Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2019, № 2 (131) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 517.95
MSC 35Q55

THE OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR SHRÖDINGER EQUATIONS WITH A SPECIAL GRADIENT TERM

G. Yagub[1], N. S. Ibrahimov[2], M. Zengin[1]

[1]Kafkas University, Kars, Turkey, E-mail:gabilya@mail.ru
[2]Lankaran State University, Lankaran, Azerbaijan, E-mail: natiq_ibrahimov@mail.ru

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ ГРАДИЕНТНЫМ СЛАГАЕМЫМ

Г. Ягуб[1], Н. С. Ибрагимов[2], М. Зенгин[1]

[1]Кавказский Университет, Карс, Турция, E-mail:gabilya@mail.ru
[2]ЛГУ, Ланкарань, Азербайджан, E-mail: natiq_ibrahimov@mail.ru

Abstract. In this paper we consider the optimal control problem for a one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with a special gradient term and with a complex coefficient in the nonlinear part, when the quality criterion is a final functional and the controls are quadratically summable functions. In this case, the questions of the correctness of the formulation and the necessary condition for solving the optimal control problem under consideration are investigated. The existence and uniqueness theorem for the solution is proved and a necessary condition is established in the form of a variational inequality. Along with these, a formula is found for the gradient of the considered quality criterion.
Keywords: optimal control problem, Schrödinger equation.

Аннотация. В данной работе рассматривается задача оптимального управления для одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым с комплексным коэффициентом в нелинейной части, когда критерий качества является финальным функционалом и управления являются квадратично суммируемыми функциями. При этом исследованы вопросы корректности постановки и необходимого условия оптимальности для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Доказана теорема существования и единственности решения и установлено необходимое условие в виде вариационного неравенства. Также найдена формула для градиента рассматриваемого критерия качества.
Ключевые слова: задача оптимального управления, уравнение Шрёдингера.

Введение

Задачи оптимального управления для линейного и нелинейного уравнения Шрёдингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники, и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интерес [1–3]. Одной из таких задач является задача оптимального управления движениями заряженных частиц, возникающая в квантовой механике. Известно, что если заряженная частица в постоянном однородном магнитном поле движется и направление магнитного поля выбрано вдоль оси z, тогда движение такой частицы происходит в плоскости $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и это движение обычно описывается двумерным линейным уравнением Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым (см. [1]). Подобные задачи оптимального управления для линейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены в работах [4, 5]. Отметим, что задачи оптимального управления для линейного и нелинейного уравнений Шрёдингера без специального градиентного слагаемого ранее подробно изучены в работах [6–11] и др. Задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются измеримыми ограниченными функциями, зависящими только от пространственной переменной или только от временной переменной и коэффициент в нелинейной части уравнения является или чисто мнимым числом или вообще комплексным числом, впервые исследованы в работах [12–16]. Однако задачи оптимального управления для нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются квадратично суммируемыми функциями, зависящими от пространственной переменной, почти не исследованы. Поэтому данная работа, посвященная изучению задачи оптимального управления для одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются квадратично суммируемыми функциями и коэффициент нелинейной части является комплексным числом, представляет немалый научный интерес.

1. Постановка задачи оптимального управления

Пусть $l > 0$, $T > 0$ — заданные числа, $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, $\Omega_t = (0, l) \times (0, t)$, $\Omega = \Omega_T$; $C^k([0, T], B)$ — банахово пространство функций, k-раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_p(0, l)$ — лебегово пространство функций, суммируемых по модулю на промежутке $(0, l)$ со степенью $p \ge 1$; $L_2(0, T; B)$ — банахово пространство функций, определенных и суммируемых по модулю с квадратом на отрезке $[0, T]$ со значениями в банаховом пространстве B; $L_\infty(0, T; B)$ — банахово пространство измеримых ограниченных на $(0, T)$

функций со значениями в банаховом пространстве B; пространства Соболева $W_p^k(0,l)$, $W_p^{k,m}(\Omega)$, $p \geq 1$, $k \geq 0$, $m \geq 0$, определены, например, в работах [17–19]; $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$ — подпространство пространства $W_2^1(0,l)$, всюду плотным множеством в котором является множество всех гладких функций, равных нулю вблизи концов отрезка $[0,l]$; $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)$.

Рассмотрим задачу оптимального управления о минимизации функционала

$$J_\alpha(v) = \|\psi(.,T) - y\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\,\|v - \omega\|^2_{L_2(0,l)} \tag{1}$$

на множестве

$$V \equiv \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0,l)\,, \|v\|_{L_2(0,l)} \leq b_0 \right\}$$

при условиях

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - a(x)\,\psi + v(x)\,\psi + a_2|\psi|^2\psi = f(x,t)\,, (x,t) \in \Omega, \tag{2}$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x)\,,\ x \in (0,l)\,, \tag{3}$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0,\ t \in (0,T)\,, \tag{4}$$

где $i = \sqrt{-1}$; $a_0 > 0, b_0 > 0, \alpha \geq 0,$ — заданные числа, a_2 — комплексное число, удовлетворяющее условию

$$a_2 = Rea_2 + iIma_2,\ Rea_2 < 0,\ Ima_2 > 0,\ Ima_2 \geq 2\,|Rea_2| \tag{5}$$

$a(x)$, $a_1(x)$ — измеримые вещественнозначные функции, удовлетворяющие условиям

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0,\ \overset{\circ}{\forall} x \in D,\ \mu_0 = const > 0; \tag{6}$$

$$|a_1(x)| \leq \mu_1,\ \left|\frac{da_1(x)}{dx}\right| \leq \mu_2,\ \overset{\circ}{\forall} x \in (0,l)\,,\ \mu_1, \mu_2 = const > 0; \tag{7}$$

$\phi(x)\,,\ f(x,t)$ — измеримые комплекснозначные функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)\,,\ f \in W_2^{0,1}(\Omega)\,. \tag{8}$$

$y(x)$ — заданная комплекснозначная функция из пространства $L_2(0,l)$, а $\omega(x)$ — заданная вещественнозначная функция из $L_2(0,l)$.

