МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

КНОПОВА Вікторія Павлівна

УДК 519.21

ЛОКАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗПОДІЛУ ТА ТРАЄКТОРІЙ ПРОЦЕСІВ ТИПУ ЛЕВІ

Спеціальність: 01.01.05 — теорія ймовірностей і математична статистика

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-
математичних наук

Київ — 2016

Дисертацією є рукопис.
Робота виконана в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України.

Науковий консультант: доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник,
Кулик Олексій Михайлович,
Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник.

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук,
професор Бендіков Олександр Давідович,
Вроцлавський університет, професор
Інституту математики та інформатики;
доктор фізико-математичних наук,
професор Іванов Олександр Володимирович,
Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут",
професор кафедри математичного аналізу
та теорії ймовірностей;
доктор фізико-математичних наук,
професор Копитко Богдан Іванович,
Львівський національний університет
імені Івана Франка, завідувач
кафедри вищої математики.

Захист відбудеться 31жовтня 2016 р. о 14 годині на засіданні спеціа-лізованої вченої ради Д 26.001.37 Київський національний університет імені Тараса Шевченка за адресою: 03022 м. Київ, проспект Глушкова 4Е, механіко-математичний факультет.

З дисертацією можна ознайомитись у Науковій бібліотеці імені М. Максимовича Київського національного університету імені Тараса Шевченка за адресою: 01601 м. Київ, вул. Володимирська, 58.

Автореферат розісланий «15» вересня 2016 р.

Учений секретар спеціалізованої вченої ради	Моклячук М.П.

Загальна характеристика роботи

Актуальність теми

Останнім часом у науковій літературі широко досліджуються такі питання, як існування та властивості імовірнісної щільності процесів Леві та, у більш загальному контексті, марковських процесів типу Леві. Така тенденція обумовлена тим, що вони природно виникають у різних застосуваннях, зокрема, у природничих науках, в економіці, фінансовій математиці. Незважаючи на те, що у вивченні цієї тематики досягнуто значного прогресу, багато питань залишаються відкритими.

Процеси Леві являють собою досить великий клас процесів. До цього класу входять такі фундаментальні процеси, як броунівський рух та процес Пуассона. Після того, як П. Леві в 30-х роках минулого століття ввів характеризацію таких процесів (які стали невдовзі називатися процесами Леві), ними займалися багато вчених, зокрема, досліджувались властивості розподілу та траєкторій. З іншого боку, багато фундаментальних класів розподілів являють собою узагальнення класу процесів Леві. Одним з таких класів є клас семімартингалів, іншим є клас процесів Маркова. Вивчення властивостей процесів Леві відкриває можливості для дослідження інших класів процесів, а також їх можливих застосувань.

Останнім часом процеси Леві знайшли застосування у фінансовій математиці. Ідея застосовувати випадкові процеси для моделювання ринку цінних паперів запропонована ще Л. Башельє в 1900-му році. Пізніше таку модель розвинуто Самуельсоном, який запропонував використання геометричного броунівського руху. У 1973-му році Ф. Блек та М. Шоулс, одночасно з Р. Мертоном, запропонували модель ціноутворення. Згодом стало зрозуміло, що використання лише процесів з неперервними траєкторіями (якими є броунівський рух та геометричний броунівський рух) не вистачає для дослідження процесів ціноутворення. Тому в 1980--1990-х роках у працях П. Карра, Д. Мадана, Д. Бейтса, П. Танкова запропоновано моделі, які використовують процеси Леві. В монографії В. Шутенса проведено детальний огляд літератури із застосування процесів та наведено задачі фінансової математики, в яких природно виникають процеси Леві. Тому вивчення властивостей процесів Леві є дуже важливим з точки зору застосувань.

З іншого боку, в деяких застосуваннях природно виникають функціонали від процесів Леві, такі, як дробовий рух Леві, який введено нещодавно, в деякому сенсі за аналогією із дробовим броунівським рухом. Моделі, що містять дробовий та звичайний броунівський рухи, останнім часом викликали інтерес після праць П. Керидито, в яких показано, що в таких змішаних моделях відсутній арбітраж, тобто процедура, яка дозволяє отримати дохід завдяки розходженню цін продажу та покупки цінних паперів. Тому виникає природне питання можливості застосування дробового руху Леві як більш загальної моделі. Дослідження в цьому напрямку є новими і потребують розвинення відповідного математичного апарату.

В природі властивість незалежності та однорідності приростів, яка лежить в означенні процесу Леві, є в значній мірі сильним припущенням. Як правило, така властивість спостерігається лише локально. Таке узагальнення приводить до більш широкого класу процесів, а саме, процесів типу Леві. Зв'язок між процесами Леві та процесами типу Леві такий самий, як між броунівським рухом та дифузійними процесами -- процеси типу Леві можна інтерпретувати як процеси з локально незалежними приростами. Проте вивчення таких процесів є набагато складнішим. Існує безпосередній зв'язок між процесами типу Леві та розв'язками задачі Коші для певного класу інтегро-диференціальних рівнянь. Для побудови фундаментального розв'язку ефективним методом у випадку еліптичних та параболічних рівнянь у частинних похідних є метод параметриксу. Вперше метод параметриксу запропоновано в роботі Е. Леві в 1907-му році для випадку еліптичних рівнянь та Ф. Дресселом в 1940-му році для випадку параболічних рівнянь. Для загальних інтегро-диференціальних рівнянь модифікацію методу параметриксу розроблено в працях Х. Івасакі в 70-х роках, але цей метод використовував зовсім іншу техніку, яка, взагалі кажучи, дає мало інформації про побудований розв'язок. Пізніше метод параметриксу Леві розвивався в 80-ті роки в працях С. Ейдельмана, Я. Дриня та А. Кочубея, але сам підхід накладав досить жорсткі обмеження на структуру оператора. Для більш загальних класів операторів виникла необхідність розробки модифікації методу. Стосовно зв'язку з теорією випадкових процесів, аналітичні методи побудови дослідження саме для процесів типу Леві вперше запропоновано в працях Н. Якоба в 1990-х роках і з того часу така методологія активно розвивається. Але на сьогоднішній день не існує загальної схеми, яка б дозволяла довести, при відносно простих умовах на оператор, існування відповідного процесу типу Леві та дати відповідь на питання щодо основних властивостей процесу. Відповідь на це питання дала б, крім важливих і цікавих теоретичних результатів, нові можливості дослідження явищ, що виникають у фізиці, економіці, фінансовій математиці тощо.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами

Дисертаційну роботу виконано в рамках державних бюджетних дослідницьких наукових тем відділу методів системного моделювання Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України: № В.Ф.160.10 <<Розробити та реалізувати уніфіковані схеми проектування програм розподілених імітаційних експериментів>> (№ держреєстрації 0102U000501); № В.Ф.К.160.12 <<Дослідження методів емпіричного оцінювання в теорії ризику та стохастичної оптимізації>> (№ держреєстрації 0102U003215); № В.Ф.160.14 <<Розробити методи та засоби реалізації оптимізаційно-імітаційних середовищ на розподілених та багатопроцесорних архітектурах>> (№ держреєстрації 0106U000547); № В.Ф.К.160.15 <<Розробити нові інформаційні технології для задач оптимального планування експериментів та керування складними стохастичними системами>> (№ держреєстрації 0107U003612); № В.Ф.160.17 <<Розробити методи інтелектуалізації процесів імітаційного моделювання на основі методології Data Farming>> (№ держреєстрації 0110U000067); № В.Ф.160.26 <<Розробити методи планування метаевристичних стратегій та моделі підтримки сценаріїв оптимізаційно-імітаційних експериментів>> (№ держреєстрації 01155U000158); № ВФК. 160.23 <<Розробити методи нелінійного стохастичного аналізу та моделювання із застосуванням до задач оцінювання, оптимізації та прогнозування>> (№ держреєстрації 0112U000747), а також теми № 11БФ038-02 НДЧ ``Еволюційні системи: дослідження аналітичних перетворень, випадкових флуктуацій та статистичних закономірностей" (№ держреєстрації 0111U006561) на кафедрі теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка і входить до комплексного тематичного плану науково-дослідних робіт ``Сучасні математичні проблеми природознавства, економіки та фінансів". Також, роботу виконано за підтримки міжнародних грантів INTAS (2007--2008 рр.) та DAAD (2009 р.).

