розкладу, але тим не менш це порівняння все ще можна використовувати як внутрішню перевірку на узгодженість. Ми виконаємо його в наступному підрозділі.

## 2.4 Чисельні результати

У цьому підрозділі ми тестуємо формалізм градієнтного розкладу, розроблений нами в цій роботі. Ми використовуємо модель хаотичної інфляції, яка відома в літературі як одна з найпростіших та інтуїтивно зрозумілих. Інфляцій-

ний потенціал в цій моделі має вигляд

$$V(\phi) = \frac{m^2 \phi^2}{2}. \quad (2.60)$$

Константу  $m$  обрано таким чином, щоб амплітуда спектру первинних скалярних збурень узгоджувалася з даними колаборації *Planck* [13]. Значення, яке задовольняє цю умову, дорівнює  $m = 6 \times 10^{-6} M_{\text{Pl}}$ .<sup>1</sup>

Функцією кінетичного зв'язку  $f(\phi)$  ми обираємо експоненціальну функцію типу Ратри [153]:

$$f(\phi) = \exp\left(c \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}\right) \quad (2.61)$$

з одним безрозмірним параметром  $c$ . Для невід'ємних  $c$  функція Ратра не породжує проблеми сильного зв'язку під час інфляції, а після її завершення вона наближається до одиниці.

Ми обираємо функцію аксіального зв'язку  $I(\phi)$  лінійною

$$I(\phi) = b \frac{\phi}{M_{\text{Pl}}}, \quad (2.62)$$

де безрозмірний параметр  $b$  регулює інтенсивність взаємодії.

Початкова умова для поля інфлатона  $\phi(0) = 15.55 M_{\text{Pl}}$  обрана так, щоб забезпечити щонайменше 60  $e$ -фолдингів до кінця інфляції. Початкова умова для похідної інфлатона за часом отримана з наближення повільного кочення:  $\dot{\phi}(0) = -V'_\phi/\sqrt{3V} = -\sqrt{2/3} m M_{\text{Pl}}$ . Густина енергії заряджених частинок у початковий момент часу вважається нульовою. Початкові значення електромагнітних величин можна або обрати рівними нулю, або визначити як внески від квантових флуктуацій у вакуумному стані.

---

**Примітка 1.** Зауважте, що ця конкретна модель передбачає занадто велику амплітуду первинних тензорних збурень і вже виключається спостереженнями реліктового випромінювання [13]. Тим не менш, багато інших життєздатних моделей можна добре апроксимувати параболою, близькою до мінімуму їхнього потенціалу, тобто близько до кінця інфляції, де відбувається найінтенсивніша генерація електромагнітних полів. Ми використовуємо цей простий потенціал для ілюстрації. Загальний формалізм, запропонований у цій роботі, справедливий для будь-якого інфляційного потенціалу.

Відразу відзначимо важливу особливість, яка має місце для будь-яких значень констант  $b$  та  $c$ . Зі збільшенням порядку обриву  $n_{\max}$  часові залежності електромагнітних величин наближаються до деяких кривих. Починаючи з певного значення порядку обриву, результати розрахунків перестають суттєво змінюватися. Надалі, коли ми говоримо про результати, отримані за допомогою формалізму градієнтного розкладу, ми маємо на увазі ті розв'язки, які вже не залежать від  $n_{\max}$ . Як правило, за відсутності зворотної реакції та ефекту Швінгера розв'язок стабілізується при  $n_{\max} \simeq 10 - 30$ , за наявності зворотної реакції — при  $n_{\max} \simeq 110 - 130$ , за наявності ефекту Швінгера — при  $n_{\max} \simeq 30 - 60$ .

В подальшому будемо використовувати залежну від часу відносну похибку

$$\varepsilon(t) = \frac{X(t) - X_{\text{ref}}(t)}{X_{\text{ref}}(t)}. \quad (2.63)$$

Тут  $X$  — будь-яка з електромагнітних величин (наприклад, густина електричної або магнітної енергії, величина  $\frac{1}{2}|\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle|$  тощо), обчислена за допомогою формалізму градієнтного розкладу;  $X_{\text{ref}}$  — та сама величина, але обчислена за допомогою методу помодового розкладу.

Числові розрахунки були розпочаті з тестування розробленого в дисертації формалізму градієнтного розкладу. Спочатку ми розглянули випадки без зворотної реакції та ефекту Швінгера. Ми мали можливість застосувати помодовий розклад та порівняти результати двох методів (помодового розкладу та формалізму градієнтного розкладу). В результаті такого аналізу було встановлено: при домінуванні аксіального зв'язку відносна похибка є наприкінці інфляції менше 1 %, при домінуванні кінетичного зв'язку — близько 5 %, при наявності обох типів зв'язку — близько 10 % (див. рисунок 2.1). Така точність є цілком задовільною для практичного застосування.

В усіх трьох випадках ми спостерігали збільшення енергії генерованих полів під час інфляції, що є цілком природним явищем. Цей простий факт свідчить

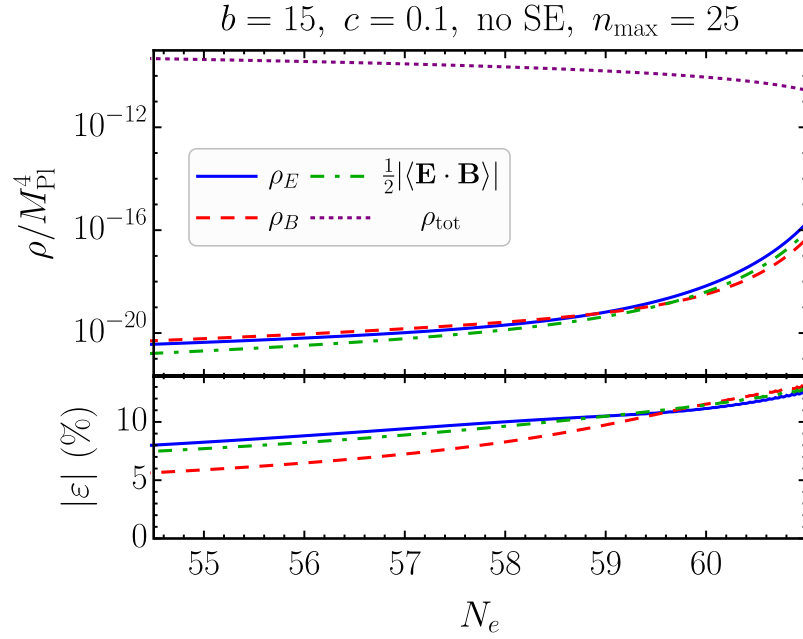


Рис. 2.1: **Верхня панель:** Залежності електричної (сині суцільні лінії) та магнітної (червоні пунктирні лінії) складових густини енергії, значення  $\frac{1}{2}|\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle|$  (зелені пунктирні лінії) та повної густини енергії (фіолетові пунктирні лінії) від кількості  $e$ -фолдингів  $N_e$  під час інфляції (яка закінчується на  $N_e \approx 61$ ), розрахованих за допомогою формалізму градієнтного розкладу з порядком обриву  $n_{\max} = 25$ , у випадку  $b = 15, c = 0.1$  без зворотної реакції та ефекту Швінгера. **Нижня панель:** Відносна похибка  $\varepsilon$  результату, отриманого за допомогою формалізму градієнтного розкладу, порівняно з еталонним результатом методу помодового розкладу як функція  $N_e$ .

про те, що якби ефект Швінгера був “увімкнений”, згенеровані електромагнітні поля, ймовірно, досягли б критичних значень ближче до кінця інфляції. Тоді б відбувалося ефективне утворення швінгерівських пар.

Після успішного тестування нашого методу ми дослідили явища зворотної реакції та ефекту Швінгера для змішаного зв’язку,  $b = 60, c = 0.2$  (див. рисунок 2.2). Для заданих значень параметрів  $b$  та  $c$ , за відсутності ефекту Швінгера, електромагнітні поля починають чинити зворотний вплив на еволюцію інфлатона близько  $N_e \approx 60$ . Тривалість інфляції збільшується майже на 9  $e$ -фолдингів.

Розглянемо детальніше випадок змішаного зв’язку з наявністю ефекту Швінгера. Протягом тривалого часу, поки згенеровані електричне та магнітне поля ще не досягли критичних значень, еволюція відповідних компонентів густини енергії відбувається так само, як і у випадку без швінгерівської провідності (див.

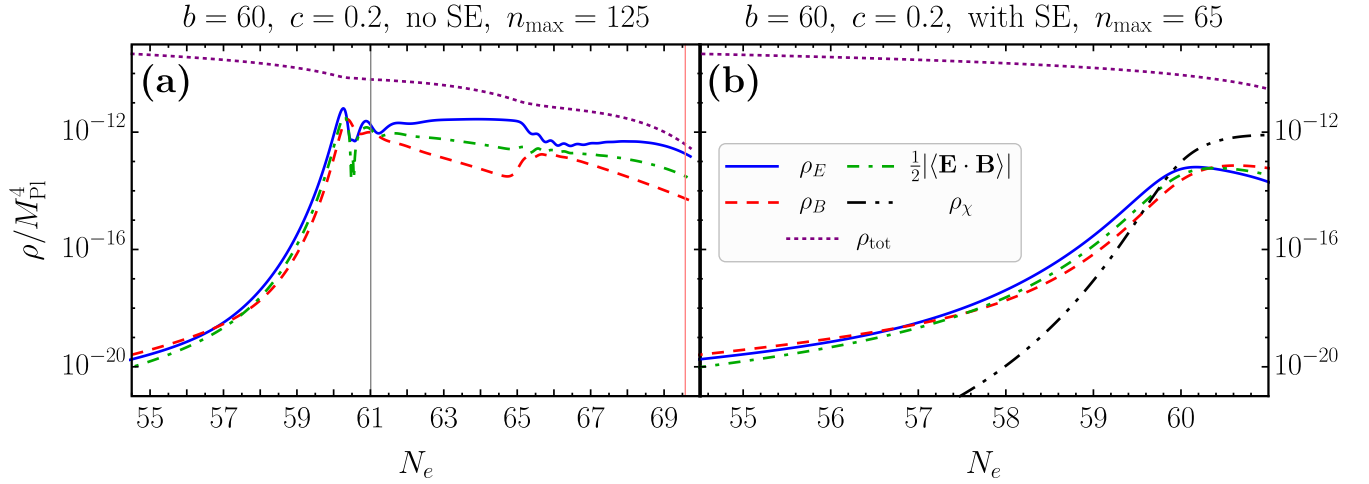


Рис. 2.2: Залежності електричної (сині суцільні лінії) та магнітної (червоні пунктирні лінії) складових густини енергії, значення  $\frac{1}{2}|\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle|$  (зелені штрихпунктирні лінії) та повної густини енергії (фіолетові пунктирні лінії) від кількості  $e$ -фолдингів  $N_e$  під час інфляції, розрахованих методом градієнтного розкладу у випадку  $b = 60, c = 0.2$  за відсутності (ліва панель) та за наявності (права панель) ефекту Швінгера, для порядків обриву  $n_{\text{max}} = 125$  та  $n_{\text{max}} = 65$  відповідно. Для випадку з ефектом Швінгера (права панель) крива густини енергії заряджених швінгерівських частинок додатково показана чорною штрихпунктирною лінією з двома крапками. У випадку без ефекту Швінгера (ліва панель) відбувається зворотна реакція, тривалість інфляції збільшується. (Рожева вертикальна лінія вказує на момент завершення інфляції. Якби зворотної реакції не було, інфляція закінчилася б у момент, показаний сірою вертикальною лінією.)

рисуюнок 2.3). Але в певний момент часу електромагнітні поля стають настільки потужними, що починають викликати народження пар заряджених ферміонів. Це явище призводить до ослаблення електромагнітних полів (зворотна реакція в цьому випадку не спостерігається), а також до відновлення типової тривалості інфляційної епохи.

Для випадку  $b = 60, c = 0.2$  ми більше не можемо перевірити формалізм градієнтного розкладу за допомогою стандартного помодового розкладу (помодовий розклад не працює за наявності нелінійних явищ, таких як зворотна реакція та/або ефект Швінгера). Однак, у нас все ще є можливість перевірити результати формалізму градієнтного розкладу на самоузгодженість. Для виконання такої перевірки ми використовуємо ті ж диференціальні рівняння, що з'являються в помодовому розкладі. Але як функції часу  $a(t), \phi(t), \dot{\phi}(t), \mathcal{E}^{(0)}(t)$ ,

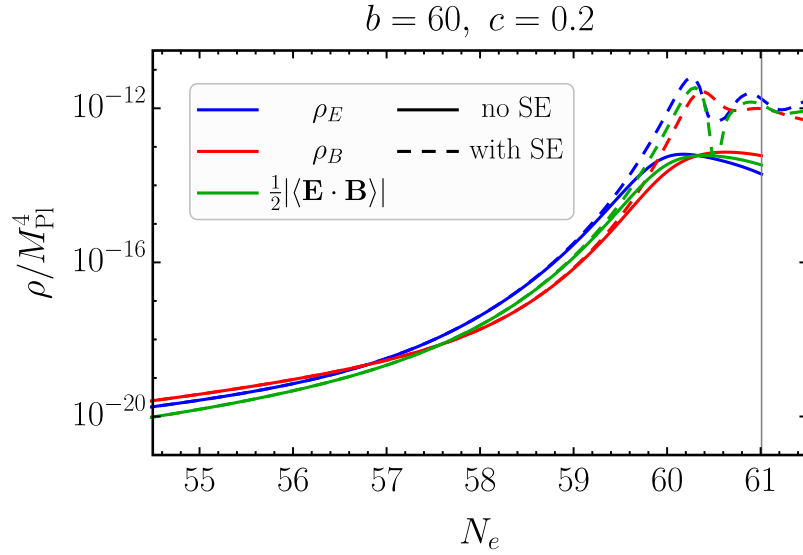


Рис. 2.3: Порівняння залежностей електричної (сині лінії) та магнітної (червоні лінії) складових густини енергії, а також значення  $\frac{1}{2}|\vec{E} \cdot \vec{B}|$  (зелені лінії) від кількості  $e$ -фолдингів  $N_e$  під час інфляції, розрахованих за допомогою формалізму градієнтного розкладу у випадку  $b = 60, c = 0.2$  за наявності (суцільні лінії) та відсутності (пунктирні лінії) ефекту Швінгера.

$\mathcal{B}^{(0)}(t), \mathcal{G}^{(0)}(t)$  ми вибираємо відповідні залежності, отримані під час розв’язання задачі у формалізмі градієнтного розкладу. Таким чином, позначення  $X_{\text{ref}}$  у визначенні відносної похибки  $\varepsilon$  тепер стосується значень, розрахованих у рамках описаного вище “модифікованого” помодового розкладу.

Джерелом досить значної похибки, показаної на рис. 2.1 та обговореної в тексті, є апроксимація  $\frac{d \ln k_h}{dt} \approx H$ , яка використовується при обчисленні граничних доданків. Якщо врахувати доданки, що пригнічують повільне скоочування, то похибку можна зменшити до значень порядку 1 %. Вперше це було повідомлено в роботі [67]. У вказаній статті це було перевірено для однієї контрольної точки.

## 2.5 Висновки до розділу 2

У цьому розділі розроблено формалізм градієнтного розкладу для опису генерації електромагнітного поля (або будь-якого безмасового абелевого калібрувального поля) під час інфляції в моделі з кінетичним та аксіальним зв’язками.

Враховано можливість народження пар заряджених ферміонів з вакууму сильними електромагнітними полями (ефект Швінгера). У розділі вперше представлено найповнішу версію зазначеного формалізму для випадку одночасної наявності кінетичного та аксіального зв'язків між інфлатоном та електромагнітним полем, та з урахуванням швінгерівської провідності.

Формалізм градієнтного розкладу є ефективним методом вивчення інфляційного магнітогенезу за наявності нелінійних явищ: зворотної реакції згенерованих електромагнітних полів на еволюцію інфлатона та/або ефекту Швінгера. У цьому випадку кожна окрема мода електромагнітного поля більше не еволюціонує незалежно від інших. На еволюцію окремої моди впливають усі фізично значущі моди одночасно. За таких умов стандартний помодовий розклад не може бути застосованим.

Формалізм градієнтного розкладу допомагає простежити еволюцію квадратичних електромагнітних функцій, пропорційних  $\langle \vec{E} \cdot \text{rot}^n \vec{E} \rangle$ ,  $\langle \vec{E} \cdot \text{rot}^n \vec{B} \rangle$  або  $\langle \vec{B} \cdot \text{rot}^n \vec{B} \rangle$ , де  $\vec{E}$  та  $\vec{B}$  — це електричне та магнітне поля відповідно, а  $n$  — будь-яке ціле число. Оскільки цей формалізм працює в координатному, а не в імпульсному просторі, він дозволяє враховувати всі фізично значущі моди одночасно.

Диференціальні рівняння для квадратичних електромагнітних функцій утворюють нескінченну систему рівнянь. Для великих значень  $n$  електромагнітні величини з індексом  $n + 2$  можна виразити через функції з індексом  $n$ . Отже, систему рівнянь можна обірвати при деякому індексі  $n_{\text{max}}$ . Зі збільшенням порядку обриву  $n_{\text{max}}$  розв'язки системи рівнянь перестають залежати від його значення та прямують до деяких конкретних часових залежностей.

Слід зазначити, що в певний момент часу в інфляційному магнітогенезі беруть участь лише ті моди, які до цього моменту перетнули горизонт. З часом кількість таких мод постійно зростає. Описане явище було враховано шляхом введення спеціальних граничних доданків, розміщених у правій частині дифе-

ренціальних рівнянь (2.20)–(2.22).

Чисельні розрахунки були виконані в моделі хаотичної інфляції. Функція аксіального зв'язку  $I(\phi)$  електромагнітного поля з інфлатоном є лінійною, кінетична функція зв'язку  $f(\phi)$  є експоненційною (типу Ратри). За відсутності ефекту Швінгера та зворотної реакції, розв'язки, отримані в рамках формалізму градієнтного розкладу, збігаються з результатами помодового розкладу з дуже хорошою точністю. Це показує, що формалізм, розроблений у розділі, є досить точним і може бути застосованим при розв'язанні різних космологічних задачах.

Числові розрахунки показують, що поява зворотної реакції подовжує тривалість інфляції. Наявність ефекту Швінгера нівелює зворотну реакцію та відновлює звичайну тривалість інфляційної стадії. У цьому випадку електромагнітні поля припиняють зростати в кінці інфляції. Це відбувається тому, що коли електромагнітні поля досягають критичних значень, їхня енергія починає витрачатися на створення пар частинок та античастинок з вакууму.

Найбільш узагальнений формалізм градієнтного розкладу, розроблений у цьому розділі дисертації, може бути застосований у майбутніх наукових дослідженнях, що можуть стосуватися інфляційного магнітогенезу. Метод також може бути використаний для генерації початкових умов для задач, пов'язаних з розігрівом — наступною космологічною епохою після інфляції.

Результати, висвітлені в розділі, опубліковано в роботах [60, 175].

## РОЗДІЛ 3

# КІНЕТИЧНИЙ ПІДХІД ДЛЯ ОПИСУ ЕФЕКТУ ШВІНґЕРА У ВСЕСВІТІ, ЩО РОЗШИРЮЄТЬСЯ

### 3.1 Вступ

Одним із найцікавіших явищ, що відбувається в сильному електромагнітному полі, є ефект Швінґера – явище утворення пар частинок та античастинок з фізичного вакууму [68–70]. Його було передбачено майже сто років тому, і до сьогоднішнього дня він жодного разу не спостерігався в лабораторії через надзвичайно високе значення необхідного електричного поля  $E \sim 10^{18}$  В/м [176]. Тим не менш, такі величезні поля можуть існувати у Всесвіті, наприклад, навколо компактних об’єктів, таких як нейтронні зорі або чорні діри [73, 177]. Також електромагнітні поля надкритичних значень могли існувати на ранніх стадіях еволюції Всесвіту (див., наприклад, [75, 76, 79]).

Ефект Швінґера в ранньому Всесвіті часто розглядається в контексті моделей інфляційного магнітогенезу, які включають зв’язок електромагнітного поля з інфлатоном або з кривиною простору-часу [62, 153, 154]. Найпростішим сценарієм народження швінґерівської пари під час інфляції, який можна аналітично дослідити, є випадок постійного та однорідного електричного поля (з можливою наявністю колінеарного магнітного поля) у просторі-часі де Сіттера. Вказаний сценарій був детально досліджений у літературі [79, 80, 172, 178–185]. Результати цього простого підходу використовувалися для багатьох феноменологічних

застосувань [53, 56, 75–78, 170, 186–191]; однак у реалістичних інфляційних моделях обидва основні припущення — наявність постійного в часі калібрувального поля та суто де-Сіттерівське розширення Всесвіту — зазвичай не виконуються.

У залежному від часу електромагнітному полі народження швінгерівської пари має складнішу динаміку. Це було продемонстровано за допомогою кінетичного підходу як для простору Мінковського [192–200], так для Всесвіту, що розширюється [81, 82]. На відміну від випадку постійного поля, маємо індукований швінгерівський струм, що проявляє немарківський характер, і залежить не лише від поля в даний момент часу, але й від його передісторії. Більше того, через інерційні властивості носіїв заряду струм сповільнюється відносно змін електричного поля, що призводить до коливальної поведінки індукованого струму та електричного поля.

У кінетичному підході народження частинок описується швінгерівським джерелом, яке можна побудувати феноменологічно [81, 192, 193] або вивести з перших принципів [82, 194–200]. Останній спосіб, хоч і набагато складніший, дозволяє врахувати вплив статистики частинок та нелокальний у часі характер процесу створення пар. Проте існує фундаментальна проблема, яка робить застосування такого підходу, заснованого на перших принципах, неоднозначним у випадку Всесвіту, що розширюється. Це добре відома в літературі проблема визначення вакуумного стану та частинок у нестационарних фонах, які не відповідають простору-часу Мінковського в асимптотичному минулому та майбутньому [51, 201–203]. Результат для кількості утворених частинок залежить від визначення фізичного вакуумного стану або, іншими словами, від вибору спостерігача.

У цьому розділі ми знову розглядаємо створення пар скалярних частинок залежним від часу електричним полем у Всесвіті Фрідмана-Леметра-Робертсона-Уокера (ФЛРУ), що розширюється. Раніше цей випадок уже досліджувався у роботі [82]. Ми здебільшого дотримуємося тієї ж стратегії для виведення систе-

ми квантових кінетичних рівнянь, що описують народження швінґерівських пар в цій системі. Однак у своєму дослідженні ми виконуємо всі обчислення в термінах не фізичного часу, як у роботі [82], а конформного. Незважаючи на, здавалося б, тривіальну зміну, ми виявляємо, що визначення адіабатичного вакууму відрізняється порівняно з попередньою роботою, і, як наслідок, остаточна система рівнянь виходить іншою. Ми аналізуємо ультрафіолетову (УФ) поведінку її розв'язків і показуємо, що кінетичні функції демонструють швидше зменшення при великих імпульсах порівняно з розв'язками системи в роботі [82], що робить нову систему рівнянь більш привабливою для чисельного аналізу. Також новий підхід враховує конформну симетрію задачі та не призводить до утворення частинок у випадку конформно зв'язаного безмасового скалярного поля за відсутності електричного поля.

Мета дослідження полягає не в тому, щоб показати, що обчислення в [82] є неправильними, а в тому, щоб продемонструвати, що існує інший і зручніший спосіб виведення системи квантових кінетичних рівнянь. Хоч ми й очікуємо, що числовий результат у випадку сильного електричного поля  $|eE| \gg H^2, m^2$  (де  $e$  — електричний заряд,  $H$  — параметр Габбла, а  $m$  — маса частинки) буде однаковим для обох підходів, можуть бути деякі числові відмінності у випадку слабого поля, для якого швидкість народження частинок за рахунок електричного поля і за рахунок нестационарної метрики є порівнянними.

### 3.2 Квантові рівняння Власова для скалярного поля

Для опису швінґерівського народження скалярних заряджених частинок сильним електричним полем у Всесвіті, що розширюється, розглянемо дію

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\frac{M_p^2}{2} R + \mathcal{L}_{\text{EM}} + \mathcal{L}_{\text{ch}} \right], \quad (3.1)$$

де  $g = \det(g_{\mu\nu}) = -a^8$  — визначник метрики,  $R = -6a''/a^3$  — скаляр кривини для метрики ФЛРУ. Таким чином, перший доданок у дії представляє дію Айнштейна-Гільберта для гравітації. Другий доданок у дужках у (4.2) представляє густину лагранжіана для електромагнітного поля

$$\mathcal{L}_{\text{ЕМ}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\mu, \phi), \quad (3.2)$$

де доданок  $\mathcal{L}_{\text{int}}$  описує зв'язок електромагнітного поля з деяким загальним полем  $\phi$ . Хоча ця взаємодія необхідна для створення достатньо сильного електромагнітного поля, необхідного для швінгерівського народження пар, у цій роботі ми не будемо дотримуватися якоїсь конкретної моделі та припустимо, що електромагнітне поле вже існує у Всесвіті. Крім того, ми розглядаємо таку конфігурацію калібрувального поля: (i) магнітне поле  $\vec{B}$  є нехтовно малим порівняно з електричним полем  $\vec{E}$ ; (ii) кореляційна довжина електричного поля  $\lambda_E$  набагато більша за будь-який інший фізично релевантний масштаб довжини в задачі, наприклад, масштаб утворення пар  $l_S \sim |eE|^{-1/2}$  або масштаб Габбла  $l_H \sim H^{-1}$ . Остання умова дозволяє нам розглядати електричне поле як просторово однорідне та залежне лише від часу  $\vec{E} = \vec{E}(\eta)$ . Таку конфігурацію поля можна описати векторним потенціалом (у кулонівському калібруванні)  $A_\mu = (0, \vec{A}(\eta))$ , де  $\vec{A}'(\eta) = -a^2\vec{E}$ . З коефіцієнтом  $a^2$  електричне поле  $\vec{E}$  є фізичним полем, що вимірюється супутнім спостерігачем.

Нарешті, розглянемо останній доданок у дужках у формулі (4.2), який представляє собою густину лагранжіана комплексного скалярного зарядженого поля  $\chi$  з масою  $m$  та зарядом  $e$ :

$$\mathcal{L}_{\text{ch}} = g^{\mu\nu}(\mathcal{D}_\mu\chi)^\dagger(\mathcal{D}_\nu\chi) - (m^2 - \xi R)|\chi|^2. \quad (3.3)$$

Тут  $|\chi|^2 \equiv \chi^\dagger\chi$ ,  $\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$  — коваріантна похідна, що діє на скалярне поле, а  $\xi$  — константа зв'язку, що відповідає за немінімальний зв'язок скалярного

поля  $\chi$  з гравітацією.

Проваріювавши дію в рівнянні (4.2) відносно  $\chi^\dagger$ , отримуємо рівняння руху для скалярного поля  $\chi$ :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \mathcal{D}_\mu [\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu \chi] + (m^2 - \xi R) \chi = 0. \quad (3.4)$$

Використавши явні вирази метрики ФЛРУ та коваріантної похідної, ми перепишемо рівняння (3.4) у наступному вигляді:

$$\chi'' + 2\frac{a'}{a}\chi' + \left(\frac{m^2}{a^2} + 6\xi\frac{a''}{a}\right)\chi - (\vec{\nabla} - ie\vec{A})^2\chi = 0. \quad (3.5)$$

Розглядаючи скалярне поле  $\chi$  як відповідний квантовий оператор, ми розкладаємо його по множині операторів народження та знищення частинок  $(\hat{b}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{b}_{\vec{k}})$  та античастинок  $(\hat{c}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{c}_{\vec{k}})$  з різними імпульсами  $\vec{k}$ :

$$\hat{\chi}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}a(\eta)} \left[ \hat{b}_{\vec{k}} \chi_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{c}_{\vec{k}}^\dagger \chi_{-\vec{k}}^*(\eta) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right]. \quad (3.6)$$

Оператори знищення та народження задовольняють канонічні комутаційні співвідношення, серед яких єдиними нетривіальними є

$$[\hat{b}_{\vec{k}}, \hat{b}_{\vec{k}'}^\dagger] = [\hat{c}_{\vec{k}}, \hat{c}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (3.7)$$

Множник  $a(\eta)$  у знаменнику в виразі (3.6) було введено для більшої зручності.