Задачу об определении функции $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из условий (2)–(4) при каждом $v \in V$ назовем редуцированной задачей.

Определение 1. При каждом $v \in V$ под решением редуцированной задачи будем понимать функцию $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ из пространства $B_0 \equiv C^0\left([0,T]\,, \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)\right) \bigcap C^1([0,T]\,, L_2(0,l))$, удовлетворяющую уравнению (2) для почти всех $x \in (0,l)$ и любого $t \in [0,T]$, а начальному и краевому условиям (3),(4) для почти всех $x \in (0,l)$ и для почти всех $t \in (0,T)$, соответственно.

Редуцированная задача (2)–(4) является первой начально-краевой задачей для нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым. Начально-краевые задачи для линейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым ранее изучены в работах [4, 5]. Однако начально-краевые задачи для нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым ранее исследованы в работах [20–25], когда коэффициенты уравнения являются измеримыми ограниченными функциями. Поэтому изучение задач оптимального управления нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым, когда управления являются квадратично суммируемыми функциями, создает необходимость исследования вопроса разрешимости начально-краевых для этого уравнения и представляет немалый научный интерес для теоретической и практической точки зрения. Следует отметить, что первая начально-краевая задача для нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым, когда коэффициенты уравнения являются квадратично суммируемыми функциями, ранее исследована в работе [26] и доказано существование и единственность почти всюду решения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$. Используя результат этой работы и методику работ [11, 20] для доказательства подобных теорем существования и единственности начально-краевых задач для нелинейного уравнения Шрёдингера можно установить справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть комплексное число* a_2 *удовлетворяет условию* (5), *а функции* $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ *удовлетворяют условиям* (6)–(8). *Тогда редуцированная задача* (2)–(4) *при каждом* $v \in V$ *имеет единственное решение из пространства* B_0 *и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\psi(.,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le$$

$$\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ \forall t \in [0,T], \quad (9)$$

где $A_0 > 0$ *— постоянная, не зависящая от* t.

Из результатов этой теоремы следует, что функционал (1) в классе решений $B_0 \equiv C^0\left([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)\right) \bigcap C^1([0,T], L_2(0,l))$ имеет смысл.

2. Существование и единственность решения задачи оптимального управления

В этом разделе будем изучать вопрос существования и единственности решения задачи оптимального управления (1)–(4). Поэтому сначала установим результат о существовании единственного решения задачи. С этой целью приведем известную теорему о существовании и единственности решения задачи невыпуклой оптимизации.

Теорема 2 (Goebel M., [27]). *Пусть* $\tilde{X}$ *равномерно выпуклое пространство,* U *— замкнутое ограниченное множество из* $\tilde{X}$, *функционал* $I(v)$ *на*

U полунепрерывен снизу и снизу ограничен, $\alpha > 0$, $\beta \geq 1$ — заданные числа. Тогда существует плотное подмножество G пространства $\tilde{X}$ такое, что для любого $\omega \in G$ функционал

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

достигает своего наименьшего значения на U. Если $\beta > 1$, то минимальное значение функционала $J_\alpha(v)$ на U достигается на единственном элементе.

С помощью этой теоремы покажем, что задача оптимального управления (1)–(4) при $\alpha > 0$ имеет единственное решение.

Теорема 3. *Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (5)–(8). Пусть, кроме того,$y \in L_2(0,l)$, $\omega \in L_2(0,l)$. Тогда существует плотное подмножество G пространства $L_2(0,l)$ такое, что для любого $\omega \in G$ при $\alpha > 0$ задача оптимального управления (1)–(4) имеет единственное решение.*

Доказательство. Сначала докажем непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V

$$J_0(v) = \|\psi(.,T) - y\|_{L_2(0,l)}^2 . \quad (10)$$

Пусть $\Delta v \in L_2(0,l)$ — приращение любого управления $v \in V$ такое, что $v + \Delta v \in V$ и $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$, где $\psi(x,t;v)$ — решение редуцированной задачи (2)–(4) при $v \in V$. Из условий (2)–(4) следует, что функция $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ является решением следующей начально-краевой задачи

$$i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - a(x)\Delta\psi + (v(x) + \Delta v(x))\psi +$$

$$+a_2\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + a_2\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi} = -\Delta v(x)\psi(x,t;v), (x,t) \in \Omega, \quad (11)$$

$$\Delta\psi(x,0) = 0,\ x \in (0,l), \quad (12)$$

$$\Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0,\ t \in (0,T). \quad (13)$$

где $\psi_\Delta = \psi_\Delta(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v)$ — решение редуцированной задачи (2)–(4) при $v + \Delta v \in V$,$\Delta v \in L_2(0,l)$.

Установим оценку для решения начально-краевой задачи (11)–(13). С этой целью, обе части уравнения (11) умножим на функцию $\Delta\bar{\psi}(x,t)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_t. Тогда получим справедливость равенства

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\bar{\psi} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}\Delta\bar{\psi} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\Delta\bar{\psi} - a(x)|\Delta\psi|^2\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\Omega_t}\Big((v(x) + \Delta v(x))|\Delta\psi|^2 + a_2\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 + a_2\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\Big)dxd\tau =$$

$$= -\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi(x,\tau;v)\Delta\bar{\psi}(x,\tau)\,dxd\tau,\ \forall t \in [0,T].$$

Используя формулу интегрирования по частям и краевое условие из этого равенства, имеем

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\bar{\psi}-a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right|^2+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\Delta\bar{\psi}-a(x)|\Delta\psi|^2\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\Big((v(x)+\Delta v(x))|\Delta\psi|^2+a_2\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2+a_2\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\Big)dxd\tau=$$

$$=-\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\,\psi(x,\tau;v)\,\Delta\bar{\psi}(x,\tau)\,dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Вычитая из этого равенства его комплексное сопряжение нетрудно получить справедливость равенства

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}a_1(x)\frac{\partial}{\partial x}|\Delta\psi|^2dxd\tau+$$

$$+2Ima_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2dxd\tau=$$

$$=-2Rea_2\int_{\Omega_t}Im\left(\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\right)dxd\tau-2Ima_2\int_{\Omega_t}Re\left(\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}Im\left(\psi(x,t)\,\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v(x)\,dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Если к обеим частям этого равенства прибавить слагаемое $\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2dxd\tau$, то получим справедливость равенства