Мета і завдання дослідження

Дисертаційну роботу присвячено вивченню процесів Леві, процесів типу Леві та функціоналів від таких процесів. Досліджуються проблеми існування перехідної імовірнісної щільності процесу Леві та побудови оцінок на цю щільність. Розв'язання таких задач дозволяє вивчати властивості розподілу функціоналів від процесів Леві. З іншого боку, вивчення властивостей щільності перехідної імовірності процесу Леві дає можливість розвинути методи побудови та дослідження процесів типу Леві. Ці властивості допомогають розвинути модифікацію методу параметрикса, який дозволяє показати, що нелокальний оператор типу

Леві є генератором феллерівської напівгрупи, ядро якої, у свою чергу, є щільністю перехідної імовірності процесу Маркова. Така задача є дуже важливою, розв'язання її відкриває нові можливості для дослідження властивостей процесів типу Леві, зокрема, їх траєкторій.

Метою роботи є розробка аналітичних та імовірнісних методів, які б дозволяли досліджувати процеси Леві та типу Леві, що, у свою чергу, розширило коло прикладних задач, які описуються такими процесами.

Об'єктом дослідження є щільності розподілів процесів Леві, функціоналів від процесів Леві та процесів типу Леві, а також пов'язані з ними локальні характеристики.

Предметом дослідження є процеси Леві, процеси типу Леві та функціонали від процесів Леві.

Методи дослідження. У роботі використано методи теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, теорії стохастичних диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, функціонального аналізу, теорії міри тощо.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у розробці нових методів дослідження характеристик процесів Леві та нових методів побудови і досліджень процесів типу Леві.

Основні результати, які визначають наукову новизну та виносяться на захист, наступні:

• для певного класу процесів Леві доведено, що умова Хартмана -- Вінтнера є необхідною та достатньою для існування гладкої імовірнісної щільності;

• доведено верхню оцінку на імовірнісну щільність процесу Леві за умови існування експоненційних моментів міри Леві на нескінченності;

• побудовано оцінки ``типу згортки'' на імовірнісну щільність процесу Леві у малому часі;

• встановлено достатні умови, за яких характеристична функція нескінченно-подільного розподілу є (з точністю до нормуючого множника) щільністю іншого нескінченно-подільного розподілу;

• побудовано оцінку на швидкість збіжності у локальній граничній теоремі до щільності нескінченно-подільного розподілу;

• за допомогою модифікації методу сідлової точки досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності щільності розподілу процесу, що задається функціоналом від процесу Леві;

• проаналізовано часткові випадки основного результату, а саме, коли процес є процесом Орнштейна -- Уленбека з шумом Леві та дробовим рухом Леві із параметром Хурста $1/2<H<1$;

• для дробового руху Леві встановлено необхідні та достатні умови існування щільності розподілу;

• при фіксованому параметрі часу досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності щільності розподілу дробового руху Леві;

• запропоновано версію методу параметрикса для побудови функції $p_t(x,y)$, що є фундаментальним розв'язком задачі Коші для оператора $\partial_t - A$, де A є замиканням вихідного оператора в $C_\infty(R^n)$;

• доведено неперервність функції $p_t(x,y)$ за (t,x,y);

• встановлено властивості оператора T_t, ядром якого є $p_t(x,y)$;

• побудовано верхню та нижні оцінки на функцію $p_t(x,y)$;

• доведено, що функція $p_t(x,y)$ є диференційовною за t, похідна є неперервною та побудовано певну оцінку зверху на цю похідну;

• встановлено необхідну та достатню умови того, що (знакозмінна) міра належить класу Като відносно щільності перехідної імовірності субординованого процесу;

• у випадку, коли $p_t(x,y)$ допускає компактну оцінку зверху степеневого типу, встановлено необхідну і достатню умову того, що (знакозмінна) міра належить класу Като відносно $p_t(x,y)$;

• для неперервного адитивного функціоналу, що відповідає мірі, яка належить класу Като відносно $p_t(x,y)$, показано, що напівгрупа Фейнмана -- Каца коректно визначена, її ядро є абсолютно неперервним відносно міри Лебега. Побудовано верхні та нижні оцінки на щільність цього ядра;

• доведено закон повторного логарифму Чанга для процесу типу Леві;

• встановлено нижню оцінку на розмірність Хаусдорфа образу траєкторії процесу типу Леві за припущення існування перехідної імовірнісної щільності процесу та певної оцінки знизу на цю щільність;

• для процесу, що було побудовано в розділі 4, встановлено розмірності Хаусдорфа множини рівня та множини зіткнень. При цьому доведено достатні умови регулярності та полярності точок (множин) для процесу;

• доведено неперервність псевдодиференціального оператора певного типу між просторами узагальнених ψ -беселевих потенціалів на півпросторі;

• встановлено умови, при яких задачі Діріхле та Неймана для оператора, що задано на півпросторі, та символ якого має певне зображення Леві -- Хінчіна, мають єдиний розв'язок;

• встановлено еквівалентне зображення норми простору Трібеля -- Лізоркіна узагальненої гладкості;

• доведено узагальнення теореми Макенхоупа – Уідена.

Практичне значення отриманих результатів

Робота має теоретичний характер. Отримані результати є безперечним внеском у теорію випадкових процесів. Запропоновані в дисертації методи можуть бути застосованими при дослідженні математичних моделей випадкових явищ зі складною поведінкою, які характеризуються неоднорідністю у часі та просторі, у фінансовій математиці, економіці, фізиці, біології тощо.

Особистий внесок здобувача. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором особисто. Зі статей, опублікованих у співавторстві, до дисертації включені лише ті результати, що належать автору. Особистий внесок здобувача в працях, що опубліковані у співавторстві, є наступним: [1]-- еквівалентне зображення напівнорми; [7, 10, 13]-- асимптотична поведінка імовірнісної щільності; [11, 15, 16, 20]-- побудова та оцінки перехідної імовірнісної щільності; [12]-- деякі умови існування перехідної імовірнісної щільності; [18]-- нижня оцінка розмірності Хаусдорфа образу процесу; [17]-- оцінка розмірності Хаусдорфа множин рівня та зіткнень; [9]-- приклади та доведення тверджень про зображення перехідної імовірнісної щільності.

Апробація результатів дисертації. Результати дослідження доповідалися на наукових конференціях та засіданнях наукових семінарів провідних українських та закордонних наукових установ.

Конференції:

• Міжнародна конференція <<Stochastic Analysis, Stochastic Differential Geometry and Applications>>, Свонзі, Великобританія, 19--21 квітня 2007 р.

• Міжнародна конференція <<South West and South Wales Regional Probability

Meeting University of Bath>>, Бат, Великобританія, 31 липня 2007 р.