Підставляючи розклад (3.6) у рівняння руху (3.5), отримуємо диференціальне рівняння, що описує еволюцію модової функції  $\chi_{\vec{k}}(\eta)$ :

$$\chi_{\vec{k}}''(\eta) + \Omega_{\vec{k}}^2(\eta) \chi_{\vec{k}}(\eta) = 0. \quad (3.8)$$

Рівняння має форму гармонічного осцилятора з ефективною частотою, що за-

лежить від часу

$$\Omega_{\vec{k}}^2(\eta) = (\vec{k} - e\vec{A})^2 + m^2 a^2 + (6\xi - 1) \frac{a''}{a}. \quad (3.9)$$

З рівняння (3.9) легко бачити, що за відсутності електромагнітного поля у Всесвіті, що не розширюється, частота  $\Omega_{\vec{k}}$  не залежить від часу  $\eta$ . Тоді рівняння (3.8) має два незалежних розв'язки, які описують моди з позитивною та негативною частотами. Якщо початкова умова, що накладається в певний момент часу, відповідає, наприклад, моді з позитивною частотою, розв'язок залишається з позитивною частотою весь час. Отже, ми робимо висновок, що народження частинок у просторі-часі Мінковського не відбувається.

Більше того, навіть у Всесвіті, що розширюється, для безмасової скалярної частинки,  $m = 0$ , з конформним немінимальним зв'язком з гравітацією,  $\xi = 1/6$ , та за відсутності електричного поля, рівняння руху (3.8) має дуже просту осцилятороподібну форму  $\chi''_{\vec{k}} + k^2 \chi_{\vec{k}} = 0$ , розв'язком якої для позитивної частоти є добре відомий вакуум Банча–Девіса [174]:

$$\chi_{\vec{k},+}^{\text{BD}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}. \quad (3.10)$$

Перебуваюся у цьому стані з самого початку, скалярне поле залишатиметься в ньому назавжди, а це означає, що навіть у Всесвіті, що розширюється, не відбувається утворення частинок. Це є наслідком конформної інваріантності дії безмасового конформно зв'язаного скалярного поля [203]. Тут ми хотіли б зазначити, що ця конформна симетрія стає явною лише тоді, коли ми працюємо в метриці ФЛРУ, записаній через конформний час, який є конформно плоским.

Ситуація змінюється за наявності ненульового електричного поля у Всесвіті, що розширюється. Дійсно, значення  $\Omega_{\vec{k}}$  стає залежним від конформного часу  $\eta$ , і тому, загалом, неможливо знайти точний загальний розв'язок модового

рівняння (3.8) та окремі моди з позитивною та негативною частотами<sup>1</sup>. Тим не менш, все ще можна побудувати наближений розв'язок, використовуючи наближення Вентцеля-Крамерса-Бріллюена до певного адіабатичного порядку. Наприклад, у нульовому адіабатичному порядку розв'язок з додатною частотою має вигляд

$$\chi_{\vec{k},+}^{(0)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\vec{k}}(\eta)}} e^{-i \int^{\eta} \Omega_{\vec{k}}(\eta') d\eta'} , \quad (3.11)$$

де фазу цієї функції можна зафіксувати, вибравши нижню межу інтегрування в показнику степеня. Для мод з дуже великими імпульсами цей вираз зводиться до рівняння (3.10) для вакууму Банча-Девіса. Тепер вимагатимемо, щоб у заданий момент часу  $\eta_0$  точна модова функція  $\chi_{\vec{k}}$  відповідала тій, що в рівнянні (3.11). Тоді оператори знищення та народження, що з'являються в розкладі (3.6) з такими модовими функціями, визначають адіабатичний вакуум (нульового порядку). Отже, у момент часу  $\eta_0$  у системі не буде частинок. Однак у будь-який пізніший момент часу точна модова функція не відповідає рівнянню (3.11) і загалом являє собою суміш адіабатичних мод з додатною та від'ємною частотами. У такому випадку її зручно описати за допомогою коефіцієнтів Боголюбова  $\alpha_{\vec{k}}$  та  $\beta_{\vec{k}}$  таким чином:

$$\chi_{\vec{k}}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\vec{k}}(\eta)}} \left[ \alpha_{\vec{k}}(\eta) e^{-i\Theta_{\vec{k}}(\eta)} + \beta_{\vec{k}}(\eta) e^{i\Theta_{\vec{k}}(\eta)} \right] , \quad (3.12)$$

де

$$\Theta_{\vec{k}}(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \Omega_{\vec{k}}(\eta') d\eta' . \quad (3.13)$$

Коефіцієнти Боголюбова задовольняють умову нормування

$$|\alpha_{\vec{k}}(\eta)|^2 - |\beta_{\vec{k}}(\eta)|^2 = 1 , \quad (3.14)$$

---

**Примітка 1.** Зауважимо, що в деяких окремих випадках, коли часові залежності масштабного фактора та електричного поля мають просту форму, можна знайти точний аналітичний розв'язок рівняння (3.8); див., наприклад, роботи [79, 178, 179] для випадку мінімально зв'язаного комплексного скалярного поля в постійному електричному полі в просторі-часі де Сіттера.

а також в момент часу  $\eta_0$  вони задовольняють початкові умови  $\alpha_{\vec{k}}(\eta_0) = 1$  та  $\beta_{\vec{k}}(\eta_0) = 0$  (за побудовою адіабатичного вакууму в момент  $\eta_0$ ).

Легко показати, що модове рівняння (3.8) тотожно задовольняється, якщо еволюція коефіцієнтів Боголюбова описується такою системою рівнянь:

$$\alpha'_{\vec{k}} = \frac{\Omega'_{\vec{k}}}{2\Omega_{\vec{k}}} e^{2i\Theta_{\vec{k}}} \beta_{\vec{k}}, \quad (3.15a)$$

$$\beta'_{\vec{k}} = \frac{\Omega'_{\vec{k}}}{2\Omega_{\vec{k}}} e^{-2i\Theta_{\vec{k}}} \alpha_{\vec{k}}. \quad (3.15b)$$

Беручи до уваги умову нормування в рівнянні (3.14), ми робимо висновок, що дві комплексні функції  $\alpha_{\vec{k}}$  та  $\beta_{\vec{k}}$  мають лише три незалежні дійсні ступені вільності, які зручно параметризувати наступним чином:

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}(\eta) = |\beta_{\vec{k}}(\eta)|^2, \quad (3.16)$$

$$\mathcal{G}_{\vec{k}}(\eta) = \text{Re} \left( \alpha_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^* e^{-2i\Theta_{\vec{k}}(\eta)} \right), \quad (3.17)$$

$$\mathcal{H}_{\vec{k}}(\eta) = \text{Im} \left( \alpha_{\vec{k}} \beta_{\vec{k}}^* e^{-2i\Theta_{\vec{k}}(\eta)} \right). \quad (3.18)$$

Тоді, використовуючи рівняння (3.15), можна вивести рівняння руху для величин (3.16)–(3.18):

$$\mathcal{F}'_{\vec{k}}(\eta) = \frac{\Omega'_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} \mathcal{G}_{\vec{k}}(\eta), \quad (3.19a)$$

$$\mathcal{G}'_{\vec{k}}(\eta) = \frac{\Omega'_{\vec{k}}}{2\Omega_{\vec{k}}} [1 + 2\mathcal{F}_{\vec{k}}(\eta)] + 2\Omega_{\vec{k}} \mathcal{H}_{\vec{k}}(\eta), \quad (3.19b)$$

$$\mathcal{H}'_{\vec{k}}(\eta) = -2\Omega_{\vec{k}} \mathcal{G}_{\vec{k}}(\eta). \quad (3.19c)$$

Основною перевагою цієї системи рівнянь порівняно з (3.15) є те, що вона є дійсною та не містить швидко осцилюючих коефіцієнтів. Щоб переписати її в остаточному вигляді, ми переходимо від канонічного імпульсу  $\vec{k}$  до кінетичного імпульсу в конформному просторі-часі  $\vec{p} = \vec{k} - e\vec{A}$  та вводимо відповідну енергію

$\epsilon_{\vec{p}} \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 a^2}$  <sup>1</sup>. Тепер виконаємо такі заміни в системі рівнянь (3.19):

$$\Omega_{\vec{k}} \rightarrow \omega(\eta, \vec{p}) = \sqrt{\epsilon_{\vec{p}}^2 + (6\xi - 1) \frac{a''}{a}}, \quad (3.20)$$

$$\mathcal{F}_{\vec{k}}(\eta) \rightarrow \mathcal{F}(\eta, \vec{p}), \quad \mathcal{G}_{\vec{k}}(\eta) \rightarrow \mathcal{G}(\eta, \vec{p}), \quad \mathcal{H}_{\vec{k}}(\eta) \rightarrow \mathcal{H}(\eta, \vec{p}), \quad (3.21)$$

$$\frac{\Omega'_{\vec{k}}}{\Omega_{\vec{k}}} \rightarrow Q(\eta, \vec{p}) \equiv \frac{1}{\omega(\eta, \vec{p})^2} \left[ e a^2 (\vec{p} \cdot \vec{E}) + m^2 a a' + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Далі, зазначимо, що похідна за часом змінюється згідно з правилом

$$\mathcal{F}'_{\vec{k}}(\eta) \rightarrow \frac{d}{d\eta} \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{p}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) = \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} + e a^2 \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] \mathcal{F}(\eta, \vec{p}), \quad (3.23)$$

і аналогічні співвідношення також мають місце для величин  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$ ,  $\mathcal{H}(\eta, \vec{p})$ .

Зрештою, ми отримуємо систему квантових рівнянь Власова для кінетичних функцій (3.21):

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + e a^2 \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) = Q(\eta, \vec{p}) \mathcal{G}(\eta, \vec{p}), \quad (3.24a)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + e a^2 \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) = \frac{1}{2} Q(\eta, \vec{p}) [1 + 2\mathcal{F}(\eta, \vec{p})] + 2\omega(\eta, \vec{p}) \mathcal{H}(\eta, \vec{p}), \quad (3.24b)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \eta} + e a^2 \vec{E} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right) \mathcal{H}(\eta, \vec{p}) = -2\omega(\eta, \vec{p}) \mathcal{G}(\eta, \vec{p}). \quad (3.24v)$$

Ці рівняння описують утворення заряджених скалярних частинок у Всесвіті, що розширюється, за наявності просторово однорідного електричного поля. Варто відзначити важливу властивість цієї системи рівнянь: вона гарантує, що комбінація  $(1 + 2\mathcal{F})^2 - (2\mathcal{G})^2 - (2\mathcal{H})^2$  зберігається в часі та дорівнює одиниці. Це також можна побачити безпосередньо з визначень у рівняннях (3.16)–(3.18) разом з умовою нормалізації (3.14). Згідно з [199], це є проявом закону збере-

**Примітка 1.** Величини  $\vec{p}$  та  $\epsilon_{\vec{p}}$  не збігаються з фізичним кінетичним імпульсом та енергією скалярної частинки, вимірними супутнім космологічним спостерігачем. Вони введені для зручності подальшого аналізу. Відповідні фізичні величини можна виразити як  $\vec{p}_{\text{phys}} = \vec{p}/a$  та  $\epsilon_{\vec{p}, \text{phys}} = \epsilon_{\vec{p}}/a$ .

ження заряду та пов'язано з інваріантністю оператора Казимира для алгебри  $SU(1,1)$  [204].

### 3.3 Фізичні спостережувані величини

У цьому під підрозділі ми визначаємо основні фізичні спостережувані величини для скалярного поля, а саме електричний струм та тензор енергії-імпульсу, і виражаємо їх через кінетичні функції  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  та  $\mathcal{H}$ , введені в попередньому підрозділі.

#### 3.3.1 Електричний струм

Почнемо з електричного струму, який є вакуумним середнім значенням відповідного квантового оператора:

$$j^\mu = \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ch}}}{\partial A_\mu} \right\rangle = (0, \frac{1}{a^2} \vec{j}). \quad (3.25)$$

Використовуючи явну форму густини лагранжіана скалярного поля в рівнянні (3.3), отримуємо

$$\vec{j} = ie \langle \hat{\chi}^\dagger \vec{\nabla} \hat{\chi} - \hat{\chi} \vec{\nabla} \hat{\chi}^\dagger - 2ie \vec{A} \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle. \quad (3.26)$$

Далі підставляємо операторний розклад (3.6) та виражаємо електричний струм через модову функцію:

$$\vec{j} = -\frac{2e}{a^2} \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} (\vec{k} - e \vec{A}) |\chi_{\vec{k}}(\eta)|^2. \quad (3.27)$$

Нарешті, ми використовуємо рівняння (3.12), (3.16)–(3.18) та переписуємо

вираз (3.27) через кінетичні функції  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  та  $\mathcal{H}$  наступним чином:

$$\vec{j} = -\frac{2e}{a^2} \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} (\vec{k} - e\vec{A}) \frac{1 + 2\mathcal{F}_{\vec{k}} + 2\mathcal{G}_{\vec{k}}}{2\Omega_{\vec{k}}} = -\frac{2e}{a^2} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \frac{\mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p})}{\omega(\eta, \vec{p})}, \quad (3.28)$$

де доданок з одиницею в чисельнику було опущено, оскільки він є непарним при зміні  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$  і перетворюється на нуль після інтегрування по всіх імпульсах.

### 3.3.2 Тензор енергії-імпульсу

Тензор енергії-імпульсу скалярного зарядженого поля  $\chi$  можна знайти, проваріювавши дію по метриці:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^\chi &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \left\langle \frac{\delta S_\chi}{\delta g^{\mu\nu}} \right\rangle \\ &= \langle (\mathcal{D}_\mu \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}_\nu \hat{\chi}) + (\mathcal{D}_\nu \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}_\mu \hat{\chi}) - g_{\mu\nu} [(\mathcal{D}_\alpha \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}^\alpha \hat{\chi}) - m^2 \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi}] \rangle \\ &\quad + 2\xi \left\langle \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha \right) \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Тоді ми одразу маємо густину енергії утворених частинок  $\rho_\chi \equiv T_0^{\chi 0}$ :

$$\begin{aligned} \rho_\chi &= \frac{1}{a^2} \langle (\mathcal{D}_0 \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}_0 \hat{\chi}) + (\mathcal{D}_i \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}_i \hat{\chi}) + \left( m^2 a^2 + 6\xi \frac{a'^2}{a^2} \right) \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle \\ &\quad - \frac{2\xi}{a^2} \langle \left( \partial_i^2 - 3\frac{a'}{a} \partial_0 \right) \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Замість тиску,  $P_\chi = (1/3)g^{ij}T_{ij}^\chi$ , зручніше працювати зі слідом тензора енергії-імпульсу  $T_\chi = g^{\mu\nu}T_{\mu\nu}^\chi$ , який має вигляд:

$$T_\chi = \langle 2(6\xi - 1) [(\mathcal{D}_\alpha \hat{\chi})^\dagger (\mathcal{D}^\alpha \hat{\chi}) + \xi R \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi}] + 4(1 - 3\xi)m^2 \hat{\chi}^\dagger \hat{\chi} \rangle. \quad (3.31)$$

Знову ж таки, використовуючи розклад  $\hat{\chi}$  за операторами знищення та народження в рівнянні (3.6), ми виражаємо густину енергії та слід через модову

функцію:

$$\rho_\chi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 a^4} \left\{ \left| \chi'_k - \frac{a'}{a} \chi_{\vec{k}} \right|^2 + \left[ m^2 a^2 - 6\xi \frac{a'^2}{a^2} + (\vec{k} - e\vec{A})^2 + 6\xi \frac{a'}{a} \partial_0 \right] |\chi_{\vec{k}}|^2 \right\}, \quad (3.32)$$

$$T_\chi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 a^4} \left\{ 2(6\xi - 1) \left[ \left| \chi'_k - \frac{a'}{a} \chi_{\vec{k}} \right|^2 - \left( \Omega_{\vec{k}}^2 + \frac{a''}{a} \right) |\chi_{\vec{k}}|^2 \right] + 2m^2 a^2 |\chi_{\vec{k}}|^2 \right\}. \quad (3.33)$$

Зрештою, виражаючи їх через кінетичні функції  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$  та  $\mathcal{H}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \rho_\chi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 a^4} & \left\{ \omega(\eta, \vec{p}) [1 + 2\mathcal{F}(\eta, \vec{p})] + 2\frac{a'}{a} (6\xi - 1) \mathcal{H}(\eta, \vec{p}) \right. \\ & \left. - \frac{6\xi - 1}{\omega(\eta, \vec{p})} \left( \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a''}{a} \right) \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} T_\chi = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 a^4} & \left\{ -4(6\xi - 1) \left[ \omega(\eta, \vec{p}) \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) + \frac{a'}{a} \mathcal{H}(\eta, \vec{p}) \right] \right. \\ & \left. + \frac{2}{\omega(\eta, \vec{p})} \left[ m^2 a^2 - (6\xi - 1) \left( \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Нижче ми побачимо, що всі фізичні спостережувані величини, отримані в цьому розділі, містять УФ розбіжності і, отже, повинні бути перенормовані, інакше вони не матимуть фізичного сенсу. Ми виконаємо перенормування в наступному підрозділі.

### 3.4 Перенормування

У цьому підрозділі ми вивчаємо поведінку кінетичних функцій при великих значеннях імпульсу та показуємо, що інтеграли в рівняннях (3.28), (3.34) та (3.35) розходяться в УФ області. Далі ми відокремлюємо розбіжні частини за допомогою розмірної регуляризації та вводимо контрчлени в дії, що скорочують ці розбіжності.

### 3.4.1 Асимптотична поведінка кінетичних функцій при високих енергіях

Коефіцієнти  $\omega(\eta, \vec{p})$  та  $Q(\eta, \vec{p})$  у квантових рівняннях Власова (3.24) у границі великих імпульсів,  $p \equiv |\vec{p}| \rightarrow \infty$ , поведуться як

$$\omega(\eta, \vec{p}) = p + \mathcal{O}(p^{-1}), \quad Q(\eta, \vec{p}) = e a^2 (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{E}) p^{-1} + \mathcal{O}(p^{-2}) \quad (3.36)$$

де  $\hat{\vec{p}} = \vec{p}/p$ . Тоді, з рівняння (3.24) можна побачити, що при високих імпульсах  $\mathcal{F} \propto p^{-4}$ ,  $\mathcal{G} \propto p^{-3}$  та  $\mathcal{H} \propto p^{-2}$ , тобто кінетичні функції демонструють степеневу поведінку, яка потенційно може призвести (і дійсно призводить, як ми побачимо нижче) до УФ розбіжностей у спостережуваних величинах. Щоб вирішити останню проблему, нам необхідні точні вирази для перших кількох доданків розкладу кінетичних функцій за великим  $p$ . Для цього нам потрібні відповідні розклади величин  $\omega(\eta, \vec{p})$  та  $Q(\eta, \vec{p})$ , які є коефіцієнтами в системі квантових рівнянь Власова (3.24):

$$\omega(\eta, \vec{p}) = p + \omega^{(-1)} + \mathcal{O}(p^{-3}), \quad \omega^{(-1)} = \frac{m^2 a^3 + (6\xi - 1)a''}{2ap}, \quad (3.37)$$

$$Q(\eta, \vec{p}) = Q^{(-1)} + Q^{(-2)} + \mathcal{O}(p^{-3}), \quad (3.38)$$

$$Q^{(-1)} = \frac{e a^2 (\vec{p} \cdot \vec{E})}{p^2}, \quad Q^{(-2)} = \frac{1}{p^2} \left[ m^2 a a' + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} \right) \right]. \quad (3.39)$$

Представимо оператор повної похідної по конформному часу як суму двох операторів  $\hat{L}^{(0)}$  та  $\hat{L}^{(-1)}$ :

$$\frac{d}{d\eta} = \hat{L}^{(0)} + \hat{L}^{(-1)}, \quad \text{де} \quad \hat{L}^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \hat{L}^{(-1)} = e a^2 \vec{E} \frac{\partial}{\partial \vec{p}}. \quad (3.40)$$

Очевидно, що оператор  $\hat{L}^{(0)}$  не змінює асимптотичну поведінку заданого доданку при великих імпульсах, тоді як  $\hat{L}^{(-1)}$  зменшує степінь імпульсу на одиницю.

Далі, ми представляємо кінетичні функції як степеневі ряди за оберненим

імпульсом: для  $\mathcal{F}(\eta, \vec{p})$ ,  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$  та  $\mathcal{H}(\eta, \vec{p})$  ряд починається з доданку  $\propto p^{-4}$ ,  $\propto p^{-3}$  та  $\propto p^{-2}$  відповідно. Потім, підставляючи ці розклади разом з рівняннями (3.37)–(3.40) у систему квантових рівнянь Власова (3.24), отримуємо наступний набір рівнянь:

$$\hat{L}^{(0)} \mathcal{F}^{(-4)} = Q^{(-1)} \mathcal{G}^{(-3)}, \quad (3.41)$$

$$0 = \frac{1}{2} Q^{(-1)} + 2p \mathcal{H}^{(-2)}, \quad (3.42)$$

$$0 = \frac{1}{2} Q^{(-2)} + 2p \mathcal{H}^{(-3)}, \quad (3.43)$$

$$\hat{L}^{(0)} \mathcal{H}^{(-2)} = -2p \mathcal{G}^{(-3)}, \quad (3.44)$$

$$\hat{L}^{(0)} \mathcal{H}^{(-3)} + \hat{L}^{(-1)} \mathcal{H}^{(-2)} = -2p \mathcal{G}^{(-4)}. \quad (3.45)$$

З рівнянь (3.42) та (3.43) ми відразу знаходимо вирази для доданків  $\mathcal{H}^{(-2)}$  та  $\mathcal{H}^{(-3)}$ :

$$\mathcal{H}^{(-2)} = -\frac{1}{4p} Q^{(-1)} = -\frac{e a^2 (\hat{\vec{p}} \cdot \vec{E})}{4p^2}, \quad (3.46)$$

$$\mathcal{H}^{(-3)} = -\frac{1}{4p} Q^{(-2)} = -\frac{1}{4p^3} \left[ m^2 a a' + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} \right) \right], \quad (3.47)$$

де  $\hat{\vec{p}} = \vec{p}/p$  — одиничний вектор у напрямку  $\vec{p}$ .

Тоді доданки  $\mathcal{G}^{(-3)}$  та  $\mathcal{G}^{(-4)}$  можна знайти з рівнянь (3.44) та (3.45) відповідно:

$$\mathcal{G}^{(-3)} = -\frac{1}{2p} \hat{L}^{(0)} \mathcal{H}^{(-2)} = \frac{e a^2}{8p^3} \hat{\vec{p}} \cdot \left( \vec{E}' + 2 \frac{a'}{a} \vec{E} \right), \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(-4)} = & -\frac{1}{2p} \left[ \hat{L}^{(0)} \mathcal{H}^{(-3)} + \hat{L}^{(-1)} \mathcal{H}^{(-2)} \right] = \frac{e^2 a^4 [\vec{E}^2 - 3(\hat{\vec{p}} \cdot \vec{E})^2]}{8p^4} \\ & + \frac{1}{8p^4} \left[ m^2 (a'^2 + a a'') + (6\xi - 1) \left( \frac{a^{\text{IV}}}{2a} - \frac{a''^2}{2a^2} - \frac{a' a'''}{a^2} + \frac{a'^2 a''}{a^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Зрештою, доданок  $\mathcal{F}^{(-4)}$  можна знайти, розв'язавши диференціальне рівня-

ння (3.41). Легко побачити, що розв'язком цього рівняння є наступна функція:

$$\mathcal{F}^{(-4)} = \frac{e^2 a^4 (\hat{p} \cdot \vec{E})^2}{16 p^4}. \quad (3.50)$$

Таким чином, ми вивели кілька перших доданків ряду Лорана для кінетичних функцій  $\mathcal{F}(\eta, \vec{p})$ ,  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$  та  $\mathcal{H}(\eta, \vec{p})$  при великих імпульсах  $p \rightarrow \infty$ . Однак їх незручно використовувати в обчисленнях, оскільки вони призводять до хибних інфрачервоних розбіжностей в інтегралах для фізичних спостережуваних величин. Щоб подолати цю проблему, зручніше виконувати розклад за оберненими степенями  $\epsilon_{\vec{p}}$  замість  $p$ . Отже, в рівняннях (3.46)–(3.50) ми замінюємо  $p$  на  $\epsilon_{\vec{p}}$  у знаменниках і отримуємо наступні рівняння:

$$\mathcal{F}(\eta, \vec{p}) = \frac{e^2 a^4 (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{16 \epsilon_{\vec{p}}^4} + \mathcal{O}(\epsilon_{\vec{p}}^{-5}), \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) = & \frac{e a^2}{8 \epsilon_{\vec{p}}^3} \vec{v} \cdot \left( \vec{E}' + 2 \frac{a'}{a} \vec{E} \right) + \frac{e^2 a^4 [\vec{E}^2 - 3(\vec{v} \cdot \vec{E})^2]}{8 \epsilon_{\vec{p}}^4} \\ & + \frac{1}{8 \epsilon_{\vec{p}}^4} \left[ m^2 (a'^2 + a a'') + (6\xi - 1) \left( \frac{a^{\text{IV}}}{2a} - \frac{a''^2}{2a^2} - \frac{a' a'''}{a^2} + \frac{a'^2 a''}{a^3} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{\vec{p}}^{-5}), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\mathcal{H}(\eta, \vec{p}) = -\frac{e a^2 (\vec{v} \cdot \vec{E})}{4 \epsilon_{\vec{p}}^2} - \frac{1}{4 \epsilon_{\vec{p}}^3} \left[ m^2 a a' + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a'''}{a} - \frac{a' a''}{a^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{\vec{p}}^{-4}), \quad (3.53)$$

де  $\vec{v} = \vec{p}/\epsilon_{\vec{p}}$  — швидкість частинки. Тут ми представили лише ті доданки, які можуть призвести до розбіжного внеску у спостережувані величини.

### 3.4.2 Електричний струм

Використовуючи рівняння (3.28) для електричного струму та асимптотичні розклади для кінетичних функцій у рівняннях (3.51)–(3.53), легко побачити, що (i) інтеграл за імпульсом логарифмічно розходиться в УФ області та (ii) розбіжність походить лише від доданку в  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$ , який поводить як  $\propto \epsilon_{\vec{p}}^{-3}$ , тобто від першого доданку в рівнянні (3.52). Тоді  $i$ -та компонента електричного струму

має вигляд:

$$j^i = -\frac{e^2}{4} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[ \frac{v^i v^j}{\epsilon_{\vec{p}}^3} \left( E^{j'} + 2\frac{a'}{a} E^j \right) + \mathcal{O}(\epsilon_{\vec{p}}^{-4}) \right], \quad (3.54)$$

де ми явно записали лише той доданок, який призводить до розбіжності.

Щоб виділити розбіжний внесок, ми використовуємо розмірнісну регуляризацию, переходячи від  $(3+1)$ -вимірному простору-часу до загального  $d$ -вимірному. Тоді для розбіжного інтеграла в рівнянні (3.54), при переході до фізичного імпульсу  $\vec{q} = \vec{p}/a$ , отримуємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{v^i v^j}{\epsilon_{\vec{p}}^3} &= \int \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3} \frac{v^i v^j}{(q^2 + m^2)^{3/2}} \rightarrow \mu_{\text{r}}^{4-d} \int \frac{d^{d-1}\vec{q}}{(2\pi)^{d-1}} \frac{v^i v^j}{(q^2 + m^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\delta^{ij} \Omega_{(d-1)} \mu_{\text{r}}^{4-d}}{(d-1)(2\pi)^{d-1}} \int_0^{+\infty} dq q^d (q^2 + m^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{\delta^{ij}}{12\pi^2} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu_{\text{r}}^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \\ &= \frac{\delta^{ij}}{12\pi^2} \left[ \frac{2}{4-d} - \gamma_{\text{E}} - \ln\left(\frac{m^2}{4\pi\mu_{\text{r}}^2}\right) + \mathcal{O}(4-d) \right], \end{aligned} \quad (3.55)$$

де  $\Omega_{(d-1)} = 2\pi^{(d-1)/2}/\Gamma(\frac{d-1}{2})$  — повний тілесний кут у  $(d-1)$ -вимірному просторі;  $\mu_{\text{r}}$  — вільний параметр з розмірністю маси, введений для компенсації масової розмірності вихідного інтеграла та має значення масштабу енергії перенормування (для спрощення далі ми покладемо його  $\mu_{\text{r}} = m$ ); а  $\gamma_{\text{E}} \approx 0.577$  — стала Ейлера–Маскероні. Очевидно, що перший доданок у дужках у рівнянні (3.55) прямує до нескінченності в границі  $d \rightarrow 4$ , що відновлює правильну розмірність нашого простору-часу; тому його необхідно відняти. Однак разом з цим доданком можна відняти будь-які скінченні внески. Цю неоднозначність можна вирішити лише за домовленістю. Одна з найпопулярніших схем віднімання, схема  $\overline{\text{MS}}$ , вимагає віднімання комбінації

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} \equiv \frac{2}{4-d} - \gamma_{\text{E}} + \ln 4\pi. \quad (3.56)$$

Тоді, з рівнянь (3.54) та (3.55) робимо висновок, що розбіжну частину електричного струму можна записати як

$$\vec{j}_{\text{div}} = -\frac{e^2}{48\pi^2 \bar{\epsilon}} \left( \vec{E}' + 2\frac{a'}{a} \vec{E} \right). \quad (3.57)$$

Віднімаючи від повного електричного струму в рівнянні (3.28) перший доданок у рівнянні (3.54), отримуємо регулярну (тобто збіжну) частину струму:

$$\vec{j}_{\text{reg}} = -2e \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} \left\{ \frac{\mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p})}{a^2 \omega(\eta, \vec{p})} - e \frac{(\vec{p} \cdot [\vec{E}' + 2(a'/a) \vec{E}])}{8 \epsilon_p^5} \right\}. \quad (3.58)$$

Розбіжний внесок в електричний струм можна виключити з рівняння Максвелла, ввівши контрчлен у дію наступного вигляду:

$$\delta S_{Z_3} = (Z_3 - 1) \int d^4 x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right). \quad (3.59)$$

Цей контрчлен разом із рівняннями (4.2) та (3.2) означає наступне рівняння Максвелла для електричного поля:

$$(1 + Z_3 - 1) \left( \vec{E}' + 2\frac{a'}{a} \vec{E} \right) = \vec{j}_{\text{div}} + \vec{j}_{\text{reg}}. \quad (3.60)$$

Підставляючи сюди рівняння (3.57) та вимагаючи, щоб після скорочення це рівняння набуло перенормованої форми, що містить лише скінченні величини

$$\vec{E}' + 2\frac{a'}{a} \vec{E} = \vec{j}_{\text{reg}}, \quad (3.61)$$

отримуємо значення параметра перенормування

$$Z_3 = 1 - \frac{e^2}{48\pi^2 \bar{\epsilon}}, \quad (3.62)$$

що відтворює добре відомий результат для параметра перенормування заряду в скалярній квантовій електродинаміці для простору-часу Мінковського, див.,

наприклад, [173].

