Міністерство освіти і науки України

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ЖУЧОК ЮЛІЯ ВОЛОДИМИРІВНА

УДК 512.579, 512.53

ВІДНОСНО ВІЛЬНІ ТРІЮЇДИ

01.01.06 – алгебра і теорія чисел

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Київ – 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Київському національному університеті імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Кириченко Володимир Васильович,
Київський національний університет
імені Тараса Шевченка,
старший науковий співробітник НДЧ;

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Семко Микола Миколайович,
Університет державної фіскальної служби
України, м. Ірпінь,
завідувач кафедри вищої математики;

кандидат фізико-математичних наук, доцент
Гутік Олег Володимирович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка,
доцент кафедри геометрії і топології.

Захист відбудеться 30 січня 2017 року о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 26.001.18 при Київському національному університеті імені Тараса Шевченка за адресою:
03127, м. Київ, проспект академіка Глушкова, 4-е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитися в науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, вул. Володимирська, 58).

Автореферат розісланий 27 грудня 2016 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В. М. Журавльов

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Однією з важливих мов для виразу властивостей алгебраїчних систем є мова тотожностей. Проблематика, пов'язана з вивченням тотожностей, обумовила формування широкого напряму в алгебрі, який називається теорією многовидів. Термін ,,многовид" був введений Ф. Холом у 1949 році. Починаючи з класичної роботи американського математика Г. Біркгофа[1], проводяться інтенсивні дослідження многовидів алгебраїчних систем. У другій половині 20 ст. теорія многовидів перетворена в один із центральних напрямів сучасної алгебри. Їй присвячено багато книг та наукових статей (див., наприклад, А. І. Мальцев[2], Х. Нейман[3], Л. Н. Шеврин та М. В. Волков[4]). Многовиди відіграють особливу роль в базах даних – вони пов'язані з важливою в теорії програмування ідеєю типу даних[5]. Сьогодні теорія многовидів алгебраїчних систем має багату проблематику, розвивається активно й плідно.

Одним із напрямів досліджень теорії многовидів є дослідження вільних систем у многовидах. Многовиди завжди володіють вільними системами, а елементи заданого многовиду можна охарактеризувати як гомоморфні образи вільних систем. Конструкції різних вільних систем можна знайти, наприклад, в книгах Б. І. Плоткіна[5] та П. Кона[6]. Важливими прикладами многовидів є такі класи, як клас усіх напівгруп, клас усіх груп, клас усіх кілець, клас усіх решіток, клас усіх алгебр Буля.

Іншим змістовним класом алгебраїчних систем є клас тріоїдів. Тріоїдом називається непорожня множина з трьома бінарними асоціативними операціями $\text{”}, \text{ђ}$ та $\perp$, які задовольняють вісім аксіом:

$$(x \text{”} y) \text{”} z = x \text{”} (y \text{ђ} z), \qquad (T1)$$

$$(x \text{ђ} y) \text{”} z = x \text{ђ} (y \text{”} z), \qquad (T2)$$

$$(x \text{”} y) \text{ђ} z = x \text{ђ} (y \text{ђ} z), \qquad (T3)$$

$$(x \text{”} y) \text{”} z = x \text{”} (y \perp z), \qquad (T4)$$

$$(x \perp y) \text{”} z = x \perp (y \text{”} z), \qquad (T5)$$

$$(x \text{”} y) \perp z = x \perp (y \text{ђ} z), \qquad (T6)$$

$$(x \text{ђ} y) \perp z = x \text{ђ} (y \perp z), \qquad (T7)$$

$$(x \perp y) \text{ђ} z = x \text{ђ} (y \text{ђ} z). \qquad (T8)$$

Теорія тріоїдів бере свій початок з основоположної праці Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко[7] і має широке застосування в теорії триалгебр. Нагадаємо, що

---

[1] *Birkhoff, G.* On the structure of abstract algebras / G. Birkhoff // Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1935. – Vol. 31. – P. 433 – 454.

[2] *Мальцев, А. И.* Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

[3] *Нейман, Х.* Многообразия групп / Х. Нейман. – М.: Мир, 1969. – 264 с.

[4] *Шеврин, Л. Н.* Тождества полугрупп / Л. Н. Шеврин, М. В. Волков // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 11. – С. 3 – 47.

[5] *Плоткин, Б. И.* Универсальная алгебра, алгебраическая логика и базы данных / Б. И. Плоткин. – М.: Наука, 1991. – 448 с.

[6] *Кон, П.* Универсальная алгебра / П. Кон. – М.: Мир, 1968. – 359 с.

[7] *Loday, J.-L.* Trialgebras and families of polytopes / J.-L. Loday, M. O. Ronco // Contemp. Math. – 2004. – Vol. 346. – P. 369 – 398.

триалгебра є лінійним аналогом тріоїда. Поняття триалгебри та тріоїда виникли в контексті алгебраїчної топології під час дослідження планарних дерев. Триалгебри та тріоїди мають зв'язки з алгебрами Хопфа, з алгебрами Лейбніца та з операторами Рота–Бакстера. Триалгебри вивчалися в роботах Ж.-С. Новеллі і Ж.-І. Тібона, Ж. М. Касаса, К. Ібрахімі–Фарда. Першим результатом про тріоїди є опис Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко[7] вільного тріоїда рангу 1. У роботах А. В. Жучка[8, 9] вивчаються конгруенції на тріоїдах за допомогою методу напівретракцій та характеризуються деякі найменші конгруенції на тріоїдах з обмеженнями на операції. Вивчення ендоморфізмів однопороджених вільних тріоїдів здійснено у роботі Ю. В. Жучка[10]. Тріоїди є предметом вивчення оглядової статті А. В. Жучка[11].

Якщо дві конкретні операції триалгебри (тріоїда) збігаються, то отримуємо поняття діалгебри (дімоноїда)[12]. Нагадаємо, що діалгеброю називається векторний простір над полем, наділений двома бінарними білінійними асоціативними операціями ” і ђ, які задовольняють аксіоми $(T1)$–$(T3)$. Якщо у визначенні діалгебри замість векторного простору над полем взяти множину та опустити білінійність операцій ”, ђ, то отримуємо поняття дімоноїда. Поняття діалгебри та дімоноїда були введені Ж.-Л. Лоде під час вивчення феномену періодичності в алгебраїчній K-теорії. Нагадаємо, що будь-яка асоціативна алгебра дає алгебру Лі, якщо покласти $[x, y] = xy - yx$. Діалгебри пов'язані з алгебрами Лейбніца аналогічно тому як пов'язані між собою асоціативні алгебри і алгебри Лі. Вони є універсальними обгортуючими для алгебр Лейбніца та вивчалися в роботах різних математиків. Так, Л. А. Бокутем, Ю. Ченом та С. Лю[13] наведено базис Грьобнера–Ширшова для діалгебр. Многовиди діалгебр вивчалися П. С. Колесниковим[14, 15] та В. Ю. Вороніним[15]. Діалгебрам та їх зв'язкам з потрійними системами присвячено дослідження О. П. Пожидаєва. Першим результатом про дімоноїди є опис Ж.-Л. Лоде[12] вільного дімоноїда. Нещодавно було охарактеризовано декомпозиції дімоноїдів у дісполуки піддімоноїдів[16], а також показано, що будь-який дімоноїд можна побудувати з напівгрупи[17]. Теорія дімоноїдних

---

[8] *Жучок, А. В.* Напівретракції тріоїдів / А. В. Жучок // Укр. мат. журн. – 2014. – Т. 66, № 2. – С. 195 – 207.

[9] *Жучок, А. В.* Некоторые конгруэнции на триоидах / А. В. Жучок // Фундаментальная и прикладная математика. – 2011/2012. – Т. 17, № 3. – С. 39 – 49.