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}|\Delta\psi|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)|\Delta\psi|^2)dxd\tau+$$

$$+2Ima_2\int_{\Omega_t}\left(|\psi_\Delta|^2+|\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2dxd\tau=$$

$$=-2Rea_2\int_{\Omega_t}Im\left(\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\right)dxd\tau-2Ima_2\int_{\Omega_t}Re\left(\psi_\Delta\psi\left(\Delta\bar{\psi}\right)^2\right)dxd\tau-$$

$$-2\int_{\Omega_t}Im\left(\psi(x,t)\,\Delta\bar{\psi}(x,t)\right)\Delta v(x)\,dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}|\Delta\psi|^2dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

и применяя неравенство Коши-Буняковского, с помощью условия (5), начального и краевого условий из (12), (13), а также условия на функции $a_1(x)$ получим справедливость неравенства

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}+\frac{Ima_2}{2}\int_{\Omega_t}|\psi_\Delta|^2|\Delta\psi|^2dxd\tau\le$$

$$\le(1+\mu_3)\int_0^t\|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+\int_{\Omega_t}|\Delta v(x)|^2|\psi|^2dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].\quad(14)$$

Теперь оценим второе слагаемое правой части этого неравенства. Учитывая, что $\Delta v\in L_2(0,l)$, второе слагаемое можем оценить следующим образом

$$\int_{\Omega_t}|\Delta v(x)|^2|\psi|^2dxd\tau\le\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\int_0^t\max_{x\in[0,l]}|\psi(x,\tau)|^2d\tau,\ \forall t\in[0,T].\quad(15)$$

Поскольку пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ вложено в пространство $C[0,l]$, с помощью этого неравенства и оценки (9) получим справедливость неравенства

$$\int_{\Omega_t} |\Delta v(x)|^2 |\psi|^2 dx d\tau \leq c_1 \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T].$$

С учетом этого неравенства из неравенства (14) имеем

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{Ima_2}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\psi|^2 dx d\tau \leq$$

$$\leq (1+\mu_3)\int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + c_2 \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T]. \quad (16)$$

Отсюда с применением леммы Гроноулла нетрудно получить справедливость оценки

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{Ima_2}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\psi|^2 dx d\tau \leq c_3 \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T], \quad (17)$$

где $c_3 > 0$ — постоянная, не зависящая от Δv.

Теперь рассмотрим приращение функционала $J_0(v)$ на любом элементе $v \in V$. По формуле (10) имеем

$$\Delta J_0(v) = \Delta J_0(v+\Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_0^l Re\left[(\psi(x,T) - y(x))\,\Delta\bar{\psi}(x,T)\right] dx + \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}. \quad (18)$$

Из этой формулы, применяя неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (9), (17), при $t = T$ получим справедливость неравенства

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_4\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right), \ \forall v \in V, \quad (19)$$

где $c_4 > 0$ — постоянная, не зависящая от Δv. Из этого неравенства следует непрерывность функционала $J_0(v)$ на множестве V. Множество V является замкнутым ограниченным и выпуклым множеством равномерного выпуклого пространства $L_2(0,l)$ [28]. Тогда в силу теоремы 2 существует плотное подмножество G из пространства $L_2(0,l)$ такое, что при любом $\omega \in G$ и при любом $\alpha > 0$ задача оптимального управления (1)–(4) имеет единственное решение. Теорема 3 доказана. □

Теперь покажем, что при $\alpha \geq 0$ и для любого $\omega \in L_2(0,l)$ задача оптимального управления (1)–(4) имеет хотя бы одно решение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда при* $\alpha \geq 0$ *и любом* $\omega \in L_2(0,l)$ *задача оптимального управления* (1)–(4) *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Возьмем любую минимизирующую последовательность $\{v^m\} \subset V$

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha *} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v)$$

Положим $\psi_m = \psi_m(x,t) \equiv \psi(x,t;v^m)$, $m = 1,2,....$ В силу теоремы 1 при каждом $v^m \in V$ редуцированная задача (2)–(4) имеет единственное решение $\psi_m(x,t)$ из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка

$$\|\psi_m(.,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\psi_m(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,l)}\right),\ m = 1,2,... \tag{20}$$

для $\forall t \in [0,T]$, где правая часть оценки не зависит от m.

Поскольку множество V есть замкнутое ограниченное выпуклое множество из гильбертового пространства $L_2(0,l)$, то из последовательности $\{v^m\} \subset V$ можно извлечь такую подпоследовательность $\{v^{m_k}\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{v^m\}$, что

$$v^m \to v \text{ слабо в } L_2(0,l) \tag{21}$$

при $m \to \infty$. Кроме того, V является замкнутым выпуклым множеством из $L_2(0,l)$. Поэтому V есть слабо замкнутое множество, то есть $v \in V$. Поэтому можем написать следующее соотношение

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^l v^m(x)q(x)dx = \int_0^l v(x)q(x)dx,\ \forall q \in L_2(D). \tag{22}$$

Из оценки (20) следует, что последовательность $\{\psi_m(x,t)\}$ равномерно ограничена в норме пространства B_0. Тогда из этой последовательности можно извлечь такую подпоследовательность $\{\psi_{m_k}(x,t)\}$, которую для простоты изложения снова обозначим через $\{\psi_m(x,t)\}$, что

$$\psi_m(.,t) \to \psi(.,t) \text{ слабо в } W_2^2(0,l); \tag{23}$$

$$\frac{\partial\psi_m(.,t)}{\partial t} \to \frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(0,l) \tag{24}$$

для каждого $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$.