### 3.4.3 Густина енергії

Знову ж таки, використовуючи асимптотичні розклади в рівняннях (3.51)–(3.53), ми розкладаємо інтеграл у рівнянні (3.34), зберігаючи доданки, що призводять до УФ розбіжності. Ми отримуємо наступний вираз для густини енергії:

$$\begin{aligned} \rho_\chi = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 a^4} \left\{ \epsilon_{\vec{p}} - \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}} \frac{a'^2}{a^2} - \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}^2} \frac{a'}{a} e(\vec{v} \cdot \vec{E}) + \frac{e^2 a^4 (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{8 \epsilon_{\vec{p}}^3} \right. \\ \left. - \frac{6\xi - 1}{2 \epsilon_{\vec{p}}^3} \left[ m^2 a'^2 + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a' a'''}{a^2} - \frac{2a'^2 a''}{a^3} - \frac{a''^2}{2a^2} \right) \right] + \mathcal{O}(\epsilon_{\vec{p}}^{-4}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Тут третій доданок у фігурних дужках зникає після інтегрування, оскільки він є непарним при зміні  $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ . Всі інші доданки є розбіжними та можуть бути обчислені у розмірній регуляризації шляхом переходу до  $d$ -вимірного простору-часу, як показано в рівнянні (3.55) або подібним чином:

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \epsilon_{\vec{p}} \rightarrow -\frac{m^4 a^4}{4\pi^2} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu_{\text{r}}^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)}{d(d-2)} = -\frac{m^4 a^4}{32\pi^2} \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}} + \frac{3}{2} + \mathcal{O}(4-d) \right], \quad (3.64)$$

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_{\vec{p}}} \rightarrow -\frac{m^2 a^2}{4\pi^2} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu_{\text{r}}^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right)}{d-2} = -\frac{m^2 a^2}{8\pi^2} \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}} + 1 + \mathcal{O}(4-d) \right], \quad (3.65)$$

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\epsilon_{\vec{p}}^3} \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{m^2}{4\pi\mu_{\text{r}}^2} \right)^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) = \frac{1}{4\pi^2} \left[ \frac{1}{\bar{\epsilon}} + \mathcal{O}(4-d) \right]. \quad (3.66)$$

Зібравши всі доданки, пропорційні  $1/\bar{\epsilon}$ , отримуємо розбіжну частину густини енергії:

$$\rho_\chi^{\text{div}} = \left[ \frac{e^2 \vec{E}^2}{96\pi^2} - \frac{m^4}{32\pi^2} - \frac{6\xi - 1}{16\pi^2} \frac{m^2 a'^2}{a^4} - \frac{(6\xi - 1)^2}{16\pi^2} \left( \frac{a' a'''}{a^6} - \frac{2a'^2 a''}{a^7} - \frac{a''^2}{2a^6} \right) \right] \frac{1}{\bar{\epsilon}}. \quad (3.67)$$

Цей розбіжний внесок можна усунути, ввівши відповідні контрчлени в дію. Перш за все, зазначимо, що перший доданок у рівнянні (3.67), єдиний, який за-

лежить від електричного поля, повністю скорочується контрчленом (3.59), розглянутим у попередньому підрозділі. Решта розбіжних доданків не залежить від електричного поля, а лише від маси частинки та похідних масштабного фактора за часом. Отже, вони представляють радіаційні поправки до дії Айнштейна-Гільберта для гравітації. Отже, є сенс пошукати контрчлени, які скорочують ці розбіжності, використовуючи наступний анзац:

$$\delta S_{\text{grav}} = \int d^4x \sqrt{-g} (a_1 + a_2 R + a_3 R^2). \quad (3.68)$$

Перший доданок,  $a_1$ , перенормовує космологічну константу,  $a_2$  — масу Планка, а  $a_3$  — коефіцієнт  $R^2$  доданку Старобінського [11]. Ефективний тензор енергії-імпульсу, який впливає з таких контрчленів у дії, можна отримати, проваріювавши рівняння (3.68) по метриці:

$$\begin{aligned} \delta T_{\text{grav}}^{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\delta S_{\text{grav}})}{\delta g_{\mu\nu}} = -a_1 g^{\mu\nu} + a_2 (2R^{\mu\nu} - Rg^{\mu\nu}) \\ &\quad + 4a_3 \left[ RR^{\mu\nu} - \frac{1}{4} R^2 g^{\mu\nu} - (\nabla^\mu \nabla^\nu - g^{\mu\nu} \nabla_\alpha \nabla^\alpha) R \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

00-компонента цього виразу визначає відповідну густину енергії:

$$\delta \rho_{\text{grav}} = -a_1 + 6a_2 \frac{a'^2}{a^4} - 72a_3 \left( \frac{a' a'''}{a^6} - \frac{2a'^2 a''}{a^7} - \frac{a''^2}{2a^6} \right). \quad (3.70)$$

Тепер, вимагаючи  $\rho_\chi^{\text{div}} + \delta \rho_{Z_3} + \delta \rho_{\text{grav}} = 0$ , отримуємо коефіцієнти  $a_1$ ,  $a_2$  та  $a_3$  у такому вигляді:

$$a_1 = -\frac{m^4}{32\pi^2} \frac{1}{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.71)$$

$$a_2 = \left( \xi - \frac{1}{6} \right) \frac{m^2}{16\pi^2} \frac{1}{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.72)$$

$$a_3 = -\left( \xi - \frac{1}{6} \right)^2 \frac{1}{32\pi^2} \frac{1}{\bar{\varepsilon}}, \quad (3.73)$$

що повністю фіксує контрчлени у рівнянні (3.68).

Зрештою, віднімаючи від підінтегрального виразу в рівнянні (3.34) доданки, наведені у виразі (3.63), та підсумовуючи скінченні внески в рівняннях (3.64)–(3.65), отримуємо вираз для збіжної частини густини енергії:

$$\begin{aligned} \rho_{\chi}^{\text{reg}} = & -\frac{3m^4}{64\pi^2} + \frac{6\xi - 1}{16\pi^2} \frac{m^2 a'^2}{a^4} + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 a^4} \left\{ \omega(\eta, \vec{p}) [1 + 2\mathcal{F}(\eta, \vec{p})] \right. \\ & + 2\frac{a'}{a} (6\xi - 1) \mathcal{H}(\eta, \vec{p}) - \frac{6\xi - 1}{\omega(\eta, \vec{p})} \left( \frac{a'^2}{a^2} + \frac{a''}{a} \right) \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) \right] \\ & - \epsilon_{\vec{p}} + \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}} \frac{a'^2}{a^2} + \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}^2} \frac{a'}{a} e(\vec{v} \cdot \vec{E}) - \frac{e^2 a^4 (\vec{v} \cdot \vec{E})^2}{8\epsilon_{\vec{p}}^3} \\ & \left. + \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}^3} \left[ m^2 a'^2 + \frac{6\xi - 1}{2} \left( \frac{a' a'''}{a^2} - \frac{2a'^2 a''}{a^3} - \frac{a''^2}{2a^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Цей вираз представляє фізично значущу та скінченну густину енергії утворених скалярних частинок, яку можна використовувати, зокрема, в рівнянні Фрідмана, що описує еволюцію Всесвіту.

#### 3.4.4 Слід тензора енергії-імпульсу

Нарешті, розглянемо УФ розбіжності сліду тензора енергії-імпульсу утворених скалярних частинок. Розкладаючи інтеграл у рівнянні (3.35) за допомогою виразів (3.51)–(3.53), збираємо доданки, які можуть призвести до розбіжності:

$$\begin{aligned} T_{\chi} = & \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 a^2} \left\{ -e \frac{a'}{a} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{E})}{4\epsilon_{\vec{p}}^2} - \frac{(6\xi - 1)e}{2\epsilon_{\vec{p}}^2} \vec{v} \cdot \left( \vec{E}' + 2\frac{a'}{a} \vec{E} \right) \right. \\ & - \frac{(6\xi - 1)a^2 e^2}{2\epsilon_{\vec{p}}^3} [\vec{E}^2 - 3(\vec{v} \cdot \vec{E})^2] + \frac{m^2}{\epsilon_{\vec{p}}} - \frac{6\xi - 1}{\epsilon_{\vec{p}}} \left( \frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} \right) \\ & \left. - \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_{\vec{p}}^3} m^2 \left( \frac{2a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) + \frac{(6\xi - 1)^2}{2\epsilon_{\vec{p}}^3} \left( \frac{3a''^2}{2a^4} - \frac{3a'' a'^2}{a^5} - \frac{a^{\text{IV}}}{2a^3} + \frac{2a''' a'}{a^4} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Очевидно, що перші два доданки тотожно зникають, оскільки вони непарні за імпульсом, третій не дає розбіжного внеску згідно з рівняннями (3.55) та (3.66).

Таким чином, розбіжна частина сліду не залежить від електричного поля. Розбіжності в решті доданків можна отримати, застосовуючи розмірнісну регуляризацию та використовуючи рівняння (3.65)–(3.66). Тоді отримуємо наступний вираз:

$$T_{\chi}^{\text{div}} = \left[ -\frac{m^4}{8\pi^2} - (6\xi - 1) \frac{m^2}{8\pi^2} \frac{a''}{a^3} + \frac{(6\xi - 1)^2}{8\pi^2} \left( \frac{3a''^2}{2a^6} - \frac{3a''a'^2}{a^7} - \frac{a^{\text{IV}}}{2a^5} + \frac{2a'''a'}{a^6} \right) \right] \frac{1}{\bar{\epsilon}}. \quad (3.76)$$

Легко перевірити, що цей вираз повністю скорочується слідом ефективного тензора енергії-імпульсу (3.69), якщо коефіцієнти  $a_1$ ,  $a_2$  та  $a_3$  задані рівняннями (3.71)–(3.73). Таким чином, нам не потрібно додавати нові контрчлени, щоб скоротити розбіжність у сліді тензора енергії-імпульсу.

Щоб отримати скінченну частину  $T_{\chi}$ , віднімаємо від інтеграла в рівнянні (3.35) доданки розкладу за великими  $p$  до  $O(\epsilon_p^{-3})$  включно (наведені у виразі (3.75)) та враховуємо скінченний внесок, що надходить від одиниці у виразі (3.65). Це призводить до наступної формули:

$$\begin{aligned} T_{\chi}^{\text{reg}} = & -\frac{m^4}{8\pi^2} - (6\xi - 1) \frac{m^2}{8\pi^2} \left( \frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} \right) \\ & + \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 a^4} \left\{ -4(6\xi - 1) \left[ \omega(\eta, \vec{p}) \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) + \frac{a'}{a} \mathcal{H}(\eta, \vec{p}) \right] \right. \\ & + \frac{2}{\omega(\eta, \vec{p})} \left[ m^2 a^2 - (6\xi - 1) \left( \frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \right] \left[ \frac{1}{2} + \mathcal{F}(\eta, \vec{p}) + \mathcal{G}(\eta, \vec{p}) \right] \\ & + e \frac{a'}{a} \frac{(\vec{v} \cdot \vec{E})}{4\epsilon_p^2} + \frac{(6\xi - 1)e}{2\epsilon_p^2} \vec{v} \cdot \left( \vec{E}' + 2\frac{a'}{a} \vec{E} \right) + \frac{(6\xi - 1)a^2 e^2}{2\epsilon_p^3} [\vec{E}^2 - 3(\vec{v} \cdot \vec{E})^2] \\ & - \frac{m^2}{\epsilon_p} + \frac{6\xi - 1}{\epsilon_p} \left( \frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} \right) + \frac{6\xi - 1}{2\epsilon_p^3} m^2 \left( \frac{2a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2} \right) \\ & \left. - \frac{(6\xi - 1)^2}{2\epsilon_p^3} \left( \frac{3a''^2}{2a^4} - \frac{3a''a'^2}{a^5} - \frac{a^{\text{IV}}}{2a^3} + \frac{2a'''a'}{a^4} \right) \right\}. \quad (3.77) \end{aligned}$$

Цей вираз разом з рівнянням (3.74) можна використовувати для визначення тиску утворених скалярних частинок,  $P_{\chi} = (\rho_{\chi}^{\text{reg}} - T_{\chi}^{\text{reg}})/3$ .

### 3.5 Висновки до розділу 3

У цій роботі ми описуємо утворення безспінових заряджених частинок (та античастинок) в однорідному електричному полі у Всесвіті ФЛРУ, що розширюється, виходячи з перших принципів. З цією метою ми вивчаємо збудження частинок квантового скалярного поля, яке еволюціонує на класичному залежному від часу фоні, що складається з масштабного фактора  $a(\eta)$  та електромагнітного векторного потенціалу  $\vec{A}(\eta)$ . Через відсутність статичних асимптотичних станів цієї системи в нескінченному минулому та майбутньому ми стикаємося з типовою проблемою визначення вакуумного стану та частинок у Всесвіті, що розширюється. Дотримуючись стандартної процедури [201, 202], ми будемо фізично обґрунтоване наближення для вакуумного стану — адіабатичного вакууму — в якому моди з дуже великими імпульсами майже не збуджуються. Однак ця процедура не є унікальною, оскільки можна визначити адіабатичні вакууми різного адіабатичного порядку та в різні моменти часу. Зокрема, у роботах [82] та [84] розглядалася та сама фізична система, тоді як різниця полягає у виборі адіабатичного вакууму, що призводить до дещо інших результатів. Ми стверджуємо, що підхід, представлений у статті [84], а також в даному розділі дисертації, призводить до системи рівнянь, яка більше підходить для числового моделювання задачі.

У всьому третьому розділі ми працюємо з конформним часом, в термінах якого метрика ФЛРУ явно є конформно плоскою. У простому випадку конформно зв'язаного безмасового скалярного поля за відсутності електричного поля, модове рівняння допускає точний розв'язок, який відповідає вакууму Банча-Девіса. За умови, що спочатку система перебувала в цьому стані, у будь-який момент часу в майбутньому не відбувається народження частинок. Це є проявом конформної симетрії розглянутої фізичної системи, що робить її еволюцію в просторі-часі ФЛРУ ідентичною еволюції в просторі-часі Мінковського. Ця си-

метрія не дотримувалася в системі рівнянь у роботі [82], де визначення вакуумного стану базується на розв'язку Вентцеля-Крамерса-Бріллоена для рівняння моди, записаного у фізичному часі.

У загальному випадку, коли конформна симетрія порушується масою частинки, немінимальним зв'язком  $\xi \neq 1/6$  та/або зовнішнім електричним полем, народження частинок описується системою трьох квантових рівнянь Власова для кінетичних функцій  $\mathcal{F}(\eta, \vec{p})$ ,  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$  та  $\mathcal{H}(\eta, \vec{p})$ . Перше з них є аналогом класичної одночастинкової функції розподілу в кінетичній теорії Больцмана, тоді як дві інші виникають як допоміжні динамічні змінні, що описують нелокальний у часі процес народження частинок.

Ми вивчаємо асимптотичну поведінку кінетичних функцій при великих імпульсах і показуємо, що вони спадають набагато швидше, ніж у випадку [82]. Дійсно, головним доданком у розкладі за оберненими степенями імпульсу є  $\propto p^{-4}$  для  $\mathcal{F}(\eta, \vec{p})$ ,  $\propto p^{-3}$  для  $\mathcal{G}(\eta, \vec{p})$  та  $\propto p^{-2}$  для  $\mathcal{H}(\eta, \vec{p})$  порівняно з  $\propto p^{-2}$ ,  $p^{-2}$  та  $p^{-1}$  у відповідних випадках [82]. Це робить нашу нову систему рівнянь більш придатною для чисельного аналізу на ґратці в просторі імпульсів.

Степенева поведінка кінетичних функцій при великих імпульсах призводить до УФ розбіжностей в основних спостережуваних величинах, таких як електричний струм або тензор енергії-імпульсу утворених частинок. Ми використовуємо розмірнісну регуляризацию, щоб виділити розбіжні внески та компенсувати їх шляхом введення контрчленів до дії. Контрчлени збігаються з тими, що отримані в [82], а також з відомими результатами для скалярної квантової електродинаміки, отриманими за допомогою традиційного підходу функцій Гріна [173, 201, 205].

Отриману систему квантових рівнянь Власова можна додатково використовувати для опису динаміки утворення частинок сильним електричним полем у моделях інфляційного магнітогенезу. Ще однією цікавою проблемою, яка має пряме фізичне застосування в рамках Стандартної моделі, є опис утворення

заряджених ферміонів за допомогою подібного квантово-кінетичного підходу. Наявність зовнішнього магнітного поля на додачу до електричного робить динаміку набагато цікавішою та може призвести до утворення кіральності через кіральну аномалію [206, 207]. Квантово-кінетичний опис утворення частинок у неортогональних електричних та магнітних полях є дуже актуальним, наприклад, для моделі аксіонної інфляції; однак він досі відсутній у літературі.

Результати, представлені у розділі, опубліковано в роботі [84].

## РОЗДІЛ 4

# ГЕНЕРАЦІЯ ВЕКТОРНОЇ ТЕМНОЇ МАТЕРІЇ ПІД ЧАС ІНФЛЯЦІЇ

### 4.1 Вступ

Згідно з даними спостережень, темна матерія є найпоширенішою формою матерії у Всесвіті і складає близько чверті його загальної густини енергії. Існування темної матерії підтверджується численними незалежними астрофізичними спостереженнями, включаючи криві обертання галактик, гравітаційне лінзування, динаміку гарячого газу в скупченнях, кластеризацію матерії під час формування великомасштабних структур, первинний нуклеосинтез та вимірювання космічного мікрохвильового фону. Усе це вказує на наявність невидимого масивного компонента, який взаємодіє переважно через гравітацію [86, 95, 208, 209]. Дані первинного нуклеосинтезу та космічного мікрохвильового фону додатково підтверджують, що темна матерія має бути небаріонною за своєю природою. Стандартна модель фізики елементарних частинок не може пояснити всю темну матерію: єдині життєздатні кандидати — нейтрино — є занадто легкими і жорстко обмежені зі спостережних даних про формування структур та реліктового випромінювання: нейтрино можуть складати не більше кількох відсотків від загальної кількості темної матерії. Таким чином, склад домінуючого компонента темної матерії залишається невідомим, що робить його природу центральною відкритою проблемою як у космології, так і у фізиці елементарних частинок. Широкий спектр розширень Стандартної моделі пропонує різних кандидатів

на роль темної матерії [85, 210–218]. Серед них найбільш широко вивченими є слабо взаємодіючі масивні частинки (WIMP), аксіони та темні фотони. Інші можливості включають первинні чорні діри, самовзаємодіючу, асиметричну темну матерію та інші (нещодавній вичерпний огляд див. за посиланням [208]).

Векторна темна матерія, або масивний темний фотон [117, 214],<sup>1</sup> потенційно може пояснити не лише існування прихованої маси, але й темну енергію, а також деякі інші аномалії, що спостерігаються в експериментах з фізики елементарних частинок [219–225]. Лагранжіан цієї теорії нагадує електромагнетизм, але включає як масовий доданок, так і доданок кінетичного змішування з фотонами Стандартної моделі [226]. Його можна розглядати як структуру, подібну до звичайного електромагнетизму, що включає одну або кілька додаткових векторних частинок, що взаємодіють з електромагнітним струмом. Збереження цього струму захищає векторний масовий доданок — або, більш загально, масову матрицю векторних станів — від адитивного перенормування. Якщо визначник масової матриці є нульовим, теорія обов’язково містить один безмасовий вектор, який ідентифікується як фотон, а також кілька масивних векторів, які зазвичай називають темними фотонами. У моделі мінімального темного фотона Стандартна модель розширюється лише на одну додаткову калібрувальну групу  $U(1)_D$ . Відповідний лагранжіан має вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^D F_D^{\mu\nu} - \frac{\epsilon}{2}F_{\mu\nu}F_D^{\mu\nu} + eA^\mu J_\mu \\ & + e_D A_D^\mu J_\mu^D + \frac{\epsilon e}{\sqrt{1-\epsilon^2}}A_D^\mu J_\mu + \frac{m^2}{2}A_\mu^D A_D^\mu, \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $A_\mu$  та  $F_{\mu\nu}$  — 4-потенціал і тензор напруженості для електромагнітного поля Стандартної моделі,  $J_\mu$  — струм зарядженої матерії,  $e$  — константа калібрувального зв’язку; ті ж позначення з нижнім або верхнім індексом “D” позначають

---

**Примітка 1.** Існує два типи темних фотонів: безмасові та масивні; їхні теоретичні основи, експериментальні та космологічні прояви різні. У цій роботі ми розглядаємо лише випадок масивного темного фотона, який є відповідним кандидатом на темну матерію.

відповідні величини в темному секторі;  $m_D$  — маса темного фотона, а  $\epsilon$  — параметр кінетичного змішування. У своїй найпростішій реалізації без темного струму модель повністю визначається масою темного фотона та параметром кінетичного змішування (на додачу до відомих параметрів Стандартної моделі), яких достатньо для визначення перерізів утворення темного фотона та властивостей його розпаду. Кінетичне змішування діє як портал між видимим і темним секторами, пропонуючи можливий шлях для експериментального виявлення темних фотонів. Однак на сьогоднішній день жоден темний фотон не спостерігався, і він залишається гіпотетичною частинкою. Тим не менш, експериментальні пошуки, разом з космологічними та астрофізичними даними, накладають значні обмеження на його масу та параметр кінетичного змішування [117, 124, 227, 228], див. рисунок 1.2 у розділі 1.

Дуже легкий темний фотон з малою, але ненульовою масою може слугувати кандидатом на темну матерію, якщо він генерується нетермічно у ранньому Всесвіті. В одному класі сценаріїв [116, 229] маса темного фотона генерується через механізм Штюкельберга, який вимагає немінімальної взаємодії з гравітацією. Коли параметр Габбла зменшується нижче маси темного фотона, поле починає коливатися, і ці коливання поведуться як нерелятивістська матерія, фактично поведучи себе як холодна темна матерія. Альтернативна можливість полягає в тому, що темні фотони утворюються з вакуумних флуктуацій під час інфляції [126–129, 132, 133, 135, 137, 139–142, 230–238]. На відміну від електромагнітного поля, масивне векторне поле може бути згенероване без необхідності немінімального зв'язку з гравітацією або інфлатоном. Це можливо тому, що наявність масового доданку в лагранжіані автоматично порушує конформну інваріантність дії (цією властивістю не володіє стандартний електромагнетизм). Однак у таких випадках ефективно генеруються лише поздовжні моди; див., наприклад, посилення [126, 129, 232]. Щоб досягти суттєвого підсилення поперечних мод, необхідно ввести взаємодію або з кривиною простору-часу [128, 138–

141, 231, 236], або з інфлатоном [130–135, 137, 234, 235], як це зазвичай робиться в аналогічних сценаріях інфляційного магнітогенезу (для огляду див. посилання [35, 36, 62]).

У цьому розділі ми зосереджуємося на останньому механізмі та розглядаємо одне масивне абелеве векторне поле, що взаємодіє з інфлатоном через загальний кінетичний зв'язок, аксіальний зв'язок, а також через масу, що залежить від інфлатона. Ці зв'язки включені одночасно, щоб охопити широкий спектр сценаріїв, розглянутих у літературі. Ми приділяємо особливу увагу режиму сильної зворотної реакції при інфляційній генерації масивного векторного поля.

Водночас, ми нехтуємо кінетичним змішуванням векторного поля темної матерії зі звичайним електромагнітним полем. Таким чином, ми можемо вивчати утворення темного векторного поля, повністю відокремленого від сектора Стандартної моделі. Включення кінетичного змішування є важливим наступним кроком, який ми плануємо розглянути в майбутньому.

Генерацію векторної темної матерії зазвичай описують за допомогою помодового розкладу у просторі Фур'є, де еволюція кожної окремої моди вивчається незалежно від інших. Однак цей підхід перестає бути адекватним, коли згенеровані поля стають занадто сильними і починають впливати на інфляційну динаміку. У таких випадках виникає режим сильної зворотної реакції [137, 142], і еволюція кожної моди залежить від усіх інших. Таким чином, рівняння стають нелінійними, а це вимагає іншого математичного методу, здатного враховувати ці нелінійності.

Таким методом є формалізм градієнтного розкладу (ФГР), в рамках якого розглядається набір квадратичних функцій векторного поля безпосередньо в координатному просторі. Ці функції одночасно охоплюють усі фізично значущі моди, що дозволяє працювати навіть за наявності нелінійної динаміки. ФГР раніше успішно застосовувався до різних задач, пов'язаних з інфляційним магнітогенезу [53, 60, 64–67, 83, 162, 175]. Однак він ще ніколи не використову-

вався для опису генерації масивної векторної темної матерії. Одна з цілей цієї роботи полягає в розширенні вказаного формалізму, (початково задуманого та розробленого для безмасових калібрувальних полів), щоб врахувати поздовжню поляризацію масивних векторних полів.

## 4.2 Модель векторної темної матерії

Дія, яка описує темне векторне поле  $A_\mu$  та інфлатон  $\phi$ , що взаємодіють через аксіальний та кінетичний зв'язки, має вигляд:

$$\mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi g^{\mu\nu} - V(\phi) - \frac{1}{4} I_1(\phi) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{4} I_2(\phi) F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{m^2(\phi)}{2} A_\mu A^\mu \right], \quad (4.2)$$

де  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ ,  $V(\phi)$  — потенціал інфлатона,  $I_1(\phi)$  — функція кінетичного зв'язку,  $I_2(\phi)$  — функція аксіального зв'язку,  $m(\phi)$  — ефективна маса темного фотона,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  — тензор темного векторного поля,  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\sigma\rho} F_{\sigma\rho}$  — відповідний дуальний тензор,  $\eta^{\mu\nu\sigma\rho} = \varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} / \sqrt{-g}$  та  $\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho}$  — це повністю антисиметричний символ Леві-Чівіта з  $\varepsilon^{0123} = +1$ .