[10] *Zhuchok, Yu. V.* The endomorphism monoid of a free trioid of rank 1 / Yu. V. Zhuchok // Algebra Universalis. – 2016. – Vol. 76, no. 3. – P. 355 – 366. – DOI: 10.1007/s00012-016-0392-1.

[11] *Zhuchok, A. V.* Trioids / A. V. Zhuchok // Asian-European Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 8, no. 4. – 1550089 (23 p.) DOI: 10.1142/S1793557115500898.

[12] *Loday, J.-L.* Dialgebras / J.-L. Loday // Dialgebras and related operads: Lect. Notes Math. – Springer-Verlag, Berlin. – 2001. – Vol. 1763. – P. 7 – 66.

[13] *Bokut, L. A.* Gröbner–Shirshov bases for dialgebras / L. A. Bokut, Y. Chen, C. Liu // Int. J. Algebra Comput.– 2010. – Vol. 20, no. 3. – P. 391 – 415.

[14] *Колесников, П. С.* Многообразия диалгебр и конформные алгебры / П. С. Колесников // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 2. – С. 322 – 339.

[15] *Kolesnikov, P. S.* On the special identities for dialgebras / P. S. Kolesnikov, V. Yu. Voronin // Linear and Multilinear Algebra. – 2013. – Vol. 61, no. 3. – P. 377 – 391.

[16] *Жучок, А. В.* Димоноиды / А. В. Жучок // Алгебра и логика. – 2011. – Т. 50, № 4. – С. 471–496.

[17] *Zhuchok, A. V.* On the structure of dimonoids / A. V. Zhuchok, A. B. Gorbatkov // Semigroup Forum. – 2016. – DOI: 10.1007/s00233-016-9795-8.

многовидів набула розвитку у роботі А. В. Жучка[18]. У 2014 році з’явилася монографія, присвячена вивченню властивостей дімоноїдів[19]. Слід відзначити, що якщо операції діалгебри (дімоноїда) збігаються, то вона (він) перетворюється в асоціативну алгебру (напівгрупу). Таким чином, діалгебри (дімоноїди) узагальнюють асоціативні алгебри (напівгрупи).

О. П. Пожидаєв[20] і П. С. Колесников[14] розглянули поняття 0-діалгебри, тобто векторного простору над полем, наділеного двома бінарними операціями ” і ђ, які задовольняють аксіоми: $(x$ ” $y)$ ђ $z=(x$ ђ $y)$ ђ z, x ” $(y$ ђ $z)=x$ ” $(y$ ” $z)$. Це поняття пов’язано з асоціативними діалгебрами та з алгебрами Рота–Бакстера. Поняття асоціативної 0-діалгебри, тобто 0-діалгебри з двома бінарними асоціативними операціями ” і ђ, є лінійним аналогом поняття узагальненого дімоноїда (або просто g-дімоноїда для стислості), розглянутого Ю. Мовсисяном, С. Давидовим та М. Сафаряном[21]. Для того, щоб отримати g-дімоноїд, необхідно опустити аксіому $(T2)$ внутрішньої асоціативності у визначенні дімоноїда. Клас усіх g-дімоноїдів утворює многовид. Нещодавно був побудований g-дімоноїд, вільний у многовиді g-дімоноїдів[21]. Зрозуміло, що всі результати, отримані для g-дімоноїдів, можуть бути застосовані до асоціативних 0-діалгебр.

Теорія многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів, з одного боку, може бути розглянута як одна з природних та важливих частин загальної теорії многовидів алгебраїчних систем та, з іншого боку, мова многовидів є потужним засобом вивчення й класифікації тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів. Додатковий інтерес викликає зіставлення окремих питань про тріоїдні, дімоноїдні (g-дімоноїдні) многовиди з відповідними фактами для таких алгебраїчних систем як напівгрупи.

Актуальність теми дисертаційної роботи обумовлена проблемами теорії многовидів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів, до яких відносяться проблеми класифікації підмноговидів в многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та опису вільних об’єктів у заданих многовидах. Разом з тим принциповий інтерес представляють питання дослідження структурних та факторизаційних властивостей побудованих відносно вільних алгебр.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційні дослідження проводилися на кафедрі геометрії, топології і динамічних систем механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка як частина науково-дослідної теми „Застосування алгебро-геометричних методів у теоріях груп,

---

[18] *Zhuchok, A. V.* Structure of relatively free dimonoids / A. V. Zhuchok // Communications in Algebra. – 2016. – DOI: 10.1080/00927872.2016.1222404.

[19] *Жучок, А. В.* Елементи теорії дімоноїдів / А. В. Жучок – К. : Ін-т математики, 2014. – 304 с. – (Математика та її застосування) (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 98).

[20] *Пожидаев, А. П.* 0-диалгебры с бар-единицей и неассоциативные алгебры Рота-Бакстера / А. П. Пожидаев // Сиб. мат. журн. – 2009. – Т. 50, № 6. – С. 1356 – 1369.

[21] *Movsisyan, Y.* Construction of free g-dimonoids / Y. Movsisyan, Y. S. Davidov, Mh. Safaryan // Algebra and Discrete Math. – 2014. – Vol. 18, no. 1. – P. 138 – 148.

напівгруп, кілець, зображень до задач прикладної алгебри та захисту інформації" (номер державної реєстрації 0111U005264) та на кафедрі алгебри та системного аналізу Навчально-наукового інституту фізики, математики та інформаційних технологій Державного закладу «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка» в рамках науково-дослідної теми „Напівгрупи та структурні властивості дімоноїдів" (номер державної реєстрації 0115U000199).

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є побудова вільних об'єктів в деяких многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та вивчення їх структурних і факторизаційних властивостей. **Основними задачами** при цьому є:

- класифікація декомпозицій вільних тріоїдів у трисполуки підтріоїдів та характеризація деяких найменших конгруенцій на вільному тріоїді;
- побудова вільного n-нільпотентного тріоїда, вільної прямокутної трисполуки та дослідження їх структурних і факторизаційних властивостей;
- характеризація найменшої лівої (правої) n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді;
- побудова g-дімоноїда, ізоморфного вільному g-дімоноїду, вільного n-нільпотентного g-дімоноїда, вільного комутативного g-дімоноїда, а також характеризація найменшої n-нільпотентної конгруенції на вільному g-дімоноїді;
- побудова нових класів тріоїдів, дімоноїдів та g-дімоноїдів.

Об'єктом дослідження є тріоїди, дімоноїди та g-дімоноїди.

Предметом дослідження є структура та властивості тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів.

Методи дослідження – загальноалгебраїчні з використанням основних методів теорії напівгруп, теорії дімоноїдів, метод декомпозиції.

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертації отримано такі нові теоретичні результати:

1. Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів, охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну, найменшу праву ідемпотентну, найменшу прямокутну, найменшу n-нільпотентну та найменшу трипрямокутну конгруенції на вільному тріоїді.
2. Побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд та в термінах введеного поняття 0-трисполуки підтріоїдів описано його структуру.
3. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структурні властивості та охарактеризовано деякі найменші конгруенції на ній.
4. Представлено найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

5. Побудовано g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду, вільний n-нільпотентний g-дімоноїд та охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.
6. Побудовано вільний комутативний g-дімоноїд та наведено численні приклади g-дімоноїдів.
7. Наведено нові приклади нільпотентних тріоїдів, прямокутних трисполук та дімоноїдів.