- Міжнародна конференція <<Gregynog Mathematics Colloquium>>, Греганог, Великобританія, 21--23 травня 2007 р.
- Міжнародна конференція <<8th German Open Conference on Proba-bility and Statistics>>, Аахен, Німеччина, 4--7 березня 2008 р.
- Міжнародна конференція <<Stochastic Processes and Their Applications>>, Берлін, Німеччина, 27--31 липня 2009 р
- Міжнародна конференція <<Workshop on Long-Range Dependence: from Fractional Calculus to Financial Applications>>, Київ, 7--11 вересня 2009 р.
- Міжнародна конференція <<Modern Stochastics: Theory and Applications II>>, Київ, 7--11 вересня 2010 р.
- Міжнародна конференція <<Lévy Processes: Theory and Applications>>, Дрезден, Німеччина, 26 -- 30 липня 2010 р.
- Міжнародна конференція <<8th International ISAAC Congress>>, Москва, Росія, 22--27 серпня 2011 р.
- Міжнародна конференція <<Stochastic Analysis and Random Dyna-mics>>, Львів, Україна, 14--20 червня 2010 р.
- Всеукраїнська конференція <<Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу>>, Ворохта, 23--28 лютого 2011, 20--26 лютого 2012 р., 25 лютого -- 03 березня, 2013 р, 25--28 лютого 2015 р.
- Міжнародна конференція <<Nonlocal Operators: Analysis, Probability, Geometry and Applications>>, Білефельд, Німеччина, 9--14 липня 2012 р.
- Міжнародна конференція <<Modern Stochastics: Theory and Applications III>>, Київ, 10--14 вересня 2012 р.
- Міжнародний симпозіум <<Stochastic Processes: Theory and Statistical Applications>>, Київ, 25 квітня 2013 р.
- Міжнародна конференція <<Semigroups of Operators: Theory and Applications>>, Бєдлєво, Польща, 6--11 жовтня 2013 р.
- Міжнародна конференція <<Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives>>, Цахкадзор, Вірменія, 24--31 серпня 2013 р.
- Міжнародна конференція <<7-th International Conference of Stochas-tic Analysis and its applications>>, Сеул, Корея, 06--11 серпня 2014 р.
- Міжнародна конференція <<International Congress of Mathematicians>>, Сеул, Корея, 14 -- 20 серпня 2014 р.
- Міжнародна конференція <<Probability and Analysis>>, Бєдлєво, Польща, 4--8 травня 2015 р.
- Міжнародна конференція <<Probability, reliability and optimization>>, Київ, 7--10 квітня 2015 р.
- Міжнародна конференція <<Stochastic Processes in Abstract Spaces, dedicated to the 80-th anniversary of Professor A.Ya. Dorogovtsev>>, Київ, 14--16 жовтня 2015 р.

Семінари:

- Семінар кафедри теорії ймовірностей, статистики та актуарної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ; 2013, 2016 р.
- Семінар <<Статистичні проблеми для випадкових процесів і полів>> кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей НТУУ <<КПІ>>, Київ; 2007, 2011, 2014, 2016 р.
- Семінар <<Стохастика та її застосування>> кафедри дослідження операцій факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка, Київ;

2013 р.

• Семінар з теорії імовірностей та випадкових процесів Інституту стохастики Дрезденського університету, Німеччина, Дрезден; 2008, 2013, 2014 р.

• Семінар зі стохастичної геометрії Інституту стохастики Йєнського університету, Німеччина, Йєна; 2008, 2013, 2015 р.

• Семінар з теорії марковських напівгруп та операторів Шредінгера, Вроцлавського Технологічного університету, Польша, Вроцлав; 2013, 2015 р.

• Семінар <<Исчисление Маллявена и его приложения>> відділу теорії випадкових процесів Інституту математики НАН України, Київ; 2013, 2016 р.

• Семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Інституту математики НАН України, Київ; 2016 р.

• Семінар кафедри математичного аналізу та диференціальних рівнянь Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова, Київ; 2016 р.

• Семінар <<Аналітичні методи в теорії дифузійних процесів>> кафедри вищої математики Львівського університету ім. І. Франка, Львів; 2016 р.

Публікації

Основні результати роботи викладено у 20 наукових статтях [1--20], які опубліковано у виданнях, що внесені до Переліку наукових фахових видань України та іноземних періодичних видань, додатково відображено в 19 матеріалах конференцій [21--39]. З 20 статей 8 опубліковано без співавторів, 17 опубліковано в журналах, що індексуються в наукометричній базі Scopus.

Структура та обсяг дисертації Дисертаційна робота складається із вступу, семи розділів, розбитих на підрозділи, висновків, списку використаних джерел, списку публікацій автора та додатку. Повний текст дисертації становить 349 сторінок, обсяг основного тексту становить 288 сторінок; список використаних джерел (330 найменувань) та список публікацій автора (39 найменувань) займають 27 сторінок.

Основний зміст роботи

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми, вказано зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами, встановлено мету, задачі, предмет, об'єкт та методи дослідження, вказано наукову новизну, практичне значення отриманих в роботі результатів та особистий внесок здобувача, наведено список публікацій здобувача та основний зміст дисертаційної роботи.

Перший розділ містить історичний огляд літератури за тематикою даної роботи. Наведено аналіз сучасного стану проблем, пов’язаних з тими, що розглядаються в дисертаційній роботі.

Другий розділ присвячено дослідженню властивостей розподілу процесів Леві.

У підрозділі 2.1 показано, що для певного класу процесів Леві умова Хартмана -- Вінтнера є необхідною та достатньою для існування гладкої щільності розподілу. Нехай Z є ізотропним процесом Леві в R^n, тобто для будь-якої ізометрії $I: R^n \to R^n$, $I(0) = 0$, та для будь-якої борельової множини $D \in B(R^n)$ виконано

$$P(Z_t \in D) = P(Z_t \in I(D)), \ t \geq 0$$

У цьому випадку характеристична експонента має вигляд

$$\psi(\xi) = g(|\xi|^2)$$

де $g: [0, \infty) \to [0, \infty)$ -- деяка неперервна функція. При $n = 1$ означення ізотропного та симетричного процесу Леві співпадають.

Теорема 1 *Нехай* Z *-- процес Леві в* R^n, $n \geq 1$*, без гаусівської компоненти. Наступні умови є еквівалентними:*

•

$$\lim_{|\xi|\to\infty}\frac{\mathrm{Re}\,\psi(\xi)}{\ln(1+|\xi|)}=\infty;$$

• для всіх $t>0$ існує імовірнісна щільність p_t, $p_t\in C^\infty(R^n)$ та $\nabla^\alpha p_t\in L_1(R^n)\cap C_\infty(R^n)$ для всіх $\alpha\in N_0^n$;

• для всіх $t>0$ існує імовірнісна щільність $p_t, \nabla p_t\in L_1(R^n)$.

Якщо Z є ізотропним, причому ψ допускає зображення зі зростаючою функцією g, то умови, наведені вище, еквівалентні наступним:

• для всіх $t>0$ існує імовірнісна щільність p_t, $p_t\in C_\infty(R^n)$;

• для всіх $t>0$ існує імовірнісна щільність p_t, $p_t\in L_\infty(R^n)$;

• $e^{-t\psi}\in L_1(R^n)$ для всіх $t>0$.

Теорема 2 *Нехай Z -- ізотропний процес Леві в R^n, n 2, без гаусівської компоненти, з характеристичною експонентою та відповідною мірою Леві μ. Тоді умова є еквівалентною наступній умові:*

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\mu(B^c(0,\varepsilon))}{|\ln\varepsilon|}=\infty.$$

Запропоновано також узагальнення теореми Хартмана -- Вінтнера, та доведено узагальнення теореми .

У підрозділі 2.2 за допомоги методів комплексного аналізу побудовано верхню оцінку на імовірнісну щільність процесу Леві за умови існування експонційних моментів міри Леві μ на нескінченності:

$$\int_{|y|>1} e^{2\lambda|y|}\mu(dy)<\infty$$

z R^n · Покладемо $H(t,x,\xi)=i\xi x-t\psi(\xi)$, та $H(t,x)=H(t,x,i\xi(t,x))$.

Теорема 3 *Нехай $(Z_t)_{t\ 0}$ є процесом Леві з дійснозначною характеристичною експонентою $\psi(\xi)$. Припустимо, що виконано умову , та для $e^{-t\psi}\in L_1(R^n)$ всіх $t>0$. Тоді*

$$[illegible]$$

У підрозділі 2.3 побудовано оцінки "типу згортки" на імовірнісну щільність процесу Леві у малому часі. Основна ідея методу дослідження імовірнісної щільності процесу Леві у малому часі полягає у тому, щоб відокремити "динамічним чином" малі та великі стрибки процесу. А саме, розбивши відповідну міру Леві μ процесу на, відповідно, $1_{\{|u|\le\rho_t\}}\mu(du)$ та $1_{\{|u|>\rho_t\}}\mu(du)$, де ρ_t -- це деяка монотонна функція, та записавши імовірнісні міри відповідних нескінченно-подільних випадкових величин, що залежать параметрично від часу, дослідити ці міри окремо. При цьому, імовірнісна міра, що відповідає мірі Леві $t1_{\{|u|\le\rho_t\}}\mu(du)$, має щільність $\bar p_t(x)$ відносно міри Лебега, а імовірнісна міра $P_t(dx)$ випадкової величини, що відповідає $t1_{\{|u|>\rho_t\}}\mu(du)$, є мірою складного пуассонівського процесу, інтенсивність стрибка якого [illegible] залежить від часу. А отже, імовірнісну щільність $p_t(x)$ можна представити як згортку щільності $\bar{p}_t(x)$ та міри $P_t(dx)$. Для реалізації такої схеми дослідження імовірнісної щільності необхідно накласти певні обмеження на міру Леві μ, або, що те саме, на характеристичну функцію ψ. Це обмеження полягає у припущенні, що дійсна частина $\mathrm{Re}\,\psi$ може бути обмежена зверху та знизу певною монотонною функцією (яку помножено на деякі сталі c та C, відповідно). Іншими словами, $\mathrm{Re}\,\psi$ має лише "контрольовані" осциляції.