Дія (4.2) дозволяє нам отримати рівняння руху для поля інфлатона  $\phi$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha [\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} \partial_\mu \phi] + \frac{dV}{d\phi} + \frac{1}{4} \frac{dI_1}{d\phi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{4} \frac{dI_2}{d\phi} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} - m \frac{dm}{d\phi} A_\mu A^\mu = 0 \quad (4.3)$$

та для векторного 4-потенціалу  $A_\alpha$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta [\sqrt{-g} I_1 F^{\beta\alpha}] + \frac{dI_2}{d\phi} \tilde{F}^{\beta\alpha} \partial_\beta \phi + m^2 A^\alpha = 0. \quad (4.4)$$

Рівняння (4.4) разом з тотожностями Біанкі

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left[ \sqrt{-g} \tilde{F}^{\mu\nu} \right] = 0 \quad (4.5)$$

утворюють систему рівнянь Прока для масивного векторного поля в даній моделі. Обчисливши варіацію від дії (4.2) по метриці, отримуємо вираз для тензора енергії-імпульсу:

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - I_1(\phi) g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} + m^2 A_\mu A_\nu - g_{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - V(\phi) - \frac{1}{4} I_1(\phi) F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{m^2}{2} A_\alpha A^\alpha \right]. \quad (4.6)$$

Враховуючи, що  $A^\mu = (A^0, a^{-2} \vec{A})$ , ми визначаємо темне електричне та магнітне поля (названі так по аналогії зі звичайними електромагнітними полями) як

$$\vec{E} = -\frac{1}{a} \left( \dot{\vec{A}} + \vec{\nabla} A^0 \right), \quad \text{та} \quad \vec{B} = \frac{1}{a^2} \text{rot} \vec{A}. \quad (4.7)$$

Тензор поля  $F_{\mu\nu}$  та відповідний дуальний тензор  $\tilde{F}_{\mu\nu}$  виражаються через електричне та магнітне поля наступним чином:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= a E^i, & F_{ij} &= -a^2 \epsilon_{ijk} B^k, \\ \tilde{F}^{0i} &= -a^{-1} B^i, & \tilde{F}^{ij} &= a^{-2} \epsilon_{ijk} E^k. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Тепер, припускаючи однорідний та ізотропний Всесвіт ФЛРУ та просторово однорідне інфлатонне поле  $\phi = \phi(t)$ , отримуємо рівняння Фрідмана, що описує розширення Всесвіту, у такому вигляді:

$$3H^2 M_{\text{P}}^2 = \rho_{\text{tot}} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + \frac{I_1}{2} \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle + \frac{m^2}{2} \langle A_0^2 \rangle + \frac{m^2}{2a^2} \langle \vec{A}^2 \rangle, \quad (4.9)$$

$$-(2\dot{H} + 3H^2) M_{\text{P}}^2 = p_{\text{tot}} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + \frac{I_1}{6} \langle \vec{E}^2 + \vec{B}^2 \rangle + \frac{m^2}{2} \langle A_0^2 \rangle - \frac{m^2}{6a^2} \langle \vec{A}^2 \rangle. \quad (4.10)$$

Тут кутові дужки позначають вакуумне усереднення операторів електричного та магнітного полів, скалярного потенціалу  $A_0$  та векторного  $\vec{A}$ .

Рівняння Кляйна–Гордона для інфлатона має вигляд

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{dI_1}{d\phi} \langle \vec{E}^2 - \vec{B}^2 \rangle + \frac{dI_2}{d\phi} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle - \frac{m}{a^2} \frac{dm}{d\phi} \langle \vec{A}^2 \rangle + m \frac{dm}{d\phi} \langle A_0^2 \rangle. \quad (4.11)$$

Нарешті, рівняння Прока у векторній формі мають вигляд

$$\dot{\vec{E}} + 2H\vec{E} - \frac{1}{a} \text{rot } \vec{B} + \frac{\dot{I}_1}{I_1} \vec{E} + \frac{\dot{I}_2}{I_1} \vec{B} - \frac{m^2}{a I_1} \vec{A} = 0, \quad (4.12)$$

$$\dot{\vec{B}} + 2H\vec{B} + \frac{1}{a} \text{rot } \vec{E} = 0, \quad (4.13)$$

$$\text{div } \vec{E} = -\frac{m^2 a}{I_1} A_0, \quad \text{div } \vec{B} = 0. \quad (4.14)$$

Для більшої зручності розкладемо векторний потенціал, електричне та магнітне поля на поздовжню та поперечну складові

$$\vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{A}_\parallel, \quad \vec{E} = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel, \quad \vec{B} = \vec{B}_\perp. \quad (4.15)$$

Поздовжні частини задовольняють тотожності

$$\text{rot } \vec{A}_\parallel = 0, \quad \text{rot } \vec{E}_\parallel = 0, \quad (4.16)$$

тоді як для поперечних маємо

$$\text{div } \vec{A}_\perp = 0, \quad \text{div } \vec{E}_\perp = 0, \quad \text{div } \vec{B}_\perp = 0. \quad (4.17)$$

У наступних двох підрозділах ми окремо дослідимо еволюцію поперечних та поздовжніх величин.

### 4.3 Поперечні поляризації векторного поля

#### 4.3.1 Еволюція мод у просторі Фур'є

Спочатку розглянемо поперечні компоненти векторного поля. У координатному просторі вони задовольняють поперечну частину рівнянь Прока (4.12)–(4.13), тоді як рівняння (4.14) задовольняються тотожно. Підставляючи  $\vec{E}_\perp = -a^{-1}\dot{\vec{A}}_\perp$  та  $\vec{B}_\perp = a^{-2}\text{rot } \vec{A}_\perp$  у рівняння (4.12), отримуємо

$$\ddot{\vec{A}}_\perp + \left(H + \frac{\dot{I}_1}{I_1}\right)\dot{\vec{A}}_\perp - \frac{1}{a^2}\Delta\vec{A}_\perp - \frac{1}{a}\frac{\dot{I}_2}{I_1}\text{rot}\vec{A}_\perp + \frac{m^2}{I_1}\vec{A}_\perp = 0, \quad (4.18)$$

де  $\Delta = \partial_i\partial_i$  позначає просторовий оператор Лапласа.

Відповідний квантовий оператор поля розкладається по множині мод Фур'є стандартним способом:

$$\hat{A}_{\perp j}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{I_1}} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[ \epsilon_j^\lambda(\vec{k}) \hat{b}_{\vec{k},\lambda} \mathcal{A}_\lambda(t, k) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \epsilon_j^{\lambda*}(\vec{k}) \hat{b}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \mathcal{A}_\lambda^*(t, k) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right], \quad (4.19)$$

де  $\mathcal{A}_\lambda(t, k)$  — модова функція;  $\vec{\epsilon}^\lambda(\vec{k})$  — вектори кругової поляризації  $\lambda = \pm$ , що мають властивості

$$\vec{\epsilon}^\lambda(\vec{k}) \cdot \vec{k} = 0, \quad \vec{\epsilon}^{\lambda*}(\vec{k}) = \vec{\epsilon}^\lambda(-\vec{k}) = \vec{\epsilon}^{-\lambda}(\vec{k}), \quad (4.20)$$

$$\vec{\epsilon}^{\lambda*}(\vec{k}) \cdot \vec{\epsilon}^{\lambda'}(\vec{k}) = \delta^{\lambda\lambda'}, \quad i\vec{k} \times \vec{\epsilon}^\lambda(\vec{k}) = \lambda k \vec{\epsilon}^\lambda(\vec{k}), \quad (4.21)$$

$$\sum_{\lambda=\pm 1} \epsilon_i^\lambda(\vec{k}) \epsilon_j^{\lambda*}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}; \quad (4.22)$$

та  $\hat{b}_{\vec{k},\lambda}$  ( $\hat{b}_{\vec{k},\lambda}^\dagger$ ) — оператори знищення (народження), що задовольняють канонічні комутаційні співвідношення

$$[\hat{b}_{\vec{k},\lambda}, \hat{b}_{\vec{k}',\lambda'}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (4.23)$$

Тоді, з рівняння (4.18), отримуємо наступне рівняння на модову функцію:

$$\ddot{\mathcal{A}}_\lambda + H\dot{\mathcal{A}}_\lambda + \left[ \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{I_1} - \lambda \frac{k}{a} \frac{\dot{I}_2}{I_1} - \frac{\ddot{I}_1 + H\dot{I}_1}{2I_1} + \left( \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \right)^2 \right] \mathcal{A}_\lambda = 0. \quad (4.24)$$

Введемо функцію

$$\mathcal{D}_\lambda(t, k) = \frac{\sqrt{I_1} a}{k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{\sqrt{I_1}} \right) = \frac{\sqrt{I_1}}{k} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{\sqrt{I_1}} \right). \quad (4.25)$$

Тоді можна представити рівняння (4.24) в еквівалентній формі двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\dot{\mathcal{A}}_\lambda = \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \mathcal{A}_\lambda + \frac{k}{a} \mathcal{D}_\lambda, \quad (4.26)$$

$$\dot{\mathcal{D}}_\lambda = -\frac{\dot{I}_1}{2I_1} \mathcal{D}_\lambda - \left( \frac{k}{a} - \lambda \frac{\dot{I}_2}{I_1} + \frac{m^2 a}{k I_1} \right) \mathcal{A}_\lambda, \quad (4.27)$$

що дуже зручно для чисельних розрахунків.

Для більшої зручності введемо такі позначення:

$$\gamma(t) = \frac{\dot{I}_1}{2HI_1}, \quad (4.28)$$

$$\xi(t) = \frac{\dot{I}_2}{2HI_1}, \quad (4.29)$$

$$\mu(t) = \frac{m}{H\sqrt{I_1}}, \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{\ddot{I}_1 + H\dot{I}_1}{2I_1 H^2} - \left( \frac{\dot{I}_1}{2HI_1} \right)^2 - \frac{m^2}{I_1 H^2} \\ &= \gamma^2 + \gamma(1 - \epsilon_H - \epsilon_\gamma) - \mu^2, \end{aligned} \quad (4.31)$$

де  $\epsilon_x \equiv -\dot{x}/(xH)$  представляє параметр повільного скочування для величини  $x$ .

Переходячи до нової змінної  $z = k\eta$ , де  $\eta$  — конформний час, рівняння (4.24)

можна переписати як

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_\lambda}{\partial z^2} + \left[ 1 - \frac{2\lambda\xi(t)}{(k/aH)} - \frac{S(t)}{(k/aH)^2} \right] \mathcal{A}_\lambda = 0. \quad (4.32)$$

Для Фур'є-моди глибоко під горизонтом,  $k/aH \gg 1$  (що відповідає  $-z \gg 1$  під час інфляції), перший доданок у дужках у рівнянні (4.32) є домінуючим, і рівняння зводиться до рівняння гармонічного осцилятора з одиничною частотою. Щоб обрати лише розв'язок цього рівняння з додатною частотою, ми накладаємо вакуумну граничну умову Банча–Девіса

$$\mathcal{A}_\lambda \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-iz}, \quad -z \gg 1. \quad (4.33)$$

Це повністю визначає розв'язок модового рівняння для всіх наступних моментів часу.

З плином часу два інші доданки в дужках стають дедалі важливішими. Зрештою, в певний момент вони стають порівнянними з одиницею. У фізично цікавому випадку весь вираз у дужках може перетинати нуль, і мода зазнає тахіонної нестабільності. Ми визначаємо імпульс моди, яка перетинає горизонт, наступним чином:

$$k_h(t) = \max_{t' \leq t} [a(t')H(t')r(t')], \quad (4.34)$$

де

$$r(t) = |\xi(t)| + \sqrt{\xi^2(t) + |S(t)|}, \quad (4.35)$$

і беремо максимальне значення виразу в рівнянні (4.34), щоб врахувати його можливу немонотонну поведінку в реалістичних моделях. Для будь-якого заданого імпульсу  $k$  можна знайти момент часу  $t_h(k)$ , коли він перетинає горизонт, тобто,

$$t_h(k) = \min_i \{t_i : a(t_i)H(t_i)r(t_i) = k\}. \quad (4.36)$$

Момент часу  $t_h(k)$  є дуже особливим для моди з імпульсом  $k$ , оскільки навко-

ло нього мода якісно змінює свою поведінку від швидких коливань, що відповідають вакуумним флуктуаціям, до плавної еволюції з можливим тахіонним підсиленням.

Для ФГР у наступному підрозділі нам знадобиться модова функція в момент перетину горизонту  $t_h$ . Щоб її знайти, ми припускаємо, що (i) величини  $\xi$  та  $S$  у рівнянні (4.32) є плавними та повільно змінюються під час інфляції, та (ii) розширення Всесвіту є квазіекспоненціальним. Перше припущення дозволяє нам встановити  $\xi$  та  $S$  постійними під час пошуку розв'язку поблизу перетину горизонту, а друге припущення дозволяє нам використовувати розв'язок де Сіттера  $\eta \approx -1/(aH)$ . Тоді рівняння (4.32) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \mathcal{A}_\lambda}{\partial z^2} + \left[ 1 + \frac{2\lambda\xi(t_h)}{z} - \frac{S(t_h)}{z^2} \right] \mathcal{A}_\lambda = 0. \quad (4.37)$$

Отримане рівняння є рівнянням Віттекера. Його розв'язок, що задовольняє граничну умову Банча–Девіса, виражається через функцію Віттекера  $W$ :

$$\mathcal{A}_\lambda(z, k) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{\lambda\pi\xi(t_h)/2} W_{\kappa, \nu}(2iz), \quad (4.38)$$

де

$$\kappa = -i\lambda\xi(t_h), \quad \nu = \sqrt{\frac{1}{4} + S(t_h)}. \quad (4.39)$$

Відповідний вираз для функції  $\mathcal{D}_\lambda$  має вигляд

$$\mathcal{D}_\lambda(z, k) = \frac{1}{\sqrt{2k}} \frac{e^{\lambda\pi\xi/2}}{z} \left[ (iz + i\lambda\xi + \gamma) W_{-i\lambda\xi, \nu}(2iz) W_{1-i\lambda\xi, \nu}(2iz) \right], \quad (4.40)$$

де параметри  $\xi$ ,  $\gamma$ ,  $\nu$  обчислюються в момент перетину горизонту,  $t_h(k)$ .

### 4.3.2 Формалізм градієнтного розкладу

Якщо згенероване калібрувальне поле достатньо сильне, і його зворотна реакція стає суттєвою, то динаміка системи стає дуже нелінійною, і всі Фур'є-

моди перестають еволюціонувати незалежно одна від одної. У такому випадку зручніше продовжувати роботу в координатному просторі та ввести наступний набір білінійних величин:

$$\mathcal{E}^{(n)} = \frac{I_1}{a^n} \langle \vec{E}_\perp \cdot \text{rot}^n \vec{E}_\perp \rangle, \quad (4.41)$$

$$\mathcal{G}^{(n)} = -\frac{I_1}{2a^n} \langle \vec{E}_\perp \cdot \text{rot}^n \vec{B}_\perp + \text{rot}^n \vec{B}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \rangle, \quad (4.42)$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \frac{I_1}{a^n} \langle \vec{B}_\perp \cdot \text{rot}^n \vec{B}_\perp \rangle. \quad (4.43)$$

Тут кутові дужки позначають вакуумне середнє, а  $n$  — ціле число, яке може приймати значення від 0 (для  $\mathcal{E}^{(n)}$ ),  $-1$  (для  $\mathcal{G}^{(n)}$ ) або  $-2$  (для  $\mathcal{B}^{(n)}$ ) до як завгодно великих додатних чисел. Від’ємний степінь оператора ротора слід розуміти як обернений оператор; наприклад, з рівняння (4.7) отримуємо

$$\text{rot}^{-1} \vec{B}_\perp = \frac{1}{a^2} \vec{A}_\perp. \quad (4.44)$$

Це співвідношення дає унікальний результат у поперечному секторі. Використовуючи рівняння (4.44), ми можемо легко отримати явні вирази для білінійних величин з від’ємними індексами:

$$\mathcal{G}^{(-1)} = -\frac{I_1}{2a} \langle \vec{E}_\perp \cdot \vec{A}_\perp + \vec{A}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \rangle, \quad (4.45)$$

$$\mathcal{B}^{(-1)} = \frac{I_1}{a} \langle \vec{B}_\perp \cdot \vec{A}_\perp \rangle \equiv \mathcal{H}_B, \quad (4.46)$$

$$\mathcal{B}^{(-2)} = \frac{I_1}{a^2} \langle \vec{A}_\perp^2 \rangle. \quad (4.47)$$

Тут  $\mathcal{H}_B$  — це магнітна спіральність.

Тепер, використовуючи рівняння Прока (4.12)–(4.14), легко вивести рівня-

ння руху для білінійних величин (4.41)–(4.43):

$$\dot{\mathcal{E}}^{(n)} + (n + 4 + 2\gamma)H\mathcal{E}^{(n)} - 4\xi H\mathcal{G}^{(n)} + 2\mathcal{G}^{(n+1)} + 2\frac{m^2}{I_1}\mathcal{G}^{(n-1)} = [\dot{\mathcal{E}}^{(n)}]_{\text{b}}, \quad (4.48)$$

$$\dot{\mathcal{G}}^{(n)} + (n + 4)H\mathcal{G}^{(n)} - 2\xi H\mathcal{B}^{(n)} - \mathcal{E}^{(n+1)} + \mathcal{B}^{(n+1)} + \frac{m^2}{I_1}\mathcal{B}^{(n-1)} = [\dot{\mathcal{G}}^{(n)}]_{\text{b}}, \quad (4.49)$$

$$\dot{\mathcal{B}}^{(n)} + (n + 4 - 2\gamma)H\mathcal{B}^{(n)} - 2\mathcal{G}^{(n+1)} = [\dot{\mathcal{B}}^{(n)}]_{\text{b}}. \quad (4.50)$$

Ці рівняння доповнені додатковими доданками праворуч, так званими граничними доданками, які виникають внаслідок внеску вакуумних мод калібрувального поля, що перетинають горизонт. Вони діють як квантове джерело, яке викачує енергію з вакуумних мод і, таким чином, принаймні частково протидіє червоному зміщенню, спричиненому розширенням Всесвіту.

Щоб краще зрозуміти причину появи граничних доданків та вивести для них явні вирази, нам потрібно знайти спектральні розклади величин  $\mathcal{E}^{(n)}$ ,  $\mathcal{G}^{(n)}$  та  $\mathcal{B}^{(n)}$ . Використовуючи рівняння (4.19), а також (4.41)–(4.43), отримуємо такі вирази:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(n)} &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+3}}{2\pi^2 a^{n+2}} I_1 \left| \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\mathcal{A}_\lambda}{\sqrt{I_1}} \right) \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} |\mathcal{D}_\lambda|^2, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n)} &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^{n+1} \frac{k^{n+4}}{4\pi^2 a^{n+3}} I_1 \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\mathcal{A}_\lambda}{\sqrt{I_1}} \right|^2 \\ &= \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^{n+1} \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} \text{Re} [\mathcal{A}_\lambda^* \mathcal{D}_\lambda], \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{B}^{(n)} = \sum_{\lambda=\pm 1} \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \lambda^n \frac{k^{n+5}}{2\pi^2 a^{n+4}} |\mathcal{A}_\lambda|^2. \quad (4.53)$$

Тут верхня межа інтегрування замінюється скінченним імпульсом. Таким чином, ми регуляризуємо УФ розбіжні інтеграли для білінійних величин. Хоча

це далеко не строге перенормування (як це робиться в квантовій теорії поля в просторі Мінковського), даний трюк дозволяє нам розділити моди Фур'є та знехтувати внесками вакуумоподібних мод.

Отже, будь-яку величину калібрувального поля  $X$  можна представити у вигляді

$$X = \int_0^{k_h} \frac{dk}{k} \frac{dX}{d \ln k}, \quad (4.54)$$

де  $k_h = k_h(t)$  — хвильове число моди, що перетинає горизонт у заданий момент часу  $t$  (див. його явну форму в рівнянні (4.34)). Значення  $X$  залежить від часу з двох причин. По-перше, його спектральна густина  $dX/d \ln k$  змінюється з часом. А по-друге, інтеграл за імпульсом має змінну верхню межу інтегрування. Доданки ліворуч у рівняннях (4.48)–(4.50) враховують першу залежність від часу. Щоб врахувати другу, нам потрібно ввести граничні доданки:

$$(\dot{X})_b = \frac{d \ln k_h}{dt} \cdot \frac{dX}{d \ln k} \Big|_{k=k_h(t)}. \quad (4.55)$$

Щоб обчислити цей граничний доданок, нам потрібно знати спектральну густину величини  $X$  у момент перетину модою горизонту. Для цього ми використовуємо явні вирази для модових функцій  $\mathcal{A}_\lambda$  та  $\mathcal{D}_\lambda$ , наведені в рівняннях (4.38) та (4.40). Вони є справедливими поблизу моменту перетину горизонту.

Імпульс моди, що перетинає горизонт у момент часу  $t$ , представлений як верхня обвідна виразу  $aHr$ , де  $r$  задано в рівнянні (4.35). З визначення верхньої монотонної обвідної випливає, що коли  $k_h(t)$  зростає з часом, воно просто збігається зі значенням  $a(t)H(t)r(t)$ . Коли  $k_h(t)$  не дорівнює  $a(t)H(t)r(t)$ , воно просто константа, тобто  $d \ln k_h/dt = 0$ . В останньому випадку граничний доданок просто зникає. Тому, підставляючи  $k_h$  у вирази для функцій мод  $\mathcal{A}_\lambda$  та  $\mathcal{D}_\lambda$ , ми можемо просто використовувати  $k_h(t) = a(t)H(t)r(t)$ .

Тепер, використовуючи рівняння (4.55), отримуємо вирази для граничних

доданків:

$$[\dot{\mathcal{E}}^{(n)}]_{\text{b}} = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{H^{n+4} r^{n+2}}{4\pi^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^n e^{\lambda\pi\xi} \times \left| \left( ir - i\lambda\xi - \gamma \right) W_{-i\lambda\xi, \nu}(-2ir) + W_{1-i\lambda\xi, \nu}(-2ir) \right|^2, \quad (4.56)$$

$$[\dot{\mathcal{G}}^{(n)}]_{\text{b}} = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{H^{n+4} r^{n+3}}{4\pi^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^{n+1} e^{\lambda\pi\xi} \times \left\{ \text{Re} [W_{i\lambda\xi, \nu}(2ir) W_{1-i\lambda\xi, \nu}(-2ir)] - \gamma |W_{i\lambda\xi, \nu}(2ir)|^2 \right\}, \quad (4.57)$$

$$[\dot{\mathcal{B}}^{(n)}]_{\text{b}} = \frac{d \ln k_h}{dt} \frac{H^{n+4} r^{n+4}}{4\pi^2} \sum_{\lambda=\pm 1} \lambda^n e^{\lambda\pi\xi} |W_{i\lambda\xi, \nu}(2ir)|^2. \quad (4.58)$$

Слід відмітити, що система рівнянь (4.48)–(4.50), в принципі, нескінченна. Дійсно, рівняння руху для величини порядку  $n$  містить величину порядку  $(n + 1)$ . На практиці цю систему необхідно обірвати на деякому скінченному порядку  $n_{\text{max}}$ . Для цього потрібно виразити величини порядку  $(n_{\text{max}} + 1)$  через величини нижчого порядку. На щастя, умову обриву легко вгадати зі спектральних розкладів (4.51)–(4.53). Дійсно, для великих  $n$  інтеграл по імпульсу в основному задається верхньою межею інтегрування. Тому можна приблизно записати

$$\mathcal{E}^{(n_{\text{max}}+1)} \approx \left( \frac{k_h}{a} \right)^2 \mathcal{E}^{(n_{\text{max}}-1)}. \quad (4.59)$$

Аналогічні співвідношення маємо для  $\mathcal{G}^{(n_{\text{max}}+1)}$  та  $\mathcal{B}^{(n_{\text{max}}+1)}$ . Також можна використовувати складніші умови обриву, як-от запропонована в [66].

Незважаючи на те, що рівняння (4.48) та (4.49) для величин  $n$ -го порядку також містять доданки порядку  $(n - 1)$ , система не є нескінченною в напрямку негативних порядків. Дійсно, рівняння (4.50) не містить таких доданків нижчого порядку, і це дозволяє замкнути систему. Релевантними є лише три величини від'ємного порядку:  $\mathcal{G}^{(-1)}$ ,  $\mathcal{B}^{(-1)}$  та  $\mathcal{B}^{(-2)}$ .

Наприкінці цього підрозділу хотілося б зазначити, що ФГР для поперечних

мод векторного поля, представлений тут, дуже схожий на той, що розроблений для безмасового калібрувального поля в роботах [53, 60, 67, 175], з єдиними відмінностями, що полягають у наявності масового доданку. У границі  $\mu = m/(H\sqrt{I_1}) \ll 1$  (що є типовою ситуацією для реалістичних моделей темного фотона), цей формалізм просто зводиться до того, що наведено в статтях [67, 175] і розділі 2. Ця ситуація не буде повторюватися для поздовжніх мод, які ми розглянемо в наступному підрозділі.

## 4.4 Поздовжні поляризації векторного поля

### 4.4.1 Еволюція мод у просторі Фур'є

Тепер перейдемо до поздовжніх мод калібрувального поля. Їх еволюція визначається поздовжньою частиною рівняння (4.12) та першим рівнянням у (4.14). Закон Фарадея (4.13) та друге рівняння у (4.14) виконуються ідентично. Використовуючи  $\vec{E}_{\parallel} = -(\dot{\vec{A}}_{\parallel} + \vec{\nabla} A_0)/a$  та  $\vec{B}_{\parallel} = 0$ , перепишемо два відповідні рівняння у такому вигляді:

$$\ddot{\vec{A}}_{\parallel} + \left(H + \frac{\dot{I}_1}{I_1}\right)\dot{\vec{A}}_{\parallel} + \frac{m^2}{I_1}\vec{A}_{\parallel} = -\vec{\nabla} \left[\dot{A}_0 + \left(H + \frac{\dot{I}_1}{I_1}\right)A_0\right], \quad (4.60)$$

$$\text{div } \dot{\vec{A}}_{\parallel} = \left(\frac{m^2 a^2}{I_1} - \Delta\right)A_0. \quad (4.61)$$

Ці рівняння описують динаміку одного фізичного ступеня вільності, тобто поздовжньої складової калібрувального поля. Компонента  $A_0$  не є незалежною і може бути визначена з відомої  $\vec{A}_{\parallel}$  за допомогою рівняння (4.61). Розглядаючи квантовані поля, ми розкладаємо польові оператори за множиною поздовжніх Фур'є-мод наступним чином:

$$\hat{\vec{A}}_{\parallel}(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{I_1} m} \left[ \frac{\vec{k}}{k} \hat{b}_{\vec{k}, L} \mathcal{A}_L(t, k) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \text{h.c.} \right], \quad (4.62)$$

$$\hat{A}_0(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{I_1} m} \left[ \frac{i}{a} \hat{b}_{\vec{k}, L} \mathcal{D}_L(t, k) e^{i \vec{k} \cdot \vec{x}} + \text{h.c.} \right], \quad (4.63)$$

де  $\mathcal{A}_L(t, k)$  та  $\mathcal{D}_L(t, k)$  — модові функції,  $\hat{b}_{\vec{k}, L}$  ( $\hat{b}_{\vec{k}, L}^\dagger$ ) — оператори знищення (народження) поздовжньої моди з імпульсом  $\vec{k}$ , а “h.c.” позначає ермітово-спряжені доданки. Оператори  $\hat{b}_{\vec{k}, L}$  та  $\hat{b}_{\vec{k}, L}^\dagger$  задовольняють канонічні комутаційні співвідношення

$$[\hat{b}_{\vec{k}, L}, \hat{b}_{\vec{k}', L}^\dagger] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (4.64)$$

Слід зауважити, що вони також комутують з усіма операторами знищення та народження поперечних мод.

Рівняння (4.61) дає зв'язок між модовими функціями  $\mathcal{A}_L(t, k)$  та  $\mathcal{D}_L(t, k)$ :

$$\mathcal{A}_L - \left( \frac{\dot{m}}{m} + \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \right) \mathcal{A}_L - \left( \frac{k}{a} + \frac{m^2}{I_1} \frac{a}{k} \right) \mathcal{D}_L = 0. \quad (4.65)$$

Далі з рівняння (4.60) отримуємо друге рівняння руху

$$\dot{\mathcal{D}}_L + \left[ 2H + \frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \right] \mathcal{D}_L + \frac{k}{a} \mathcal{A}_L = 0, \quad (4.66)$$

що разом з попереднім являє собою найпростішу систему рівнянь, придатну для числової реалізації.