Ясно, что каждой элемент $\{\psi_m(x,t)\}$ из B_0 удовлетворяет тождеству

$$\int_0^l \Bigg(i\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_m(x,t)}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial x} -$$

$$-a(x)\psi_m(x,t) + v^m(x)\psi_m(x,t) + a_2|\psi_m(x,t)|^2\psi_m(x,t) -$$

$$-f(x,t)\Bigg)\bar{\eta}(x)\,dx = 0,\ \forall t \in [0,T],\ m = 1,2,... \tag{25}$$

для любой функции $\eta = \eta(x)$ из $L_2(0,l)$, начальному условию

$$\psi_m(x,0) = \varphi(x),\overset{\circ}{\forall} x \in (0,l),\ m = 1,2,..., \tag{26}$$

и краевым условиям

$$\psi_m(0,t) = \psi_m(l,t) = 0,\overset{\circ}{\forall} t \in (0,T),\ m = 1,2,.... \tag{27}$$

В силу компактности вложения пространства B_0 в $C^0([0,T],L_2(0,l))$ имеем

$$\|\psi_m(.,t) - \psi(.,t)\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{28}$$

равномерно относительно $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$. В силу компактности вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)$ в $L_\infty(0,l)$ имеем

$$\|\psi_m(.,t) - \psi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \to 0 \tag{29}$$

для каждого $t \in [0,T]$ при $m \to \infty$. Используя это и предельные соотношения (22), (28) можем установить справедливость соотношений

$$\int_0^l v^m(x)\,\psi_m(x,t)\,\bar\eta(x)\,dx \to \int_0^l v(x)\,\psi(x,t)\,\bar\eta(x)\,dx, \tag{30}$$

$$\int_0^l |\psi_m(x,t)|^2\,\psi_m(x,t)\,\bar\eta(x)\,dx \to \int_0^l |\psi(x,t)|^2\,\psi(x,t)\,\bar\eta(x)\,dx \tag{31}$$

для каждого $t \in [0,T]$, и для любой функции $\eta \in L_2(0,l)$ при $m \to \infty$. С помощью предельных соотношений (23), (24) и (30), (31) если переходить к пределу в интегральном тождестве (25), то оттуда получим тождество

$$\int_0^l \left(i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x} - a(x)\,\psi(x,t) + v(x)\,\psi(x,t) + \right.$$

$$\left. + a_2\,|\psi(x,t)|^2\,\psi(x,t) - f(x,t)\right)\bar\eta(x)\,dx = 0, \forall t \in [0,T]$$

для каждого $t \in [0,T]$ и для любой функции $\eta(x)$ из $L_2(0,l)$. Отсюда следует, что предельная функция $\psi(x,t)$ для каждого $t \in [0,T]$ и для почти всех $x \in (0,l)$ удовлетворяет уравнению (2). Удовлетворение начального условия (3) следует из предельного соотношения (28) при $t = 0$, начального условия (26) и из неравенства

$$\|\psi(.,0) - \varphi\|_{L_2(0,l)} \le \|\psi(.,0) - \psi_m(.,0)\|_{L_2(0,l)} \le \|\psi_m(.,0) - \varphi\|_{L_2(0,l)}.$$

Наконец, докажем, что предельная функция $\psi(x,t)$ удовлетворяет краевому условию (4). Действительно, в силу компактности вложения B_0 в пространство $L_2(0,T)$ имеем

$$\|\psi_m(s,.) - \psi(s,.)\|_{L_2(0,T)} \to 0, s = 0, l$$

при $m \to \infty$. Тогда, используя это и краевое условие (27), из неравенств

$$\|\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)} \le \|\psi(s,.) - \psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)} + \|\psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)}, s = 0, l$$

с переходом к пределу получим справедливость краевого условия

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \ \overset{\circ}{\forall} t \in (0,T).$$

Таким образом, нами доказано, что предельная функция $\psi(x,t)$ является решением редуцированной задачи (2)–(4), соответствующим предельной функции $v \in V$, то есть $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$. Кроме того, для этой функции справедлива оценка (9), которая непосредственно следует из оценки (20) с переходом к пределу по слабо сходящиеся подпоследовательности $\{\psi_m(x,t)\}$. В силу теоремы 1 такое решение единственно и принадлежит пространству B_0. Используя слабую полунепрерывность снизу нормы пространства $L_2(0,l)$, а также

$$\psi_m(.,T) \to \psi(.,T) \quad \text{сильно в } L_2(0,l) \text{ при } m \to \infty$$

для $\forall\alpha \geq 0$ и $\forall\omega \in L_2(0,l)$ имеем

$$J_{\alpha *} \leq J_\alpha(v) \leq \liminf_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{w\in V} J_\alpha(w) = J_{\alpha *}.$$

Отсюда следует, что $v \in V$ является решением задачи оптимального управления (1)–(4) при $\alpha \geq 0$ и $\forall\omega \in L_2(0,l)$. Теорема 4 доказана. □

3. Дифференцируемость функционала и необходимое условие оптимальности

В этом разделе установим необходимое условие для решения задачи оптимального управления (1)–(4) в виде вариационного неравенства. Пусть $\Phi = \Phi(x,t)$ является решением следующей сопряженной задачи

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}(a_1(x)\Phi) -$$

$$-a(x)\Phi + v(x)\Phi + 2\bar{a}_2|\psi|^2\Phi + a_2(\psi)^2\bar{\Phi} = 0,\ (x,t)\in\Omega \tag{32}$$

$$\Phi(x,T) = -2i(\psi(x,T) - y(x)),\ x\in(0,l), \tag{33}$$

$$\Phi(0,t) = \Phi(l,t) = 0,\ t\in(0,T). \tag{34}$$

где $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ — решение редуцированной задачи (2)–(4) при $v \in V$.

Под решением сопряженной задачи (32)–(34) понимается функция $\Phi(x,t)$ из пространства B_0, удовлетворяющая уравнению (32) для $\forall t\in[0,T]$ и $\overset{\circ}{\forall} x\in(0,l)$ и условиям (33), (34) для $\overset{\circ}{\forall} x\in(0,l)$ и $\overset{\circ}{\forall} t\in(0,T)$, соответственно.

Теорема 5. *Пусть число a_2 и функции $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ удовлетворяют условиям (5)–(8). Пусть, кроме того, $y \in \overset{\circ}{W}{}_2^2(D)$ — заданная функция. Тогда сопряженная задача (32)–(34) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка*

$$\|\Phi(.,t)\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial\Phi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq c_5\left(\|\varphi\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)} + \|\varphi\|^6_{\overset{\circ}{W}{}_2^2(0,l)}\right) \tag{35}$$

для $\forall t\in[0,T]$, где $c_5 > 0$ — постоянная, не зависящая от t.