Отримані результати доповнюють результат Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко про вільні тріоїди рангу 1, розвивають добре відомі результати теорії напівгруп про будову вільної n-нільпотентної напівгрупи, вільної прямокутної сполуки, вільної комутативної напівгрупи, а також роблять значний внесок у теорію многовидів алгебраїчних систем.

Теоретичне та практичне значення одержаних результатів. Усі результати дисертації є новими. Результати роботи мають теоретичне значення як такі, що є внеском у подальший розвиток теорії многовидів триалгебр та тріоїдів, теорії многовидів дімоноїдів та g-дімоноїдів. Вони можуть бути застосовані до вивчення будови різних класів триалгебр, тріоїдів, діалгебр, дімоноїдів, g-дімоноїдів і напівгруп.

Особистий внесок здобувача. Основні результати дисертації, які виносяться на захист, отримані автором особисто. У роботах, опублікованих у співавторстві, особистий внесок здобувача полягає в наступному: у роботі [6] – характеризація найменшої лівої (правої) n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді; у роботі [4] – побудова вільного комутативного g-дімоноїда та отримання нового прикладу g-дімоноїда.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації оприлюднено на:

- Науково-практичній конференції викладачів і студентів кафедри загальної математики Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Луганськ, квітень, 2014);
- Міжнародній конференції «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (м. Казань, Росія, червень, 2014);
- Міжнародній алгебраїчній конференції, присвяченій 100-річчю Л. А. Калужніна (м. Київ, липень, 2014);
- Міжнародній конференції «Мальцевские чтения», присвяченій 75-річчю Ю. Л. Єршова (м. Новосибірськ, Росія, травень, 2015);
- XIII Міжнародній конференції «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», присвяченій 85-річчю з дня народження професора С. С. Ришкова (м. Тула, Росія, травень, 2015);
- X Міжнародній алгебраїчній конференції в Україні, присвяченій 70-річчю Ю. А. Дрозда (м. Одеса, серпень, 2015);

- Міжнародній науковій конференції «Дискретная математика, алгебра и их приложения», присвяченій сторіччю з дня народження академіка Д. А. Супруненка (м. Мінськ, Республіка Білорусь, вересень, 2015);
- Алгебраїчному семінарі Інституту математики факультету природничих наук Університету Павла Йозефа Шафарика (м. Кошице, Словацька Республіка, березень, 2016);
- Алгебраїчному семінарі факультету гуманітарних та природничих наук Пряшівського університету в Пряшові (м. Пряшів, Словацька Республіка, березень, 2016);
- Алгебраїчному семінарі Київського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Київ, вересень, 2016);
- Алгебраїчному семінарі Луганського національного університету імені Тараса Шевченка (м. Старобільськ, 2014 – 2016 рр.).

Публікації. Публікацію основних результатів дисертації здійснено у 6 статтях у фахових наукових виданнях [1 – 6] (3 статті в наукових виданнях України, з яких 2 входять до міжнародних наукометричних баз даних; 3 статті в іноземних наукових виданнях, з яких 2 входять до міжнародних наукометричних баз даних) та 7 тезах наукових конференцій [7 – 13].

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 151 сторінку, з яких основний зміст дисертації викладено на 142 сторінках, список використаних джерел містить 100 найменувань та займає 9 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У вступі обґрунтовано актуальність теми дисертації, сформульовано мету і задачі дослідження, визначено об’єкт і предмет дослідження, вказано наукову новизну, теоретичне та практичне значення отриманих результатів, методи дослідження, визначено особистий внесок здобувача та наведено інформацію щодо апробації результатів дослідження, охарактеризовано зміст роботи.

У першому розділі „Множини з бінарними асоціативними операціями” подається огляд результатів за темою дисертації.

У підрозділі 1.1. „Дуплекси та n-кратні напівгрупи” містяться визначення дуплексу, n-кратної напівгрупи та n-кратної алгебри асоціативного типу. Побудовано вільний дуплекс за допомогою планарних дерев. Розглянуто кілька дуплексів з додатковими умовами, а також наведено приклад n-кратної алгебри асоціативного типу. Матеріал цього підрозділу базується на результатах Т. Пірашвілі та М. Корешкова.

У підрозділі 1.2. „Інтерасоціативність напівгруп” визначено поняття інтерасоціативності, сильної інтерасоціативності, P-зв’язаних напівгруп. Охарактеризовано всі інтерасоціативності моногенної напівгрупи та вільної комутативної напівгрупи, вказано необхідні та достатні умови, за якими дві інтерасоціативності моногенної напівгрупи (вільної комутативної напівгрупи) є ізоморфними. Результати цього підрозділу базуються на результатах Б. Гівенса, К. Лінтона, А. Росіна, Л. Дішмана, А. Нельсона, О. Б. Горбаткова, Є. Хьюіта і Х. Цукермана.

У підрозділі 1.3. „Відносно вільні дімоноїди” введено поняття дімоноїду, розглянуто вільний дімоноїд та побудовано дімоноїд, ізоморфний вільному дімоноїду. Крім того, побудовано вільний комутативний дімоноїд, вільний прямокутний дімоноїд та наведено декілька відносно вільних дімоноїдів з ідемпотентними операціями. Матеріал цього підрозділу базується на результатах, отриманих у роботах Ж.-Л. Лоде та А. В. Жучка.

У підрозділі 1.4. „Триалгебри”, який базується на результатах, отриманих у роботі Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко, наведено поняття асоціативної діалгебри, асоціативної триалгебри, асоціативного тріоїду. Побудовано конструкції вільної асоціативної триалгебри та вільного тріоїду ранга 1 і розглянуто приклади асоціативних триалгебр.

Другий розділ „Тріоїди” присвячено вивченню структурних та факторизаційних властивостей відносно вільних тріоїдів.

У підрозділі 2.1. „Декомпозиції вільних тріоїдів” розглянуто конструкцію вільного тріоїду та наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Введено поняття прямокутної трисполуки та наведено приклади прямокутних трисполук. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію і найменшу праву ідемпотентну конгруенцію на вільному тріоїді.

Нагадаємо, що непорожня множина, наділена трьома бінарними асоціативними операціями ”, ђ і $\perp$, які задовольняють аксіоми $(T1)-(T8)$, називається тріоїдом. Тріоїд $(T,”,ђ,\perp)$ називається ідемпотентним тріоїдом або трисполукою, якщо напівгрупи $(T,”)$, $(T,ђ)$ і $(T,\perp)$ є ідемпотентними. Тріоїд $(T,”,ђ,\perp)$ називається прямокутною трисполукою, якщо напівгрупи $(T,”)$, $(T,ђ)$ і $(T,\perp)$ є прямокутними сполуками.

Нехай X – довільна непорожня множина, $\overline{X}=\{\overline{x}\mid x\in X\}$, $Y=X\cup\overline{X}$ і $F[Y]$ – вільна напівгрупа на Y. Нехай далі $P\subset F[Y]$ – піднапівгрупа, яка містить слова w з елементами $\overline{x}$ $(x\in X)$, що з’являються в w принаймні один раз. Для кожного $w\in P$ через $\mathring{w}$ позначимо слово, отримане з w шляхом заміни всіх літер $\overline{x}$ $(x\in X)$ на x. Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на множині P за правилами:

$$w ” u = w\mathring{u},\quad w ђ u = \mathring{w}u,\quad w\perp u = wu$$

для всіх $w,u\in P$. Алгебру $(P,”,ђ,\perp)$ позначимо через $Frt(X)$. Згідно з твердженням п. 2.1.1 $Frt(X)$ – вільний тріоїд.

Якщо $f:T_1\to T_2$ – гомоморфізм тріоїдів, то відповідну конгруенцію на T_1 будемо позначати через Δ_f.

