УДК 517.983.27
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/1-2.13

Тетерук І.С.[1], аспірант

Двовимірні узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде функції двох змінних

[1]Інститут математики НАН України, Київ
email: innna.teteruk@gmail.com

Teteruk I.S.[1], PhD student

Two-dimensional generalized instantaneous images and approximations of the Pade type function of two variables

[1]Institute of Mathematics of NASU, Kyiv
email: innna.teteruk@gmail.com

Досліджується питання побудови апроксимант Паде для функції двох змінних. Побудована двовимірна функціолнальна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде. Функція двох змінних, яка розглядається, повністю пов'язана з базисними гіпергеометричними рядами.
Ключові слова: апроксимант Паде, моментне зображення, гіпергеометричний ряд, раціональна апроксимація.

Generalized instantaneous image were introduced by V.K. Dzyaduk [1] in 1981 and proved to be a convenient tool for constructing and studying the Padé approximants and their generalizations (see [2]). The method of generalized instantaneous images proposed by Dzyadyk made it possible to construct and study rational Padé approximants and their generalizations for many classes of special functions from a single position. As an example, the Padé approximants is constructed for a class of basic hypergeometric series, which includes a q-analogue of the exponential function. In this paper the construction of the Pade approximants for the function of two variables is investigated. A two-dimensional functional sequence is constructed, which has a generalized instantaneous image, and rational approximants are determined, which will be generalizations of one-dimensional Padé approximants. The function of the two variables is entirely related to the basic hypergeometric series.
Keywords: Pade approximation, instantaneous image, hypergeometric series, rational approximation.

Статтю представив д.ф.-м. н., проф., академік НАН України Перестюк М.О.

Вступ та теоретичні відомості.

Узагальнені моментні зображення були введені В.К. Дзядиком [1] у 1981 р. і виявилися зручним інструментом для побудови та вивчення апроксимацій Паде та їх узагальнень (див. [2]).

Означення. Будемо говорити, що для послідовності комплексних чисел $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі X вказано послідовність елементів $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- послідовність елементів $\{y_j\}_{j=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle \quad k, j \in \square_+ \tag{1}$$

По аналогії з (1) можна визначити узагальнені моментні зображення двовимірних числових послідовностей.

Означення. Будемо говорити, що для двовимірної числової послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення на добутку лінійних просторів X та Y за означеною на цьому добутку білінійною формою $\langle .,. \rangle$, якщо у просторі X вказано двовимірну послідовність елементів $\{x_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, а у просторі Y -- двовимірну послідовність елементів $\{y_{j,n}\}_{j,n=0}^{\infty}$ такі, що

$$s_{k+j,m+n} = \langle x_{k,m}, y_{j,n} \rangle \quad k,j,m,n \in \square_+ \qquad (2)$$

По аналогії з тим, як у відповідність числовій послідовності $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ можна поставити формальний степеневий ряд $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k z^k$, двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$ можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних

$$f(z,\omega) = \sum_{k,m=0}^{\infty} s_{k,m} z^k \omega^m \qquad (3)$$

Для рядів вигляду (3) можна визначити раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде, за різними схемами (див. [3, с.323]). При цьому потрібно зафіксувати певні обмежені області N і D з $\square_+^2$ та побудувати алгебраїчні многочлени

$$P_{\mathrm{N}}(z,\omega) = \sum_{(k,m)\in \mathrm{N}} p_{k,m} z^k \omega^m,$$

$$Q_{\mathrm{D}}(z,\omega) = \sum_{(k,m)\in \mathrm{D}} q_{k,m} z^k \omega^m,$$

таким чином, щоб якомога більше коефіцієнтів $e_{k,m}$ у розкладі

$$f(z,\omega) - \frac{P_{\mathrm{N}}(z,\omega)}{Q_{\mathrm{D}}(z,\omega)} = \sum_{(k,m)\in \square_+^2} e_{k,m} z^k \omega^m$$

дорівнювали нулю.