Рівняння (4.65)–(4.66) можна об'єднати в одне диференціальне рівняння другого порядку на модову функцію  $\mathcal{A}_L(t, k)$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{A}}_L + & \left[ H - 2\frac{\dot{m}}{m} + \frac{2k^2 I_1}{k^2 I_1 + m^2 a^2} \left( H + \frac{\dot{m}}{m} - \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \right) \right] \dot{\mathcal{A}}_L \\ & + \left[ \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{I_1} + 2\frac{\dot{m}^2}{m^2} - H\frac{\dot{m}}{m} - \frac{\ddot{m}}{m} - \frac{\ddot{I}_1 + H\dot{I}_1}{2I_1} + \frac{\dot{I}_1^2}{4I_1^2} \right. \\ & \left. - \frac{2k^2 I_1}{k^2 I_1 + m^2 a^2} \left( \frac{\dot{m}^2}{m^2} + H\frac{\dot{m}}{m} + H\frac{\dot{I}_1}{2I_1} - \frac{\dot{I}_1^2}{4I_1^2} \right) \right] \mathcal{A}_L = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Використовуючи безрозмірні параметри (4.28)–(4.30) та

$$M = \frac{1}{H} \frac{\dot{m}}{m}, \quad (4.68)$$

ми переписуємо рівняння (4.67) у більш компактній формі

$$\begin{aligned} \ddot{\mathcal{A}}_L + \frac{(k/aH)^2(3-2\gamma) + \mu^2(1-2M)}{(k/aH)^2 + \mu^2} H \dot{\mathcal{A}}_L \\ + \left[ (k/aH)^2 + \mu^2 + \gamma^2 - \gamma(3 - \epsilon_H - \epsilon_\gamma) - M^2 - M(3 - \epsilon_H - \epsilon_M) \right. \\ \left. + \frac{2\mu^2}{(k/aH)^2 + \mu^2} (M^2 + M + \gamma - \gamma^2) \right] H^2 \mathcal{A}_L = 0. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Введемо канонічно нормалізовану поздовжню модову функцію

$$\psi_L(t, k) = \left( m^2 + \frac{k^2 I_1}{a^2} \right)^{-1/2} \mathcal{A}_L(t, k), \quad (4.70)$$

рівняння руху для якої має вигляд

$$\ddot{\psi}_L + H \dot{\psi}_L + Q \psi_L = 0, \quad (4.71)$$

де

$$\begin{aligned} Q(t, k) = \frac{k^2}{a^2} + \frac{m^2}{I_1} + \frac{a^2 m^2}{k^2 I_1 + a^2 m^2} \left[ -\frac{\ddot{I}_1}{2I_1} - \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{m}}{m} \right) \frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} \right] + \\ + \frac{a^4 m^4}{(k^2 I_1 + a^2 m^2)^2} \left[ \left( \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \right)^2 \left( \frac{4k^2 I_1}{a^2 m^2} + 1 \right) - \frac{H \dot{I}_1}{2I_1} \left( \frac{7k^2 I_1}{a^2 m^2} + 1 \right) - \frac{\dot{I}_1}{2I_1} \frac{\dot{m}}{m} \frac{6k^2 I_1}{a^2 m^2} + \right. \\ \left. + H^2 \left( -\frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} + 2 \right) \frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} + 3H \frac{\dot{m}}{m} \left( -\frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} + 1 \right) \frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} + 3 \left( \frac{\dot{m}}{m} \right)^2 \cdot \frac{k^2 I_1}{a^2 m^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Для тривіального кінетичного зв'язку,  $I_1 \equiv 1$ , цей вираз збігається з тим, що наведено в роботах [237, 238]. У границі  $\mu \ll 1$  та для  $k \gtrsim aH$ , вираз для  $Q$

спрощується до

$$Q|_{\frac{k}{aH} \gtrsim 1, \mu \ll 1} \approx \frac{k^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{m}}{m} - H^2 - 3H\frac{\dot{m}}{m}. \quad (4.73)$$

Глибоко під горизонтом рівняння руху для  $\psi_L$  у конформному часі  $\eta$  набуває осцилятороподібної форми  $\psi_L''(\eta, k) + a^2 Q \psi_L(\eta, k) = 0$ . Щоб отримати додатно-частотний розв'язок цього рівняння, ми накладаємо граничну умову Банча–Девіса

$$\psi_L \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-iz}, \quad -z \gg 1. \quad (4.74)$$

Використовуючи цю умову, а також вираз (4.70) і рівняння (4.65), ми легко знаходимо граничні умови для  $\mathcal{A}_L$  та  $\mathcal{D}_L$ :

$$\mathcal{A}_L(t, k) \simeq \frac{1}{a} \sqrt{\frac{k I_1(t)}{2}} e^{-ik\eta(t)}, \quad (4.75)$$

$$\mathcal{D}_L(t, k) \simeq \sqrt{\frac{I_1(t)}{2k}} \left( -i\frac{k}{a} - H - \frac{\dot{m}}{m} \right) e^{-ik\eta(t)}. \quad (4.76)$$

Обидва умови мають місце при  $-k\eta(t) \gg 1$ .

Для ФГР у наступному підрозділі нам знадобиться модова функція в момент перетину горизонту  $t_h$ . З цією метою, як і в попередньому розділі, переходимо до змінної  $z = k\eta(t)$  та отримуємо канонічне модове рівняння у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial z^2} + \left[ 1 - \frac{R^2}{(k/aH)^2} \right] \psi_L = 0, \quad (4.77)$$

де

$$R^2(t) = 2 + 3M + M^2 - \epsilon_H(1 + M) - M\epsilon_M. \quad (4.78)$$

З рівняння (4.77) ми можемо знайти розумне визначення імпульсу моди, яка перетинає горизонт. Фактично, коли другий доданок у дужках стає порівняним з одиницею, поведінка моди починає відхилятися від вакуумного рішення. Тому

ми визначаємо

$$k_{h,L}(t) = \max_{t' \leq t} [a(t')H(t')|R(t')|] , \quad (4.79)$$

де знову ж таки верхня монотонна обвідна використовується для того, щоб після перетину модою горизонту вона ніколи більше не перетинала його назад під час інфляції. Крім того, для будь-якої заданої моди  $k$  ми можемо знайти момент часу  $t_{h,L}$ , коли вона перетинає горизонт:

$$t_{h,L} = \min_i \{t_i : a(t_i)H(t_i)|R(t_i)| = k\} . \quad (4.80)$$

Тоді, щоб отримати наближений розв'язок рівняння (4.77), дійсний в околі моменту перетину горизонту, ми (i) припускаємо чистий розклад де Сіттера,  $H = \text{const}$ ,  $aH = -1/\eta$ ; та (ii) розглядаємо  $R$  як константу, взявши її значення в момент перетину горизонту (оскільки глибоко під горизонтом мода взагалі не відчуває  $R$ ). Рівняння (4.77) набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 \psi_L}{\partial z^2} + \left[ 1 - \frac{R^2(t_{h,L})}{z^2} \right] \psi_L = 0 . \quad (4.81)$$

Його розв'язок, що задовольняє граничну умову Банча–Девіса, виражається через функцію Віттекера або функцію Ганкеля першого роду наступним чином:

$$\begin{aligned} \psi_L(z,k) &= \frac{1}{\sqrt{2k}} W_{0,\alpha}(2iz) \\ &= \frac{e^{i\pi(2\alpha+1)/4}}{\sqrt{2k}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-z) H_{\alpha}^{(1)}(-z) , \end{aligned} \quad (4.82)$$

де

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{4} + R^2(t_{h,L})} . \quad (4.83)$$

Зрештою, вирази для модових функцій  $\mathcal{A}_L$  та  $\mathcal{D}_L$  мають вигляд

$$\mathcal{A}_L(z, k) = e^{i\pi(2\alpha+1)/4} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\pi I_1}{k}} (-z)^{3/2} H_\alpha^{(1)}(-z), \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_L(z, k) = & -e^{i\pi(2\alpha+1)/4} \frac{H}{2} \sqrt{\frac{\pi I_1}{k}} (-z)^{3/2} \\ & \times \left[ \frac{3/2 + \alpha + M}{(-z)} H_\alpha^{(1)}(-z) - H_{\alpha+1}^{(1)}(-z) \right], \end{aligned} \quad (4.85)$$

де параметри  $M$ ,  $\gamma$  та  $\alpha$  обчислюються в момент перетину горизонту,  $t_{h,L}(k)$ .

#### 4.4.2 Формалізм градієнтного розкладу

Введемо допоміжну величину

$$\Phi = \frac{1}{a} (-\Delta)^{-1/2} \operatorname{div} \vec{A}_\parallel. \quad (4.86)$$

Вона має спектральний розклад подібний до  $A_0$ , див. рівняння (4.63), із заміною модової функції  $\mathcal{D}_L$  на  $\mathcal{A}_L$ . У цьому виразі та далі дробові та від'ємні степені оператора Лапласа повинні розглядатися формально, враховуючи представлення Фур'є відповідних величин. З рівнянь (4.60)–(4.61) отримуємо таку систему рівнянь для двох скалярних функцій,  $A_0$  та  $\Phi$ :

$$\dot{A}_0 = -H(3 + 2M)A_0 - \frac{(-\Delta)^{1/2}}{a} \Phi, \quad (4.87)$$

$$\dot{\Phi} = -H\Phi + \frac{m^2}{I_1} \frac{a}{(-\Delta)^{1/2}} A_0 + \frac{(-\Delta)^{1/2}}{a} A_0. \quad (4.88)$$

З метою побудови аналога ФГР з попереднього розділу введемо наступний

набір білінійних величин:

$$\mathcal{Q}^{(2p)} = \frac{m^2}{a^{2p}} \langle A_0 (-\Delta)^p A_0 \rangle, \quad (4.89)$$

$$\mathcal{F}^{(2p)} = \frac{m^2}{a^{2p}} \langle \Phi (-\Delta)^p \Phi \rangle, \quad (4.90)$$

$$\mathcal{K}^{(2p+1)} = \frac{m^2}{2a^{2p+1}} \langle \Phi (-\Delta)^{p+1/2} A_0 + A_0 (-\Delta)^{p+1/2} \Phi \rangle. \quad (4.91)$$

Їх можна виразити через відповідні модові функції наступним чином:

$$\mathcal{Q}^{(2p)} = \int_0^{k_{h,L}} \frac{dk}{k} \frac{1}{2\pi^2 I_1} \frac{k^{2p+3}}{a^{2p+2}} |\mathcal{D}_L|^2, \quad (4.92)$$

$$\mathcal{F}^{(2p)} = \int_0^{k_{h,L}} \frac{dk}{k} \frac{1}{2\pi^2 I_1} \frac{k^{2p+3}}{a^{2p+2}} |\mathcal{A}_L|^2, \quad (4.93)$$

$$\mathcal{K}^{(2p+1)} = \int_0^{k_{h,L}} \frac{dk}{k} \frac{1}{2\pi^2 I_1} \frac{k^{2p+4}}{a^{2p+3}} \operatorname{Re} [\mathcal{A}_L^* \mathcal{D}_L]. \quad (4.94)$$

Тепер, спираючись на визначення функцій  $\mathcal{Q}^{(2p)}$ ,  $\mathcal{F}^{(2p)}$ ,  $\mathcal{K}^{(2p+1)}$  у координатному просторі (рівняння (4.89)–(4.91)) або на наведені вище спектральні розклади, ми використовуємо рівняння (4.87)–(4.88) або, що еквівалентно, рівняння (4.65)–(4.66) для виведення рівнянь руху для білінійних величин:

$$\dot{\mathcal{Q}}^{(2p)} + 2H(p+3+M)\mathcal{Q}^{(2p)} + 2\mathcal{K}^{(2p+1)} = [\dot{\mathcal{Q}}^{(2p)}]_{\text{b}}, \quad (4.95)$$

$$\dot{\mathcal{F}}^{(2p)} + 2H(p+1-M)\mathcal{F}^{(2p)} - 2\mathcal{K}^{(2p+1)} - \frac{2m^2}{I_1} \mathcal{K}^{(2p-1)} = [\dot{\mathcal{F}}^{(2p)}]_{\text{b}}, \quad (4.96)$$

$$\dot{\mathcal{K}}^{(2p+1)} + 2H(p+5/2)\mathcal{K}^{(2p+1)} + \mathcal{F}^{(2p+2)} - \mathcal{Q}^{(2p+2)} - \frac{m^2}{I_1} \mathcal{Q}^{(2p)} = [\dot{\mathcal{K}}^{(2p+1)}]_{\text{b}}. \quad (4.97)$$

Присутність доданків у правих частинах рівнянь, т. зв. граничних доданків, знову пояснюється тим фактом, що в білінійних величинах враховуються лише моди з імпульсами  $k \leq k_{h,L}$ , і що пороговий імпульс  $k_{h,L}$  зростає з часом. Аналогічно до поперечного випадку, граничні доданки можна вивести, використовуючи спектральні розклади білінійних величин (4.92)–(4.94), диференціюючи їх за часом

і взявши лише доданок, що походить з верхньої межі інтегрування. Загальний вираз впливає з рівнянь (4.54)–(4.55) із заміною  $k_h \rightarrow k_{h,L}$ . Зрештою, отримуємо такі вирази:

$$[\dot{\mathcal{Q}}^{(2p)}]_b = \frac{d \ln k_{h,L}}{dt} \frac{H^{2p+4} |R|^{2p+5}}{8\pi} \times \left| H_{\alpha+1}^{(1)}(|R|) - \frac{3/2 + \alpha + M}{|R|} H_{\alpha}^{(1)}(|R|) \right|^2, \quad (4.98)$$

$$[\dot{\mathcal{F}}^{(2p)}]_b = \frac{d \ln k_{h,L}}{dt} \frac{H^{2p+4} |R|^{2p+5}}{8\pi} \left| H_{\alpha}^{(1)}(|R|) \right|^2, \quad (4.99)$$

$$[\dot{\mathcal{K}}^{(2p+1)}]_b = \frac{d \ln k_{h,L}}{dt} \frac{H^{2p+5} |R|^{2p+6}}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ H_{\alpha}^{(1)*}(|R|) \times \left[ H_{\alpha+1}^{(1)}(|R|) - \frac{3/2 + \alpha + M}{|R|} H_{\alpha}^{(1)}(|R|) \right] \right\}. \quad (4.100)$$

Система рівнянь ФГР також нескінченна, як і в поперечному випадку. Дійсно, рівняння для  $\mathcal{Q}^{(2p)}$  та  $\mathcal{F}^{(2p)}$  містять  $\mathcal{K}^{(2p+1)}$ , тоді як рівняння для останнього містить  $\mathcal{Q}^{(2p+2)}$  та  $\mathcal{F}^{(2p+2)}$  тощо. Систему можна обірвати двома способами:

(i) при парному порядку  $2p_{\max}$  шляхом накладання співвідношення

$$\mathcal{K}^{(2p_{\max}+1)} = \left( \frac{k_{h,L}}{a} \right)^2 \mathcal{K}^{(2p_{\max}-1)} \quad (4.101)$$

і, таким чином, обриваючи систему на рівняннях для  $\mathcal{Q}^{(2p_{\max})}$  та  $\mathcal{F}^{(2p_{\max})}$ ;

(ii) у непарному порядку  $(2p_{\max} + 1)$  шляхом накладання співвідношень

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{(2p_{\max}+2)} &= \left( \frac{k_{h,L}}{a} \right)^2 \mathcal{Q}^{(2p_{\max})}, \\ \mathcal{F}^{(2p_{\max}+2)} &= \left( \frac{k_{h,L}}{a} \right)^2 \mathcal{F}^{(2p_{\max})}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

обриваючи систему на рівняннях для  $\mathcal{K}^{(2p_{\max}+1)}$ .

Через наявність доданків нижчого порядку, тобто  $\mathcal{K}^{(2p-1)}$  у рівнянні для  $\mathcal{F}^{(2p)}$  та  $\mathcal{Q}^{(2p+2)}$  у рівнянні для  $\mathcal{K}^{(2p+1)}$ , система рівнянь також поширюється на

від'ємні порядки. Однак той факт, що такі доданки відсутні в рівнянні для  $\mathcal{Q}^{(2p)}$ , дозволяє нам замкнути систему вже при  $p = -1$ . Отже, єдиними білінійними величинами з від'ємними порядками є  $\mathcal{Q}^{(-2)}$  та  $\mathcal{K}^{(-1)}$ . Більше того, ми побачимо, що вони є не лише допоміжними величинами, що дозволяють нам замкнути систему рівнянь ФГР; один з них,  $\mathcal{Q}^{(-2)}$ , пов'язаний з густиною електричної енергії та входить до фонових рівнянь руху.

## 4.5 Повна система рівнянь

Підсумуємо всі рівняння, які ми отримали в цьому розділі. Почнемо з фонових рівнянь для параметра Габбла та скалярного інфлатонного поля. Нам потрібно виразити всі величини калібрувального поля, що входять до цих рівнянь, через поперечні та поздовжні білінійні величини. Оскільки поперечний та поздовжній внески ніколи не змішуються всередині квадратичних виразів, ми можемо виписати їх окремо.

Величини, до яких включено магнітне поле, є найпростішими, оскільки вони містять лише поперечні компоненти:

$$I_1 \langle \vec{B}^2 \rangle = I_1 \langle \vec{B}_\perp^2 \rangle = \mathcal{B}^{(0)}, \quad (4.103)$$

$$\frac{I_1}{2} \langle \vec{E} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{I_1}{2} \langle \vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp + \vec{B}_\perp \cdot \vec{E}_\perp \rangle = -\mathcal{G}^{(0)}. \quad (4.104)$$

Доданок з квадратом електричного поля потрібно розбити як  $I_1 \langle \vec{E}^2 \rangle = I_1 \langle \vec{E}_\perp^2 \rangle + I_1 \langle \vec{E}_\parallel^2 \rangle$ , де

$$I_1 \langle \vec{E}_\perp^2 \rangle = \mathcal{E}^{(0)}, \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} I_1 \langle \vec{E}_\parallel^2 \rangle &= I_1 \langle [(-\Delta)^{-1/2} \operatorname{div} \vec{E}_\parallel]^2 \rangle = \\ &= \frac{m^4 a^2}{I_1} \langle A_0 (-\Delta)^{-1} A_0 \rangle = \frac{m^2}{I_1} \mathcal{Q}^{(-2)}, \end{aligned} \quad (4.106)$$

і в останньому рядку ми використовували рівняння (4.14) для дивергенції еле-

ктричного поля.

Далі ми виражаємо квадратичні доданки за векторним потенціалом. Квадрат 0-компоненти має простий вигляд

$$m^2 \langle A_0^2 \rangle = \mathcal{Q}^{(0)}. \quad (4.107)$$

Квадрат 3-вектора розкладається аналогічно до внеску від електричного поля:

$$\frac{m^2}{a^2} \langle \vec{A}_\perp^2 \rangle = \frac{m^2}{I_1} \mathcal{B}^{(-2)}, \quad (4.108)$$

$$\frac{m^2}{a^2} \langle \vec{A}_\parallel^2 \rangle = m^2 \langle \left[ \frac{1}{a} (-\Delta)^{-1/2} \operatorname{div} \vec{A}_\parallel \right]^2 \rangle = m^2 \langle \Phi^2 \rangle = \mathcal{F}^{(0)}. \quad (4.109)$$

Зібравши всі необхідні доданки, запишемо рівняння Фрідмана (4.9)–(4.10) у вигляді

$$3H^2 M_{\text{P}}^2 = \rho_{\text{tot}} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) + \frac{1}{2} \left( \mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)} + \mathcal{Q}^{(0)} + \mathcal{F}^{(0)} \right) + \frac{m^2}{2I_1} \left( \mathcal{Q}^{(-2)} + \mathcal{B}^{(-2)} \right), \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} - (2\dot{H} + 3H^2) M_{\text{P}}^2 = p_{\text{tot}} = & \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) + \frac{1}{6} \left( \mathcal{E}^{(0)} + \mathcal{B}^{(0)} + 3\mathcal{Q}^{(0)} - \mathcal{F}^{(0)} \right) \\ & + \frac{m^2}{6I_1} \left( \mathcal{Q}^{(-2)} - \mathcal{B}^{(-2)} \right). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Рівняння Кляйна–Гордона (4.11) має вигляд

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = & \frac{1}{2I_1} \frac{dI_1}{d\phi} \left( \mathcal{E}^{(0)} - \mathcal{B}^{(0)} + \frac{m^2}{I_1} \mathcal{Q}^{(-2)} \right) - \frac{1}{I_1} \frac{dI_2}{d\phi} \mathcal{G}^{(0)} \\ & + \frac{1}{m} \frac{dm}{d\phi} \left( \mathcal{Q}^{(0)} - \mathcal{F}^{(0)} - \frac{m^2}{I_1} \mathcal{B}^{(-2)} \right). \end{aligned} \quad (4.112)$$

Нарешті, нам також потрібно взяти систему диференціальних рівнянь (4.48)–(4.50) для поперечних компонент калібрувального поля, обірвану на деякому скінченному порядку  $n_{\text{max}}$ , та систему рівнянь (4.95)–(4.97) для поздовжніх мод, обірвану на скінченному порядку  $2p_{\text{max}}$  або  $2p_{\text{max}} + 1$ .

У наступному підрозділі ми застосуємо ФГР, розроблений у цьому та попередніх підрозділах, до кількох обраних сценаріїв інфляційної генерації векторного поля.

## 4.6 Чисельні результати

### 4.6.1 Конкретизація моделі

Розглянемо найпростішу хаотичну інфляційну модель з квадратичним інфляційним потенціалом

$$V(\phi) = \frac{m_\phi^2 \phi^2}{2} \quad (4.113)$$

з масовим параметром  $m_\phi = 6 \times 10^{-6} M_{\text{P}}$ . Хоча ця модель виключається спостереженнями реліктового випромінювання [13] (адже вона передбачає занадто велику амплітуду тензорних збурень), ми використовуємо її тут для ілюстрації та заради простоти. Більше того, параболічна форма потенціалу в рівнянні (4.113) забезпечує гарне наближення до багатьох реалістичних інфляційних потенціалів поблизу їхніх мінімумів, тобто в області, близькій до кінця інфляції, а це особливо актуально для генерації векторного поля.

Початкові умови для поля інфлатона встановлюються приблизно за 60  $e$ -фолдингів від кінця інфляції (без калібрувальних полів) шляхом вибору  $\phi(0) = \phi_0 = 15.5 M_{\text{P}}$ ; відповідне значення для похідної інфлатона береться з розв'язку для режиму повільного скочування  $\dot{\phi}(0) \approx -V' M_{\text{P}} / \sqrt{3V}|_{\phi_0} = -\sqrt{2/3} m_\phi M_{\text{P}} \approx -4.9 \times 10^{-6} M_{\text{P}}^2$ .

У чисельному аналізі ми розглядаємо границю дуже легкого векторного поля, тобто

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{I_1} H} \ll 1. \quad (4.114)$$

Це дозволяє нам явно опустити всі доданки, що містять фактор  $m^2/I_1$ , у рівняннях Фрідмана (4.110)–(4.111), рівнянні Кляйна–Гордона (4.112), а також у

системах рівнянь ФГР (4.48)–(4.50) та (4.95)–(4.97). Зауважимо, що це не відповідає переходу до безмасового векторного поля та відкиданню його поздовжніх мод. Ми побачимо, що якщо маса мала, але залежить від часу (а фактично, від інфлатона), то може мати місце ефективна генерація векторного поля, особливо його поздовжніх мод. Іншими словами, хоча ми встановлюємо  $\mu \ll 1$ , ми залишаємо величину  $M = \dot{m}/(mH)$  скінченною.

У наближенні малої маси (див. останню формулу) поперечна система ФГР (4.48)–(4.50) набуває такої ж форми, як і у випадку безмасового калібрувального поля. Така система вже була широко досліджена в літературі раніше, див. роботи [53, 60, 66, 67, 175]. Зауважимо, що масові ефекти, що залежать від часу, не відображаються в системі рівнянь для поперечних мод; ці рівняння чутливі лише до кінетичного та аксіального зв'язків. З іншого боку, поздовжні моди векторного поля абсолютно нечутливі до аксіального зв'язку. Більше того, кінетичний зв'язок входить лише до граничних доданків, а також не з'являється явно в системі ФГР (4.95)–(4.97). Оскільки нас в першу чергу цікавить вивчення генерації поздовжніх мод, у нашому чисельному аналізі ми залишаємо лише масовий зв'язок векторного поля з інфлатоном та/або кінетичний зв'язок. Таким чином, далі в цьому розділі ми завжди покладатимемо  $I_2(\phi) = 0$ .

Для кінетичного зв'язку ми припускаємо функціональну залежність, запропоновану Ратрою [153] в контексті інфляційного магнітогенезу:

$$I_1(\phi) = \exp\left(\frac{\beta\phi}{M_P}\right), \quad (4.115)$$

де  $\beta$  — безрозмірна константа зв'язку. В принципі, щоб уникнути проблеми сильного зв'язку, слід брати лише значення  $\beta > 0$ . Однак, у нашому чисельному аналізі, ми також розглянемо деякі від'ємні значення, щоб побачити якісні відмінності в картині генерації векторного поля.<sup>1</sup>

---

**Примітка 1.** У реалістичній конфігурації, що дозволяє уникнути проблеми сильного зв'язку, можна розмістити функцію зв'язку з від'ємними  $\beta$  на скінченних інтервалах часу, якщо за ними йдуть інтервали з  $\beta > 0$  (наприклад, у випадку кусково-подрібненої функції зв'язку); див., наприклад, роботи [57, 59, 75, 239, 240].

Залежна від інфлатона функція масового зв'язку також обирається в експоненційній формі

$$m(\phi) = m_0 \exp\left(\frac{\beta\phi}{2M_{\text{P}}}\right), \quad (4.116)$$

де  $m_0 \ll H$ , і ми використовуємо ту саму константу зв'язку  $\beta$ , що й для кінетичної функції ратрівського типу (4.115) (якщо остання також включена; якщо ні, то це просто незалежний зв'язок). Це зроблено головним чином лише для того, щоб мінімізувати кількість незалежних параметрів у нашій системі. Додатковою мотивацією для такого вибору функцій кінетичного та масового зв'язку є прагнення зробити інфлатон універсально зв'язаним з усім лагранжіаном векторного поля:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = I_1(\phi) \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m_0^2}{2} A_\mu A^\mu \right]. \quad (4.117)$$

Тепер, коли ми визначили нашу модель, перейдемо до представлення чисельних результатів.

#### 4.6.2 Чистий масовий зв'язок

Спочатку розглянемо випадок, коли присутній лише масовий зв'язок виду (4.116), тоді як кінетичний та аксіальний зв'язки є тривіальними. У такому випадку можна повністю знехтувати поперечними модами та виключити їхній внесок з фонових рівнянь, оскільки вони не збуджуються вище вакууму.

Ми починаємо зі слабшого зв'язку  $\beta = 12$ , для якого поздовжні моди залишаються достатньо слабкими, щоб не викликати зворотну реакцію на еволюцію інфляційного фону. Верхня панель рис. 4.1 показує еволюцію компонентів густини енергії

$$\rho_{\mathcal{Q}} = \frac{m^2}{2} \langle A_0^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{Q}^{(0)}, \quad (4.118)$$

$$\rho_{\mathcal{F}} = \frac{m^2}{2a^2} \langle \vec{A}_{\parallel}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{F}^{(0)} \quad (4.119)$$

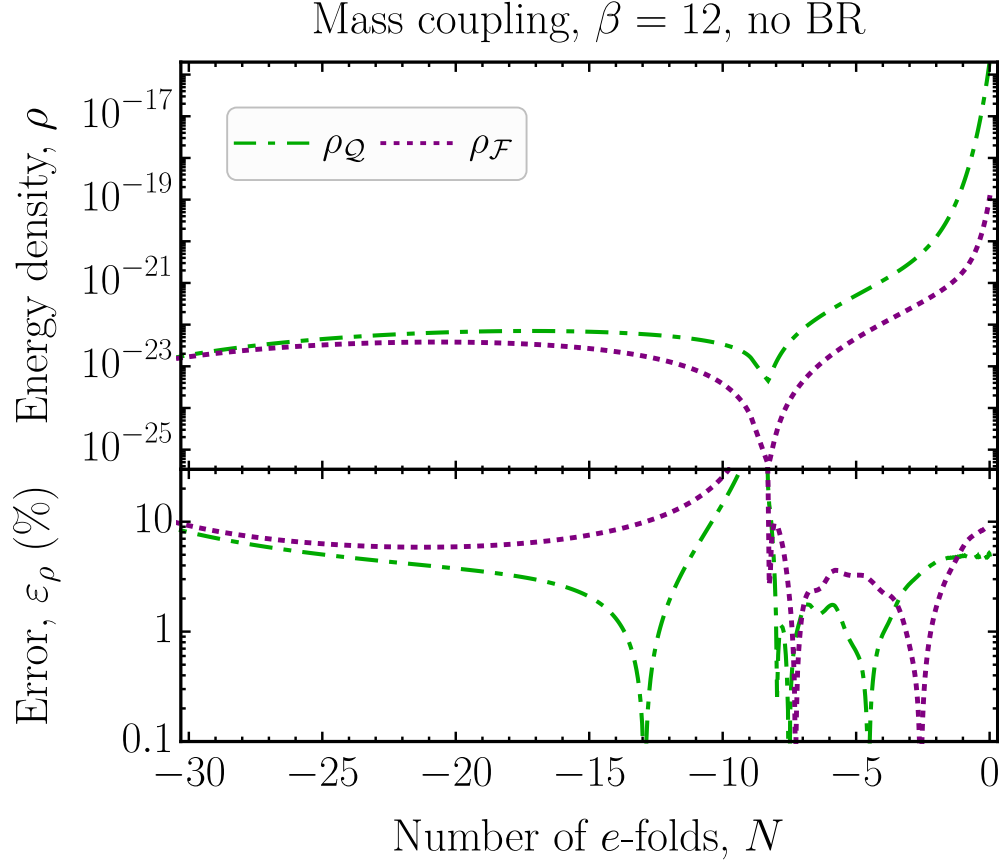


Рис. 4.1: Верхня панель: залежність густин енергії  $\rho_Q$  (зелена штрих-пунктирна лінія) та  $\rho_F$  (фіолетова пунктирна лінія) від кількості  $e$ -фолдингів, відрахованих від кінця інфляції, в моделі масового зв'язку (4.116) векторного поля з інфлатоном із  $\beta = 12$ , із використанням ФГР з порядком обриву  $2p_{\max} + 1 = 69$ . Нижня панель: еволюція відносної похибки розв'язку ФГР відносно розв'язку, отриманого із застосуванням помодового розкладу в імпульсному просторі.