Нехай S – довільний тріоїд, J – деяка трисполука і нехай $\alpha : S \to J : x$ а $x\alpha$ – гомоморфізм. Тоді кожен клас конгруенції Δ_α є підтріоїдом тріоїда S, а сам тріоїд S є об’єднанням таких тріоїдів $S_\xi, \xi \in J$, що

$$x\alpha = \xi \Leftrightarrow x \in S_\xi = \Delta_\alpha^x = \{t \in S \mid (x,t) \in \Delta_\alpha\},$$

$$S_\xi \,\text{”}\, S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \text{”} \varepsilon}, \quad S_\xi \,\text{ђ}\, S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \text{ђ} \varepsilon},$$

$$S_\xi \perp S_\varepsilon \subseteq S_{\xi \perp \varepsilon}, \quad \xi \neq \varepsilon \Rightarrow S_\xi \cap S_\varepsilon = \varnothing.$$

У цьому випадку говорять, що S розкладається в трисполуку підтріоїдів (або S є трисполукою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$). Якщо J – напівгрупа ідемпотентів (сполука), то кажуть, що S є сполукою J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$. Якщо J є комутативною сполукою, то говорять, що S – напіврешітка J підтріоїдів S_ξ $(\xi \in J)$.

Через N позначатимемо множину всіх натуральних чисел.

Нехай $I_n = \{1,2,...,n\}$, $n > 1$, і нехай $\{X_i\}_{i \in I_n}$ – сім’я довільних непорожніх множин $X_i, i \in I_n$. Встановимо операції ”, ђ і $\perp$ на $\prod_{i \in I_{2k}} X_i$, де $k \in$ N, поклавши

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \,\text{”}\, (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_{2k-1}, y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \,\text{ђ}\, (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, y_2, ..., y_{2k}),$$

$$(x_1, x_2, ..., x_{2k}) \perp (y_1, y_2, ..., y_{2k}) = (x_1, x_2, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_{2k})$$

для всіх $(x_1, x_2, ..., x_{2k}), (y_1, y_2, ..., y_{2k}) \in \prod_{i \in I_{2k}} X_i$. Згідно з лемою п. 2.1.5 алгебра $(\prod_{i \in I_{2k}} X_i, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Тріоїд $(X^4, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ позначимо через $FRT(X)$.

Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^3 за правилами:

$$(a_1, b_1, c_1) \,\text{”}\, (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_1),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \,\text{ђ}\, (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in X^3$. Згідно з лемою п. 2.1.2 алгебра $(X^3, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через $X_{lz,rd}$.

Встановимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^3 в такий спосіб:

$$(a_1, b_1, c_1) \,\text{”}\, (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_1, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1) \,\text{ђ}\, (a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, c_2),$$

$$(a_1, b_1, c_1,) \perp (a_2, b_2, c_2) = (a_1, b_2, c_2)$$

для всіх $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \in X^3$. Згідно з лемою п. 2.1.3 алгебра $(X^3, \text{”}, \text{ђ}, \perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначимо її через $X_{rd,rz}$.

Визначимо операції ”, ђ і $\perp$ на X^2 таким чином:

$$(a_1, b_1) \,\text{”}\, (a_2, b_2) = (a_1, b_1), \quad (a_1, b_1) \,\text{ђ}\, (a_2, b_2) = (a_2, b_2),$$

$$(a_1, b_1) \perp (a_2, b_2) = (a_1, b_2)$$

для всіх $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in X^2$. Згідно з лемою п. 2.1.4 алгебра $(X^2,”,ђ,\perp)$ є прямокутною трисполукою. Позначатимемо її через $X^{rb}_{lz,rz}$.

Нехай $\omega\in F[Y]$ і $w\in Frt(X)$. Позначимо першу (відповідно, останню) літеру слова ω через $\omega^{(0)}$ (відповідно, $\omega^{(1)}$). Припустимо, що u – початкове (відповідно, кінцеве) підслово слова w мінімальної довжини таке, що $u^{(1)}\in\overline{X}$ (відповідно, $u^{(0)}\in\overline{X}$). У цьому випадку $\overline{\overline{u}}^{(1)}$ (відповідно, $\overline{\overline{u}}^{(0)}$) будемо позначати через $w^{[0]}$ (відповідно, $w^{[1]}$). Для кожного $\omega\in F[Y]$ множину всіх літер, що входять в ω, будемо позначати через $c(\omega)$ і для кожного $w\in Frt(X)$ покладемо $\tilde{c}(w)=c(\overset{\circ}{w})$.

Візьмемо довільну непорожню скінченну підмножину C з X. Нехай $B^C(X)$ – множина всіх скінченних підмножин A з X таких, що $C\subseteq A$, а $B_C(X)$ – напіврешітка, визначена на $B^C(X)$ за допомогою операції теоретико-множинного об’єднання. Нехай далі $i,j,k,s\in X$,

$$M=\{(i,j,k,s),(i,j,k),[i,j,k],[i,j]\}$$

і

$$U_{(i,j,k,s)}=\{w\in Frt(X)\,|\,(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k,s)\},$$

$$U_{(i,j,k)}=\{w\in Frt(X)\,|\,(\overset{\circ}{w}^{(0)},w^{[0]},w^{[1]})=(i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j,k]}=\{w\in Frt(X)\,|\,(w^{[0]},w^{[1]},\overset{\circ}{w}^{(1)})=(i,j,k)\},$$

$$U_{[i,j]}=\{w\in Frt(X)\,|\,(w^{[0]},w^{[1]})=(i,j)\}.$$

Для будь-якого $l\in M$ нехай l^* – множина, що містить всі компоненти l. Розглянемо множину $U_l^A=\{w\in U_l\mid \tilde{c}(w)=A\}$, де $A\in B_{l^*}(X)$ і $l\in M$.

Наступна структурна теорема дає декомпозиції вільного тріоїда $Frt(X)$ у трисполуки підтріоїдів.

Теорема (п. 2.1.6). Нехай $Frt(X)$ – вільний тріоїд. Мають місце такі твердження:

(i) $Frt(X)$ є трисполукою $FRT(X)$ підтріоїдів $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k,s)}$, $(i,j,k,s)\in FRT(X)$, є напіврешіткою $B_{(i,j,k,s)^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j,k,s)}$, $A\in B_{(i,j,k,s)^*}(X)$;

(ii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{lz,rd}$ підтріоїдів $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in X_{lz,rd}$. Кожен тріоїд $U_{(i,j,k)}$, $(i,j,k)\in X_{lz,rd}$, є напіврешіткою $B_{(i,j,k)^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{(i,j,k)}$, $A\in B_{(i,j,k)^*}(X)$;

(iii) $Frt(X)$ є трисполукою $X_{rd,rz}$ підтріоїдів $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in X_{rd,rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j,k]}$, $(i,j,k)\in X_{rd,rz}$, є напіврешіткою $B_{[i,j,k]^*}(X)$ підтріоїдів $U^A_{[i,j,k]}$, $A\in B_{[i,j,k]^*}(X)$;

(iv) $Frt(X)$ є трисполукою $X^{rb}_{lz,rz}$ підтріоїдів $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in X^{rb}_{lz,rz}$. Кожен тріоїд $U_{[i,j]}$, $(i,j)\in X^{rb}_{lz,rz}$, є напіврешіткою $B_{[i,j]^*}(X)$ підтріоїдів $U^{A}_{[i,j]}$, $A\in B_{[i,j]^*}(X)$.

У пунктах 2.1.7 та 2.1.8 описано інші декомпозиції вільного тріоїда у трисполуки підтріоїдів. Теорема п. 2.1.9 описує декомпозиції вільного тріоїда у сполуки підтріоїдів.