Введемо допоміжні функції.

$$[illegible]$$

Зауважимо, що [illegible]. Припустимо, що виконано наступну умову.

A1. Існує $\beta > 1$ таке, що [illegible] для всіх досить великих r.

Позначимо

$$\alpha := 2/\beta.$$

Таке позначення мотивоване тим, що у випадку симетричного α-стійкого процесу умова **A1** має місце з $\beta = 2/\alpha$. Визначимо

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

де $a \in R^n$ є вектором зсуву із зображення Леві -- Хінчіна функції ψ. Тоді для кожного $t > 0$ щільність перехідної імовірності $p_t(x)$ можна подати у вигляді

$$[illegible]$$

де [illegible],

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Позначимо Λ_t^{*m} згортку порядку m міри Λ_t; $\Lambda_t^{*0} := \delta_0$.

Ввівши на R^n лексикографічний порядок, можна показати, що перший аргумент x_t максимуму функції $\bar{p}_t(x)$ існує, та для довільного $T > 0$ існує значення $C = C(T)$, таке, що [illegible], $t \in (0,T]$. Позначимо

$$[illegible]$$

де $b_i > 0$, $1 \le i \le 4$ -- деякі сталі.

Теорема 4 *Нехай виконано умову **A1**. Тоді для довільного $T > 0$ існують сталі $b_i > 0$, $1 \le i \le 4$, такі, що*

$$[illegible]$$

для всіх $t \in (0,T]$, $x \in R^n$, де f_{up}, f_{low} -- функції вигляду зі сталими $b_i > 0$, 1□i□4.

Саме оцінки такого типу дозволяють застосувати у розділі 4 метод параметриксу для побудови процесу типу Леві. В окремих випадках верхню та нижню оцінки $p_t(x)$ можна подати у більш компактній формі. Будемо говорити, що G має субекспоненційний розподіл в R^n (позначення: $G \in S(R^n)$) якщо для всіх $x \in R^n$ таких, що $\min x_i < \infty$, маємо $\lim \frac{1-G^{*2}(tx)}{1-G(tx)} = 2$.

Теорема 5 *Нехай $T > 0$ є фіксованим. Припустимо, що виконано умову **A1**, та існує функція розподілу $G \in S(R^n)$, така, що*

$$[illegible]$$

де $C_0 > 0$ є деякою сталою. Тоді існує стала $C > 0$, така, що

$$[illegible]$$

де f_{up} -- функція виду . Якщо нерівність має місце зі знаком , то

$$[illegible]$$

де $c > 0$ є деякою сталою, та f_{low} -- функція виду .

У випадку, коли міра Леві має щільність, має місце наступна теорема.

Теорема 6 *Нехай $T > 0$ є фіксованим. Припустимо, що має місце умова **A1**, міра Леві є абсолютно неперервною, $\mu(dy) = m(y)dy$, та має місце оцінка*

$$[illegible]$$

де $b > 0$. Тоді

$$[illegible]$$

Якщо нерівність має місце зі знаком , то

$$[illegible]$$

У підрозділі 2.4 досліджено структурні властивості імовірнісної щільності процесу Леві. А саме, наведено достатні умови, за яких характеристична функція процесу Леві є (з точністю до нормуючого множника) є (після відповідного нормування) щільністю іншого процесу з незалежними приростами.

У підрозділі 2.5 побудовано оцінку на швидкість збіжності у локальній граничній теоремі до щільності нескінченно-подільного (надалі: ID) розподілу. Нехай $\{\xi_{k,n}, 1 \le k \le d_n\}$, є масивом незалежних однаково розподілених у кожній серії випадкових величин, з характеристичною функцією $\theta_n(z)$ та характеристичною експонентою ϕ_n. За певних умов $S_n = \frac{\xi_{1,n} + \dots + \xi_{n,n}}{b_n}$ збігається слабко при $n \to \infty$ до деякої ID величини S з характеристичною експонентою $\psi(z)$. За певних припущень на $(a_n)_{n \ge 1}$, $(b_n)_{n \ge 1}$, та на розподіл $\xi_{1,n}$, розподіли S_n та S мають щільність, і має місце локальна гранична теорема.

Третій розділ присвячено дослідженню асимтотичної поведінки деяких функціоналів від процесу Леві у випадку, коли просторові змінні та параметр часу прямують до нескінченності таким чином, що значення часового параметру залишається відокремленим від нуля.

У підрозділі 3.1 введено базові позначення, та описано підхід, який застосовано в подальших підрозділах розділу 3.

У підрозділі 3.2 доведено загальний результат про асимптотичну поведінку щільності розподілу певного класу функціоналів від процесу Леві.

Нехай $(Z_t)_{t \geq 0}$-- двосторонній процес Леві в R^n. Як і раніше, надалі будемо вважати, що в зображенні характеристичної експоненти ψ відсутня квадратична компонента. У цьому розділі ми припускаємо, що виконано умову .

Розглянемо наступний процес:

$$Y_t = \int F(t,s)\, dZ_s, \quad t \in T$$

У працях Райпута та Родзинського знайдено умови (при $n=1$), за яких інтеграл коректно визначений як границя за імовірністю відповідних інтегральних сум; доведення у випадку $n \geq 2$ абсолютно аналогічне. Надалі припускається, що ці умови мають місце.

Позначимо $\mu_{t,\lambda}$ образ міри $\mu(du)ds$ при відображенні

$$[illegible]$$

Надалі будемо припускати, що

$$\inf_{\lambda \in S^n} \mu_{t,\lambda}(R_+) > 0$$

За додаткових обмежень, які буде накладено на ядро $F(s,t)$, умову можна пом'якшити.

Для $t \in T$, $\xi \in R^n$, визначимо

$$[illegible]$$

Якщо для даного $t \in T$ та для деякого $\delta > 0$

$$[illegible]$$

то можна показати, що Y_t має щільність розподілу $p_t \in C_b^k(R^n)$. Іншими словами, умова є модифікацією умови Хартмана -- Вінтнера.

Розглядається наступне зображення функції $p_t(x)$:

$$[illegible]$$

де

$$[illegible]$$

та $[illegible]$. Таке зображення виявляється більш зручним у доведенні головного результату розділу 3 (теореми). Покладемо

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

та

$$M := M(t,\xi) = \left(M_{ij}\right)_{i,j=1}^{n}$$

Надалі будемо припускати, що виконується наступна умова.

- Для всіх $(t,\xi) \in T \times R^n$ матриця M є невиродженою.

Позначимо за $\lambda_i(t,\xi)$, $1 \le i \le n$, власні числа матриці M. За умови невиродженості M маємо $\lambda_i(t,\xi) > 0$, $1 \le i \le n$. Позначимо $\lambda_{max}(t,\xi)$ та $\lambda_{min}(t,\xi)$, відповідно, максимальне та мінімальне власне число матриці M. Зауважимо також, що

$$[illegible]$$

та власними числами M^2 та $M^{1/2}$ є, відповідно, $\lambda_i^2(t,\xi)$ and $\lambda_i^{1/2}(t,\xi)$, $1 \le i \le n$. За наведених вище умов, функція $H(t,x,\cdot)$ є опуклою донизу на iR^n. Більш того, за умови існує єдиний розв'язок $\xi = \xi(t,x)$ рівняння $\nabla_\xi H(t,x,i\xi) = [illegible]$, та [illegible].