поздовжніх мод (зелена штрих-пунктирна та фіолетова пунктирна лінії відповідно) протягом останніх 30  $e$ -фолдингів інфляції. Обчислення проводилися за допомогою системи рівнянь ФГР (4.95)–(4.97) з порядком обриву  $2p_{\max} + 1 = 69$ . Нижня панель цього рисунка показує відносну похибку розв'язку ФГР порівняно з числовим результатом, отриманим шляхом обробки окремих Фур'є-мод в імпульсному просторі та розв'язання системи рівнянь (4.65)–(4.66) з граничними умовами (4.75)–(4.76). Ми називатимемо останній розв'язок помодовим розв'язком та визначатимемо відносну похибку як

$$\varepsilon_\rho = \left| \frac{\rho_{\text{GEF}}}{\rho_{\text{МБМ}}} - 1 \right| \times 100 \%. \quad (4.120)$$

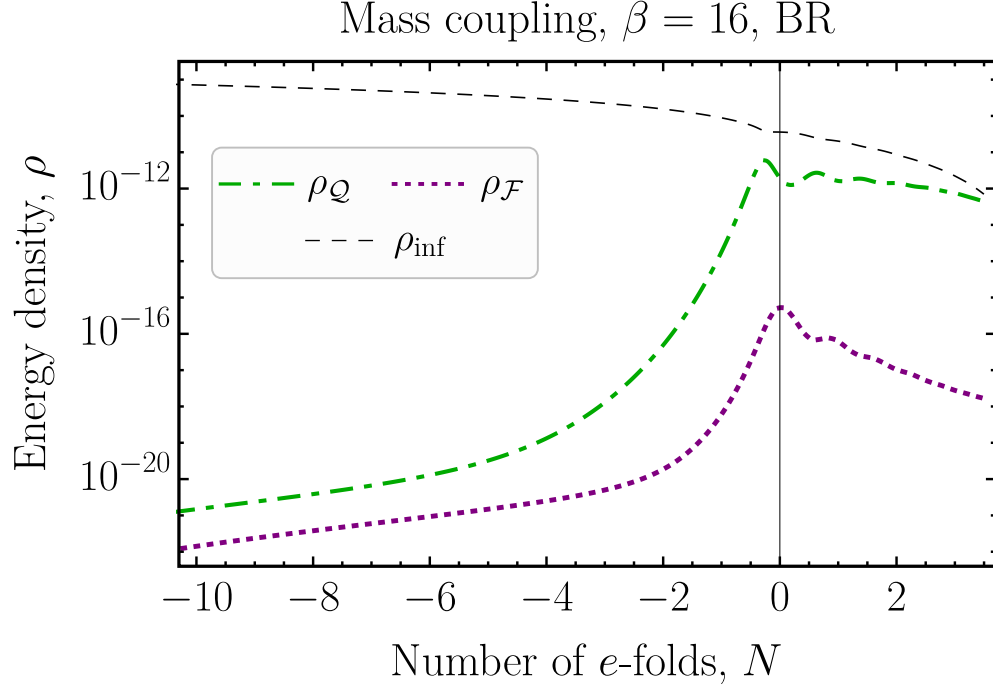


Рис. 4.2: Залежність густин енергії  $\rho_Q$  (зелена штрих-пунктирна лінія) та  $\rho_F$  (фіолетова пунктирна лінія) поздовжніх мод векторного поля, а також густини енергії інфлатона  $\rho_{\text{inf}}$  (чорна штрихова лінія) від кількості  $e$ -фолдингів у моделі масового зв'язку (4.116) векторного поля з інфлатоном з  $\beta = 16$ , із використанням ФГР з порядком обриву  $2p_{\text{max}} + 1 = 63$ . Точка  $N = 0$  вибрана в момент часу, коли інфляція закінчилася б за відсутності калібрувальних полів. Зворотна реакція продовжує тривалість прискореного розширення Всесвіту на кілька  $e$ -фолдингів.

Слід зауважити, що відносна похибка зазвичай становить порядку кількох відсотків і приймає лише дещо більші значення, або порядку 10 % в областях різкого падіння кривих густини енергії, показаних на верхній панелі рис. 4.1. Останнє падіння відбувається в області, де імпульс перетину горизонту  $k_{h,L}$  перестає зростати через немонотонну поведінку величини  $aH|R|$ . За винятком областей поблизу падіння, точність методу ФГР дуже добра, і метод можна з упевненістю використовувати для дослідження утворення векторної темної матерії.

Далі, на рис. 4.2, ми показуємо чисельні результати для випадку сильнішого зв'язку,  $\beta = 16$ . Тут ми також зображуємо густину енергії інфлатона  $\rho_{\text{inf}} = \dot{\phi}^2/2 + V(\phi)$  тонкою чорною штриховою лінією. Утворене векторне поле є достатньо сильним, щоб змінити фонову інфляційну еволюцію та продовжити прискорене розширення Всесвіту на кілька  $e$ -фолдингів. Справді, точка  $N = 0$

на горизонтальній осі обрана в момент часу, коли інфляція закінчилася б за відсутності калібрувальних полів. Як видно з рисунка, за наявності векторного поля інфляція триває ще кілька  $e$ -фолдингів після цього моменту. У режимі зворотної реакції густина енергії калібрувального поля перестає зростати та демонструє загасну коливну поведінку, яка дуже схожа на режим зворотної реакції для безмасових калібрувальних полів з кінетичним та аксіальним зв'язком з інфлатоном [53, 60, 175, 241].

### 4.6.3 Кінетичний та масовий зв'язки

У випадку, коли присутні як кінетичний, так і масовий зв'язки, починають також посилюватися і поперечні моди. Введемо дві компоненти густини енергії, що характеризують внески поперечних мод векторного поля в загальну густину енергії, наступним чином:

$$\rho_{\mathcal{E}} = \frac{I_1}{2} \langle \vec{E}_{\perp}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{E}^{(0)}, \quad (4.121)$$

$$\rho_{\mathcal{B}} = \frac{I_1}{2} \langle \vec{B}^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{B}^{(0)}. \quad (4.122)$$

Знову ж таки, ми починаємо з випадку достатньо слабкого зв'язку, щоб згенеровані векторні поля не чинили впливу на фонову інфляційну еволюцію. На рисунку 4.3 показано часову еволюцію густини енергії для випадку  $\beta = 8$ , тоді як результати для  $\beta = -6$  показані на рис. 4.4. Тут сині суцільні лінії позначають поперечну густину електричної енергії  $\rho_{\mathcal{E}}$ ; червоні штрихові лінії показують еволюцію густини магнітної енергії  $\rho_{\mathcal{B}}$ ; зелені штрих-пунктирні та фіолетові пунктирні лінії, як і раніше, позначають поздовжні компоненти  $\rho_{\mathcal{Q}}$  та  $\rho_{\mathcal{F}}$  відповідно. Нижні панелі рис. 4.3 та 4.4 показують відносну похибку розв'язку ФГР відносно помодового розв'язку.

Для додатного значення константи зв'язку,  $\beta = 8$ , електричні поперечні моди чітко домінують серед усіх внесків калібрувального поля. Поздовжні моди є

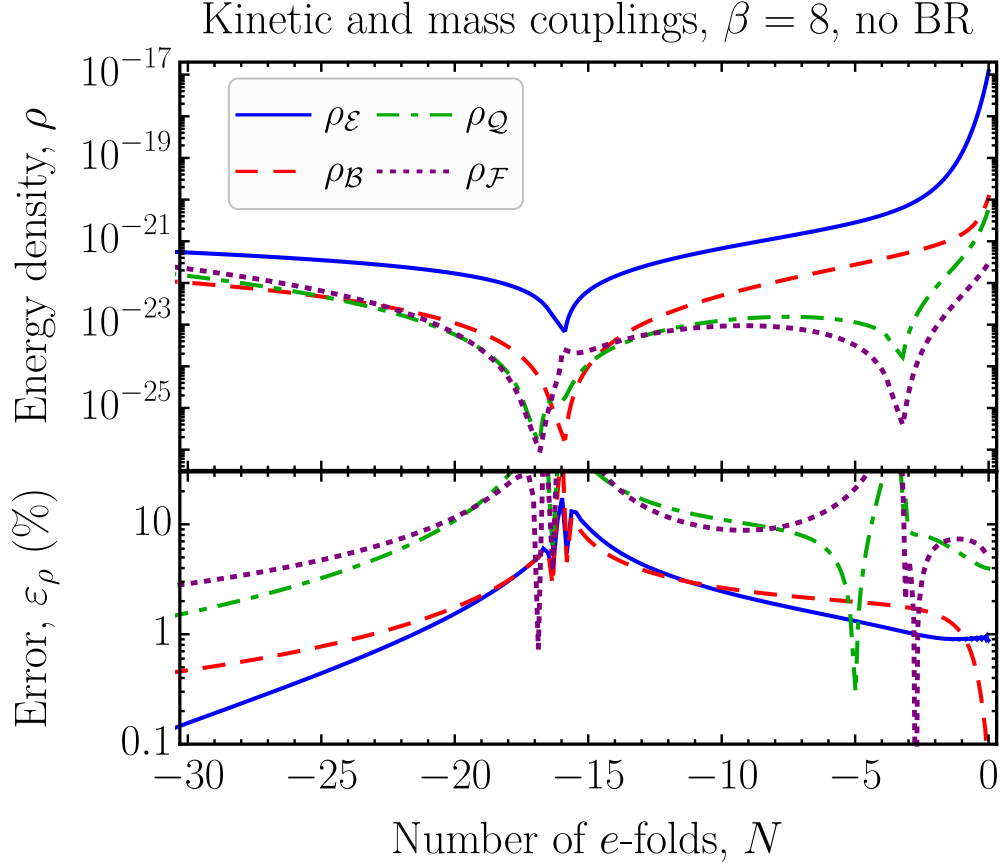


Рис. 4.3: Верхня панель: залежність густин енергії  $\rho_\varepsilon$  (синя суцільна лінія),  $\rho_\rho$  (червона штрихова лінія),  $\rho_Q$  (зелена штрих-пунктирна лінія) та  $\rho_F$  (фіолетова пунктирна лінія) від кількості  $e$ -фолдингів, відрахованих від кінця інфляції в моделі з кінетичним (4.115) та масовим (4.116) зв'язком векторного поля з інфлатоном з  $\beta = 8$ , із використанням ФГР, з порядками обриву  $n_{\max} = 53$  та  $2p_{\max} + 1 = 53$  для поперечних і поздовжніх мод відповідно. Нижня панель: еволюція відносної похибки розв'язку ФГР відносно розв'язку, отриманого із застосуванням помодового розкладу в імпульсному просторі.

субдомінантними, причому  $\rho_Q$  трохи більша за  $\rho_F$  (та ж ієрархія, що й у випадку чистого масового зв'язку для  $\beta = 12$ , див. рис. 4.1). Тут знову ж таки, похибка для домінуючої густини енергії,  $\rho_\varepsilon$ , залишається малою, здебільшого порядку 1 %, досягаючи значень  $\sim 10\%$  лише поблизу різкого падіння густини енергії. Її походження, подібно до попередньо розглянутого випадку чистого масового зв'язку, полягає в різкому заморожуванні еволюції  $k_h$  в області, коли  $aHr$  має немонотонну поведінку. Зауважте, що для поздовжніх мод також присутнє різке падіння (пов'язане з замерзанням  $k_{k,L}$  у цьому випадку) і відбувається приблизно на 1  $e$ -фолдинг раніше. Субдомінантні внески визначаються ФГР з дещо

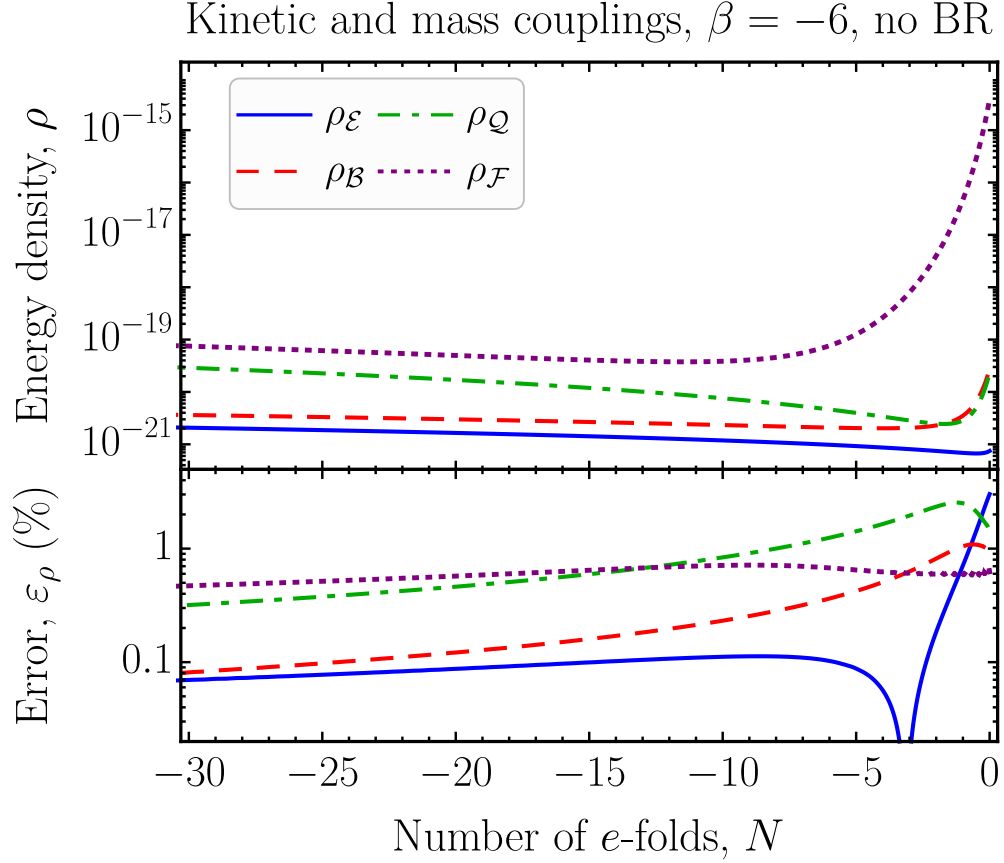


Рис. 4.4: Ті ж величини, що й показано на рис. 4.3 для випадку від'ємної константи зв'язку  $\beta = -6$ . Система ФГР була обірвана на порядках  $n_{\max} = 71$  та  $2p_{\max} + 1 = 71$  для поперечних та поздовжніх мод відповідно.

більшою похибкою, від кількох до 10 %, і досягають похибки до 30 % поблизу піків. Ми хотіли б наголосити, що вказане збільшення похибки є абсолютно очікуваним у цій області, оскільки ми порівнюємо два рішення з різкими піками (ті, що отримані за допомогою підходів ФГР та помодового розкладу). Дійсно, будь-яка незначна невідповідність між ними призводить до великої похибки, оскільки обидві функції різко падають на два порядки поблизу мінімуму. У випадку монотонних функцій, наприклад, для від'ємної константи зв'язку  $\beta = -6$ , показаної на рис. 4.4, похибка розв'язку ФГР залишається значно нижчою за 10 % для всіх компонентів густини енергії, включаючи сублідируючі, тоді як для домінантного внеску завжди залишається на рівні 1 %.

У випадку від'ємної константи зв'язку цікаво також те, що ієрархія густин

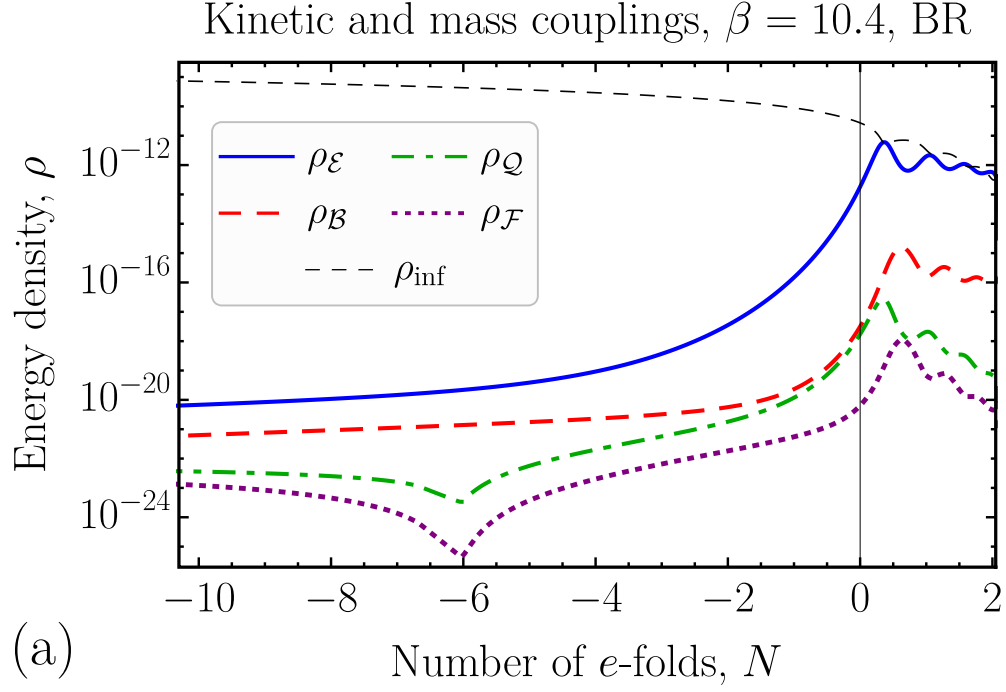


Рис. 4.5: Еволюція різних компонентів густини енергії векторного поля:  $\rho_\mathcal{E}$  (синя суцільна лінія),  $\rho_\mathcal{B}$  (червона штрихова лінія),  $\rho_\mathcal{Q}$  (зелена штрих-пунктирна лінія),  $\rho_\mathcal{F}$  (фіолетова пунктирна лінія) та густина енергії інфлатона  $\rho_{\text{inf}}$  (тонка чорна штрихова лінія) в моделі з кінетичним (4.115) та масовим зв'язком (4.116) векторного поля з інфлатоном з  $\beta = 10.4$ , із використанням ФГР, з порядками обриву  $n_{\text{max}} = 87$  та  $2p_{\text{max}} + 1 = 87$  для поперечних і поздовжніх мод відповідно. Точка  $N = 0$  вибрана в момент часу, коли інфляція закінчилася б за відсутності калібрувальних полів.

енергії повністю змінюється на протилежну: від поперечних до поздовжніх мод, а окрім цього – і в межах кожного класу. Тепер поздовжня складова  $\rho_\mathcal{F}$  є найбільшою, тоді як густина електричної енергії  $\rho_\mathcal{E}$  є найменшою. Це “перевертання” всередині кожного класу може бути пов’язане з тим, що параметри  $\gamma$  і  $M$  тепер змінюють свої знаки, а також зі спостереженням, що  $\gamma$  входить у рівняння ФГР для  $\mathcal{E}^{(n)}$  та  $\mathcal{B}^{(n)}$  з різними знаками – те ж саме можна сказати про величину  $M$  у рівняннях для  $\mathcal{Q}^{(2p)}$  та  $\mathcal{F}^{(2p)}$ . Таким чином, зміна знака  $\gamma$  та  $M$  змінює згасання на підсилення і навпаки.

Тепер перейдемо до випадків з більш сильними зв’язками. Результати для  $\beta = 10.4$  показано на рис. 4.5, а для  $\beta = -7$  — на рис. 4.6. Тут ієрархія між різними компонентами густини енергії така ж, як і у відповідних випадках зі слабшими зв’язками. Однак, для більш сильних зв’язків, згенеровані поля зда-

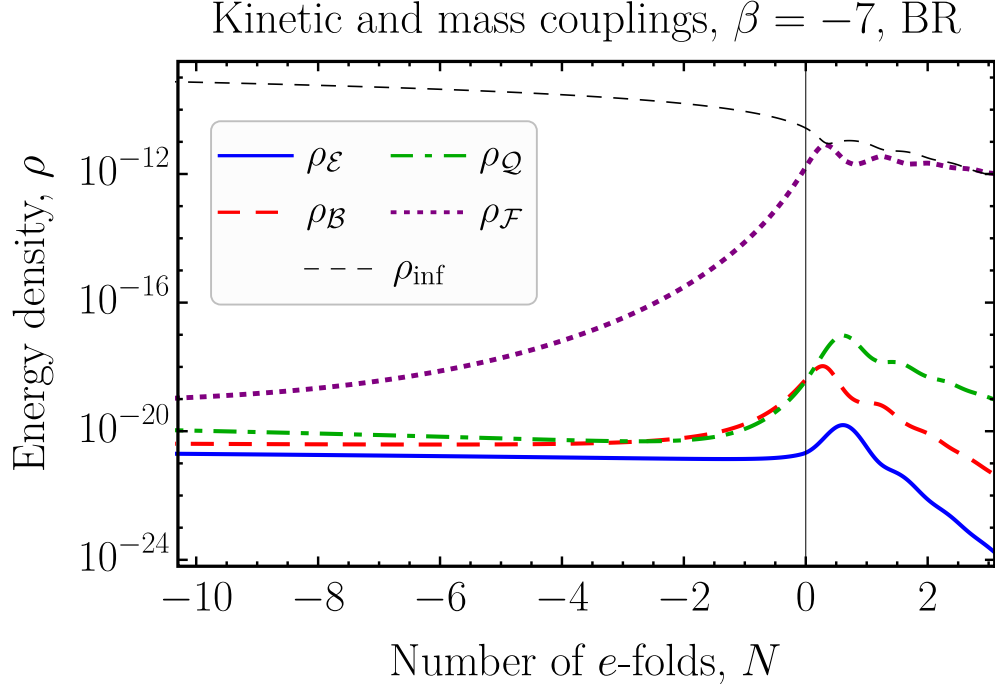


Рис. 4.6: Ті ж величини, що й показано на рис. 4.5 для випадку від'ємної константи зв'язку  $\beta = -7$ . Система ФГР була обірвана на порядках  $n_{\max} = 181$  та  $2p_{\max} + 1 = 181$  для поперечних та поздовжніх мод відповідно.

тні суттєво впливати на інфляційну динаміку. Знову ж таки, як і у випадку чистого масового зв'язку, ми бачимо, що густина енергії векторного поля стає порівнянною з густиною енергії поля інфлатона. Часова еволюція компонентів густини енергії приймає характер загасних коливань, які, ймовірно, є результатом затримки між змінами швидкості інфлатона та реакцією підсистеми калібрувального поля.

Прискорене інфляційне розширення триває довше за наявності калібрувального поля. Незважаючи на те, що для векторного поля з малою масою його густина енергії повинна зміщуватися в червоний бік подібно до випромінювання, передача енергії від інфлатона через масовий та кінетичний зв'язки підтримує густину енергії калібрувального поля майже постійною. Таким чином, реалізується вакуумоподібний стан, що складається з інфлатона та калібрувальних полів. Це збільшує тривалість інфляції на кілька  $e$ -фолдингів.

## 4.7 Висновки до розділу 4

У цьому розділі дисертації досліджувалася можливість генерації темних фотонів з вакуумних флуктуацій під час інфляції. Така генерація виникає, (i) тому що наявність масового доданку в лагранжіані автоматично порушує конформну інваріантність, що призводить до ефективної генерації поздовжніх векторних мод, та (ii) через прямі зв'язки з інфлатоном через кінетичні, аксіальні та масові доданки, залежні від інфлатона.

У нашому аналізі ми нехтували кінетичним змішуванням між видимим і темним секторами, зосередившись на утворенні єдиного масивного абелевого векторного поля, що взаємодіє з інфлатоном. Ми вивчали динаміку цього темного векторного поля в повній ізоляції від сектора Стандартної моделі.

Ми розширили формалізм градієнтного розкладу, раніше розроблений для опису інфляційної генерації безмасового абелевого калібрувального поля, включивши поздовжню поляризацію масивного векторного поля. З цією метою ми вивели зв'язану систему рівнянь руху для білінійних функцій векторного поля та дослідили нелінійну динаміку генерації масивного векторного поля, включаючи зворотну реакцію на інфляційний фон. Еволюцію мод як поперечної, так і поздовжньої поляризацій було проаналізовано в імпульсному та координатному просторі, причому в останньому випадку ФГР було доповнено відповідними граничними доданками.

Ми застосували цей формалізм до векторного поля з малою масою, кінетичні та масові доданки якого зв'язуються з інфлатоном через експоненційну функцію типу Ратри. Наше дослідження зосередилося на утворенні поперечної та поздовжньої поляризацій у квадратичній інфляційній моделі. Ми виявили, що якщо присутній лише масовий зв'язок, поперечні поляризації не підсилюються, тоді як поздовжні можуть становити значну частку густини енергії Всесвіту та, за достатньо сильного зв'язку, навіть чинити зворотну реакцію на еволюцію

інфляційного фону. За наявності як кінетичного, так і масового зв'язку можна спостерігати набагато цікавішу фізику. Зокрема, коли функція зв'язку зменшується, поперечні поляризації домінують у густині енергії. І навпаки, за зростання функції зв'язку поздовжній компонент швидко зростає та переводить систему в режим сильної зворотної реакції.

У випадках без зворотної реакції ми виконали обчислення двома методами: методом ФГР та шляхом вивчення еволюції окремих Фур'є-мод в імпульсному просторі. Порівнюючи результати двох підходів, ми оцінили відносну похибку результату ФГР. Вона становить порядку 1 % для домінуючої компоненти густини енергії та кілька відсотків для сублідируючих внесків, якщо всі густини енергії еволюціонують монотонно. З іншого боку, якщо в еволюції компонентів густини енергії присутні різкі піки або падіння, похибка в цих областях може зрости до  $\sim 20-30\%$  для сублідируючих компонентів. Тим не менш, цей результат є повністю задовільним для чисельного дослідження інфляційної генерації векторної темної матерії.

Представлені тут результати, отримані за умови нехтовно малого кінетичного змішування з електромагнітним полем, закладають основу для майбутньої роботи. Зокрема, майбутні дослідження можуть бути присвячені моделям з ненульовим кінетичним змішуванням, яке діє як портал між видимим і темним секторами та відкриває можливості для експериментального виявлення темних фотонів.

Результати розділу опубліковані в роботі [242].

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вивчено особливості інфляційної генерації безмасових та масивних векторних полів, з урахуванням нелінійних явищ: (i) зворотної реакції створених полів на фонову інфляційну динаміку та (ii) швінгерівського народження пар частинок та античастинок.

У дисертаційній роботі отримано такі основні результати:

1. Розроблено формалізм градієнтного розкладу для опису інфляційного магнітогенезу в найзагальнішій моделі, що одночасно включає кінетичний та аксіальний зв'язки векторного поля з інфлатоном, а також враховує наявність швінгерівської провідності.
2. Показано, що в межах моделі інфляційного магнітогенезу з кінетичним та аксіальним зв'язками у режимі сильної зворотної реакції виникають характерні нелінійні ефекти, зокрема осциляції густини енергії згенерованих полів, сповільнення скочування інфлатона наприкінці інфляції та збільшення тривалості інфляційної стадії. Встановлено, що наявність швінгерівської провідності призводить до ефективного пригнічення інтенсивності векторних полів, усуває зазначені ефекти та сприяє вчасному завершенню інфляційної епохи.
3. Виведено систему квантових кінетичних рівнянь Власова у конформному часі, яка дозволяє описати процес народження скалярних швінгерівських пар під дією нестационарного електричного поля у Всесвіті, що розширюється. Отримано перенормовані вирази для фізично спостережуваних вели-

чин: густини електричного струму, густини енергії та сліду тензора енергії-імпульсу утворених частинок.