Результати підрозділу 2.2. „Вільні n-нільпотентні тріоїди” розвивають теорію многовидів тріоїдів. У цьому підрозділі введено поняття n-нільпотентного тріоїда, побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд і описано його структуру. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному тріоїді і наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2.

Елемент 0 тріоїда $(T,”,ђ,\perp)$ називається нулем, якщо $x \text{ e } 0 = 0 = 0 \text{ e } x$ для всіх $x\in T$ і $\text{e}\in\{”,ђ,\perp\}$. Тріоїд $(T,”,ђ,\perp)$ з нулем називатимемо нільпотентним, якщо для деякого $n\in \mathrm{N}$ і будь-яких $x_i\in T$, $1\le i\le n+1$, і $*_j\in\{”,ђ,\perp\}$, $1\le j\le n$, будь-яка розстановка дужок у $x_1 *_1 x_2 *_2 \mathrm{K} *_n x_{n+1}$ дає $0\in T$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності тріоїда $(T,”,ђ,\perp)$. Для $k\in \mathrm{N}$ нільпотентний тріоїд індексу нільпотентності $\le k$ будемо називати k-нільпотентним.

Клас усіх n-нільпотентних тріоїдів є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних тріоїдів, називатимемо вільним n-нільпотентним тріоїдом.

Нехай A – довільна непорожня множина, а ω – довільне слово в алфавіті A. Довжину слова ω позначатимемо через l_ω.

Нехай далі $n\in \mathrm{N}$ і $P_n\subset P$ – множина, яка містить слова w з довжиною, не більшою, ніж n. Визначимо операції p, f і $\uparrow$ на множині $P_n\cup\{0\}$ за правилами:

$$w \,\mathrm{p}\, u=\begin{cases} w\overset{\circ}{u}, & l_{wu}\le n,\\ 0, & l_{wu}>n,\end{cases}\qquad w \,\mathrm{f}\, u=\begin{cases} \overset{\circ}{w}u, & l_{wu}\le n,\\ 0, & l_{wu}>n,\end{cases}$$

$$w\uparrow u=\begin{cases} wu, & l_{wu}\le n,\\ 0, & l_{wu}>n,\end{cases}\qquad w*0=0*w=0*0=0$$

для всіх $w,u\in P_n$ і $*\in\{\mathrm{p},\mathrm{f},\uparrow\}$. Алгебру $(P_n\cup\{0\},\mathrm{p},\mathrm{f},\uparrow)$ позначимо через $P^0_n(X)$.

Основним результатом підрозділу 2.2 є така теорема.

Теорема (п. 2.2.3). $P^0_n(X)$ – вільний n-нільпотентний тріоїд.

У п. 2.2.4 введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів, яке узагальнює поняття 0-дісполуки піддімоноїдів і поняття 0-сполуки напівгруп. Теореми п. 2.2.4 та пп. 2.2.5, 2.2.6 описують декомпозиції вільного n-нільпотентного тріоїда в 0-сполуки підтріоїдів та, відповідно, в 0-трисполуки підтріоїдів.

У підрозділі 2.3. „Вільні прямокутні трисполуки” побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її структуру і групу автоморфізмів, а також охарактеризовано найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву ідемпотентну конгруенцію, найменшу прямокутну конгруенцію і найменшу напівструктурну конгруенцію на вільній прямокутній трисполуці. Крім того, представлено найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.

Клас усіх прямокутних трисполук є підмноговидом многовиду тріоїдів. Тріоїд, який є вільним у многовиді прямокутних трисполук, називатимемо вільною прямокутною трисполукою.

Основним результатом підрозділу 2.3 є така теорема.

Теорема (п. 2.3.1). $FRT(X)$ – вільна прямокутна трисполука.

Теореми пп. 2.3.4, 2.3.6, 2.3.7 дають декомпозиції тріоїда $FRT(X)$ в сполуки підтріоїдів, відповідно, в трисполуки піднапівгруп та в трисполуки підтріоїдів.

У третьому розділі „Вільні ліві n-дінільпотентні дімоноїди” введено до розгляду ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди, які є аналогами нільпотентних зліва (справа) напівгруп рангу n, розглянутих Б. М. Шайном. Розв’язано проблему побудови вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда та охарактеризовано найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді. Крім того, охарактеризовано групу автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда.

У підрозділі 3.1. „Зв’язки дімоноїдів з іншими алгебраїчними структурами” розглянуто зв’язки між дімоноїдами і рестриктивними бінапівгрупами, між комутативними дімоноїдами і інтерасоціативністю та сильною інтерасоціативністю напівгрупи. Введено поняття лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда.

Нагадаємо, що дімоноїдом називається непорожня множина з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$–$(T3)$.

Через Ω позначимо сигнатуру дімоноїда, тобто $\Omega=\{\dashv,\vdash\}$. Нехай $x_1,\ldots,x_n$ – індивідуальні змінні. Через $T(x_1,\ldots,x_n)$ будемо позначати множину термів алгебр сигнатури Ω, які мають вигляд $x_1\circ_1\ldots\circ_{n-1}x_n$ з розстановкою дужок, де $\circ_1,\ldots,\circ_{n-1}\in\Omega$. Дімоноїд $(D,\dashv,\vdash)$ будемо називати лівим дінільпотентним, якщо для деякого $n\in\mathbb{N}$, будь-якого $x\in D$ та будь-якого $t(x_1,\ldots,x_n)\in T(x_1,\ldots,x_n)$ мають місце такі тотожності:

$$t(x_1,\ldots,x_n)\dashv x=t(x_1,\ldots,x_n),$$
$$t(x_1,\ldots,x_n)\vdash x=x_1\vdash\ldots\vdash x_n.$$

Найменше серед таких n будемо називати індексом лівої дінільпотентності дімоноїда $(D,\dashv,\vdash)$. Для $k\in\mathbb{N}$ лівий дінільпотентний дімоноїд з індексом лівої дінільпотентності $\leq k$ будемо називати лівим k-дінільпотентним.

Двоїстим чином визначається правий k-дінільпотентний дімоноїд.

У підрозділі 3.2. „Будова вільних об’єктів” побудовано вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні ліві

n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Крім того, встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі.

Клас усіх лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів є підмноговидом многовиду дімоноїдів. Дімоноїд, який є вільним у многовиді лівих (правих) n-дінільпотентних дімоноїдів, будемо називати вільним лівим (правим) n-дінільпотентним дімоноїдом.

Нехай X – довільна непорожня множина, $F[X]$ – вільна напівгрупа в алфавіті X та $w \in F[X]$. Зафіксуємо $n \in \mathrm{N}$. Якщо $l_w \geq n$, то через $\overrightarrow{w}$ ($\overleftarrow{w}$) позначатимемо початкове (кінцеве) підслово довжини n слова w. Визначимо операції $\dashv$ та $\vdash$ на $F_n = \{(w,m) \in F[X] \times \mathrm{N} \mid m \leq l_w \leq n\}$ за правилами:

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = \begin{cases} (w_1w_2, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} \leq n, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, m_1), & l_{w_1} + l_{w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = \begin{cases} (\overrightarrow{w_1w_2}, n), & n < l_{w_1} + m_2, \\ (\overrightarrow{w_1w_2}, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + m_2 \leq n < l_{w_1} + l_{w_2}, \\ (w_1w_2, l_{w_1} + m_2), & l_{w_1} + l_{w_2} \leq n \end{cases}$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2) \in F_n$. Алгебру $(F_n, \dashv, \vdash)$ позначимо через $FD_n^l(X)$. Згідно з теоремою п. 3.2.4 $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд. Його група автоморфізмів ізоморфна симетричній групі на множині X (див. лему п. 3.2.6).