Наступний результат є аналогом теореми В.К. Дзядика [1] для випадку функцій двох змінних (див.[4]):

Теорема 1. Нехай формальний степеневий ряд двох змінних має вигляд (3) і для двовимірної послідовності $\left\{s_{k,m}\right\}_{k,m=0}^{\infty}$ має місце узагальнене моментне зображення вигляду (2). Тоді якщо для деяких $N_1, N_2 \in \square$ існує нетривіальний узагальнений поліном

$$Y_{N_1,N_2} = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{j,n}^{(N_1,N_2)} y_{j,n} \qquad (4)$$

такий, що виконуються умови біортогональності

$$\left\langle x_{k,m}, Y_{N_1,N_2} \right\rangle = 0 \qquad (5)$$

при $(k,m) \in \left([0,N_1]\times[0,N_2]\right)$, $\{(N_1,N_2)\}$ і $c_{N_1,N_2}^{(N_1,N_2)} \neq 0$, то раціональна функція
то раціональна функція

$$\frac{1}{Q_{N_1,N_2(z,\omega)}}\Big\{\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k\omega^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{m} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m-n} +$$
$$+z^{N_1}\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{m=0}^{N_2-1} z^k\omega^m \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{m} c_{j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} s_{k+j,m-n} +$$
$$+\omega^{N_2}\sum_{k=0}^{N_1-1}\sum_{m=0}^{N_2} z^k\omega^m \sum_{j=0}^{k}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,n}^{(N_1,N_2)} s_{k-j,m+n}\Big\}$$

де $$Q_{N_1,N_2}(z,\omega) = \sum_{j=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_2} c_{N_1-j,N_2-n}^{(N_1,N_2)} z^j \omega^n$$

матиме розклад у степеневий ряд, коефіцієнти якого збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для всіх $(j,n) \in ([0,2N_1]\times[0,2N_2])$, $\{(2N_1,2N_2)\}$.

Насправді в теоремі 1 можна вибрати узагальнений поліном Y_{N_1,N_2} з умов біортогональності до елементів $x_{k,m}$ не для $(k,m) \in ([0,N_1]\times[0,N_2])$, $\{(N_1,N_2)\}$, а для $(k,m) \in \mathrm{H}$, де H -- певна множина з $\square_+^2$ обмежена деякою кривою $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [0,\pi/2]$, що містить $(N_1+1)(N_2+1)-1$ точку. При цьому за N ми можемо вибрати будь-яку множину з $\square_+^2$, $([N_1,\infty]\times[N_2,\infty])$, що є об'єднанням квадрата $[0,N_1-1]\times[0,N_2-1]$ з множинами вигляду $\{(k,m): k\in[0,N_1-1], m\in[N_2,x(k)]\}$ та $\{(k,m): m\in[0,N_2-1], k\in[N_1,y(m)]\}$, де $x(k), y(m)$ -- деякі функції з $\square_+$ в $\square_+$ такі, що $x(k)\geq N_2, y(m)\geq N_1$ для всіх k і m. Тоді множина E буде мати вигляд $\mathrm{N} \cup \mathrm{H} + (N_1,N_2)$, де $\mathrm{H} + (N_1,N_2)$ -- множина, отримана паралельним переміщенням множини H , при якому точка $(0;0)$ переходить у точку (N_1,N_2) (теорема 1` [4]).

Зауважимо, що як і у випадку одновимірних узагальнених моментних зображень, задача про двовимірні узагальнені моментні зображення може бути сформульована в операторному вигляді. А саме, припустимо, що простори X та Y є нормованими і в просторі X існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1, A_2 : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ такі, що

$A_1 x_{k,m} = x_{k+1,m}$,

$A_2 x_{k,m} = x_{k,m+1}$,

при всіх $k, m \in \mathbb{Z}_+$. Нехай у просторі Y існують обмежені оператори $A_1^*, A_2^* : \mathrm{Y} \to \mathrm{Y}$, спряжені до операторів A_1, A_2 відносно білінійної форми $\langle .,. \rangle$ в тому розумінні, що для будь-яких $x \in \mathrm{X}, y \in \mathrm{Y}$

$(A_1 x, y) = \langle x, A_1^* y \rangle$,

$(A_2 x, y) = \langle x, A_2^* y \rangle$.