Доказательство этой теоремы также проводится методом Галеркина аналогично доказательству теоремы 1.

Для установления необходимого условия оптимальности в задаче оптимального управления (1)–(4). Сначала докажем дифференцируемость функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V. С этой целью введем функцию

$$H\left(x,\psi(x,\cdot),v(x),\bar{\Phi}(x,.)\right) =$$

$$= -\int_0^T Re\left(\psi(x,t)\bar{\Phi}(x,t)\right)dt v(x) - \alpha(v(x)-\omega(x))^2. \tag{36}$$

Эту функцию будем называть функцией Гамильтона-Понтрягина для задачи оптимального управления (1)–(4).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 5 и $\omega \in L_2(0,l)$ — заданный элемент. Тогда функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве v и для его градиента справедливо выражение*

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = \int_0^T Re\left(\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\,dt + 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right)\right). \tag{37}$$

Доказательство. Рассмотрим приращение функционала $J_\alpha(v)$ на любом элементе $v \in V$. С помощью формул (1) и (18) имеем

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_0^l Re\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx +$$

$$+2\alpha\int_0^l \left(v(x) - \omega(x)\right)\Delta v(x)\,dx + \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \tag{38}$$

где $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ — решение начально-краевой задачи (11)–(13). Сначала преобразуем первое слагаемое правой части этой формулы. Ясно, что $\Delta\psi \in B_0$ удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} -\right.$$

$$\left.-a(x)\Delta\psi + \left(v(x) + \Delta v(x)\right)\Delta\psi\right)\bar{\eta}(x,t)\,dxdt = -\int_\Omega \Delta v(x)\,\psi\bar{\eta}(x,t)\,dxdt -$$

$$-\int_\Omega a_2\left[\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi^2|\right)\Delta\psi + \psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi}\right]\bar{\eta}(x,t)\,dxdt \tag{39}$$

для любой функции $\eta \in L_2(\Omega)$. Кроме того, решение сопряженной задачи $\Phi(x,t)$ из B_0 также удовлетворяет следующему интегральному тождеству

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Phi\right) + v(x)\Phi +\right.$$

$$\left. + 2\bar{a}_2|\psi|^2\Phi + a_2(\psi)^2\bar{\Phi}\right)\bar{\eta}_1(x,t)\,dt = 0 \tag{40}$$

для любой функции $\eta_1 \in L_2(\Omega)$. В этом интегральном тождестве вместо пробной функции $\eta_1(x,t)$ возьмем функцию $\Delta\psi(x,t)$ из B_0. Тогда после применения интегрирования по частям в первом, во втором и в третьем слагаемых левой части полученного равенства с использованием начально-краевых условий вида (12), (13) и (33), (34) получим равенство, комплексное сопряжение которого имеет вид

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} -\right.$$

$$\left.- a(x)\Delta\psi + v(x)\Delta\psi + 2a_2|\psi|^2\Delta\psi\right)\bar{\Phi}dxdt =$$

$$+\int_\Omega \bar{a}_2\left(\bar{\psi}\right)^2\Delta\psi\Phi dxdt = -2\int_0^l \left(\bar{\psi}(x,T) - \bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)\,dx. \tag{41}$$

В интегральном тождестве (40) вместо пробной функции $\eta(x,t)$ возьмем $\Phi(x,t)$ из B_0. Тогда, из полученного равенства вычитая (41), имеем

$$2\int_D \left(\bar{\psi}(x,T) - \bar{y}(x)\right)\Delta\psi(x,T)\,dx = \int_\Omega \Delta v(x)\,\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt+$$
$$+\int_\Omega \Delta v(x)\,\Delta\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt+\int_\Omega\left(a_2\left(\psi_\Delta\bar{\Phi}\,|\Delta\psi|^2\right)+a_2\bar{\psi}\bar{\Phi}\,(\Delta\psi)^2\right)dxdt+$$
$$+\int_\Omega\left(a_2\psi_\Delta\psi\Delta\bar{\psi}\right)\bar{\Phi}(x,t)\,dxdt - \int_\Omega \bar{a}_2\left(\bar{\psi}^2\right)\Phi\Delta\psi dxdt.$$

Суммируя это равенство с его комплексным сопряжением, получим

$$2\int_0^l Re\left[\left(\psi(x,T) - y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx = \int_\Omega \Delta v(x)\,Re\left(\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right)dxdt+$$
$$+\int_\Omega \Delta v(x)\,Re\left(\Delta\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right)dxdt+\int_\Omega Re\left(a_2\left(\psi_\Delta\bar{\Phi}\,|\Delta\psi|^2\right)\right)dxdt+$$
$$+\int_\Omega Re\left(a_2\left(\bar{\psi}\bar{\Phi}\,(\Delta\psi)^2\right)\right)dxdt+\int_\Omega Re(a_2\psi\bar{\Phi}\,|\Delta\psi|^2)dxdt. \tag{42}$$

С учетом этого равенства в правой части (38) имеем

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \int_\Omega \Delta v(x)\,Re\left(\psi(x,t)\,\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt+$$
$$+2\alpha\int_0^l (v(x) - \omega(x))\,\Delta v(x)\,dx + R(\Delta v), \tag{43}$$

где $R(\Delta v)$ определяется формулой

$$R(\Delta v) = \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+$$
$$+\int_\Omega \Delta v(x)\,Re\left(\Delta\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right)dxdt+\int_\Omega Re\left(a_2\left(\psi_\Delta\bar{\Phi}\,|\Delta\psi|^2\right)\right)dxdt+$$
$$+\int_\Omega Re\left(a_2\left(\bar{\psi}\bar{\Phi}\,(\Delta\psi)^2\right)\right)dxdt+\int_\Omega Re(a_2\psi\bar{\Phi}\,|\Delta\psi|^2)dxdt. \tag{44}$$