Для $D \subset R$ визначимо

$$[illegible]$$

та [illegible], [illegible]. У випадках, коли це не призведе до непорозуміння, будемо писати ξ замість $\xi(t,x)$.

Нехай $E \subset T \times R^n$, та визначимо [illegible], [illegible]. Позначимо також θ та χ функції, такі, що $\theta : T \to (0,\infty)$ є відокремленою від нуля на T, та $\chi : T \to (0,\infty)$ є відокремленою від нуля на будь-якій множині $\{t : \theta(t) \le c\}$, $c > 0$. Ці функції відіграють ключову роль у структурі ядра F.

Теорема 7

Припустимо, що виконано умови , **M0** та **M1--M4**.

M1.

[illegible], $\theta(t) + \|\xi\| \to \infty$, $(t,\xi) \in B$.

M2.

$$[illegible]$$

M3. Існують $R > 0$ та $\delta > 0$ такі, що

$$[illegible]$$

M4. Існує $r > 0$ таке, що для будь-якого $\varepsilon > 0$

[illegible]

Тоді для будь-якого $t \in T$ розподіл Y_t є абсолютно неперервним зі щільністю $p_t(x)$, та

[illegible]

Припущення теореми мають досить загальний характер.

У підрозділі 3.3 розглянуто часткові приклади, в яких ці припущення неважко перевірити. А саме, нехай матриця F має вигляд $F(t,s) = f(t,s) I_n$, де I_n -- одинична матриця, а $f(t,\cdot)$ є обмеженою функцією,

[illegible]

Нехай $f(s) = f(1,s)$, та позначимо $\mu_\lambda(\cdot)$ образ міри $\mu(du)ds$ при відображенні [illegible]. Припустимо, що

$$\inf_{\lambda \in S^n} \mu_\lambda(R_+) > 0$$

Випадок $t = const$*: загальний результат*. Щоб спростити позначення, відкинемо індекс t, якщо це не призведе до непорозуміння. $M_{i_1 \ldots i_k}(\cdot) = M_{i_1 \ldots i_k}(1, \cdot)$, та $\Theta(\cdot; A) = \Theta(1; \cdot, A)$, r 0. При $t = 1$ умови **M1--M4** можна спростити; позначимо ці спрощені умови **M1'--M4'**, відповідно. Припустимо, що f задовольняє наступним умовам.

- [illegible].

- Існує інтервал $[a,b] \subset I$, на якому функція f є додатною та має неперервну ненульову похідну.

- Існує інтервал $(-\infty, b] \subset I$, на якому функція f є додатною, опуклою донизу, та зростає щонайбільше як експонента на $-\infty$; тобто, існує $\gamma > 0$ таке, що

$$\lim_{s \to -\infty} [illegible] f(s) = +\infty$$

- Існує інтервал $(-\infty, b) \subset I$, на якому функція f є додатною, опуклою донизу та спадає субекспоненційно на $-\infty$; тобто, () виконано для довільного $\gamma > 0$.

Зауважимо, що умови **Fi** стають сильнішими при зростанні i. Покладемо $\mu_\lambda(\cdot) := \mu_{\lambda}(\cdot)$, $\lambda \in S^n$. Припустимо також, що μ задовольняє одну з наступних умов:

-

$$[illegible]$$

- $$[illegible]$$

- $\inf_{\lambda \in S^n} f_\lambda(R_+) = +\infty$.

- $\inf_{\lambda \in S^n} f_\lambda(R_+) > C$.

Навпаки, умови **Ni** стають більш м'якими зі зростанням i від 1 до 4.

Будемо говорити, що міра ν задовольняє умові Крамера, якщо для довільного $\varepsilon > 0$

$$[illegible]$$

Сформулюємо модифікацію теореми у випадку фіксованого t.

Теорема 8 *Припустимо, що для μ виконані припущення* ***E0****, ,* ***M1'*** *та* ***M2'****. Також, припустимо, що μ та f задовольняють одну з умов* ***Ni*** *+* ***Fi****, $i = 1, \ldots, 4$, відповідно. У випадку $i = 1$ припустимо, що μ також задовольняє умові Крамера .*

Тоді

$$[illegible]$$

Випадок самоподібного ядра. Розглянемо випадок, коли $t \in T$ не є фіксованим, а ядро $f(t,s)$ задовольняє умові самоподібності:

$$[illegible]$$

з деякими функціями $f: R \to R$ та $[illegible]$. Умова має місце для таких процесів, як процес Леві та дробовий процес Леві. У цих випадках маємо

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

Припустимо, що міра Леві μ задовольняє умовам та . Також, припустимо, що

$$[illegible]$$

$$\liminf [illegible]$$

У теоремі, що сформульована далі, будемо використовувати позначення

$$[illegible]$$

[illegible]

Покладемо $z(t) := \chi(t)\theta(t)$, $t_0 > 0$.

Теорема 9 *Припустимо, що* μ *задовольняє умовам* $\boldsymbol{M}1'$ *та* $\boldsymbol{M}2'$. *Також, нехай* μ *та* f *задовольняють одній з умов* $\mathbf{N}\boldsymbol{i}' + \boldsymbol{Fi}$, $1 ? i ? 4$, *відповідно. У випадку* $i = 1$ *припустимо також, що* μ *задовольняє умові Крамера .*

Тоді при $t + |x| \to \infty$, $(t,x) \in [t_0, \infty) \times R$ має місце

$$p_t(x) \sim \frac{1}{\ldots}\sqrt{\frac{\ldots}{\ldots}}\, e^{\ldots} \quad [illegible]$$

Наведена вище теорема дає асимптотичну поведінку щільності перехідної імовірності процесу Леві та дробового процесу Леві при $1/2 < H < 1$, що відповідає випадку, коли процес має *довгу пам'ять*. Зауважимо, що дробовий процес Леві з $0 < H < 1/2$ не задовольняє умовам теореми , та буде розглянуто окремо.

Як приклад застосування теореми , доведено граничну теорему для відношення щільностей розподілу $p(x)$.

Позначимо

$$r_a(x) := \frac{p(x+a)}{p(x)}, \quad a \in R^n.$$

Нагадаємо, що $\zeta(x)$ позначає критичну точку $H(1, x, i\xi)$ на R.

Теорема 10 *Нехай виконано умови теореми , та* $\lambda_{max}(\xi) \le c\lambda_{min}(\xi)$, $\xi \in R^n$, для деякого $c > 0$, що не залежить від ξ. Тоді $r_a(x) \sim e^{a\zeta(x)}$, $|x| \to \infty$.

Підрозділ 3.4 присвячено поведінці дробового руху Леві Z_t^H з параметром Хурста $0 < H < 1/2$, тобто коли процес Z_t^H має *коротку пам'ять*. Ми будемо розглядати зображення Мандельброта-ван-Несса

$$Z_t^H := \int_R f(t,s)\,dZ_s$$

де Z_s, $s \in R$, є двостороннім процесом Леві. Зауважимо, що у перших двох випадках ядро $f(s) = f(1, s)$ є обмеженим. При $0 < H < 1/2$ ядро $f(s)$ не є обмеженим, і дослідження асимптотичної поведінки у випадку $0 < H < 1/2$ вимагає іншого підходу.

У випадку дробового процесу Леві можна довести, що необхідні та достатні умови існування інтегралу () зводяться до перевірки існування певного моменту міри Леві.

Твердження 11 *Нехай* $0 < H < 1, H \ne 1/2$. *Тоді інтеграл є коректно визначеним для довільного* $t \in R$ *тоді і тільки тоді, коли міра Леві* μ *задовольняє умові*

$$\int_{|u|>1} |u|^{2/(3-2H)}\, \mu(du) < \infty.$$

Зафіксуємо $t > 0$. Наступна теорема ілюструє поведінку дробового процесу Леві при $0 < H < 1/2$.