У підрозділі 3.3. „Найменша ліва n-дінільпотентна конгруенція на вільному дімоноїді” представлено найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

Встановимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на $F = \{(w,m) \in F[X] \times \mathrm{N} \mid l_w \leq m\}$ таким чином:

$$(w_1,m_1) \dashv (w_2,m_2) = (w_1w_2, m_1), \quad (w_1,m_1) \vdash (w_2,m_2) = (w_1w_2, l_{w_1} + m_2)$$

для всіх $(w_1,m_1),(w_2,m_2) \in F$. Алгебра $(F, \dashv, \vdash)$ позначається через $\tilde{F}[X]$. Відомо, що $\tilde{F}[X]$ – вільний дімоноїд на множині X.

Якщо ρ – конгруенція на дімоноїді $(D, \dashv, \vdash)$ така, що $(D, \dashv, \vdash)/\rho$ – лівий (правий) n-дінільпотентний дімоноїд, то будемо говорити, що ρ – ліва (права) n-дінільпотентна конгруенція.

Опис найменшої лівої n-дінільпотентної конгруенції на вільному дімоноїді дає така теорема.

Теорема (п. 3.3.1). Нехай $\tilde{F}[X]$ – вільний дімоноїд, $(w,m)\in\tilde{F}[X]$ та $FD_n^l(X)$ – вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд. Тоді відображення $\delta:\tilde{F}[X]\to FD_n^l(X)$, визначене за правилом:

$$(w,m)\mapsto (w,m)\delta=\begin{cases}(w,m), & l_w\le n,\\ (\overrightarrow{w},n), & n\le m,\\ (\overrightarrow{w},m), & m<n<l_w,\end{cases}$$

є епіморфізмом, який індукує найменшу ліву n-дінільпотентну конгруенцію на $\tilde{F}[X]$.

Відзначимо, що для того, щоб побудувати вільний правий n-дінільпотентний дімоноїд, охарактеризувати найменшу праву n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді та групу автоморфізмів вільного правого n-дінільпотентного дімоноїда, необхідно скористатися принципом двоїстості.

Четвертий розділ „g-Дімоноїди” присвячено вивченню властивостей g-дімоноїдів.

Нагадаємо, що g-дімоноїдом називається непорожня множина з двома бінарними асоціативними операціями $\dashv$ і $\vdash$, які задовольняють аксіоми $(T1)$ і $(T3)$.

У підрозділі 4.1. „Приклади g-дімоноїдів” наведено нові приклади g-дімоноїдів.

У підрозділі 4.2. „Вільні g-дімоноїди” побудовано g-дімоноїд, який є ізоморфним вільному g-дімоноїду довільного рангу, і зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1.

Нехай A – довільна непорожня множина, $S=S_A$ – деякий моноїд, визначений на множині скінченних слів в алфавіті A, і $\theta\in S$ – порожнє слово, яке є одиницею в S. Позначимо операцію на S через $*$. За визначенням $l_\theta=0$ та $u^0=\theta$ для всіх $u\in S$. Зафіксуємо елементи $a,b\in A$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ і визначимо операції $\dashv$ і $\vdash$ на S, поклавши

$$u_1\dashv u_2=u_1*a^{l_{u_2}+k},\quad u_1\vdash u_2=u_2*b^{l_{u_1}+k}$$

для всіх $u_1,u_2\in S$. Отриману алгебру будемо позначати через $S_a^b(k)$.

Нехай далі T – вільний моноїд в алфавіті A. Для будь-яких $a,b\in A$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ згідно з лемою п. 4.1.6 алгебра $T_a^b(k)$ є g-дімоноїдом, який при $a\neq b$ не є дімоноїдом. Введемо до розгляду множину

$$XT_a^b(k)=\{(w,u)\in F[X]\times T_a^b(k)\mid l_w-l_u=1\}.$$

Основним результатом цього підрозділу є така теорема.

Теорема (п. 4.2.1). g-Дімоноїд $XT_a^b(1)$ є вільним, якщо $|A|=2$ і $a\neq b$.

У підрозділі 4.3. „Вільні n-нільпотентні g-дімоноїди” введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний

g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-дімоноїди рангу 1. Також охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Елемент 0 g-дімоноїда $(D,\text{”},\text{ђ})$ будемо називати нулем, якщо $x \,\text{e}\, 0 = 0 = 0 \,\text{e}\, x$ для всіх $x \in D$ і $\text{e} \in \{\text{”},\text{ђ}\}$. g-Дімоноїд $(D,\text{”},\text{ђ})$ з нулем називатимемо нільпотентним, якщо для деякого $n \in \text{N}$ і будь-яких $x_i \in D$, $1 \le i \le n+1$, і $*_j \in \{\text{”},\text{ђ}\}$, $1 \le j \le n$, будь-яка розстановка дужок у

$$x_1 *_1 x_2 *_2 \text{K} *_n x_{n+1}$$

дає $0 \in D$. Найменше серед таких n будемо називати індексом нільпотентності $(D,\text{”},\text{ђ})$. Для $k \in \text{N}$ нільпотентний g-дімоноїд індексу нільпотентності $\le k$ називатимемо k-нільпотентним.

Клас усіх n-нільпотентних g-дімоноїдів є підмноговидом многовиду g-дімоноїдів. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді n-нільпотентних g-дімоноїдів, будемо називати вільним n-нільпотентним g-дімоноїдом.

Зафіксуємо $n \in \text{N}$ і покладемо

$$G_n = \{(w,u) \in XT_a^b(1) \mid l_w \le n\} \cup \{0\} \quad (|A| = 2,\ a \ne b).$$

Визначимо операції р і f на G_n за правилами:

$$(w_1,u_1)\,\text{р}\,(w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_1 * a^{l_{u_2}+1}), & l_{w_1w_2} \le n, \\ 0, & l_{w_1w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1)\,\text{f}\,(w_2,u_2) = \begin{cases} (w_1w_2,\ u_2 * b^{l_{u_1}+1}), & l_{w_1w_2} \le n, \\ 0, & l_{w_1w_2} > n, \end{cases}$$

$$(w_1,u_1)\,\text{e}\,0 = 0\,\text{e}\,(w_1,u_1) = 0\,\text{e}\,0 = 0$$

для всіх $(w_1,u_1),(w_2,u_2) \in G_n \setminus \{0\}$ і $\text{e} \in \{\text{р},\text{f}\}$. Алгебру $(G_n,\text{р},\text{f})$ будемо позначати через $G_n(X)$.

Основним результатом підрозділу 4.3 є така теорема.

Теорема (п. 4.3.1). $G_n(X)$ – вільний n-нільпотентний g-дімоноїд.

Якщо ρ – конгруенція на g-дімоноїді $(D,\text{”},\text{ђ})$ така, що $(D,\text{”},\text{ђ})/\rho$ є n-нільпотентним g-дімоноїдом, то будемо говорити, що ρ – n-нільпотентна конгруенція.

Нехай $XT_a^b(1)$ – вільний g-дімоноїд $(|A| = 2,\ a \ne b)$. Зафіксуємо $n \in \text{N}$ і визначимо відношення $\kappa(n)$ на $XT_a^b(1)$, поклавши

$$(w_1,u_1)\kappa(n)(w_2,u_2) \text{ тоді і тільки тоді, коли}$$
$$(w_1,u_1) = (w_2,u_2) \text{ або } l_{w_1} > n,\ l_{w_2} > n.$$

Найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді встановлює така теорема.

Теорема (п. 4.3.3). Відношення $\kappa(n)$ на вільному g-дімоноїді $XT_a^b(1)$ є найменшою n-нільпотентною конгруенцією.