Если оценить оставшееся слагаемое $R(\Delta v)$, то с помощью неравенства Коши-Буняковского получим справедливость неравенства

$$\begin{aligned}|R(\Delta v)| \le \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} &+ \alpha\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}+\\ &+\sqrt{T}\,\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|\Delta\psi\|_{L_2(\Omega)}\,\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}+\\ &+|a_2|\,\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}+\\ &+2\,|a_2|\,\|\phi\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)}\,\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{45}$$

В силу вложения пространства $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)$ в $L_\infty(0,l)$ [17–19] можем написать

$$\|\psi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \le c_6\,\|\psi(.,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)}, \tag{46}$$

$$\|\psi_\Delta(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \le c_7\,\|\psi_\Delta(.,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)}, \tag{47}$$

$$\|\Phi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \le c_8\,\|\Phi(.,t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,l)} \tag{48}$$

для любого $t \in [0,T]$. Используя оценку (9) для функций $\psi(x,t)$, $\psi_\Delta(x,t)$ и оценку (35) для функции $\Phi(x,t)$ получим справедливость неравенств

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_9, \|\psi_\Delta\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{10}, \|\Phi\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_{11}. \tag{49}$$

С учетом этих неравенств и оценки (17) из (45) получим

$$|R(\Delta v)| \le c_{12} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}. \tag{50}$$

Это означает, что

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right). \tag{51}$$

Тогда с учетом этого соотношения приращение $J_\alpha(v)$ можем записать в виде

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_\Omega \Delta v(x)\, Re\left(\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right) dxdt +$$

$$+2\alpha \int_0^l (v(x) - \omega(x))\, \Delta v(x)\, dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right),$$

где

$$\lim_{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to \infty} \frac{o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)}{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}} = 0.$$

Отсюда с учетом формулы для функции Гамильтона-Понтрягина имеем

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left(-\frac{\partial H\left(x, \psi(x,.), v(x), \bar{\Phi}(x,.)\right)}{\partial v}\right) \Delta v(x)\, dx +$$

$$+o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right),\ \forall v \in V. \tag{52}$$

Используя определение дифференцируемости по Фреше функционалов, из последней формулы (52) для приращения функционала $J_\alpha(v)$ получаем, что этот функционал дифференцируем по Фреше на любом элементе $v \in V$ и для его градиента справедливо выражение

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} = \int_0^T Re\left(\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\, dt + 2\alpha(v(x) - \omega(x))\right).$$

Отсюда следует утверждение теоремы. Теорема 6 доказана. □

С помощью этой теоремы докажем необходимое условие в виде вариационного неравенства.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы 6. Пусть, кроме того, $v^* \in V$ — любое решение задачи оптимального управления (1)–(4). Тогда для любого $v \in V$ справедливо неравенство*

$$\int_0^l \left[\int_0^T Re\left(\psi^*(x,t)\,\bar{\Phi}^*(x,t)\right) dt + 2\alpha(v^*(x) - \omega(x))\right] \times$$

$$\times [v(x) - v^*(x)]\, dx \ge 0,\ \forall v \in V, \tag{53}$$

где $\psi^*(x,t) \equiv \psi(x,t;v^*)$, $\Phi^*(x,t) = \Phi(x,t;v^*)$ — решение редуцированной и сопряженной задач при $v^* \in V$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 6 функционал $J_\alpha(v)$ дифференцируем по Фреше на множестве V и для его градиента справедлива формула (37). С помощью этой формулы сначала докажем непрерывность градиента $J'_\alpha(v)$ на множестве V. Действительно, используя формулы (37) имеем

$$J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) = \int_0^T Re\left(\psi_\Delta(x,t)\,\Delta\bar{\Phi}(x,t)\right)dt +$$

$$+\int_0^T Re\left(\Delta\psi(x,t)\,\bar{\Phi}(x,t)\right)dt + 2\alpha\Delta v(x)\,. \qquad (54)$$

Где $\psi_\Delta(x,t) = \psi(x,t;v+\Delta v)$, $\psi(x,t) = \psi(x,t;v)$, $\Phi(x,t) = \Phi(x,t;v)$, а $\Delta\Phi(x,t) = \Phi_\Delta(x,t) - \Phi(x,t) \equiv \Phi(x,t;v+\Delta v) - \Phi(x,t;v)$ является решением следующей задачи

$$i\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\Phi}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\,\Delta\Phi\right) - a(x)\,\Delta\Phi +$$

$$+\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\Phi + 2\bar{a}_2\left|\psi_\Delta\right|^2\Phi_\Delta + a_2\left(\psi_\Delta\right)^2\bar{\Phi}_\Delta -$$

$$-2\bar{a}_2\left|\psi\right|^2\Phi - a_2\left(\psi\right)^2\bar{\Phi} = -\Delta v(x)\,\Phi(x,t)\,,(x,t)\in\Omega, \qquad (55)$$

$$\Delta\Phi(x,T) = -2i\Delta\psi(x,T)\,, x\in(0,l)\,, \qquad (56)$$

$$\Delta\Phi(0,t) = \Delta\Phi(l,t) = 0, t\in(0,T)\,. \qquad (57)$$

Здесь $\Phi_\Delta = \Phi_\Delta(x,t) = \Phi(x,t;v+\Delta v)$ — решение сопряженной задачи (32)–(34) при $v+\Delta v\in V$.