Теорема 12 *Нехай* Z_t^H, $0<H<1/2$, *є дробовим рухом Леві, який визначено у (), де* Z_t *-- це процес Леві з мірою Леві* μ. *Припустимо, що () виконано, та* $\mu(R_-)>0$. *Тоді для довільного* $t>0$ *розподіл величини* Z_t^H *є абсолютно неперервним зі щільністю* $p_t\in C_b^\infty(R)$. *При цьому,*

i) якщо $\int_{|u|>1} |u|^{2/(2H+1)} \mu(du) < \infty$ [illegible] та [illegible], то для всіх $t>0$

$$[illegible]$$

ii) якщо $\int_{|u|>1} |u|^{2/(2H+1)} \mu(du) < \infty$ [illegible], то

$$[illegible]$$

де $c_{H,T} = \frac{2}{1+2H}$ [illegible].

Четвертий розділ дисертації присвячено побудові процесу типу Леві.

Розглянуто наступні оператори, визначені на функціях з простору $C_\infty^2(R^n)$ двічи неперервно диференційовних функкій, які спадають на нескінченності разом із похідними першого та другого порядку.

1.

$$[illegible]$$

де $a: R^n \to (0,\infty)$, $b: R^n \to R^n$, $L^{(\alpha)}$ є генератором, що відповідає симетричному α-стійкому процесу Леві.

2. Поряд з оператором в одновимірному випадку розглянемо його узагальнення на випадок, коли міра Леві в означенні оператора $L^{(\alpha)}$, $\alpha\in(1,2)$, не є симетричною, та має важкі хвости.

$$[illegible]$$

де $b: R\to R$ є ліпшицевою,

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$, де $\alpha\in(1,2)$, $C_\pm$ 0, а функція $m(u)$ 0 є такою, що $m(u)=0$ при $|u|$ [illegible], та $m(u)$ [illegible] $|u|^{-1-\alpha}$, $|u|$ 1.

3.

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

де $a(x)\in R^n$, $m(x,u)$ є додатною обмеженою борелевою функцією, μ є мірою Леві.

4.

$$L = L^0 + L,$$

де

$$[illegible]$$

та оператор L є збуренням нижчого порядку оператора L^0, тобто

$$[illegible]$$

де функція $m(x,u)$ -- невід'ємна та обмежена зверху виразом $c(1\wedge|u|^{\varepsilon})$, де $c,\varepsilon>0$; міра Леві μ є симетричною.

Розглянемо спочатку випадок 1. Припустимо, що коефіцієнти оператора задовольняють наступним умовам.

• Існують сталі $0<c\square C$, $\eta\in(0,1]$ такі, що

$$[illegible]$$

• Існують сталі $C>0$, $\gamma\in[0,1]$ такі, що

$$[illegible]$$

Додатково, ми будемо розглядати три групи припущень.

A4.1. $\alpha\in(1,2$, $\gamma=0$.

A4.2. $\alpha\in((1+\gamma)^{-1},2$, $0<\gamma<1$.

A4.3. $\alpha\in(0,2$, $\gamma=1$.

Перейдемо до випадків 3 та 4. Надалі ми припускаємо, що міра μ задовольняє умові **A1**. У випадку 3 ми будемо припускати, що функція $m(x,u)$ та коефіцієнт зсуву $a(x)$ задовольняють наступним припущенням.

• Функції $m(x,u)$ та $a(x)$ є вимірними, та для деяких сталих $b_1,b_2,b_3>0$ мають місце нерівності

$$[illegible]$$

• Існують сталі $\gamma\in(0,1]$ та $b_4>0$ такі, що

$$[illegible]$$

• У випадку $\alpha\in(0,1$ припустимо, що $a(x)=0$ та ядро $\mu(x,du)$ є симетричним за u для всіх $x\in R^n$.

У випадку 4 будемо припускати, що функція $m(x,u)$ задовольняє наступним умовам.

• Міра Леві μ є симетричною, функція $m(x,u)$ є симетричною за u для довільного $x\in R^n$ та $m(x,u)\ 0$.

• Існують c, $\varepsilon>0$ такі, що $\sup_x m(x,u)\le c(1\wedge|u|^{\varepsilon})$.

Позначимо

[illegible]

коефіцієнти та міра Леві вибрано відповідно випадкам 1--4, $f \in C_\infty^2(R^n)$.

Оператори $(L^z, C_\infty^2(R^n))$ та $(\mathsf{L}^0, C_\infty^2(R^n))$ допускають замикання, які є генераторами напівгруп, що відповідають процесам Леві. Більш того, за умови **A1** такі процеси мають щільності, які ми позначимо, відповідно, $\mathsf{p}_t^z(x)$ та $\mathsf{p}_t(y-x)$. Відомо, що $\mathsf{p}_t^z(y-x)$ та $\mathsf{p}_t(y-x)$ є фундаментальними розв'язками задач Коші для операторів $\partial_t - L^z$ та $\partial_t - \mathsf{L}^0$, відповідно.

Зауважимо, що у випадку, коли b є ліпшицевою, задача Коші для диференціального рівняння $dy_t = b(y_t)dt$ має розв'язок, який утворюють потік $\{\chi_t, t \in R\}$. Позначимо за $\{\theta_t = \chi_t^{-1}, t \in R\}$ зворотній потік, який є розв'язком задачі Коші $dy_t = -b(y_t)dt$.

Позначимо $g^{(\alpha)}(x)$ щільність симетричного α-стійкого розподілу, через $g_t^{(\alpha, C_\pm)}$ -- щільність процесу Леві із характеристичною експонентою

$$[illegible]$$

де $\mu_{\alpha, C_\pm}(du) = [illegible]$,

$$[illegible]$$

Опишемо конструкцію, що лежить в основі класичного методу паратемтриксу. Розглянемо *деяку* апроксимацію нульового порядку $p_t^0(x,y)$ функції $p_t(x,y)$, та позначимо $r_t(x,y)$ залишковий доданок, отриманий при такій апроксимації, тобто

$$p_t(x,y) = p_t^0(x,y) + r_t(x,y).$$

Покладемо

$$[illegible]$$

За припущення, що $p_t(x,y)$ є фундаментальним розв'язком задача Коші для оператору $\partial_t - L$, можна показати, що $r = p^0 \# \Psi$, де $\Psi_t(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_t^{\# k}(x,y)$. Далі ми підберемо апроксимацію нульового порядку $p_t^0(x,y)$ окремо у кожному з випадків 1 -- 4, та покажемо, що за таким вибором $p_t^0(x,y)$ ряд, з якого складається Ψ, збігається абсолютно при $t > 0$, $x, y \in R^n$, а отже, вираз має сенс.

Теорема 13 *Нехай виконано одне з наступних припущень.*

- Оператор L має вигляд , мають місце умови **A2**, **A3**, та

$$[illegible]$$

де

$$[illegible]$$

• Оператор L має вигляд , та

[illegible]

• Оператор L має вигляд , мають місце умови **A1**, **A2'**, **A3'**, **A4**, та

[illegible]

• Оператор L має вигляд , мають місце умови **A1**, **A2''** -- **A3''**, та

[illegible]

Тоді функція $p_t(x,y)$, яку введено в , є коректно визначеною (а саме, існують інтеграли $\Phi^{\#k}$, $p^0\#\Phi^{\#k}$ та ряд $\sum_{k\ 0}\Phi^{\#k}$ збігається абсолютно), та неперервною на $(0,\infty)\times R^n\times R^n$.

Далі проводиться процедура обгрунтування, яка доводить, що побудована функція дійсно є щільністю перехідної імовірності процесу, що відповідає замиканню $(A,D(A))$ оператора $(L,C^2_\infty(R^n))$ в $C_\infty(R^n)$, а саме, $(A,D(A))$ є генератором напівгрупи $(T_t)_{t\ 0}$, де

[illegible]

Метод параметриксу, що розглядається в даній роботі, також дає можливість побудувати верхню та нижню оцінки на щільність перехідної імовірності $p_t(x,y)$.

Теорема 14 *За умов теореми , у випадку 1 для щільності перехідної імовірності* $p_t(x,y)$ *виконано наступні співвідношення:*

[illegible]

де

[illegible]

Завдяки ефекту несиметричності міри Леві у випадку 2 оцінки на функцію $p_t(x,y)$, які вдалося знайти, мають трохи інший вигляд.