Тоді зображення (2) можна записати у вигляді $s_{k,m} = \langle A_1^k A_2^m x_{0,0}, y_{0,0} \rangle, \quad k, m \in \mathbb{Z}_+$ і ряд (3) буде збіжним в околі початку координат до аналітичної функції, що має зображення $f(z,\omega) = \langle \Re(A_1)\Re(A_2) x_{0,0}, y_{0,0} \rangle$,

де резольвентна функція $\Re(A)$ визначається рівністю $\Re(A) = (I - zA)^{-1}$.

Означення. Для $|q|<1$ базисним гіпергеометричним рядом називається ряд вигляду

$$
{}_r\phi_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, ..., a_r \\ b_1, b_2, ..., b_r \end{matrix}; q; z \right] =
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n (a_2;q)_n \cdot \ldots \cdot (a_r;q)_n}{(b_1;q)_n (b_2;q)_n \cdot \ldots \cdot (b_s;q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+s-r} z^n,
$$

(див. [3, с.23]) де $q-$ символ Похгаммера $(a;q)_n$ визначається формулою

$$
(a;q)_n = \begin{cases} (1-a)(1-aq)\cdot \ldots \cdot (1-aq^{n-1}), & n \geq 1 \\ 1, & n = 0, \\ \prod_{m=0}^{\infty} (1-aq^m) = \lim_{n\to\infty} (a;q)_n, & n = \infty. \end{cases}
$$

Представниками базисних гіпергеометричних рядів є так звані q-аналоги експоненти

$$
e_q(z) = {}_1\phi_0(0;-;q;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} = \frac{1}{(z;q)_\infty}, \quad |z|<1,
$$

та

$$
E_q(z) = {}_0\phi_0(-;-;q;-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n-1)/2}}{(q;q)_n} z^n = (-z;q)_\infty, |z|<1.
$$

В [5,6] запропоновано підходи до побудови та дослідження апроксимант Паде функції $e_q(z)$ та її узагальнень з використанням узагальнених моментних зображень. Зокрема, в [6] для цієї мети використано узагальнені моментні зображення вигляду

$s_k = \langle A^k x_0, y_0 \rangle, \quad k = \overline{0,\infty}$,

з оператором A та блінійною формою $\langle .,. \rangle$, що виражаються через $q-$інтеграл Джексона (див [3, с.39])

$$
(A\varphi)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d_q \tau = t(1-q) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(tq^k) q^k \qquad (6)
$$

Цей же підхід був використаний і до побудови та вивчення апроксимант Паде функції $E_q(z)$ та її узагальнень (див. [7]). А саме, при $0 \leq \alpha < 1$ визначався лінійний простір

$\mathrm{X}_\alpha = \{ f : [0,1] \to \mathbb{C} \mid \exists M > 0$,

$| f(x) x^\alpha | < M \forall x \in [0,1] \}$ з нормою $\| f \|_\alpha = \sup_{x\in[0,1]} | f(x) x^\alpha |$. Тоді X_α при кожному $0 \leq \alpha < 1$ буде банаховим простором. Неважко переконатися, що лінійний оператор A вигляду (6) є обмеженим в просторі X_α, а білінійна форма

$$
\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(\tau) \psi(\tau) d_q \tau \qquad (7)
$$

є роздільно неперервною на добутку просторів $\mathrm{X}_\alpha \times \mathrm{X}_\alpha$.

Спряженим до оператора A відносно білінійної форми (7) буде оператор

$(A^* \psi)(t) = \int_{qt}^1 \varphi(\tau) d_q \tau = \int_0^1 \varphi(\tau) d_q \tau - \int_0^{qt} \psi(\tau) d_q \tau$ (див. [6]).