Установим оценку для решения этой задачи. С этой целью умножим обе части уравнения (55) на функцию $\Delta\bar{\Phi}(x,t)$ и полученное равенство проинтегрируем по области $\tilde{\Omega}_z = D\times(t,T)$. Тогда в полученном равенстве произведя интегрирования по частям по переменной x имеем

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(i\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial t}\Delta\bar{\Phi} - a_0\left|\frac{\partial\Delta\Phi}{\partial x}\right|^2 + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\,\Delta\Phi\right)\Delta\bar{\Phi} -\right.$$

$$\left.- a(x)\left|\Delta\Phi\right|^2 + (v+\Delta v)\left|\Delta\Phi\right|^2\right)dxd\tau + 2\bar{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_\Delta\right|^2\left|\Delta\Phi\right|^2 dxd\tau +$$

$$+2\bar{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\bar{\psi}\Phi\Delta\psi\Delta\bar{\Phi}dxd\tau + 2\bar{a}_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_\Delta\Phi\Delta\bar{\psi}\Delta\bar{\Phi}dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\left(\psi_\Delta\right)^2(\Delta\bar{\Phi})^2 dxd\tau + a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\bar{\psi}\Phi\Delta\psi\Delta\bar{\Phi}dxd\tau +$$

$$+a_2\int_{\tilde{\Omega}_t}\psi_\Delta\bar{\Phi}\Delta\psi\Delta\bar{\Phi}dxd\tau = -\int_{\tilde{\Omega}_t}\Delta v(x)\,\Phi(x,\tau)\,\Delta\bar{\Phi}(x,\tau)\,dxd\tau$$

для любого $t\in[0,T]$. Из этого равенства вычитая его комплексное сопряжение и используя начальное и краевое условия (56), (57), получим справедливость равенства

$$\left\|\Delta\Phi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} = -\int_{\tilde{\Omega}_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\Phi\right|^2 dxd\tau + 4\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+\int_{\tilde{\Omega}_t} \Delta v\,(x)\, Re(\Phi\,(x,\tau)\,\Delta\bar{\Phi}\,(x,\tau))dxd\tau + 4Ima_2 \int_{\tilde{\Omega}_t} |\psi_\Delta|^2 \,|\Delta\Phi|^2\, dxd\tau +$$

$$+4\int_{\tilde{\Omega}_t} Im(\bar{a}_2\bar{\psi}\Phi\Delta\psi\Delta\bar{\Phi})dxd\tau + 4\int_{\tilde{\Omega}_t} (\bar{a}_2\psi_\Delta\Phi\Delta\bar{\psi}\Delta\bar{\Phi})dxd\tau +$$

$$+2\int_{\tilde{\Omega}_t} Im(a_2\,(\psi_\Delta)^2\,(\Delta\bar{\Phi})^2)dxd\tau + 2\int_{\tilde{\Omega}_t} Im(a_2\bar{\psi}\Phi\Delta\psi\Delta\bar{\Phi})dxd\tau +$$

$$+2\int_{\tilde{\Omega}_t} Im(a_2\psi_\Delta\bar{\Phi}\Delta\psi\Delta\bar{\Phi})dxd\tau, \forall t \in [0,T]\,.$$

Отсюда в силу условия для коэффициента $a_1\,(x)$ нетрудно получить справедливость неравенства

$$\|\Delta\Phi\,(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le \mu_2 \int_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta\Phi\,(x,\tau)|^2\, dxd\tau + 4\,\|\Delta\psi\,(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+\int_{\tilde{\Omega}_t} |\Delta v\,(x)|\,|\Phi\,(x,\tau)|\,|\Delta\Phi\,(x,\tau)|\,dxd\tau +$$

$$+\,(4Ima_2 + 2\,|a_2|)\int_{\tilde{\Omega}_t} |\psi_\Delta|^2\,|\Delta\Phi|^2\,dxd\tau +$$

$$+6\,|a_2|\int_{\tilde{\Omega}_t} |\psi|\,|\Phi|\,|\Delta\psi|\,|\Delta\Phi|\,dxd\tau +$$

$$+6\,|a_2|\int_{\tilde{\Omega}_t} |\psi_\Delta|\,|\Phi|\,|\Delta\psi|\,|\Delta\Phi|\,dxd\tau,\ \forall t \in [0,T]\,.$$

Из этого неравенства с помощью неравенств (49) и оценки (17) получим справедливость следующего неравенства

$$\|\Delta\Phi\,(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13}\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} + \int_t^T \|\Delta\Phi\,(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\,d\tau, \forall t \in [0,T]\,.$$

Применяя лемму Гронуолла, получим справедливость оценки

$$\|\Delta\Phi\,(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{14}\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\,, \forall t \in [0,T]\,. \tag{58}$$

Тогда с помощью формулы (54) имеем

$$\left|J'_\alpha\,(v+\Delta v) - J'_\alpha\,(v)\right| \le \int_0^T |\psi_\Delta|\,|\Delta\Phi|\,dt + \int_0^T |\Phi|\,|\Delta\psi|\,dt + 2\alpha\,|\Delta v\,(x)|\,.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского в этом неравенстве, после простых преобразований имеем

$$\left\|J'_\alpha\,(v+\Delta v) - J'_\alpha\,(v)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le +3T\,\|\psi_\Delta\|^2_{L_\infty(\Omega)}\,\|\Delta\Phi\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+3T\,\|\Phi\|^2_{L_\infty(\Omega)}\,\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + 12\alpha^2\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\,.$$

Из этого неравенства в силу неравенств (49) и оценок (17), (58) имеем

$$\left\|J'_\alpha\,(v+\Delta v) - J'_\alpha\,(v)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\,\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\,. \tag{59}$$

Из этой оценки следует непрерывность $J'_\alpha\,(v)$ на любом элементе $v \in V$, то есть

$$\left\|J'_\alpha\,(v+\Delta v) - J'_\alpha\,(v)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \text{ при } \|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0,\ \forall v \in V. \tag{60}$$

Таким образом, с учетом последнего соотношения и непрерывности функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V нами доказана непрерывна дифференцируемость по Фреше функционала $J_\alpha(v)$ на множестве V. С другой стороны, множество V является выпуклым множеством в пространстве $L_2(0,l)$. Это означает, что выполняются все условия известной теоремы работы [29]. Тогда из этой теоремы имеем

$$\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \rangle_{L_2(0,l)} \geq 0, \forall v \in V,$$

где $v^* \in V$ доставляет минимум функционалу (1) на множестве V. Учитывая здесь формулу (37) для градиента функционала $J_\alpha(v)$, получим справедливость утверждения теоремы. Теорема 7 доказана. □

Заключение

Задачи оптимального управления для уравнения Шрёдингера часто возникают в квантовой механике, ядерной физике, нелинейной оптике и в других областях современной физики и техники, и изучение этих задач носит как теоретический, так и практический интерес. Одной из таких задач является задача оптимального управления движениями заряженных частиц, возникающая в квантовой механике.