Теорема 15 *За умов теореми , у випадку 2 для щільності перехідної імовірності* $p_t(x,y)$ *має місце наступна нерівність:*

[illegible]

У випадках 3 та 4 має місце наступний результат.

Теорема 16 *Існують сталі* $d_i > 0$, $1 \le i \le 4$, *та сімейство субімовірнісних мір* $\{Q_t, t\ 0\}$ *таке, що для всіх* $t \in (0,T]$, $x, y \in R^n$

[illegible]

де f_{up}, f_{low} -- функції типу зі сталими d_i відповідно, ρ_t визначено в , а $\{Q_t, t \quad 0\}$ є сімейством субімовірнісних мір.

Схожі верхні оцінки побудовано і для похідних $\partial_t p_t(x,y)$.

П'ятий розділ присвячено дослідженню умов, за яких вдається побудувати функціонали від процесу типу Леві, який побудовано в 4-му розділі, та побудові напівгрупи Фейнмана -- Каца.

У наступній теоремі знайдено необхідні та (окремо) достатні умови того, що скінченна борельова міра належить класу Като відносно щільності $p_t^{(\gamma)}(x,y)$ процесу, який отримано за допомоги заміни часу $t Î T_t^{(\gamma)}$, де $T_t^{(\gamma)}$ є γ-стійким субординатором (зростаючим процесом Леві в R_+).

Теорема 17 *Нехай* ϖ, $supp\,\varpi = L$, *є скінченою борельовою мірою на* R^n.

1. Якщо

$$[illegible]$$

то $\varpi \in S_K$ відносно щільності $p_t^{(\gamma)}(x,y)$.

2. Припустимо, що $\varpi \in S_K$ відносно $p_t^{(\gamma)}(x,y)$, $\gamma \in (0,1]$. Тоді

$$[illegible]$$

Для знакозмінної міри ϖ визначимо [illegible], де $|\varpi| := \varpi^+ + \varpi^-$ -- повна варіація ϖ. Позначимо Lh перетворення Лапласа функції h. Нехай $t_0 \in (0,1]$ є досить малим.

Теорема 18 *Нехай знакозмінна міра* ϖ *є такою, що функція* h *задовольняє умову* [illegible], $t \in [0,1]$, *де* $C, \zeta > 0$ *є деякими сталими. Тоді*

- існує неперервний функціонал A_t, такий, що

  [illegible];

- напівгрупа $(T_t^A)_{t \quad 0}$, [illegible] є коректно визначеною, а її ядро має щільність $p_t^A(x,y)$ відносно міри Лебега на R^n;

- існують сталі $a_i > 0$, $1 \le i \le 4$, та сімейство субімовірнісних мір $\{R_t, t \quad 0\}$, таких, що

  $$[illegible]$$

де $t \in (0, t_0]$, $x, y \in R^n$, f_{low} та f_{up} -- функції вигляду зі сталими a_i, $1 \le i \le 4$, відповідно.

Шостий розділ присвячено властивостям траєкторій процесів типу Леві.

У підрозділі 6.1 розглянуто одновимірний феллерівський процес $(X_t)_{t\ 0}$, із символом $p(x,\xi)$, який не містить квадратичної компоненти. У цьому підрозділі ми припускаємо, що виконано наступні умови:

C_c^(R) [illegible] p(x,) [illegible]^2 0 [illegible] c_0 (0,) x, R : [illegible]

Аналогічно тому, як було визначено функцію ψ^U (див.), визначимо

[illegible]

Припустимо, що виконано наступні умови:

[illegible]

[illegible]

$P^x(X_t<y)$ [illegible] q

Наприклад, має місце (навіть зі знаком =) при $q=1/2$, якщо функція [illegible] є дійснозначною. У випадку процесу Леві, який не є складним пуассонівським, умову виконано, якщо [illegible]. В теоремі 6.1.2 ми розглянемо конкретний випадок, коли ρ можна знайти явно. Покладемо

[illegible]

та позначимо [illegible] узагальнене обернене відображення $R \mapsto u(x,R)$.

Основним результатом підрозділу 6.1 є наступна теорема.

Теорема 19 *Нехай $(X_t)_{t\ 0}$ є феллерівським процесом в R, символ якого $p(x,\xi)$ задовольняє умовам --. Тоді існує стала $C(x)>0$ така, що*

[illegible]

У підрозділі 6.2 знайдено нижню оцінку на розмірність Хаусдорфа образу феллерівського процесу, за умови існування імовірнісної щільності та рівномірної оцінки зверху на цю щільність.

Теорема 20 *Нехай $(X_t)_{t\geq 0}$ є феллерівським процесом в R^n, перехідна щільність $p_t(x,y)$ якого задовольняє наступній нерівності:*

[illegible]

де $\alpha \in (0,2]$. Тоді, для довільної аналітичної множини $E \subset [0,1]$, маємо

$$[illegible]$$

У підрозділі 6.3 досліджуються розмірності Хаусдорфа множин рівня та множин зіткнень феллерівського процесу, який побудовано в розділі 4, випадки 3 та 4. Нагадаємо, що множина D називається d-множиною, якщо існує міра ϖ, $supp\,\varpi=\bar{D}$ така, що $\varpi(B(x,r))\asymp r^d$ для всіх $x\in D$, $r\in(0,1]$. В роботі наведено приклади таких множин.

Теорема 21 *Нехай* $D=\bar{D}\subset R^n$ *замкнена* d*-множина,* $d>n-\alpha$*. Припустимо, що* $x\in D$.

$$[illegible]$$

Величини $\gamma_{\inf}$ та $\gamma_{\sup}$ визначено явно.

Теорема 22 *Нехай* $n=1$*. Припустимо додатково, що* X *-- зворотний, а функція* $\psi^*(r)$ *(див.) задовольняє оцінкам*

$$[illegible]$$

r 1’ де $1<\alpha\le\beta<2$. Тоді міра Хаусдорфа множини зіткнень $A(\omega)$ процесу X має наступні верхні та нижні оцінки:

$$[illegible]$$

x R ˙

Сьомий розділ присвячено просторам узагальненої гладкості, які природно виникають при дослідженні субмарковських напівгруп в L_p, $1<p<\infty$.

У підрозділі 7.1 введено необхідні позначення та твердження, та встановлено зв'язок між просторами узагальненої гладкості та псевдодиференціальними операторами.

У підрозділі 7.2 доведено неперервність псевдо-диференціального оператору певного типу між підпросторами типу Трібеля -- Лізоркіна на півпросторі R^n_+.

У підрозділі 7.3 знайдено еквівалентне зображення для простору Трібеля -- Лізоркіна узагальненої гладкості.

У підрозділі 7.4 доведено узагальнення теореми Макенхоупа -- Уідена, яке дозволяє записати еквівалентну норму L_p для узагальнених бесселевих потенціалів. Наведемо останній результат. Визначимо потенціал міри μ та її максимальну функцію:

$$[illegible]$$

де ω_n -- об'єм одиничної кулі в R^n, а f -- функція Бернштейна.

Теорема 23 *Нехай* $1<p<\infty$*,* n 2*, та функція Бернштейна* f *задовольняє наступним умовам:*

- існує $\beta>0$ таке, що для всіх λ 1, $x>0$ виконано $c_1\lambda^\beta \le \frac{f(\lambda x)}{f(x)}$;

• існує $0<\sigma<\frac{n}{2p}$ таке, що для всіх $\lambda\square 1$, $x>0$ має місце $c_2\lambda^{\square}\square\frac{f(\lambda x)}{f(x)}$.

Тоді існує стала $c>0$ така, що для довільної додатної міри μ мають місце нерівності:

[illegible]

Висновки

У дисертаційній роботі отримано наступні результати.

