

УДК 519.9

DOI: <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2025/2.22>

Олексій ХАРИТОНОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0002-6529-7736

e-mail: kharytonov@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Олексій КУЦЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0001-5089-0409

e-mail: oleksii.kutsenko@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

Анастасія КУЦЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ORCID ID: 0000-0003-1808-6773

e-mail: kutsenko@nubip.edu.ua

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Київ, Україна

## АНАЛІЗ ЕФЕКТИВНОСТІ КОМБІНУВАННЯ УЧАСТІ ДВИГУНІВ ВЕЛИКОЇ ТА МАЛОЇ ТЯГИ ПІД ЧАС ПЕРЕЛЬОТІВ ЗЕМЛЯ – МАРС

*Міжпланетні пілотовані перельоти потребують швидкої й економічної реалізації. Задовольнити зазначені вимоги можна шляхом поєднання участі двигунів великої та малої тяги, які в змозі забезпечити належні потужність й енергоефективність. У пропонованому дослідженні розглянуто задачу "спринтерського" перельоту Земля – Марс, що полягає в переведенні космічного апарату із заданої кругової орбіти навколо Землі на задану кругову орбіту навколо Марсу за заданий час, менший за час класичного перельоту типу Гомана. Комбінування участі двигунів великої та малої тяги приводить до виникнення задачі оптимізації розподілу сумарної характеристичної швидкості маневру між ділянками великої та малої тяги. При цьому рух на геліоцентричній ділянці траєкторії відбувається не за звичайною Кеплерівською траєкторією, а за близькою до неї дугою, що формується двигуном малої тяги. Двигун великої тяги забезпечує маневри у сфері впливу планет. Завдяки цьому, порівняно із класичним варіантом застосування виключно великої тяги, загальний час маневру не змінюється, а частина палива використовується ефективнішою системою малої тяги. Проте виникає питання: за яких умов маса зекономленого в такий спосіб палива перевершить масу додатково встановленої рушійної системи малої тяги. У пропонованій статті отримано оцінку тривалості перельоту, що обмежує зверху інтервал тривалості перельотів, у якому комбінування двигунів великої та малої тяги є оптимальним.*

**Ключові слова:** міжпланетний переліт Земля – Марс, комбінування великої та малої тяги, ядерний двигун, метод транспортувальної траєкторії.

Класифікація відповідно до AMS 2020: 70F15, 34H05.

### Вступ

Створення бази на Марсі з подальшою колонізацією планети – одне з головних завдань сучасної космонавтики, розв'язання якого вимагає застосування нових типів рушійних систем. Сучасна концепція здійснення пілотованих перельотів Земля – Марс, прийнята в NASA (див., напр., InSpeNet, 2023; Gosse et al., 2023) передбачає застосування багатофункціональних ядерних джерел енергії, які використовуються для утворення реактивної тяги і рушійними системами великої тяги (ядерні теплові ракетні двигуни, ТРД) і рушійними системами малої тяги (електричні ракетні двигуни, ЕРД). Таке поєднання потужніших (ЯТРД) й економічніших (ЕРД) двигунів дало змогу обґрунтувати можливість здійснення перельоту Земля – Марс усього за 45 днів (Gosse et al., 2023). Щоб реалізувати такий "спринтерський" міжпланетний трансфер, NASA обрало вже достатньо відпрацьовану технічно концепцію дворежимного ядерного ракетного двигуна (Gosse et al., 2023), у якому ядерний реактор використовують як джерело теплової енергії рушійної системи великої тяги на основі ЯТРД типу NERVA і як джерело електричної енергії для живлення ЕРД магнітоплазmodинамічного типу. Отже, аналіз оптимальних траєкторій космічних апаратів (КА) з ДЯРД є актуальною задачею сучасної космонавтики. У представленій роботі запропоновано простий і водночас ефективний алгоритм оцінки переваг від застосування ДЯРД порівняно із класичним підходом, за якого траєкторія формується виключно двигуном великої тяги. Раніше зазначені ідеї були використані при оптимізації маневру з виведення КА на сферу впливу Марса (Харитонов, Савченко, & Міранда, 2019). У пропонованій роботі отримані результати розповсюджені на випадок двоімпульсного міжпланетного перельоту Земля – Марс.