В данной работе рассматривается задача оптимального управления для одномерного нелинейного уравнения Шрёдингера со специальным градиентным слагаемым с комплексным коэффициентом в нелинейной части, когда критерий качества является финальным функционалом и управления являются квадратично суммируемыми функциями. При этом исследованы вопросы корректности постановки и необходимого условия оптимальности для решения рассматриваемой задачи оптимального управления. Доказана теорема существования и единственности решения и установлено необходимое условие в виде вариационного неравенства. Также найдена формула для градиента рассматриваемого критерия качества.

Литература

1. Бутковский А. Г., Самойленко Ю. И. Управление квантовомеханическими процессами. Москва: Наука, 1984. 256 с.
2. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. Москва: Наука, 1985. 366 с.
3. Журавлев В. М. Нелинейные волны в многокомпонентных системах сдисперсией и диффузией. Ульяновск: УлГУ, 2001. 200 с.
4. Akbaba G. D. The optimal control problem with the Lions functional for the Schrodinger equation including virtual coefficient gradient. Master's thesis, Kars, 2011. 71 p. (in Turkish).
5. Yagubov G., Toyoglu F., Subasi M. An optimal control problem for two- dimensional Schrodinger equation. *Applied Mathematics and Computation.* 2012. Vol. 218. Iss. 11. P. 6177–6187.
6. Искендеров А. Д., Ягубов Г. Я. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантовомеханического потенциала. *Докл. АН СССР.* 1988. Т. 303. № 5. С. 1044–1048.

7. Искендеров А. Д., Ягубов Г. Я. Оптимальное управление нелинейными квантово-механическими системами. *Автоматика и телемеханика.* 1989. № 12. С. 27–38.
8. Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Об одной задаче идентификации для нелинейного уравнения Шрёдингера. *Дифференц. уравнения.* 1997. Т. 33. № 12. С. 1691–1698.
9. Baudouin L., Kavian O., Puel J. P. Regularity for a Schrodinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control. *J. Differential Equations.* 2005. Vol. 216. P. 188–222.
10. Искендеров А., Ягубов Г. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном нестационарном уравнении Шрёдингера. *Вестник Ленкоранского гос. ун-та. Серия Естественных наук.* 2007. С. 3–56.
11. Искендеров А. Д., Ягубов Г. Я., Мусаева М. А. Идентификация квантовых потенциалов. Баку: Чашыоглу, 2012. 548 с.
12. Iskenderov A.D.,Yagub G., Y.Aksoy N. An optimal control problem for a two-dimensional nonlinear Schrodinger equation with a spesial gradient terms. XXV International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2015), May 11–15, 2015: Abstracts. Skhidnytsia, Ukraine. P. 27–28.
13. Ягуб Г., Ибрагимов Н., Мусаева М., Зенгин М. Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантового потенциала в нелинейном нестационарном уравнении Шрёдингера с комплексным коэффициентом в нелинейной части. *Вестник Ленкоранского гос. ун-та, Серия естественные науки, серия 2.* 2017. С. 7–30.
14. Aksoy Yildirim N. Variational method forthe solution of an inverse problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2017. Vol. 312. P. 82–93.
15. Yagub G., Zengin M. The optimal control problem for movement charged particls in the nonlinear non-homogenous media. International Conference "Problems of Theoric and Applied Mathematics May 25–26, 2017: Abstracts. Sumgait, Azerbaijan. P. 114–115.
16. Iskenderov A.D. , Yagub G., Salmanov V., Aksoy N.Y. Optimal control problem for nonlinear Schrodinger equation with a a special gradient terms and with a complex potentials. XXXI International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2018), July 3–8, 2018: Abstracts. Lankaran-Baku, Republic of Azerbaijan. P. 78–79.
17. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. Москва: Наука, 1973. 408 с.
18. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. Москва: Наука, 1967. 736 с.
19. Lions J.-L., Magenes E. Non-homogeneous boundary value problems andapplications. Vol. 2. Berlin: Springer, 1972. 307 p.
20. Yagub G., Ibrahimov N., Musayeva M., Yagubov V. Existence and uniqeness of solution of initial boundary value problem for nonstatic and nonlinear Schrodinger equation with virtual coefficient gradient. *Kafkas Universityi, Journal of Institute of Natural and Applied Science.* 2012. Vol. 5. P. 47–63. (in Turkish).
21. Yagub G., Ibrahimov N.S., Zengin M. Solvability of the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrodinger equation with a spesial gradient terms. XXV International Conference "Problems of Decision Making under

Uncertainties"(PDMU-2015), May 11–15, 2015: Abstracts. Skhidnytsia, Ukraine. P. 53–54.

22. Yagub G., Ibrahimov N.S., Aksoy N. Yildirim. On the initial-boundary value problems for the nonlinear Schrodinger equation with spesial gradient terms. XXVII International Conference "Problems of Decision Making under Uncertainties"(PDMU-2016), May 23–27, 2016 : Abstracts. Tbilisi-Batumi, Georgia. P. 170–171.
23. Yagub G., Aksoy E. The solvability of initial boundary value problem for three-dimensional Schrodinger equation with a special gradient term. ICANAS, April 18-21, 2017. P. 67.
24. Ягубов Г., Салманов В., Ягубов В., Зенгин М. Разрешимость начально-краевых задач для нелинейного двумерного уравнения Шрёдингера. *Нахчыванский Государственный Университет, Научные Труды, Серия физико-математических и технических наук.* 2017. № 4 (85). С. 7–21.
25. Yagub G., Ibrahimov N.S., Zengin M. The solvability of the initial-boundary value problems for a nonlinear Schrodinger equation with a special gradient term. *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry.* 2018. No. 2. P. 214–232.
26. Zengin M. The optimal control problem for movement charged particls in the nonlinear non-homogenous media. Master's thesis, Kafkas University, Kars, 2017. 74 p. (in Turkish)
27. Goebel M. On existence of optimal control. *Math. Nachr.* 1979. Vol. 93. P. 67–73.
28. Иосида К. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1967. 624 с.
29. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Москва: Наука, 1981. 400 с.

Поступила: 02.05.2019 / Принята: 03.06.2019