У підрозділі 4.4. „Вільні комутативні g-дімоноїди” введено поняття комутативного g-дімоноїду, побудовано вільний комутативний g-дімоноїд, а також представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

g-Дімоноїд $(D,\text{”},\text{ђ})$ будемо називати комутативним, якщо обидві напівгрупи $(D,\text{”})$ і $(D,\text{ђ})$ є комутативними. Клас усіх комутативних g-дімоноїдів є підмноговидом многовиду g-дімоноїдів. g-Дімоноїд, який є вільним у многовиді комутативних g-дімоноїдів, називатимемо вільним комутативним g-дімоноїдом.

Нехай A – довільна непорожня множина і $\overline{A} = \{\overline{x} \mid x \in A\}$. Для кожного $x \in A$ покладемо $\tilde{x} = x$ і визначимо відображення $\alpha = \alpha_A : A \cup \overline{A} \to A$ за правилом:

$$y\alpha = \begin{cases} y, \ y \in A, \\ \tilde{y}, \ y \in \overline{A}. \end{cases}$$

Нехай далі S – довільна напівгрупа. Визначимо операції ” і ђ на $S \cup \overline{S}$, поклавши

$$a \,\text{”}\, b = (a\alpha_S)(b\alpha_S), \quad a \,\text{ђ}\, b = \overline{(a\alpha_S)(b\alpha_S)}$$

для всіх $a, b \in S \cup \overline{S}$. Алгебру $(S \cup \overline{S},\text{”},\text{ђ})$ позначимо через $S^{(\alpha)}$. Згідно з лемою п. 4.4.1 $S^{(\alpha)}$ є g-дімоноїдом, який не є дімоноїдом.

Якщо X – породжуюча множина напівгрупи S, то $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$ є g-піддімоноїдом $S^{(\alpha)}$, породженим X. Через $FCgD(X)$ позначимо g-дімоноїд $S^{(\alpha)} \setminus \overline{X}$, в якому S є вільною комутативною напівгрупою на X.

Основним результатом підрозділу 4.4 є така теорема.

Теорема (п. 4.4.2). $FCgD(X)$ – вільний комутативний g-дімоноїд.

Якщо ρ – конгруенція на g-дімоноїді $(D,\text{”},\text{ђ})$ така, що $(D,\text{”},\text{ђ})/\rho$ є комутативним g-дімоноїдом, то говоритимемо, що ρ – комутативна конгруенція.

Теорема п. 4.4.4 характеризує найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

ВИСНОВКИ

У роботі розв'язуються задачі побудови вільних систем у многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та вивчається будова отриманих вільних алгебр.

Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів та, як наслідок, охарактеризовано деякі найменші конгруенції на вільному тріоїді. Ці результати доповнюють результат Ж.-Л. Лоде та М. О. Ронко про вільні тріоїди.

Введено поняття n-нільпотентного тріоїда, прямокутної трисполуки та наведено приклади таких тріоїдів. Побудовано вільний n-нільпотентний тріоїд, вільну прямокутну трисполуку та описано їх будову.

Введено поняття лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда та побудовано вільний лівий (правий) n-дінільпотентний дімоноїд. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі, та представлено найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

Наведено численні приклади g-дімоноїдів. Побудовано g-дімоноїд, ізоморфний вільному g-дімоноїду довільного рангу, і зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1. Цей результат розвиває результат Ю. Мовсисяна, С. Давидова та М. Сафаряна про вільні g-дімоноїди.

Введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїда, комутативного g-дімоноїда та побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд і вільний комутативний g-дімоноїд. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію та найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Статті, опубліковані у фахових наукових виданнях:

1. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras / Yul. V. Zhuchok // Algebra and Discrete Mathematics. – 2014. – Vol. 18, no. 2. – P. 306 – 320.
2. Zhuchok Yul. V. Decompositions of free trioids / Yul. V. Zhuchok // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2014. – № 4. – P. 28 – 34.
3. Zhuchok Yul. V. Free n-nilpotent trioids / Yul. V. Zhuchok // Matematychni Studii. – 2015. – Vol. 43, no. 1. – P. 3 – 11.
4. Zhuchok A. V. Free commutative g-dimonoids / A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok // Chebyshevskii Sbornik. – 2015. – Vol. 16, no. 3. – P. 276 – 284.
5. Zhuchok Yul. V. Free rectangular tribands / Yul. V. Zhuchok // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. Matematica. – 2015. – Vol. 78, no. 2. – P. 61 – 73.
6. Zhuchok A. V. Free left n-dinilpotent dimonoids / A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok // Semigroup Forum. – 2016. – Vol. 93, no. 1. – P. 161 – 179. DOI: 10.1007/s00233-015-9743-z.

Тези наукових конференцій:

7. Жучок Юл. В. О непротиворечивости аксиом обобщенного димоноида / Юл. В. Жучок // Материалы научно-практической конференции

преподавателей и студентов кафедры общей математики. – Луганск, Украина, 2014. – С. 6 – 7.

8. Zhuchok Yul. V. On the least semigroup congruences on dimonoids / Yul. V. Zhuchok // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». – Казань, Россия, 2014. – С. 175.
9. Zhuchok Yul. V. On one class of algebras / Yul. V. Zhuchok // International Algebraic Conference dedicated to the 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin: Abstracts. – Kyiv, Ukraine, 2014. – P. 91.
10. Zhuchok A. V. On free left n-dinilpotent dimonoids / A. V. Zhuchok, Yul. V. Zhuchok // International Conference «Mal'tsev Meeting» dedicated to 75th anniversary of Yu. L. Ershov: Abstracts. – Novosibirsk, Russia, 2015. – P. 210.
11. Zhuchok Yul. V. On free n-nilpotent trioids / Yul. V. Zhuchok // XIII Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная 85-летию со дня рождения профессора С. С. Рышкова: материалы конференции. – Тула, Россия, 2015. – С. 113 – 114.
12. Жучок Юл. В. Наименьшая трипрямоугольная конгруэнция на свободном триоиде / Юл. В. Жучок // Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения», посвященная столетию со дня рождения академика Д. А. Супруненко: тезисы докладов. – Минск, Республика Беларусь, 2015. – С. 20 – 21.
13. Zhuchok Yul. V. On free rectangular tribands / Yul. V. Zhuchok // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd: Abstracts. – Odessa, Ukraine, 2015. – P. 126.

АНОТАЦІЯ

Жучок Юл. В. Відносно вільні тріоїди. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.06 – алгебра і теорія чисел. – Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційна робота присвячена побудові вільних об'єктів у деяких многовидах тріоїдів, дімоноїдів і g-дімоноїдів та вивченню їх структурних та факторизаційних властивостей.

Наведено декомпозиції вільних тріоїдів у трисполуки і сполуки підтріоїдів. Охарактеризовано найменшу прямокутну конгруенцію, найменшу ліву ідемпотентну конгруенцію, найменшу праву ідемпотентну конгруенцію, найменшу n-нільпотентну конгруенцію та найменшу трипрямокутну конгруенцію на вільному тріоїді.

Введено поняття n-нільпотентного тріоїду, наведено приклади нільпотентних тріоїдів індексу нільпотентності 2 і побудовано вільний

n-нільпотентний тріоїд. Введено поняття 0-трисполуки підтріоїдів і в термінах 0-трисполук підтріоїдів описано будову вільних n-нільпотентних тріоїдів.

Введено поняття прямокутної трисполуки і наведено приклади прямокутних трисполук. Побудовано вільну прямокутну трисполуку, описано її будову і групу автоморфізмів. Представлено деякі найменші конгруенції на вільній прямокутній трисполуці.