### 1. Постановка задач

Досліджується задача оптимізації міжпланетного перельоту Земля – Марс за фіксованої тривалості маневру  $T$ . Оптимізації підлягає розподіл загальної характеристичної швидкості маневру  $\Delta v$  між двома імпульсами великої тяги, що формують планетоцентричні ділянки траєкторії, і геліоцентричною ділянкою малої тяги за критерієм максимуму корисного навантаження.

Використовуючи підхід імпульсної апроксимації активних ділянок великої тяги та модель ідеального двигуна обмеженої потужності для опису руху на геліоцентричній ділянці (Beletsky, 2012), отримуємо аналітичний вираз для маси корисного навантаження:

$$M_{\pi} = \frac{M_0 e^{-\frac{(\Delta v_e + \Delta v_m)}{V}}}{1 + \frac{M_0}{2N} e^{-\frac{\Delta v_e}{V}} \cdot J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)} - M_x(N) - M_t, \quad (1)$$

© Харитонов Олексій, Куценко Олексій, Куценко Анастасія, 2025

$$\Delta v_e = \sqrt{2 \frac{\mu_e}{R_e} + v_{\infty}^e} - \sqrt{\frac{\mu_e}{R_e}}, \quad \Delta v_m = \sqrt{2 \frac{\mu_m}{R_m} + v_{\infty}^m} - \sqrt{\frac{\mu_m}{R_m}}, \quad (2)$$

де  $M_0$  – початкова маса КА,  $M_{\pi}$  – маса корисного навантаження,  $M_x$  – маса рушійної системи,  $M_t$  – маса баків,  $N$  – електрична потужність живлення двигуна малої тяги,  $V$  – ефективна швидкість витікання,  $\mu_e, \mu_m$  – гравітаційні параметри Землі і Марса,  $R_e, R_m$  – радіуси планетоцентричних кругових орбіт старту та призначення,  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$  – гіперболічні надлишки швидкості для відповідних орбіт перельоту між цими орбітами та сферами впливу,  $J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)$  – функціонал варіаційної задачі оптимізації геліоцентричного маневру з малою тягою.

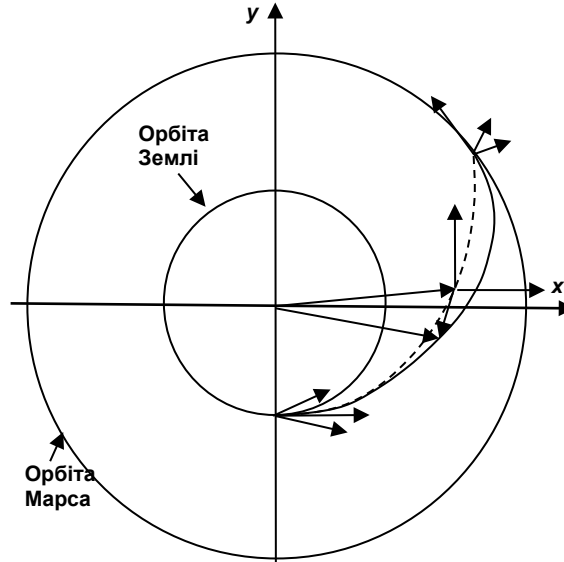


Рис. 1. Схема міжпланетного перельоту й ілюстрація методу транспортувальної траєкторії. Реальна (суцільна лінія) траєкторія КА та транспортувальна траєкторія (штрихова лінія)