4. Запропоновано модифікований варіант формалізму градієнтного розкладу, адаптований до задачі інфляційної генерації векторної темної матерії. Розширений формалізм включає рівняння еволюції поздовжніх мод масивного векторного поля та дозволяє здійснювати самоузгоджений аналіз динаміки системи.
5. Продемонстровано на прикладі низки моделей, що за відсутності зворотної реакції результати, отримані в межах нового підходу, з високою точністю відтворюють результати стандартного помодового розкладу. Це підтверджує коректність і надійність розробленого формалізму градієнтного розкладу та його узгодженість з іншими методами, представленими в літературі.
6. Для випадку зростаючої в часі функції кінетичного зв'язку виявлено новий специфічний режим зворотної реакції, який характеризується домінуванням внеску поздовжніх мод у повній густині енергії векторного поля. Поля, згенеровані в цьому режимі є перспективними кандидатами на роль темної матерії.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, Amsterdam, 2003).
2. P. A. R. Ade *et al.* (Planck), Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* **571**, A16 (2014), [arXiv:1303.5076 \[astro-ph.CO\]](#).
3. P. Bessa, R. Durrer, and D. Stock, Perturbations of cosmological redshift drift, *JCAP* **11** (2023) 093, [arXiv:2306.13911 \[astro-ph.CO\]](#).
4. E. Harrison, The redshift-distance and velocity-distance laws, *Astrophys. J.* **403**, 28 (1993).
5. R. Kayser, P. Helbig, and T. Schramm, A general and practical method for calculating cosmological distances, *Astron. Astrophys.* **318**, 680 (1997), [arXiv:astro-ph/9603028](#).
6. V. A. Rubakov and D. S. Gorbunov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot big bang theory* (World Scientific, Singapore, 2017).
7. N. Aghanim *et al.* (Planck), Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters, *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020), [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)], [arXiv:1807.06209 \[astro-ph.CO\]](#).
8. D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov, *Introduction to the theory of the early universe: cosmological perturbations and inflationary theory* (World Scientific, Singapore, 2011).
9. A. D. Linde, The Inflationary Universe, *Rept. Prog. Phys.* **47**, 925 (1984).
10. L. A. Kofman, Primordial perturbations from inflation, *Phys. Scripta T* **36**, 108 (1991).
11. A. A. Starobinsky, A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).

12. J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, Encyclopædia Inflationaris: Oviparous Edition, [Phys. Dark Univ. \*\*5-6\*\*, 75 \(2014\)](#), [arXiv:1303.3787 \[astro-ph.CO\]](#).
13. Y. Akrami *et al.* (Planck), Planck 2018 results. X. Constraints on inflation, [Astron. Astrophys. \*\*641\*\*, A10 \(2020\)](#), [arXiv:1807.06211 \[astro-ph.CO\]](#).
14. С. М. Андрієвський, І. А. Климишин, *Курс загальної астрономії* (Астропринт, Одеса, 2007).
15. J. Donati and J. Landstreet, Magnetic fields of non-degenerate stars, [Ann. Rev. Astron. Astrophys. \*\*47\*\*, 333 \(2009\)](#), [arXiv:0904.1938 \[astro-ph.SR\]](#).
16. R. Wielebinski, Magnetic fields in the Milky Way, derived from radio continuum observations and Faraday rotation studies, in *Cosmic Magnetic Fields*, edited by R. Wielebinski and R. Beck (Springer, Berlin, Heidelberg, 2005) pp. 89–112.
17. R. Beck,  
Magnetic Fields in Galaxies, [Space Sci. Rev. \*\*166\*\*, 215 \(2012\)](#).
18. T. E. Clarke, P. P. Kronberg, and H. Boehringer, A New radio - X-ray probe of galaxy cluster magnetic fields, [Astrophys. J. Lett. \*\*547\*\*, L111 \(2001\)](#), [arXiv:astro-ph/0011281](#).
19. Y. Xu, P. P. Kronberg, S. Habib, and Q. W. Dufton, A faraday rotation search for magnetic fields in large scale structure, [Astrophys. J. \*\*637\*\*, 19 \(2006\)](#), [arXiv:astro-ph/0509826](#).
20. L. M. Widrow, Origin of galactic and extragalactic magnetic fields, [Rev. Mod. Phys. \*\*74\*\*, 775 \(2002\)](#), [arXiv:astro-ph/0207240](#).
21. J.-F. Zhang, Q. Liu, and A. Lazarian, Tracing magnetic fields by the synergies of synchrotron emission gradients, [Astrophys. J. \*\*886\*\*, 63 \(2019\)](#), [arXiv:1910.02378 \[astro-ph.HE\]](#).

22. Y. Dallilar *et al.*, A precise measurement of the magnetic field in the corona of the black hole binary V404 Cygni, [Science](#) **358**, 1299 (2017).
23. G. E. Hale, On the Probable Existence of a Magnetic Field in Sun-Spots, [Astrophys. J.](#) **28**, 315 (1908).
24. M. J. Reid and E. M. Silverstein, OH masers and the Galactic magnetic field, [Astrophys. J.](#) **361**, 483 (1990).
25. L. Davis, Jr. and J. L. Greenstein, The Polarization of Starlight by Aligned Dust Grains, [Astrophys. J.](#) **114**, 206 (1951).
26. A. Neronov and I. Vovk, Evidence for strong extragalactic magnetic fields from Fermi observations of TeV blazars, [Science](#) **328**, 73 (2010), [arXiv:1006.3504 \[astro-ph.HE\]](#).
27. F. Tavecchio, G. Ghisellini, L. Foschini, *et al.*, The intergalactic magnetic field constrained by Fermi/LAT observations of the TeV blazar 1ES 0229+200, [Mon. Not. Roy. Astron. Soc.](#) **406**, L70 (2010), [arXiv:1004.1329 \[astro-ph.CO\]](#).
28. S. Ando and A. Kusenko, Evidence for Gamma-Ray Halos Around Active Galactic Nuclei and the First Measurement of Intergalactic Magnetic Fields, [Astrophys. J. Lett.](#) **722**, L39 (2010), [arXiv:1005.1924 \[astro-ph.HE\]](#).
29. K. Dolag, M. Kachelriess, S. Ostapchenko, and R. Tomas, Lower limit on the strength and filling factor of extragalactic magnetic fields, [Astrophys. J. Lett.](#) **727**, L4 (2011), [arXiv:1009.1782 \[astro-ph.HE\]](#).
30. C. D. Dermer, M. Cavadini, S. Razzaque, *et al.*, Time Delay of Cascade Radiation for TeV Blazars and the Measurement of the Intergalactic Magnetic Field, [Astrophys. J. Lett.](#) **733**, L21 (2011), [arXiv:1011.6660 \[astro-ph.HE\]](#).

31. A. M. Taylor, I. Vovk, and A. Neronov, Extragalactic magnetic fields constraints from simultaneous GeV-TeV observations of blazars, [Astron. Astrophys. \*\*529\*\*, A144 \(2011\)](#), [arXiv:1101.0932 \[astro-ph.HE\]](#).
32. A. Neronov, D. Semikoz, and O. Kalashev, Limit on the intergalactic magnetic field from the ultrahigh-energy cosmic ray hotspot in the Perseus-Pisces region, [Phys. Rev. D \*\*108\*\*, 103008 \(2023\)](#), [arXiv:2112.08202 \[astro-ph.HE\]](#).
33. D. Grasso and H. R. Rubinstein, Magnetic fields in the early universe, [Phys. Rept. \*\*348\*\*, 163 \(2001\)](#), [arXiv:astro-ph/0009061](#).
34. M. Giovannini, The Magnetized universe, [Int. J. Mod. Phys. D \*\*13\*\*, 391 \(2004\)](#), [arXiv:astro-ph/0312614](#).
35. R. Durrer and A. Neronov, Cosmological Magnetic Fields: Their Generation, Evolution and Observation, [Astron. Astrophys. Rev. \*\*21\*\*, 62 \(2013\)](#), [arXiv:1303.7121 \[astro-ph.CO\]](#).
36. K. Subramanian, The origin, evolution and signatures of primordial magnetic fields, [Rept. Prog. Phys. \*\*79\*\*, 076901 \(2016\)](#), [arXiv:1504.02311 \[astro-ph.CO\]](#).
37. L. Biermann, Über den Ursprung der Magnetfelder auf Sternen und im interstellaren Raum (About the origin of the magnetic fields on stars and in the interstellar space), [Z. Naturforsch. A \*\*5\*\*, 65 \(1950\)](#).
38. R. E. Pudritz and J. Silk, The origin of magnetic fields and primordial stars in protogalaxies, [Astrophys. J. \*\*342\*\*, 650 \(1989\)](#).
39. T. Papanikolaou and K. N. Gourgouliatos, Primordial magnetic field generation via primordial black hole disks, [Phys. Rev. D \*\*107\*\*, 103532 \(2023\)](#), [arXiv:2301.10045 \[astro-ph.CO\]](#).

40. A. A. Ruzmaikin, A. M. Shukurov, and D. D. Sokoloff, *Magnetic Fields of Galaxies*, Astrophysics and Space Science Library, Vol. 133 (Kluwer Academic, Dordrecht, 1988).
41. R. M. Kulsrud, A critical review of galactic dynamos, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **37**, 37 (1999).
42. F. Rincon, Dynamo theories, *J. Plasma Phys.* **85**, 205850401 (2019), [arXiv:1903.07829 \[physics.plasm-ph\]](#).
43. S. Furlanetto and A. Loeb, An Intergalactic magnetic field from quasar outflows, in *MPA / ESO / MPE / USM Conference on Lighthouses of the Universe: The Most Luminous Celestial Objects and their use for Cosmology* (2001) [arXiv:astro-ph/0110090](#).
44. S. Samui, K. Subramanian, and R. Srianand, Efficient cold outflows driven by cosmic rays in high redshift galaxies and their global effects on the IGM, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **476**, 1680 (2018), [arXiv:1706.01890 \[astro-ph.GA\]](#).
45. A. A. Garcia, K. Bondarenko, A. Boyarsky, *et al.*, Magnetization of the intergalactic medium in the IllustrisTNG simulations: the importance of extended, outflow-driven bubbles, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **505**, 5038 (2021), [arXiv:2011.11581 \[astro-ph.CO\]](#).
46. T. Kobayashi, Primordial Magnetic Fields from the Post-Inflationary Universe, *JCAP* **05** (2014) 040, [arXiv:1403.5168 \[astro-ph.CO\]](#).
47. T. Fujita and R. Namba, Pre-reheating Magnetogenesis in the Kinetic Coupling Model, *Phys. Rev. D* **94**, 043523 (2016), [arXiv:1602.05673 \[astro-ph.CO\]](#).
48. J. M. Quashnock, A. Loeb, and D. N. Spergel, Magnetic Field Generation During the Cosmological QCD Phase Transition, *Astrophys. J. Lett.* **344**, L49 (1989).

49. T. Vachaspati, Magnetic fields from cosmological phase transitions, [Phys. Lett. B \*\*265\*\*, 258 \(1991\)](#).
50. G. Sigl, A. V. Olinto, and K. Jedamzik, Primordial magnetic fields from cosmological first order phase transitions, [Phys. Rev. D \*\*55\*\*, 4582 \(1997\)](#), [arXiv:astro-ph/9610201](#).
51. L. Parker, Particle creation in expanding universes, [Phys. Rev. Lett. \*\*21\*\*, 562 \(1968\)](#).
52. M. M. Anber and L. Sorbo, Naturally inflating on steep potentials through electromagnetic dissipation, [Phys. Rev. D \*\*81\*\*, 043534 \(2010\)](#), [arXiv:0908.4089 \[hep-th\]](#).
53. E. V. Gorbar, K. Schmitz, O. O. Sobol, and S. I. Vilchinskii, Gauge-field production during axion inflation in the gradient expansion formalism, [Phys. Rev. D \*\*104\*\*, 123504 \(2021\)](#), [arXiv:2109.01651 \[hep-ph\]](#).
54. K. Yanagihara, F. Uchida, T. Fujita, and S. Tsujikawa, Low-scale inflationary magnetogenesis without baryon isocurvature problem, [Phys. Rev. D \*\*110\*\*, 083506 \(2024\)](#), [arXiv:2312.07938 \[astro-ph.CO\]](#).
55. J. Martin and J. Yokoyama, Generation of Large-Scale Magnetic Fields in Single-Field Inflation, [JCAP \*\*01\*\* \(2008\) 025](#), [arXiv:0711.4307 \[astro-ph\]](#).
56. O. O. Sobol, E. V. Gorbar, M. Kamarpour, and S. I. Vilchinskii, Influence of backreaction of electric fields and Schwinger effect on inflationary magnetogenesis, [Phys. Rev. D \*\*98\*\*, 063534 \(2018\)](#), [arXiv:1807.09851 \[hep-ph\]](#).
57. D. Nandi, Inflationary magnetogenesis: solving the strong coupling and its non-Gaussian signatures, [JCAP \*\*08\*\* \(2021\) 039](#), [arXiv:2103.03159 \[astro-ph.CO\]](#).

58. Y. Li and L.-Y. Zhang, Inflationary magnetogenesis with a self-consistent coupling function, *Mod. Phys. Lett. A* **37**, 2250069 (2022), [arXiv:2307.04987 \[astro-ph.CO\]](#).
59. R. J. Z. Ferreira, R. K. Jain, and M. S. Sloth, Inflationary magnetogenesis without the strong coupling problem, *JCAP* **10** (2013) 004, [arXiv:1305.7151 \[astro-ph.CO\]](#).
60. O. O. Sobol, A. V. Lysenko, E. V. Gorbar, and S. I. Vilchinskii, Gradient expansion formalism for magnetogenesis in the kinetic coupling model, *Phys. Rev. D* **102**, 123512 (2020), [arXiv:2010.13587 \[astro-ph.CO\]](#).
61. V. Demozzi, V. Mukhanov, and H. Rubinstein, Magnetic fields from inflation?, *JCAP* **08** (2009) 025, [arXiv:0907.1030 \[astro-ph.CO\]](#).
62. M. S. Turner and L. M. Widrow, Inflation Produced, Large Scale Magnetic Fields, *Phys. Rev. D* **37**, 2743 (1988).
63. O. Savchenko and Y. Shtanov, Magnetogenesis by non-minimal coupling to gravity in the Starobinsky inflationary model, *JCAP* **10** (2018) 040, [arXiv:1808.06193 \[astro-ph.CO\]](#).
64. E. V. Gorbar, A. I. Momot, I. V. Rudenok, *et al.*, Chirality Production during Axion Inflation, *Ukr. J. Phys.* **68**, 717 (2023), [arXiv:2111.05848 \[hep-ph\]](#).
65. R. von Eckardstein, M. Peloso, K. Schmitz, *et al.*, Axion inflation in the strong-backreaction regime: decay of the Anber-Sorbo solution, *JHEP* **11** (2023) 183, [arXiv:2309.04254 \[hep-ph\]](#).
66. V. Domcke, Y. Ema, and S. Sandner, Perturbatively including inhomogeneities in axion inflation, *JCAP* **03** (2024) 019, [arXiv:2310.09186 \[astro-ph.CO\]](#).
67. R. Durrer, O. Sobol, and S. Vilchinskii, Backreaction from gauge fields produced during inflation, *Phys. Rev. D* **108**, 043540 (2023), [arXiv:2303.04583 \[gr-qc\]](#).

68. F. Sauter, Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs, [Z. Phys. \*\*69\*\*, 742 \(1931\)](#).
69. W. Heisenberg and H. Euler, Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons (Consequences of Dirac's theory of positrons), [Z. Phys. \*\*98\*\*, 714 \(1936\)](#).
70. J. S. Schwinger, On gauge invariance and vacuum polarization, [Phys. Rev. \*\*82\*\*, 664 \(1951\)](#).
71. О. В. Барабаш, *Лекції з релятивістської квантової механіки* (Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, 2017).
72. A. Schmitt *et al.*, Mesoscopic Klein-Schwinger effect in graphene, [Nature Phys. \*\*19\*\*, 830 \(2023\)](#), [arXiv:2207.13400 \[cond-mat.mes-hall\]](#).
73. C. M. Kim and S. P. Kim, Schwinger Pair Production and Vacuum Birefringence around Highly Magnetized Neutron Stars, [Astron. Rep. \*\*67\*\*, S122 \(2023\)](#), [arXiv:2308.15830 \[astro-ph.HE\]](#).
74. Z. Osmanov, G. Machabeli, and N. Chkheidze, A Novel Mechanism of Pair Creation in Pulsar Magnetospheres, [Universe \*\*7\*\*, 331 \(2021\)](#), [arXiv:2105.09351 \[astro-ph.HE\]](#).
75. R. Sharma, S. Jagannathan, T. R. Seshadri, and K. Subramanian, Challenges in Inflationary Magnetogenesis: Constraints from Strong Coupling, Backreaction and the Schwinger Effect, [Phys. Rev. D \*\*96\*\*, 083511 \(2017\)](#), [arXiv:1708.08119 \[astro-ph.CO\]](#).
76. V. Domcke, Y. Ema, and K. Mukaida, Chiral Anomaly, Schwinger Effect, Euler-Heisenberg Lagrangian, and application to axion inflation, [JHEP \*\*02\*\* \(2020\) 055](#), [arXiv:1910.01205 \[hep-ph\]](#).
77. J.-J. Geng, B.-F. Li, J. Soda, *et al.*, Schwinger Pair Production by Electric Field Coupled to Inflaton, [JCAP \*\*02\*\* \(2018\) 018](#), [arXiv:1706.02833 \[gr-qc\]](#).

78. S. Shakeri, M. A. Gorji, and H. Firouzjahi, Schwinger Mechanism During Inflation, [Phys. Rev. D \*\*99\*\*, 103525 \(2019\)](#), [arXiv:1903.05310 \[hep-th\]](#).
79. T. Kobayashi and N. Afshordi, Schwinger Effect in 4D de Sitter Space and Constraints on Magnetogenesis in the Early Universe, [JHEP \*\*10\*\* \(2014\) 166](#), [arXiv:1408.4141 \[hep-th\]](#).
80. T. Hayashinaka, T. Fujita, and J. Yokoyama, Fermionic Schwinger effect and induced current in de Sitter space, [JCAP \*\*07\*\* \(2016\) 010](#), [arXiv:1603.04165 \[hep-th\]](#).
81. E. V. Gorbar, A. I. Momot, O. O. Sobol, and S. I. Vilchinskii, Kinetic approach to the Schwinger effect during inflation, [Phys. Rev. D \*\*100\*\*, 123502 \(2019\)](#), [arXiv:1909.10332 \[gr-qc\]](#).
82. O. O. Sobol, E. V. Gorbar, A. I. Momot, and S. I. Vilchinskii, Schwinger production of scalar particles during and after inflation from the first principles, [Phys. Rev. D \*\*102\*\*, 023506 \(2020\)](#), [arXiv:2004.12664 \[gr-qc\]](#).
83. R. von Eckardstein, K. Schmitz, and O. Sobol, On the Schwinger effect during axion inflation, (2024), [arXiv:2408.16538 \[hep-ph\]](#).
84. A. V. Lysenko and O. O. Sobol, Quantum kinetic approach to the Schwinger production of scalar particles in an expanding universe, [Gen. Rel. Grav. \*\*56\*\*, 39 \(2024\)](#), [arXiv:2311.15981 \[hep-ph\]](#).
85. G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints, [Phys. Rept. \*\*405\*\*, 279 \(2005\)](#), [arXiv:hep-ph/0404175](#).
86. A. Arbey and F. Mahmoudi, Dark matter and the early Universe: a review, [Prog. Part. Nucl. Phys. \*\*119\*\*, 103865 \(2021\)](#), [arXiv:2104.11488 \[hep-ph\]](#).
87. V. C. Rubin and W. K. Ford, Jr., Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions, [Astrophys. J. \*\*159\*\*, 379 \(1970\)](#).

88. M. Persic, P. Salucci, and F. Stel, The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection, [Mon. Not. Roy. Astron. Soc. \*\*281\*\*, 27 \(1996\)](#), [arXiv:astro-ph/9506004](#).
89. R. Massey, T. Kitching, and J. Richard, The dark matter of gravitational lensing, [Rept. Prog. Phys. \*\*73\*\*, 086901 \(2010\)](#), [arXiv:1001.1739 \[astro-ph.CO\]](#).
90. S. Vegetti *et al.*, Strong Gravitational Lensing as a Probe of Dark Matter, [Space Sci. Rev. \*\*220\*\*, 58 \(2024\)](#), [arXiv:2306.11781 \[astro-ph.CO\]](#).
91. D. Clowe, M. Bradac, A. H. Gonzalez, *et al.*, A direct empirical proof of the existence of dark matter, [Astrophys. J. Lett. \*\*648\*\*, L109 \(2006\)](#), [arXiv:astro-ph/0608407](#).
92. V. Springel *et al.*, Simulating the joint evolution of quasars, galaxies and their large-scale distribution, [Nature \*\*435\*\*, 629 \(2005\)](#), [arXiv:astro-ph/0504097](#).
93. N. Aghanim *et al.* (Planck), Planck 2018 results. I. Overview and the cosmological legacy of Planck, [Astron. Astrophys. \*\*641\*\*, A1 \(2020\)](#), [arXiv:1807.06205 \[astro-ph.CO\]](#).
94. J. L. Feng, Dark Matter Candidates from Particle Physics and Methods of Detection, [Ann. Rev. Astron. Astrophys. \*\*48\*\*, 495 \(2010\)](#), [arXiv:1003.0904 \[astro-ph.CO\]](#).
95. G. Bertone and D. Hooper, History of dark matter, [Rev. Mod. Phys. \*\*90\*\*, 045002 \(2018\)](#), [arXiv:1605.04909 \[astro-ph.CO\]](#).
96. B. Paczynski, Gravitational microlensing by the galactic halo, [Astrophys. J. \*\*304\*\*, 1 \(1986\)](#).
97. V. Trimble, Existence and Nature of Dark Matter in the Universe, [Ann. Rev. Astron. Astrophys. \*\*25\*\*, 425 \(1987\)](#).

98. K. Griest, Galactic Microlensing as a Method of Detecting Massive Compact Halo Objects, [\*Astrophys. J.\* \*\*366\*\*, 412 \(1991\)](#).
99. D. J. Hegyi and K. A. Olive, Can Galactic Halos Be Made of Baryons?, [\*Phys. Lett. B\* \*\*126\*\*, 28 \(1983\)](#).
100. D. S. Graff and K. Freese, Analysis of a hubble space telescope search for red dwarfs: limits on baryonic matter in the galactic halo, [\*Astrophys. J. Lett.\* \*\*456\*\*, L49 \(1996\)](#), [arXiv:astro-ph/9507097](#).
101. P. Tisserand *et al.* (EROS-2), Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds, [\*Astron. Astrophys.\* \*\*469\*\*, 387 \(2007\)](#), [arXiv:astro-ph/0607207](#).
102. A. M. Green and B. J. Kavanagh, Primordial Black Holes as a dark matter candidate, [\*J. Phys. G\* \*\*48\*\*, 043001 \(2021\)](#), [arXiv:2007.10722 \[astro-ph.CO\]](#).
103. G. Steigman and M. S. Turner, Cosmological Constraints on the Properties of Weakly Interacting Massive Particles, [\*Nucl. Phys. B\* \*\*253\*\*, 375 \(1985\)](#).
104. G. Arcadi, M. Dutra, P. Ghosh, *et al.*, The waning of the WIMP? A review of models, searches, and constraints, [\*Eur. Phys. J. C\* \*\*78\*\*, 203 \(2018\)](#), [arXiv:1703.07364 \[hep-ph\]](#).
105. E. Aprile *et al.* (XENON100), XENON100 Dark Matter Results from a Combination of 477 Live Days, [\*Phys. Rev. D\* \*\*94\*\*, 122001 \(2016\)](#), [arXiv:1609.06154 \[astro-ph.CO\]](#).
106. C. Amole *et al.* (PICO), Dark Matter Search Results from the Complete Exposure of the PICO-60 C<sub>3</sub>F<sub>8</sub> Bubble Chamber, [\*Phys. Rev. D\* \*\*100\*\*, 022001 \(2019\)](#), [arXiv:1902.04031 \[astro-ph.CO\]](#).

107. Q. Wang *et al.* (PandaX-II), Results of dark matter search using the full PandaX-II exposure, [Chin. Phys. C \*\*44\*\*, 125001 \(2020\)](#), [arXiv:2007.15469 \[astro-ph.CO\]](#).
108. R. D. Peccei and H. R. Quinn, Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons, [Phys. Rev. D \*\*16\*\*, 1791 \(1977\)](#).
109. A. S. Szalay and G. Marx, Neutrino rest mass from cosmology, [Astron. Astrophys. \*\*49\*\*, 437 \(1976\)](#).
110. B. W. Lee and S. Weinberg, Cosmological Lower Bound on Heavy Neutrino Masses, [Phys. Rev. Lett. \*\*39\*\*, 165 \(1977\)](#).
111. S. D. M. White, C. S. Frenk, and M. Davis, Clustering in a Neutrino Dominated Universe, [Astrophys. J. Lett. \*\*274\*\*, L1 \(1983\)](#).
112. S. Dodelson and L. M. Widrow, Sterile-neutrinos as dark matter, [Phys. Rev. Lett. \*\*72\*\*, 17 \(1994\)](#), [arXiv:hep-ph/9303287](#).
113. X.-D. Shi and G. M. Fuller, A New dark matter candidate: Nonthermal sterile neutrinos, [Phys. Rev. Lett. \*\*82\*\*, 2832 \(1999\)](#), [arXiv:astro-ph/9810076](#).
114. T. Asaka and M. Shaposhnikov, The  $\nu$ MSM, dark matter and baryon asymmetry of the universe, [Phys. Lett. B \*\*620\*\*, 17 \(2005\)](#), [arXiv:hep-ph/0505013](#).
115. A. Rudakovskiy and D. Iakubovskiy, Influence of  $\sim 7$  keV sterile neutrino dark matter on the process of reionization, [JCAP \*\*06\*\* \(2016\) 017](#), [arXiv:1604.01341 \[astro-ph.CO\]](#).
116. P. Arias, D. Cadamuro, M. Goodsell, *et al.*, WISPy Cold Dark Matter, [JCAP \*\*06\*\* \(2012\) 013](#), [arXiv:1201.5902 \[hep-ph\]](#).

117. A. Caputo, A. J. Millar, C. A. J. O'Hare, and E. Vitagliano, Dark photon limits: A handbook, [Phys. Rev. D \*\*104\*\*, 095029 \(2021\)](#), [arXiv:2105.04565 \[hep-ph\]](#).
118. J. Magana and T. Matos, A brief Review of the Scalar Field Dark Matter model, [J. Phys. Conf. Ser. \*\*378\*\*, 012012 \(2012\)](#), [arXiv:1201.6107 \[astro-ph.CO\]](#).
119. K. Korshynska, Y. M. Bidasyuk, E. V. Gorbar, *et al.*, Dynamical galactic effects induced by solitonic vortex structure in bosonic dark matter, [Eur. Phys. J. C \*\*83\*\*, 451 \(2023\)](#), [arXiv:2301.13110 \[astro-ph.GA\]](#).
120. M. Milgrom, A Modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis, [Astrophys. J. \*\*270\*\*, 365 \(1983\)](#).
121. M. Milgrom, A Modification of the Newtonian dynamics: Implications for galaxies, [Astrophys. J. \*\*270\*\*, 371 \(1983\)](#).
122. P. D. Mannheim, Making the Case for Conformal Gravity, [Found. Phys. \*\*42\*\*, 388 \(2012\)](#), [arXiv:1101.2186 \[hep-th\]](#).
123. J. W. Moffat and S. Rahvar, The MOG weak field approximation and observational test of galaxy rotation curves, [Mon. Not. Roy. Astron. Soc. \*\*436\*\*, 1439 \(2013\)](#), [arXiv:1306.6383 \[astro-ph.GA\]](#).
124. A. Aramburo-Garcia, K. Bondarenko, A. Boyarsky, *et al.*, Dark photon constraints from CMB temperature anisotropies, (2024), preprint [arXiv:2405.05104 \[astro-ph.CO\]](#), [arXiv:2405.05104 \[astro-ph.CO\]](#).
125. R. Foot, Dissipative dark matter explains rotation curves, [Phys. Rev. D \*\*91\*\*, 123543 \(2015\)](#), [arXiv:1502.07817 \[astro-ph.GA\]](#).
126. P. W. Graham, J. Mardon, and S. Rajendran, Vector Dark Matter from Inflationary Fluctuations, [Phys. Rev. D \*\*93\*\*, 103520 \(2016\)](#), [arXiv:1504.02102 \[hep-ph\]](#).