Введено ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди, які є аналогами нільпотентних зліва (справа) напівгруп рангу n, розглянутих у роботі Б. М. Шайна. Для вказаних многовидів побудовано вільні об'єкти. Окремо розглянуто вільні ліві (праві) n-дінільпотентні дімоноїди рангу 1. Встановлено, що група автоморфізмів вільного лівого (правого) n-дінільпотентного дімоноїда ізоморфна симетричній групі. Представлено найменшу ліву (праву) n-дінільпотентну конгруенцію на вільному дімоноїді.

Наведено численні приклади g-дімоноїдів. Побудовано g-дімоноїд, ізоморфний вільному g-дімоноїду довільного рангу, і зокрема, розглянуто вільні g-дімоноїди рангу 1. Введено поняття n-нільпотентного g-дімоноїду, побудовано вільний n-нільпотентний g-дімоноїд довільного рангу та окремо розглянуто вільні n-нільпотентні g-дімоноїди рангу 1. Охарактеризовано найменшу n-нільпотентну конгруенцію на вільному g-дімоноїді. Введено поняття комутативного g-дімоноїда, побудовано вільний комутативний g-дімоноїд і представлено найменшу комутативну конгруенцію на вільному g-дімоноїді.

Ключові слова: тріоїд, дімоноїд, g-дімоноїд, напівгрупа, вільний тріоїд, вільний n-нільпотентний тріоїд, вільна прямокутна трисполука, вільний лівий n-дінільпотентний дімоноїд, вільний g-дімоноїд, вільний n-нільпотентний g-дімоноїд, вільний комутативний g-дімоноїд, конгруенція.

АННОТАЦИЯ

Жучок Юл. В. Относительно свободные триоиды. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – алгебра и теория чисел. – Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертация посвящена построению свободных объектов в некоторых многообразиях триоидов, димоноидов и g-димоноидов и изучению их структурных и факторизационных свойств.

Одним из эффективных методов, которые используются при изучении строения различных алгебр, является метод декомпозиции. Основная идея этого метода заключается в разложении алгебры на компоненты, возможно, более простой структуры, детальном изучении компонент и установлении взаимосвязей между компонентами в пределах всей алгебры. Вышеуказанный метод имеет применения в теории группоидов, теории полугрупп, теории

димоноидов. В диссертации приведены декомпозиции свободных триоидов в трисвязки и связки подтриоидов. Охарактеризованы наименьшая прямоугольная конгруэнция, наименьшая левая идемпотентная конгруэнция, наименьшая правая идемпотентная конгруэнция, наименьшая n-нильпотентная конгруэнция и наименьшая трипрямоугольная конгруэнция на свободном триоиде.

Введено понятие n-нильпотентного триоида, приведены примеры нильпотентных триоидов индекса нильпотентности 2 и построен свободный n-нильпотентный триоид. Введено понятие 0-трисвязки подтриоидов, которое является аналогом понятия трисвязки подтриоидов и обобщает понятия 0-дисвязки поддимоноидов и 0-связки полугрупп. В терминах 0-трисвязок подтриоидов описано строение свободных n-нильпотентных триоидов.

Введено понятие прямоугольной трисвязки и приведены примеры прямоугольных трисвязок. Построена свободная прямоугольная трисвязка и подсчитано количество ее элементов. Описаны декомпозиции свободной прямоугольной трисвязки в связки подтриоидов, в трисвязки подполугрупп и в трисвязки подтриоидов. При этом для соответствующих классов конгруэнций построены изоморфные конструкции. Показано, что группа автоморфизмов свободной прямоугольной трисвязки изоморфна симметрической группе. Представлены наименьшая левая идемпотентная конгруэнция, наименьшая правая идемпотентная конгруэнция, наименьшая прямоугольная конгруэнция и наименьшая полуструктурная конгруэнция на свободной прямоугольной трисвязке.

Введены левые (правые) n-динильпотентные димоноиды, которые являются аналогами нильпотентных слева (справа) полугрупп ранга n, рассмотренных в работе Б. М. Шайна. Для указанных многообразий построены свободные объекты. Отдельно рассмотрены свободные левые (правые) n-динильпотентные димоноиды ранга 1. Установлено, что группа автоморфизмов свободного левого (правого) n-динильпотентного димоноида изоморфна симметрической группе. Представлена наименьшая левая (правая) n-динильпотентная конгруэнция на свободном димоноиде.

Приведены многочисленные примеры g-димоноидов. Построен g-димоноид, изоморфный свободному g-димоноиду произвольного ранга, и в частности, рассмотрены свободные g-димоноиды ранга 1. Введено понятие n-нильпотентного g-димоноида, построен свободный n-нильпотентний g-димоноид произвольного ранга и отдельно рассмотрены свободные n-нильпотентные g-димоноиды ранга 1. Охарактеризована наименьшая n-нильпотентная конгруэнция на свободном g-димоноиде. Введено понятие комутативного g-димоноида, построен свободный коммутативный g-димоноид и представлена наименьшая коммутативная конгруэнция на свободном g-димоноиде.

Ключевые слова: триоид, димоноид, g-димоноид, полугруппа, свободный триоид, свободный n-нильпотентный триоид, свободная прямоугольная трисвязка, свободный левый n-динильпотентний димоноид, свободный g-димоноид, свободный n-нильпотентный g-димоноид, свободный коммутативный g-димоноид, конгруэнция.

ANNOTATION

Zhuchok Yul. V. Relatively free trioids. – Manuscript.

The thesis for degree of Candidate in physics and mathematics by the speciality 01.01.06 – algebra and number theory. – Kyiv National Taras Shevchenko University of Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to constructing free objects in some varieties of trioids, dimonoids and g-dimonoids, and to studying their structural and factorization properties. Decompositions of free trioids into tribands and bands of subtrioids are described. The least rectangular, the least left zero, the least right zero, the least n-nilpotent and the least rectangular triband congruences on a free trioid are presented. The notion of an n-nilpotent trioid is introduced, examples of nilpotent trioids of nilpotency index 2 are given and the free n-nilpotent trioid is constructed. The notion of a 0-triband of subtrioids is introduced and in terms of 0-tribands of subtrioids the structure of free n-nilpotent trioids is described.

The notion of a rectangular triband is introduced and the examples of rectangular tribands are given. The free rectangular triband is constructed and its structure and the automorphism group are described. Some least congruences on the free rectangular triband are presented.

Left (right) n-dinilpotent dimonoids which are analogs of left (right) nilpotent semigroups of rank n, considered by B. M. Schein, are introduced. For indicated varieties free objects are constructed. Separately, free left (right) n-dinilpotent dimonoids of rank 1 are considered. It is established that the automorphism group of the free left (right) n-dinilpotent dimonoid is isomorphic to the symetric group. The least left (right) n-dinilpotent congruence on a free dimonoid is presented.

Numerios examples of g-dimonoids are given. The g-dimonoid which is isomorphic to the free g-dimonoid of an arbitrary rank is constructed and, in particular, free g-dimonoids of rank 1 are considered. The notion of an n-nilpotent g-dimonoid is introduced, the free n-nilpotent g-dimonoid of an arbitrary rank is constructed and, separately, free n-nilpotent g-dimonoids of rank 1 are considered. The least n-nilpotent congruence on the free g-dimonoid is characterized. The notion of a commutative g-dimonoid is introduced, the free commutative g-dimonoid is constructed and the least commutative congruence on the free g-dimonoid is presented.

Key words: trioid, dimonoid, g-dimonoid, semigroup, free trioid, free n-nilpotent trioid, free rectangular triband, free g-dimonoid, free n-nilpotent g-dimonoid, free commutative g-dimonoid, congruence.