У контексті постановки задачі оптимізації геліоцентричного маневру зауважимо, що максимізація  $M_{\pi}$  вимагає мінімізації функціоналу  $J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)$ . З метою отримання аналітичного виразу функціонала ми можемо застосувати метод транспортувальної траєкторії (Beletsky, 2012). Як транспортувальну орбіту використовуємо Кеплерів еліпс, що забезпечує переліт між геліоцентричними круговими орбітами Землі і Марсу за заданий час за мінімальної характеристичної швидкості перельоту (штрихова лінія, рис. 1). На цьому рисунку  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$  – гіперболічні надлишки швидкості для планетоцентричних орбіт, що відповідають такому маневру. Увімкнення ділянки малої тяги необхідне для зменшення затрат характеристичної швидкості на маневри з великою тягою, так щоб  $\Delta v_e + \Delta v_m < \Delta v_{e,t} + \Delta v_{m,t}$ , де прирости швидкості визначаються (2). Таке зменшення означає, що частина енергетичних затрат на маневр забезпечується економічнішим двигуном малої тяги. Проте така схема, що передбачає увімкнення двигуна малої тяги, буде виправдана тоді, коли маса зекономленого завдяки його використанню палива перевищить масу додаткової рушійної системи й обладнання, потрібного для генерування малої тяги.

Відповідно до методу транспортувальної траєкторії, подамо радіус-вектор центру мас КА  $\vec{r}(t)$  у вигляді:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_t(t) + \vec{\rho}(t), \quad (3)$$

де  $\vec{r}_t$  – радіус-вектор початку транспортувальної системи координат, що рухається по Кеплеровому еліпсу,  $\vec{\rho}(t) = (\xi(t), \eta(t))$  – радіус-вектор центру мас КА у транспортувальній системі координат  $O_t \xi \eta$ .

Постановка варіаційної задачі руху з малою тягою у транспортувальній системі координат буде такою:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= v_{\xi}, \quad \dot{\eta} = v_{\eta}, \quad \dot{v}_{\eta} = a \cos \cos(\theta), \quad \dot{v}_{\xi} = \sin \sin(\theta), \quad j = a^2, \\ \xi(0) &= 0, \quad \eta(0) = 0, \quad J(0) = 0, \quad v_{\xi}(0) = v_x^e, \quad v_{\eta}(0) = v_y^e, \\ \xi(T) &= 0, \quad \eta(T) = 0, \quad v_{\xi}(T) = v_x^m, \quad v_{\eta}(T) = v_y^m, \quad J(T) \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (4)$$

У (4) введено такі позначення:

$$v_x^e = v_{\infty,x}^e - v_{\infty,t,x}^e, \quad v_y^e = v_{\infty,y}^e - v_{\infty,t,y}^e, \quad v_x^m = v_{\infty,x}^m - v_{\infty,t,x}^m, \quad v_y^m = v_{\infty,y}^m - v_{\infty,t,y}^m,$$

$\theta$  – кут між вектором тяги і віссю  $Ox$  (рис. 1),  $a$  – реактивне прискорення.

## 2. Результати та їхній аналіз

Задача (4) має аналітичний розв'язок:

$$J(T) = \frac{4}{T} \{ [v_x^e]^2 + v_x^e v_x^m + [v_x^m]^2 \} + [v_y^e]^2 + v_y^e v_y^m + [v_y^m]^2 \}. \quad (5)$$

Отже, функціонал  $J(T)$ , і, на основі (1) – (2) основний функціонал оптимізаційної задачі  $M_{\pi}$ , залежать від вибору векторів  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$ , що визначають планетоцентричні гіперболічні орбіти. Однак від напрямку цих векторів залежить лише функціонал (5), а решта виразу (1) – лише від абсолютних величин цих векторів. Звідси, напрями векторів  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$  маємо визначати з такої задачі на умовний екстремум:

$$\begin{aligned} J(v_{\infty,x}^e, v_{\infty,y}^e, v_{\infty,x}^m, v_{\infty,y}^m) &\rightarrow \min, \\ v_{\infty,x}^e{}^2 + v_{\infty,y}^e{}^2 &= v_{\infty}^e{}^2, \quad v_{\infty,x}^m{}^2 + v_{\infty,y}^m{}^2 = v_{\infty}^m{}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Отже, зважаючи на розв'язок (6), лише дві із чотирьох компонент векторів  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$  є незалежними. Відповідні співвідношення мають вигляд:

$$v_{\infty,y}^e = \frac{v_{\infty,x}^e (v_{\infty,x}^m \{v_{\infty,t,y}^e + 2v_{\infty,t,y}^m\} + \{v_{\infty,x}^e - v_{\infty,t,x}^e - 2v_{\infty,t,x}^m\} (v_{\infty,t,y}^m + 2v_{\infty,t,y}^e))}{v_{\infty,x}^e v_{\infty,x}^m - \{v_{\infty,x}^e - v_{\infty,t,x}^e - 2v_{\infty,t,x}^m\} \{v_{\infty,x}^m - v_{\infty,t,x}^m - 2v_{\infty,t,x}^e\}},$$

$$v_{\infty,y}^m = \frac{v_{\infty,x}^m (v_{\infty,x}^e \{v_{\infty,t,y}^e + 2v_{\infty,t,y}^m\} + \{v_{\infty,x}^m - v_{\infty,t,x}^m - 2v_{\infty,t,x}^e\} (v_{\infty,t,y}^e + 2v_{\infty,t,y}^m))}{v_{\infty,x}^e v_{\infty,x}^m - \{v_{\infty,x}^e - v_{\infty,t,x}^e - 2v_{\infty,t,x}^m\} \{v_{\infty,x}^m - v_{\infty,t,x}^m - 2v_{\infty,t,x}^e\}}. \quad (7)$$

Для ілюстрації ефективності запропонованого підходу задачу розглянуто для різних значень тривалості маневру. Припускали, що стартова маса КА становить 160 т, орбіти старту і призначення кругові і мають висоту 400 км. У виразі (1) для розрахунку маси рушійної малої тяги використано емпіричний вираз з роботи (Kharytonov, & Kiforenko, 2011), що подає  $M_x$  у вигляді функції електричної потужності:

$$M_x(N) = \alpha(N)N, \quad \alpha(N) = n \left( \frac{A}{BN + C} + F \right), \quad (8)$$

де можна прийняти  $A = 72\text{кг}$ ,  $B = 0,01$ ,  $C = 1,05\text{кВт}$ ,  $F = 2,83\text{кг/кВт}$ ,  $n = 0,77$ . Коефіцієнт  $n$  уведений для врахування можливості подвійного використання ядерного реактора – як джерела теплової енергії і як джерела електричної енергії для живлення двигунів малої тяги. Якщо рушійна система малої тяги має окреме джерело енергії, то  $n = 1$ .

На рис. 2 а наведені залежності безрозмірної маси корисного навантаження  $m_{\pi} = \frac{M_{\pi}}{M_0}$  від електричної потужності  $N$  для різних тривалостей перельоту від 240 до 140 днів, менших за тривалість перельоту типу Гомана (259 днів). Для кожної тривалості перельоту і для кожного значення  $N$  від 0 до 6МВт, унаслідок мінімізації виразу (1) з урахуванням (6), було визначено оптимальний розподіл паливних витрат між ділянками великої і малої тяги (ці витрати цілком визначаються векторами  $\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m$ ). Відповідні оптимальні значення  $m_{\pi}$  наведені на рис. 2 а.