Також в просторі X_α в [7] розглядався оператор

$$
(B\varphi)(t) = (A\varphi)(qt) = \int_0^{qt} \varphi(\tau) d_q \tau =
$$

$$
= qt(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(tq^{n+1}) q^n.
$$

Легко бачити, що

$$(B\varphi)(t)=t(1-q)\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(tq^n)q^n=$$
$$=(A\varphi)(t)-(1-q)t\varphi(t).$$
А тому
$$(B^*\psi)(t)=(A^*\psi)(qt)-(1-q)t\psi(t)=$$
$$=\int_{qt}^{1}\psi(\tau)d_q\tau-(1-q)t\psi(t)=\int_{t}^{1}\psi(\tau)d_q\tau.$$

Основний результат.
В роботі [7] побудовані послідовності
$$x_k(t)=(B^kx_0)(t)=\frac{(1-q)^k}{(q,q)_k}\cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot t^k,\quad k=\overline{1,\infty},$$
де $x_0(t)\equiv 1$ і
$$y_j(t)=\frac{(1-q)^j\cdot(t,q)_j}{(q,q)_j},\quad j=\overline{1,\infty}, y_0(t)\equiv 1, \qquad (8)$$
а також
$$s_k=\langle B^kx_0,y_0\rangle=\frac{(1-q)^{k+1}\cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q,q)_{k+1}}, k=\overline{0,\infty}, \qquad (9)$$
Покладемо
$$x_{k,m}(t):=x_k(t)+x_m(t),\quad y_{j,n}(t):=y_j(t)+y_n(t),$$
де $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ і $\{y_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ визначені формулами (8). Тоді
$$s_{k+j,m+n}:=\langle x_{k,m};y_{j,n}\rangle=\langle x_k+x_m;y_j+y_n\rangle=$$
$$=\langle x_k;y_j\rangle+\langle x_k;y_n\rangle+\langle x_m;y_j\rangle+\langle x_m;y_n\rangle=$$
$$=s_{k+j}+s_{k+n}+s_{m+j}+s_{m+n}.$$

Отже, маємо $s_{k,m}=2\cdot(s_k+s_m)$, де S_k визначено за формулою (9).
Таким чином, для числової послідовності (10) має місце узагальнене моментне зображення на добутку просторів $X_\alpha\times X_\alpha$ за білінійною формою (7).

Двовимірній числовій послідовності $\{s_{k,m}\}_{k,m=0}^{\infty}$, яка визначена формулою (10), можна поставити у відповідність формальний степеневий ряд двох змінних
$$f(z,\omega)=\sum_{k,m=0}^{\infty}s_{k,m}z^k\omega^m= \qquad (11)$$
$$=2\sum_{k,m=0}^{\infty}(s_k+s_m)z^k\omega^m=2\sum_{k,m=0}^{\infty}s_kz^k\omega^m+$$
$$+2\sum_{k,m=0}^{\infty}s_m\omega^mz^k=$$
$$=2\sum_{m=0}^{\infty}\omega^m\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^{k+1}\cdot q^{\frac{k(k+1)}{2}}}{(q,q)_{k+1}}z^k\right)+$$
$$+2\sum_{m=0}^{\infty}z^k\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^{m+1}\cdot q^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(q,q)_{m+1}}\omega^m\right)=$$
$$=\frac{2}{1-\omega}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1-q)^k\cdot q^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(q,q)_k}z^{k-1}+$$
$$+2\frac{2}{1-z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q)^m\cdot q^{\frac{m(m-1)}{2}}}{(q,q)_m}\omega^{m-1}=$$
$$=\frac{2}{1-\omega}\frac{E_q(-z(1-q))-1}{z}+\frac{2}{1-z}\frac{E_q(-\omega(1-q))-1}{\omega}$$
Припустимо, що в просторі X_α існують комутуючі між собою обмежені оператори $A_1,A_2:X_\alpha\to X_\alpha$:
$$A_1x_{k,m}=x_{k+1,m},(k,m)\in\mathbb{Z}_+$$
$$A_2x_{k,m}=x_{k,m+1},(k,m)\in\mathbb{Z}_+$$
Так як $x_{k,m}=x_k+x_m=x_m+x_k=x_{m,k}$, то $A_1=A_2:X_\alpha\to X_\alpha$.
Позначимо $A_1=A_2:=\tilde{A}$.
Тоді
$$s_{k,m}=\langle A_1^kA_2^mx_{0,0};y_{0,0}\rangle=\langle\tilde{A}^{k+m}x_{0,0};y_{0,0}\rangle=$$
$$=4\langle\tilde{A}^{k+m}x_0;y_0\rangle$$
З іншого боку,
$$s_{k,m}=2(s_k+s_m)=2\left(\langle B^kx_0;y_0\rangle+\langle B^mx_0;y_0\rangle\right)=$$
$$=2\langle(B^k+B^m)x_0;y_0\rangle.$$