- 127. Y. Ema, K. Nakayama, and Y. Tang, Production of purely gravitational dark matter: the case of fermion and vector boson, [JHEP 07 \(2019\) 060](#), [arXiv:1903.10973 \[hep-ph\]](#).
- 128. E. W. Kolb and A. J. Long, Completely dark photons from gravitational particle production during the inflationary era, [JHEP 03 \(2021\) 283](#), [arXiv:2009.03828 \[astro-ph.CO\]](#).
- 129. A. Ahmed, B. Grzadkowski, and A. Socha, Gravitational production of vector dark matter, [JHEP 08 \(2020\) 059](#), [arXiv:2005.01766 \[hep-ph\]](#).
- 130. H. Firouzjahi, M. A. Gorji, S. Mukohyama, and B. Salehian, Dark photon dark matter from charged inflaton, [JHEP 06 \(2021\) 050](#), [arXiv:2011.06324 \[hep-ph\]](#).
- 131. K. Nakayama, Constraint on Vector Coherent Oscillation Dark Matter with Kinetic Function, [JCAP 08 \(2020\) 033](#), [arXiv:2004.10036 \[hep-ph\]](#).
- 132. Y. Nakai, R. Namba, and Z. Wang, Light Dark Photon Dark Matter from Inflation, [JHEP 12 \(2020\) 170](#), [arXiv:2004.10743 \[hep-ph\]](#).
- 133. M. Bastero-Gil, J. Santiago, L. Ubaldi, and R. Vega-Morales, Vector dark matter production at the end of inflation, [JCAP 04 \(2019\) 015](#), [arXiv:1810.07208 \[hep-ph\]](#).
- 134. M. Bastero-Gil, J. Santiago, R. Vega-Morales, and L. Ubaldi, Dark photon dark matter from a rolling inflaton, [JCAP 02 \(02\) \(2022\) 015](#), [arXiv:2103.12145 \[hep-ph\]](#).
- 135. N. D. Barrie, Resonant Vector Dark Matter Production during Inflation, (2022), [arXiv:2211.03902 \[hep-ph\]](#).
- 136. K. Dimopoulos and M. Karciauskas, Parity Violating Statistical Anisotropy, [JHEP 06 \(2012\) 040](#), [arXiv:1203.0230 \[hep-ph\]](#).

137. B. Salehian, M. A. Gorji, H. Firouzjahi, and S. Mukohyama, Vector dark matter production from inflation with symmetry breaking, [Phys. Rev. D \*\*103\*\*, 063526 \(2021\)](#), [arXiv:2010.04491 \[hep-ph\]](#).
138. M. Karciauskas and D. H. Lyth, On the health of a vector field with  $(R A^2)/6$  coupling to gravity, [JCAP \*\*11\*\* \(2010\) 023](#), [arXiv:1007.1426 \[astro-ph.CO\]](#).
139. J. A. R. Cembranos, L. J. Garay, A. Parra-López, and J. M. Sánchez Velázquez, Vector dark matter production during inflation and reheating, [JCAP \*\*02\*\* \(2024\) 013](#), [arXiv:2310.07515 \[gr-qc\]](#).
140. C. Capanelli, L. Jenks, E. W. Kolb, and E. McDonough, Runaway Gravitational Production of Dark Photons, [Phys. Rev. Lett. \*\*133\*\*, 061602 \(2024\)](#), [arXiv:2403.15536 \[hep-th\]](#).
141. B. Grzadkowski and A. Socha, Gravitational production of massive vectors non-minimally coupled to gravity, (2024), [arXiv:2411.07222 \[hep-ph\]](#).
142. M. Bastero-Gil and A. T. Manso, Parity violating gravitational waves at the end of inflation, [JCAP \*\*08\*\* \(2023\) 001](#), [arXiv:2209.15572 \[gr-qc\]](#).
143. M. Bastero-Gil, P. B. Ferraz, L. Ubaldi, and R. Vega-Morales, Schwinger dark matter production, [JCAP \*\*10\*\* \(2024\) 078](#), [arXiv:2312.15137 \[hep-ph\]](#).
144. M. Bastero-Gil, P. B. Ferraz, L. Ubaldi, and R. Vega-Morales, Super heavy dark matter from inflationary Schwinger production, [Phys. Rev. D \*\*110\*\*, 095019 \(2024\)](#), [arXiv:2311.09475 \[hep-ph\]](#).
145. C. Caprini and S. Gabici, Gamma-ray observations of blazars and the intergalactic magnetic field spectrum, [Phys. Rev. D \*\*91\*\*, 123514 \(2015\)](#), [arXiv:1504.00383 \[astro-ph.CO\]](#).
146. R. Alves Batista and A. Saveliev, The Gamma-ray Window to Intergalactic Magnetism, [Universe \*\*7\*\*, 223 \(2021\)](#), [arXiv:2105.12020 \[astro-ph.HE\]](#).

147. O. Attia, R. Teyssier, H. Katz, *et al.*, Cosmological magnetogenesis: the Biermann battery during the Epoch of reionization, [\*Mon. Not. Roy. Astron. Soc.\* \*\*504\*\*, 2346 \(2021\)](#), [arXiv:2102.09535 \[astro-ph.CO\]](#).
148. V. B. Díaz, D. R. G. Schleicher, M. A. Latif, *et al.*, Magnetic field amplification in massive primordial halos - Influence of Lyman-Werner radiation, [\*Astron. Astrophys.\* \*\*684\*\*, A195 \(2024\)](#), [arXiv:2401.04054 \[astro-ph.GA\]](#).
149. C. Federrath, Magnetic field amplification in turbulent astrophysical plasmas, *J. Plasma Phys.* **82**, <https://doi.org/10.1017/S0022377816001069> (2016), [arXiv:1610.08132](#).
150. J. Ellis, M. Fairbairn, M. Lewicki, *et al.*, Intergalactic Magnetic Fields from First-Order Phase Transitions, [\*JCAP\* \*\*09\*\* \(2019\) 019](#), [arXiv:1907.04315 \[astro-ph.CO\]](#).
151. J. Yang and L. Bian, Magnetic field generation from bubble collisions during first-order phase transition, [\*Phys. Rev. D\* \*\*106\*\*, 023510 \(2022\)](#), [arXiv:2102.01398 \[astro-ph.CO\]](#).
152. T. Vachaspati, Progress on cosmological magnetic fields, [\*Rept. Prog. Phys.\* \*\*84\*\*, 074901 \(2021\)](#), [arXiv:2010.10525 \[astro-ph.CO\]](#).
153. B. Ratra, Cosmological 'seed' magnetic field from inflation, [\*Astrophys. J. Lett.\* \*\*391\*\*, L1 \(1992\)](#).
154. W. D. Garretson, G. B. Field, and S. M. Carroll, Primordial magnetic fields from pseudo Goldstone bosons, [\*Phys. Rev. D\* \*\*46\*\*, 5346 \(1992\)](#), [arXiv:hep-ph/9209238](#).
155. A. H. Guth and S. Y. Pi, Fluctuations in the New Inflationary Universe, [\*Phys. Rev. Lett.\* \*\*49\*\*, 1110 \(1982\)](#).
156. V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, Quantum fluctuations and a nonsingular universe, *JETP Lett.* **33**, 532 (1981).

157. V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, Vacuum energy and large scale structure of the Universe, *Sov. Phys. JETP* **56**, 258 (1982).
158. S. W. Hawking, The development of irregularities in a single bubble inflationary universe, *Phys. Lett.* **115B**, 295 (1982).
159. J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Spontaneous creation of almost scale-free density perturbations in an inflationary universe, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983).
160. S. Kanno, A. Mukuno, J. Soda, and K. Ueda, Impact of quantum entanglement induced by magnetic fields on primordial gravitational waves, *Phys. Rev. D* **107**, 063503 (2023), [arXiv:2211.05576 \[hep-th\]](#).
161. M. Ballardini, M. Braglia, F. Finelli, *et al.*, Energy-momentum tensor and helicity for gauge fields coupled to a pseudo-scalar inflaton, *Phys. Rev. D* **100**, 123542 (2019), [Erratum: *Phys.Rev.D* 105, 069905 (2022)], [arXiv:1910.13448 \[gr-qc\]](#).
162. E. V. Gorbar, A. I. Momot, O. O. Prikhodko, and O. M. Teslyk, Hydrodynamical approach to chirality production during axion inflation, *Phys. Rev. D* **109**, 023536 (2024), [arXiv:2311.07429 \[hep-ph\]](#).
163. Y. Shtanov and M. Pavliuk, Model-independent constraints in inflationary magnetogenesis, *JCAP* **08** (2020) 042, [arXiv:2004.00947 \[astro-ph.CO\]](#).
164. O. O. Sobol, E. V. Gorbar, O. M. Teslyk, and S. I. Vilchinskii, Generation of an electromagnetic field nonminimally coupled to gravity during Higgs inflation, *Phys. Rev. D* **104**, 043509 (2021), [arXiv:2104.14400 \[gr-qc\]](#).
165. K. Dimopoulos, A. Ghoshal, and T. Papanikolaou, Is inflationary magnetogenesis sensitive to the post-inflationary history ?, (2024), [arXiv:2412.10367 \[astro-ph.CO\]](#).

166. R. Durrer, R. von Eckardstein, D. Garg, *et al.*, Scalar perturbations from inflation in the presence of gauge fields, [Phys. Rev. D \*\*110\*\*, 043533 \(2024\)](#), [arXiv:2404.19694 \[astro-ph.CO\]](#).
167. L. Campanelli, P. Cea, G. L. Fogli, and L. Tedesco, Inflation-Produced Magnetic Fields in  $R^n F^2$  and  $I F^2$  models, [Phys. Rev. D \*\*77\*\*, 123002 \(2008\)](#), [arXiv:0802.2630 \[astro-ph\]](#).
168. P. Qian and Z.-K. Guo, Model of inflationary magnetogenesis, [Phys. Rev. D \*\*93\*\*, 043541 \(2016\)](#), [arXiv:1512.05050 \[astro-ph.CO\]](#).
169. M. Novello and E. Elbaz, On the generation of electromagnetic fields in the universe, [Phys. Lett. A \*\*187\*\*, 356 \(1994\)](#).
170. H. Kitamoto, Schwinger Effect in Inflaton-Driven Electric Field, [Phys. Rev. D \*\*98\*\*, 103512 \(2018\)](#), [arXiv:1807.03753 \[hep-th\]](#).
171. C. Stahl, Schwinger effect impacting primordial magnetogenesis, in [15th Marcel Grossmann Meeting on Recent Developments in Theoretical and Experimental General Relativity, Astrophysics, and Relativistic Field Theories](#) (2022).
172. E. Bavarsad, S. P. Kim, C. Stahl, and S.-S. Xue, Effect of a magnetic field on Schwinger mechanism in de Sitter spacetime, [Phys. Rev. D \*\*97\*\*, 025017 \(2018\)](#), [arXiv:1707.03975 \[hep-th\]](#).
173. M. A. Srednicki, [Quantum field theory](#) (Cambridge University Press, Cambridge ; New York, 2007).
174. T. S. Bunch and P. C. W. Davies, Quantum Field Theory in de Sitter Space: Renormalization by Point Splitting, [Proc. Roy. Soc. Lond. A \*\*360\*\*, 117 \(1978\)](#).
175. A. V. Lysenko, Gradient expansion formalism for a generic model of inflationary magnetogenesis, [Eur. Phys. J. C \*\*85\*\*, 525 \(2025\)](#).

- 176. T. D. Cohen and D. A. McGady, The Schwinger mechanism revisited, [Phys. Rev. D \*\*78\*\*, 036008 \(2008\)](#), [arXiv:0807.1117 \[hep-ph\]](#).
- 177. R. Ruffini, G. Vereshchagin, and S.-S. Xue, Electron-positron pairs in physics and astrophysics: from heavy nuclei to black holes, [Phys. Rept. \*\*487\*\*, 1 \(2010\)](#), [arXiv:0910.0974 \[astro-ph.HE\]](#).
- 178. M. B. Fröb, J. Garriga, S. Kanno, *et al.*, Schwinger effect in de Sitter space, [JCAP \*\*04\*\* \(2014\) 009](#), [arXiv:1401.4137 \[hep-th\]](#).
- 179. E. Bavarsad, C. Stahl, and S.-S. Xue, Scalar current of created pairs by Schwinger mechanism in de Sitter spacetime, [Phys. Rev. D \*\*94\*\*, 104011 \(2016\)](#), [arXiv:1602.06556 \[hep-th\]](#).
- 180. C. Stahl, E. Strobel, and S.-S. Xue, Fermionic current and Schwinger effect in de Sitter spacetime, [Phys. Rev. D \*\*93\*\*, 025004 \(2016\)](#), [arXiv:1507.01686 \[gr-qc\]](#).
- 181. T. Hayashinaka and J. Yokoyama, Point splitting renormalization of Schwinger induced current in de Sitter spacetime, [JCAP \*\*07\*\* \(2016\) 012](#), [arXiv:1603.06172 \[hep-th\]](#).
- 182. R. Sharma and S. Singh, Multifaceted Schwinger effect in de Sitter space, [Phys. Rev. D \*\*96\*\*, 025012 \(2017\)](#), [arXiv:1704.05076 \[gr-qc\]](#).
- 183. T. Hayashinaka and S.-S. Xue, Physical renormalization condition for de Sitter QED, [Phys. Rev. D \*\*97\*\*, 105010 \(2018\)](#), [arXiv:1802.03686 \[gr-qc\]](#).
- 184. M. Banyeres, G. Domènech, and J. Garriga, Vacuum birefringence and the Schwinger effect in (3+1) de Sitter, [JCAP \*\*10\*\* \(2018\) 023](#), [arXiv:1809.08977 \[hep-th\]](#).
- 185. V. Domcke and K. Mukaida, Gauge Field and Fermion Production during Axion Inflation, [JCAP \*\*11\*\* \(2018\) 020](#), [arXiv:1806.08769 \[hep-ph\]](#).

186. W. Tangarife, K. Tobioka, L. Ubaldi, and T. Volansky, Dynamics of Relaxed Inflation, [JHEP 02 \(2018\) 084](#), [arXiv:1706.03072 \[hep-ph\]](#).
187. C. Stahl, Schwinger effect impacting primordial magnetogenesis, [Nucl. Phys. B \*\*939\*\*, 95 \(2019\)](#), [arXiv:1806.06692 \[hep-th\]](#).
188. M. Giovannini, Spectator electric fields, de Sitter spacetime, and the Schwinger effect, [Phys. Rev. D \*\*97\*\*, 061301 \(2018\)](#), [arXiv:1801.09995 \[hep-th\]](#).
189. W. Z. Chua, Q. Ding, Y. Wang, and S. Zhou, Imprints of Schwinger Effect on Primordial Spectra, [JHEP 04 \(2019\) 066](#), [arXiv:1810.09815 \[hep-th\]](#).
190. O. O. Sobol, E. V. Gorbar, and S. I. Vilchinskii, Backreaction of electromagnetic fields and the Schwinger effect in pseudoscalar inflation magnetogenesis, [Phys. Rev. D \*\*100\*\*, 063523 \(2019\)](#), [arXiv:1907.10443 \[astro-ph.CO\]](#).
191. E. V. Gorbar, K. Schmitz, O. O. Sobol, and S. I. Vilchinskii, Hypermagnetogenesis from axion inflation: Model-independent estimates, [Phys. Rev. D \*\*105\*\*, 043530 \(2022\)](#), [arXiv:2111.04712 \[hep-ph\]](#).
192. Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, *et al.*, Pair production in a strong electric field, [Phys. Rev. Lett. \*\*67\*\*, 2427 \(1991\)](#).
193. Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, *et al.*, Fermion pair production in a strong electric field, [Phys. Rev. D \*\*45\*\*, 4659 \(1992\)](#).
194. S. M. Schmidt, D. Blaschke, G. Ropke, *et al.*, A Quantum kinetic equation for particle production in the Schwinger mechanism, [Int. J. Mod. Phys. E \*\*7\*\*, 709 \(1998\)](#), [arXiv:hep-ph/9809227](#).
195. Y. Kluger, E. Mottola, and J. M. Eisenberg, The Quantum Vlasov equation and its Markov limit, [Phys. Rev. D \*\*58\*\*, 125015 \(1998\)](#), [arXiv:hep-ph/9803372](#).

- 196. S. M. Schmidt, D. Blaschke, G. Ropke, *et al.*, NonMarkovian effects in strong field pair creation, [Phys. Rev. D \*\*59\*\*, 094005 \(1999\)](#), [arXiv:hep-ph/9810452](#).
- 197. J. C. R. Bloch, V. A. Mizerny, A. V. Prozorkevich, *et al.*, Pair creation: Back reactions and damping, [Phys. Rev. D \*\*60\*\*, 116011 \(1999\)](#), [arXiv:nucl-th/9907027](#).
- 198. R. Alkofer, M. B. Hecht, C. D. Roberts, *et al.*, Pair creation and an x-ray free electron laser, [Phys. Rev. Lett. \*\*87\*\*, 193902 \(2001\)](#), [arXiv:nucl-th/0108046](#).
- 199. S. P. Kim and C. Schubert, Non-adiabatic Quantum Vlasov Equation for Schwinger Pair Production, [Phys. Rev. D \*\*84\*\*, 125028 \(2011\)](#), [arXiv:1110.0900 \[hep-th\]](#).
- 200. D. B. Blaschke, L. Juchnowski, and A. Otto, Kinetic Approach to Pair Production in Strong Fields—Two Lessons for Applications to Heavy-Ion Collisions, [Particles \*\*2\*\*, 166 \(2019\)](#).
- 201. N. D. Birrell and P. C. W. Davies, [Quantum Fields in Curved Space](#), Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1982).
- 202. L. E. Parker and D. Toms, [Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Field and Gravity](#), Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2009).
- 203. L. Parker, Quantized fields and particle creation in expanding universes. 1., [Phys. Rev. \*\*183\*\*, 1057 \(1969\)](#).
- 204. A. Perelomov, Some remarks on boson pair creation in alternating external field, [Phys. Lett. A \*\*39\*\*, 165 \(1972\)](#).
- 205. S. M. Christensen, Vacuum Expectation Value of the Stress Tensor in an Arbitrary Curved Background: The Covariant Point Separation Method, [Phys. Rev. D \*\*14\*\*, 2490 \(1976\)](#).

206. S. L. Adler, Axial vector vertex in spinor electrodynamics, [Phys. Rev. \*\*177\*\*, 2426 \(1969\)](#).
207. J. S. Bell and R. Jackiw, A PCAC puzzle:  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the  $\sigma$  model, [Nuovo Cim. A \*\*60\*\*, 47 \(1969\)](#).
208. M. Cirelli, A. Strumia, and J. Zupan, Dark Matter, (2024), [arXiv:2406.01705 \[hep-ph\]](#).
209. M. R. Buckley and A. H. G. Peter, Gravitational probes of dark matter physics, [Phys. Rept. \*\*761\*\*, 1 \(2018\)](#), [arXiv:1712.06615 \[astro-ph.CO\]](#).
210. T. Asaka, S. Blanchet, and M. Shaposhnikov, The  $\nu$ MSM, dark matter and neutrino masses, [Phys. Lett. B \*\*631\*\*, 151 \(2005\)](#), [arXiv:hep-ph/0503065](#).
211. L. Roszkowski, E. M. Sessolo, and S. Trojanowski, WIMP dark matter candidates and searches—current status and future prospects, [Rept. Prog. Phys. \*\*81\*\*, 066201 \(2018\)](#), [arXiv:1707.06277 \[hep-ph\]](#).
212. B. Carr and F. Kuhnel, Primordial black holes as dark matter: Recent developments, [Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. \*\*70\*\*, 355 \(2020\)](#), [arXiv:2006.02838 \[astro-ph.CO\]](#).
213. B. Famaey and S. McGaugh, Modified Newtonian Dynamics (MOND): Observational Phenomenology and Relativistic Extensions, [Living Rev. Rel. \*\*15\*\*, 10 \(2012\)](#), [arXiv:1112.3960 \[astro-ph.CO\]](#).
214. M. Fabbrichesi, E. Gabrielli, and G. Lanfranchi, *The Physics of the Dark Photon: A Primer*, SpringerBriefs in Physics (Springer International Publishing, Cham, 2021) [arXiv:2005.01515 \[hep-ph\]](#).
215. C. B. Adams *et al.*, Axion Dark Matter, in *Snowmass 2021* (2022) [arXiv:2203.14923 \[hep-ex\]](#).

216. B. Li, T. Rindler-Daller, and P. R. Shapiro, Cosmological Constraints on Bose-Einstein-Condensed Scalar Field Dark Matter, [Phys. Rev. D \*\*89\*\*, 083536 \(2014\)](#), [arXiv:1310.6061 \[astro-ph.CO\]](#).
217. G. Bélanger, A. Pukhov, C. E. Yaguna, and O. Zapata, The  $Z_7$  model of three-component scalar dark matter, [JHEP \*\*03\*\* \(2023\) 100](#), [arXiv:2212.07488 \[hep-ph\]](#).
218. A. Arbey and J. F. Coupechoux, Unifying dark matter, dark energy and inflation with a fuzzy dark fluid, [JCAP \*\*01\*\* \(2021\) 033](#), [arXiv:2007.05376 \[astro-ph.CO\]](#).
219. J. L. Hewett *et al.*, Fundamental Physics at the Intensity Frontier [10.2172/1042577](#) (2012), [arXiv:1205.2671 \[hep-ex\]](#).
220. M. Raggi and V. Kozhuharov, Results and perspectives in dark photon physics, [Riv. Nuovo Cim. \*\*38\*\*, 449 \(2015\)](#).
221. M. Deliyergiyev, Recent Progress in Search for Dark Sector Signatures, [Open Phys. \*\*14\*\*, 281 \(2016\)](#), [arXiv:1510.06927 \[hep-ph\]](#).
222. S. Alekhin *et al.*, A facility to Search for Hidden Particles at the CERN SPS: the SHiP physics case, [Rept. Prog. Phys. \*\*79\*\*, 124201 \(2016\)](#), [arXiv:1504.04855 \[hep-ph\]](#).
223. F. Curciarello, Review on Dark Photon, [EPJ Web Conf. \*\*118\*\*, 01008 \(2016\)](#).
224. J. Alexander *et al.*, Dark Sectors 2016 Workshop: Community Report, (2016), [arXiv:1608.08632 \[hep-ph\]](#).
225. J. Beacham *et al.*, Physics Beyond Colliders at CERN: Beyond the Standard Model Working Group Report, [J. Phys. G \*\*47\*\*, 010501 \(2020\)](#), [arXiv:1901.09966 \[hep-ex\]](#).

- 226. B. Holdom, Two  $U(1)$ 's and Epsilon Charge Shifts, [Phys. Lett. B \*\*166\*\*, 196 \(1986\)](#).
- 227. S. D. McDermott and S. J. Witte, Cosmological evolution of light dark photon dark matter, [Phys. Rev. D \*\*101\*\*, 063030 \(2020\)](#), [arXiv:1911.05086 \[hep-ph\]](#).
- 228. D. Cyncynates and Z. J. Weiner, Experimental targets for dark photon dark matter, [Phys. Rev. D \*\*111\*\*, 103535 \(2025\)](#), [arXiv:2410.14774 \[hep-ph\]](#).
- 229. A. E. Nelson and J. Scholtz, Dark Light, Dark Matter and the Misalignment Mechanism, [Phys. Rev. D \*\*84\*\*, 103501 \(2011\)](#), [arXiv:1105.2812 \[hep-ph\]](#).
- 230. B. Himmetoglu, C. R. Contaldi, and M. Peloso, Instability of the ACW model, and problems with massive vectors during inflation, [Phys. Rev. D \*\*79\*\*, 063517 \(2009\)](#), [arXiv:0812.1231 \[astro-ph\]](#).
- 231. B. Barman, N. Bernal, A. Das, and R. Roshan, Non-minimally coupled vector boson dark matter, [J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 \(01\) \(2022\) 047](#), [arXiv:2108.13447 \[hep-ph\]](#).
- 232. A. Arvanitaki, S. Dimopoulos, M. Galanis, *et al.*, Dark QED from inflation, [JHEP \*\*11\*\* \(2021\) 106](#), [arXiv:2108.04823 \[hep-ph\]](#).
- 233. T. Sato, F. Takahashi, and M. Yamada, Gravitational production of dark photon dark matter with mass generated by the Higgs mechanism, [J. Cosmol. Astropart. Phys. 08 \(08\) \(2022\) 022](#), [arXiv:2204.11896 \[hep-ph\]](#).
- 234. M. Redi and A. Tesi, Dark photon Dark Matter without Stueckelberg mass, [J. High Energy Phys. 10 \(2022\) 167](#), [arXiv:2204.14274 \[hep-ph\]](#).
- 235. D. Cyncynates and Z. J. Weiner, Detectable and Defect-Free Dark Photon Dark Matter, [Phys. Rev. Lett. \*\*134\*\*, 211002 \(2025\)](#), [arXiv:2310.18397 \[hep-ph\]](#).

- 236. O. Özsoy and G. Tasinato, Vector dark matter, inflation, and non-minimal couplings with gravity, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2024) 003, [arXiv:2310.03862 \[astro-ph.CO\]](#).
- 237. A. Marriott-Best, M. Peloso, and G. Tasinato, New gravitational wave probe of vector dark matter, *Phys. Rev. D* **111**, 103511 (2025), [arXiv:2502.13116 \[astro-ph.CO\]](#).
- 238. M. La Rosa and G. Tasinato, Ultralight dark matter from non-slowroll inflation, (2025), [arXiv:2508.16455 \[astro-ph.CO\]](#).
- 239. R. Sharma, K. Subramanian, and T. R. Seshadri, Generation of helical magnetic field in a viable scenario of inflationary magnetogenesis, *Phys. Rev. D* **97**, 083503 (2018), [arXiv:1802.04847 \[astro-ph.CO\]](#).
- 240. C. Cecchini and M. Rinaldi, Inflationary helical magnetic fields with a sawtooth coupling, *Phys. Dark Univ.* **40**, 101212 (2023), [arXiv:2301.07699 \[astro-ph.CO\]](#).
- 241. V. Domcke, V. Guidetti, Y. Welling, and A. Westphal, Resonant backreaction in axion inflation, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** (2020) 009, [arXiv:2002.02952 \[astro-ph.CO\]](#).
- 242. A. V. Lysenko, O. O. Sobol, and S. I. Vilchinskii, Vector dark matter production during inflation in the gradient-expansion formalism, *Phys. Rev. D* **113**, 063525 (2026), [arXiv:2509.24963 \[hep-ph\]](#).

## ДОДАТОК А

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ ТА  
ВІДОМОСТІ ПРО АПРОБАЦІЮ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЇ*Статті у наукових виданнях*

1. O.O. Sobol, **A. V. Lysenko**, E.V. Gorbar, S.I. Vilchinskii, *Gradient expansion formalism for magnetogenesis in the kinetic coupling model*, Phys. Rev. D **102**, 123512 (20 pages) (2020).  
DOI: [10.1103/PhysRevD.102.123512](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.123512) – **(Q1)**.
2. **A. V. Lysenko**, O. O. Sobol, *Quantum kinetic approach to the Schwinger production of scalar particles in an expanding universe*, Gen. Relativ. Gravit. **56**, 39 (22 pages) (2024).  
DOI: [10.1007/s10714-024-03226-8](https://doi.org/10.1007/s10714-024-03226-8) – **(Q1)**.
3. **A. V. Lysenko**, *Gradient expansion formalism for a generic model of inflationary magnetogenesis*, Eur. Phys. J. C **85**, 525 (13 pages) (2025).  
DOI: [10.1140/epjc/s10052-025-14269-9](https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-025-14269-9) – **(Q1)**.
4. **A. V. Lysenko**, O.O. Sobol, S.I. Vilchinskii, *Vector dark matter production during inflation in the gradient-expansion formalism*, Phys. Rev. D **113**, 063525 (18 pages) (2026).  
DOI: [10.1103/lpph-hrdr](https://doi.org/10.1103/lpph-hrdr) – **(Q1)**.

*Матеріали, що засвідчують апробацію дисертації*

5. **А. Лисенко**, О. Соболев, С. Вільчинський, *Формалізм градієнтного розкладу для опису інфляційного магнітогенезу в присутності кінетичного та аксіонного зв'язків*, Міжнародна наукова конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “ЕВРИКА-2022” (18-20 жовтня 2022, Львів, Україна): Збірник тез, ст. D2.  
URL: [https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2022/ua\\_index.php?](https://physics.lnu.edu.ua/conferences/heureka2022/ua_index.php?).
6. **А. Lysenko**, О. Sobol, S. Vilchinskii, *Gradient expansion formalism for a generic model of inflationary magnetogenesis*, Rencontres Jeunes Physiciens 2025 (June 13, 2025, Lyon, France): Abstracts book, Abstract ID 21.  
URL: <https://indico.in2p3.fr/event/35494/overview>.