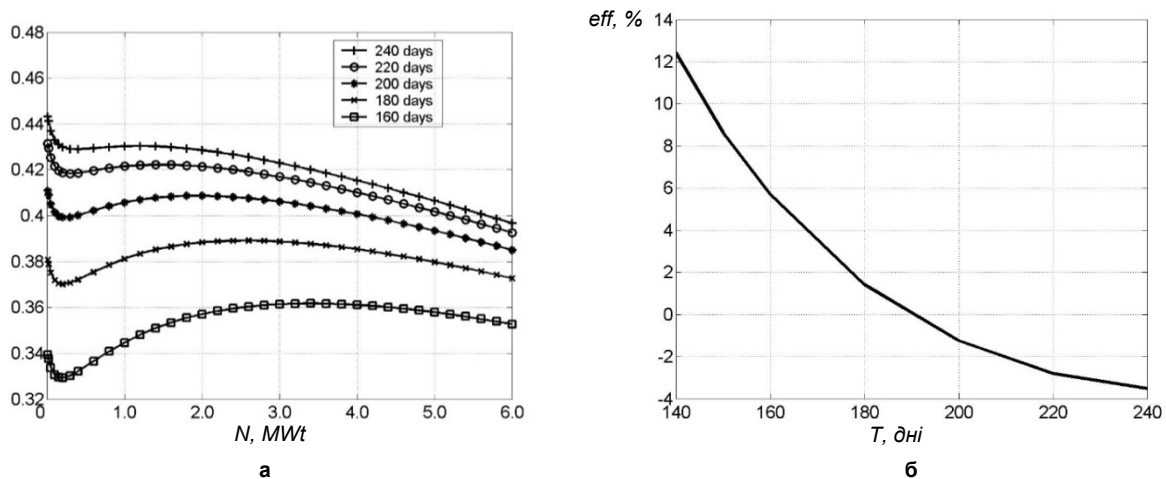


Рис. 2. Ефективність комбінування великої і малої тяги

Наведені на рис. 2 а криві мають локальні мінімуми й максимуми. Наявність мінімумів пояснюємо тим, що, урахувавши фіксовану тривалість перельоту, за малих значень електричної потужності рушійна система малої тяги здатна забезпечити зовсім незначний відсоток енергозатрат на маневр, а отже, її маса фактично стає мертвою. Локальні максимуми визначають оптимальні значення  $N$ , для яких маса зекономленого завдяки використанню рушійної системи малої тяги палива найкраще співвідноситься з масою самої рушійної системи. Якщо значення  $m_{\pi}$  в такому максимумі перевищує значення за  $N = 0$ , то застосування дворежимної рушійної системи стає ефективним, адже маса зекономленого палива перевищує масу рушійної системи малої тяги. Чим менша тривалість маневру, тим вищими є енергозатрати на його виконання, а отже – тим більшими є можливості для економії палива внаслідок застосування системи малої тяги. Тому за зменшення тривалості перельоту максимуми на кривих рис. 2 а зміщуються праворуч.

Ефективність застосування підходу комбінування великої і малої тяги залежно від тривалості перельоту проілюстровано на рис. 2 б. Ефективність обчислювали за формулою

$$eff = \frac{M_{\pi max} - M_{\pi}(0)}{M_{\pi}(0)} \times 100\%,$$

де  $M_{\pi max}$  – максимальне значення корисного навантаження за комбінування великої і малої тяги (локальний максимум кривих на рис. 2 а),  $M_{\pi}(0)$  – значення корисного навантаження за використання тільки великої тяги.

Як впливає з рис. 2 б, комбінування великої та малої тяги є ефективним, якщо тривалість перельоту не перевищує 190 днів.

### Дискусія і висновки

За отриманими результатами можна попередньо оцінити ефективність застосування підходу комбінування двигунів великої та малої тяги для здійснення міжпланетних перельотів. Ефективність зростає за зменшення тривалості перельоту, зважаючи на те, що при цьому збільшується відсоток загальних енерговитрат, який може бути забезпечений рушійною системою малої тяги. Водночас для розрахунку короткотривалих й енергозатратних перельотів потрібно шукати точніші методи отримання аналітичного виразу залежності функціоналу геліоцентричного маневру від планетоцентричних швидкостей на сферах впливу  $J(\vec{v}_{\infty}^e, \vec{v}_{\infty}^m)$ .

**Внесок авторів:** Олексій Харитонов – постановка задачі, побудова методики її розв'язання; Олексій Куценко – здійснення розрахунків; Анастасія Куценко – аналіз джерел, підготовка теоретичних основ дослідження.

**Джерела фінансування.** Фінансування здійснюється власним коштом авторів і частково забезпечено Київським національним університетом імені Тараса Шевченка.

**Список використаних джерел**

Харитонов, О. М., Савченко, С. Р., & Міранда, Н. (2019). Оптимізація швидких міжпланетних траєкторій з використанням ядерного дворежимного двигуна. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*, 1, 74–77.