Тоді маємо, що
$$\tilde{A}^{k+m}x_0=\frac{1}{2}(B^k+B^m)\cdot x_0 \qquad (12)$$
Як було зазначено в [8], функція зображена рядом (11) матиме вигляд
$$f(z,\omega)=\frac{\omega\tilde{f}(\omega)-z\tilde{f}(z)}{\omega-z} \qquad (13)$$

Далі розглянемо послідовність

$$\tilde{s}_i = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; y_{0,0} \rangle = 4\langle \tilde{A}^i x_0; y_0 \rangle =$$
$$= 2\langle (B^k + B^m)^i x_0; y_0 \rangle, \quad де\ k + m = i, i \in \mathbb{Z}_+$$

Для послідовності $\{\tilde{s}_i\}_{i\in \mathbb{Z}_+}$ виконується умова :

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists \tilde{Y}_N = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{y}_j = \sum_{j=0}^{N} \tilde{c}_j^{(N)} \tilde{A}^j y_{0,0}, \tilde{c}_N^{(N)} \neq 0$$

і такий, що

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = \langle \tilde{A}^i x_{0,0}; Y_N \rangle = 0 \quad k = \overline{0, N-1} \qquad (14)$$

або

$$\langle \tilde{x}_i; \tilde{Y}_N \rangle = 2\langle (B^k + B^m) x_0; Y_N \rangle = 0$$

Умова (14) виконується за рахунок того факту, що для q--поліномів Лежандра $L_N(t;q)$, що задовольняють умови ортогональності:

$$\int_0^1 L_N(t;q) \cdot L_M(t;q) d_q t = 0$$

при $N \neq M$, відомо формули:

$$L_N(t;q) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(q^{-N};q)_k \cdot (q^{N+1};q)_k}{((q;q)_k)^2} (qt)^k$$

(див., напр. [1]).
В роботі [8] отримано наступний результат, який є узагальненням теореми 1`[4].

Теорема 2. Для аналітичної функції двох змінних f, що має зображення (13) за виконанням умови (14), раціональні функції

$$[\mathrm{N}\ /\ \mathrm{D}]_f(z,\omega) = \frac{P_{\mathrm{N}}(z,\omega)}{Q_{\mathrm{D}}(z,\omega)}$$

такі, що

$$Q_{\mathrm{D}}(z,\omega) = \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} z^j \omega^n$$

$$P_{\mathrm{N}}(z,\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{m} c_{N-j,N-n}^{(N,N)} s_{k-j,m-n} +$$
$$+ z^N \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1-m} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{N} \sum_{n=0}^{m} c_{j,N-n}^{(N,N)} s_{k+j,m-n} +$$
$$+ \omega^N \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1-k} z^k \omega^m \sum_{j=0}^{k} \sum_{n=0}^{N} c_{N-j,n}^{(N,N)} s_{k-j,m+n}.$$

а коефіцієнти $c_{k,m}^{N,N}, k, m = \overline{0, N}$ задовольняють рівності

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{N} c_{k,m}^{(N,N)} y_{k,m} = \sum_{j=0}^{2N} \tilde{c}_j^{(2N)} \tilde{y}_j = \tilde{Y}_N$$

матимуть розклади в степеневі ряди, коефіцієнти яких збігатимуться з коефіцієнтами ряду (3) для функції f для всіх

$$(j,n) \in \mathrm{E} = \{(j,n) \in \mathbb{Z}_+^2, j + n \leq 4N - 1\}$$

Таким чином, функція (13) задовольняє умовам теореми 2 і ми можемо побудувати апроксимант Паде функції (11).

Висновки.
Побудована двовимірна функціолнальна послідовність, яка має узагальнене моментне зображення і визначені раціональні апроксиманти, що будуть узагальненнями одновимірних апроксимант Паде.

Список використаних джерел

1. Дзядик В. К., Про узагальнення проблеми моментів, Доп.АН УРСР 6 (1981), 8–12.
2. Голуб А. П., Узагальнені моментні зображення та апроксимації Паде, Київ: Ін-т математики НАН України, (2002), 222.
3. Бейкер Дж. and Грейвс-Моррис П.Р., Апроксимации Паде (1986), 502.
4. Голуб А. П. and Чернецька Л. О., Двовимірні узагальнені моментні зображення та раціональні апроксимації функцій двох змінних, Укр.мат.журн. 65,8 (2013), 1035–1058.
5. Голуб А. П., Обобщенные моментные представления базисных гипергеометрических рядов, Укр.мат.журн. 41№6 (1981), 803-808.
6. Голуб А. П., Об одной разновидности обобщенных моментных представлений, Укр.мат.журн. 41 №11 (1989), 1455-1460.
7. Голуб А. П., Апроксиманти Паде q-аналогів експоненти та їх узагальнень, Теорія наближення функцій та суміжні питання. Збірник праць Інституту математики НАН України Т.12 №4 (2015), 144–153.
8. Голуб А. П. and Тетерук І. С., Узагальнені моментні зображення та апроксиманти типу Паде деяких базисних гіпергеометричних рядів двох змінних, Збірник праць Інституту математики НАН України т.16 №2 (2019), 1–8.

References

1. Dzyadik V. K., Pro uzagalnennya problemi momentiv, Dop.AN URSR 6 (1981), 8–12.
2. Golub A. P., Uzagalneni momentni zobrazhennya ta aproksimaciyi Pade, Kiyiv: In-t matematiki NAN Ukrayini, (2002), 222.
3. Bejker Dzh. and Grejvs-Morris P.R., Aproksimacii Pade (1986), 502.
4. Golub A. P. and Chernecka L. O., Dvovimirni uzagalneni momentni zobrazhennya ta racionalni aproksimaciyi funkcij dvoh zminnih, Ukr.mat.zhurn. 65,8 (2013), 1035–1058.
5. Golub A. P., Obobshennye momentnye predstavleniya bazisnyh gipergeometricheskih ryadov, Ukr.mat.zhurn. 41№6 (1981), 803-808.
6. Golub A. P., Ob odnoj raznovidnosti obobshennyh momentnyh predstavlenij, Ukr.mat.zhurn. 41 №11 (1989), 1455-1460.
7. Golub A. P., Aproksimanti Pade q-analogiv eksponenti ta yih uzagalnen, Teoriya nablizhennya funkcij ta sumizhni pitannya. Zbirnik prac Institutu matematiki NAN Ukrayini T.12 №4 (2015), 144–153.
8. Golub A. P. and Teteruk I. S., Uzagalneni momentni zobrazhennya ta aproksimanti tipu Pade deyakih bazisnih gipergeometrichnih ryadiv dvoh zminnih, Zbirnik prac Institutu matematiki NAN Ukrayini t.16 №2 (2019), 1–8.

Надійшла до редколегії 02.02.2020