Beletsky, V. (2012). *Essays in the Motion of Celestial Bodies*. Birkhäuser Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8360-3>

Gosse, R., Osborne, G., Mahmood, H., Burrows, S. K., Roy, S., Watson, J., & Tonks, M. (2024). Nuclear Wave Rotor Bi-Modal Cycle for In-Space Propulsion [Conference proceedings]. *AIAA SCITECH 2024 Forum*. <https://doi.org/10.2514/6.2024-1238>

InspeNet. (2023). NASA approves nuclear-rocket prototype to travel to Mars in just 45 days, InspeNet. <https://inspenet.com/en/noticias/nasa-approves-nuclear-rocket-prototype-to-travel-to-mars-in-just-45-days>

Kharytonov, O. M., & Kiforenko, B. M. (2011). Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion. *Acta Astronautica*, 69(3), 223–233. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.03.003>

**References**

Beletsky, V. (2012). *Essays in the Motion of Celestial Bodies*. Birkhäuser Basel. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8360-3>

Gosse, R., Osborne, G., Mahmood, H., Burrows, S. K., Roy, S., Watson, J., & Tonks, M. (2024). Nuclear Wave Rotor Bi-Modal Cycle for In-Space Propulsion [Conference proceedings]. *AIAA SCITECH 2024 Forum*. <https://doi.org/10.2514/6.2024-1238>

InspeNet. (2023). NASA approves nuclear-rocket prototype to travel to Mars in just 45 days, InspeNet. <https://inspenet.com/en/noticias/nasa-approves-nuclear-rocket-prototype-to-travel-to-mars-in-just-45-days>

Kharytonov, O. M., & Kiforenko, B. M. (2011). Finite-thrust optimization of interplanetary transfers of space vehicle with bimodal nuclear thermal propulsion. *Acta Astronautica*, 69(3), 223–233. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2011.03.003>

Kharytonov, O. M., Savchenko, S. R., & Miranda, N. (2019). Optimization of sprint interplanetary trajectories with nuclear bimodal thermal propulsion. *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics*, 1, 74–77.

Отримано редакцією журналу / Received: 26.08.25  
 Прорецензовано / Revised: 06.10.25  
 Схвалено до друку / Accepted: 10.10.25

Oleksii KHARYTONOV, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.  
 ORCID ID: 0000-0002-6529-7736  
 e-mail: oleksii.kutsenko@knu.ua  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Oleksii KUTSENKO, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.  
 ORCID ID: 0000-0001-5089-0409  
 e-mail: oleksii.kutsenko@knu.ua  
 Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

Anastasiia KUTSENKO, PhD (Phys. & Math.), Assoc. Prof.  
 ORCID ID: 0000-0003-1808-6773  
 e-mail: kutsenko@nubip.edu.ua  
 National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

**ANALYSIS OF THE EFFECTIVENESS OF COMBINING HIGH-AND LOW-THRUST ENGINES  
 IN EARTH – MARS FLIGHTS**

*Interplanetary manned flights require rapid and economical implementation. These requirements can be met by combining high-thrust and low-thrust engines, which can provide the necessary power and energy efficiency. The problem of a "sprint" flight from Earth to Mars is considered, which consists in transferring a spacecraft from a given circular geocentric orbit to a given circular areocentric orbit in a given time, less than the time of a classic Hohmann-type transfer. The combination of high-thrust and low-thrust engines leads to the problem of optimizing the distribution of the total  $\Delta v$  budget between the high-thrust and low-thrust maneuvers. At the same time, the heliocentric part is formed by the low-thrust engine and differs from the usual Keplerian arc. The high-thrust engine provides maneuvers in the spheres of influence of the planets. Thanks to this, compared to the classic option of using only high thrust, the total maneuver time does not change, and part of the fuel is used by a more efficient low-thrust system. This raises the question: under what conditions will the mass of fuel saved in this way exceed the mass of the additionally installed low-thrust propulsion system? The paper provides an estimate of flight duration, which assesses the upper limit of the flight duration range in which the combination of high- and low-thrust engines is optimal.*

**Keywords:** Earth – Mars interplanetary flight, combination of high and low thrust, nuclear engine, transporting trajectory method.

Автори заявляють про відсутність конфлікту інтересів. Спонсори не брали участі в розробленні дослідження; у зборі, аналізі чи інтерпретації даних; у написанні рукопису; в рішенні про публікацію результатів.

The authors declare no conflicts of interest. The funders had no role in the design of the study; in the collection, analyses, or interpretation of data; in the writing of the manuscript; in the decision to publish the results.