• Для певного класу процесів Леві показано, що умова Хартмана -- Вінтнера є необхідною та достатньою для існування гладкої щільності перехідної імовірності. Доведено також узагальнення умови Хартмана -- Вінтнера. Побудовано верхню оцінку на щільність перехідної імовірності процесу Леві за умови існування експонційних моментів міри Леві на нескінченності. Побудовано оцінки ``типу згортки" на щільності перехідної імовірності процесу Леві у малому часі. Встановлено достатні умови, за яких характеристична функція нескінченно-подільного розподілу є (з точністю до нормуючого множника) щільністю іншого нескінченно-подільного розподілу. Побудовано оцінку на швидкість збіжності у локальній граничній теоремі до щільності нескінченно-подільного розподілу.

• За допомогою модифікації методу сідлової точки досліджено асимптотичну поведінку на нескінченності щільності розподілу процесу, що задається функціоналом від процесу Леві. Досліджено часткові випадки цього результату, а саме, коли процес є процесом Орнштейна -- Уленбека з шумом Леві, та дробовим рухом Леві із параметром Хурста $1/2<H<1$. Зокрема, а) для дробового руху Леві знайдено необхідні та достатні умови існування щільності розподілу; б) при фіксованому параметрі часу, знайдено асимптотичну поведінку на нескінченності щільності розподілу дробового руху Леві.

• Запропоновано версію методу параметриксу для побудови функції $p_t(x,y)$, що виявляється фундаментальним розв'язком задачі Коші для оператора $\partial_t - A$, де A -- замикання оператора $(L, C_\infty^2(R^n))$ в $C_\infty(R^n)$. Також, а) доведено неперервність функції $p_t(x,y)$ за [illegible]; b) доведено властивості неперервність оператору T_t (ядром якого є $p_t(x,y)$) в $C_\infty(R^n)$, та сильну неперервність T_t в 0 в просторі $C_\infty(R^n)$; c) побудовано верхню та нижні оцінки на функцію $p_t(x,y)$; d) доведено, що функція $p_t(x,y)$ є диференційовною за t, неперервність функції $\partial_t p_t(x,y)$, та побудовано оцінки на її похідні.

• Доведено необхідну та достатню умови того, що (знакозмінна) міра належить класу Като відносно щільності перехідної імовірності $p_{T_t^{(\gamma)}}(x,y)$ процесу $X_{T_t^{(\gamma)}}$, де $T^{(\gamma)}$ є γ-стійким субординатором. У випадку, коли $p_t(x,y)$ допускає компактну оцінку зверху степеневого типу, встановлено необхідну і достатню умову того, що (знакозмінна) міра належить класу Като відносно $p_t(x,y)$. Для неперервного адитивного функціоналу A_t, що відповідає мірі, яка належить класу Като відносно $p_t(x,y)$, доведено, що напівгрупа Фейнмана -- Каца T_t^A є коректно визначеною, її ядро є абсолютно неперервним відносно міри Лебега. Побудовано верхні та нижні оцінки на щільність $p_t^A(x,y)$.

• Доведено закон повторного логарифму Чанга для процесу типу Леві. Доведено нижню оцінку на розмірність Хаусдорфа образу траєкторії процесу типу Леві, за припущення існування щільності перехідної імовірності процесу, та оцінки знизу на щільність. Для процесу, що побудовано в розділі 4, знайдено розмірності Хаусдорфа множини рівня та множини зіткнень. Доведено достатні умови регулярності та полярності точок (множин).

• Доведено неперервність псевдодиференціального оператора певного типу між просторами ψ -беселевих потенціалів на R^n_+; Доведені достатні умови, при яких задачі Діріхле та Неймана для оператора $\psi(D)$, що задано на півпросторі R^n_+, та символ якого має зображення Леві -- Хінчіна, мають єдиний розв'язок. Встановлено еквівалентне зображення норми простору Трібеля -- Лізоркіна узагальненої гладкості. Доведено узагальнення теореми Макенхоупа -- Уідена.

References

1. Knopova V. Spaces of generalized smoothness on h-sets and related Dirichlet forms / V. Knopova, M. Zähle // Studia Math. -- 2006. -- Vol. 174. -- P. 277--308.

2. Knopova V. Continuity of certain pseudo-differential operators in the spaces of generalized smoothness / V. Knopova // Ukr. Mat. Zh. -- 2006. -- Vol. 58, N. 5. -- P. 638--652.

3. Knopova V. On a boundary value problem for a pseudo-differential operator and its relation to jump processes / V. Knopova // Z. Anal. Anwend. -- 2007. -- Vol. 26, N. 1. -- P. 1--24.

4. Knopova V. A note on the transition density estimate for some diffusion process on a d-set / V. Knopova //Acta Appl. Math. -- 2007. -- Vol. 96, N. 1. -- P. 293--307.

5. Knopova V. Muckenhoupt-Wheeden theorem for generalized f-Riesz type potentials / V. Knopova // Ukr. Math. J. -- 2008. -- Vol. 60, N. 11. -- P. 1520--1528.

6. Knopova V. Asymptotic behaviour of the distribution density of some Lévy functionals in R^n / V. Knopova // Theory Stoch. Proc. -- 2011. -- Vol. 17. -- P. 35--54.

7. Knopova V. Exact asymptotic for distribution densities of Lévy functionals / V. Knopova, A. Kulik // Electronic J. Prob. -- 2011. -- Vol.16. -- P. 1394--1433.

8. Knopova V. On the speed of convergence in the local limit theorem for triangular arrays of random variables / V. Knopova // Theory of Stoch. Proc. -- 2012. -- Vol. 18, N. 34. -- P. 24--32.

9. Jacob N. A geometric interpretation of the transition density of a Lévy process / N. Jacob, V. Knopova, S. Landwehr, R. L. Schilling // Science China: Mathematics. -- 2012. -- Vol. 55, N. 6. -- P. 1099--1126.

10. Knopova V. Transition density estimates for a class of Lévy and Lévy-type processes / V. Knopova, R.L. Schilling // J. Theor. Probab. -- 2012. -- Vol. 25. -- P. 144--170.

11. Knopova V. Intrinsic small time estimates for distribution densities of Lévy processes. / V. Knopova, A. Kulik // Random Op. Stoch. Eq. -- 2013. -- Vol. 21, N. 4. -- P. 321--344.

12. Knopova V. A note on the existence of transition probability densities for Lévy processes / V. Knopova, R.L. Schilling // Forum Math. -- 2013. -- Vol. 25. -- P. 125—149.

13. Knopova V. Asymptotic behaviour of the distribution density of the fractional Lévy motion / V. Knopova, A. Kulik // Modern Stoch. Appl. -- Springer Optimization and Its Applications -- 2014. -- Vol. 90. --P. 175—201.

14. Knopova V. Compound kernel estimates for the transition probability density of a Lévy process in R^n / V. Knopova // Theory of Probab. and Math. Stat. -- 2014. -- Vol. 89. -- P. 57—70.

15. Knopova V. On the small-time behaviour of Lévy-type processes / V. Knopova, R. L.

Schilling // Stoch. Proc. Appl. -- 2014. -- Vol. 124. -- P. 2249--2265.

16. Knopova V. Parametrix construction for certain Lévy-type processes and applications / V. Knopova, A. Kulik // Rand. Oper. Stoch. Eq. -- 2015. -- Vol. 23, N. 2. -- P. 116--136.

17. Knopova V. On level and collision sets of some Feller processes / V. Knopova, R. L. Schilling // Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. -- 2015. -- Vol. 12. -- P. 1001--1029.

18. Knopova V. Lower bounds of the Hausdorff dimension for the images of Feller processes / V. Knopova, R. Schilling, J. Wang // Stat. Probab. Letters. -- 2015. -- Vol. 97. -- P. 222--228.

19. Knopova V. On the Feynman-Kac semigroup for some Markov process / V. Knopova // Modern Stoch.: Theory and Appl. -- 2015. -- Vol. 2, N. 2. -- P. 107--129.

20. Ganychenko Iu. Accuracy of discrete approximation for integral functionals of Markov processes / Iu. Ganychenko, V. Knopova, A. Kulik // Modern Stoch: Theory and Appl. -- 2015. -- Vol. 2, N. 4. -- P. 401--420.

21. Knopova V. Upper bound for the transition density of some Lévy process / V. Knopova // International conference <<8th German Open Conference on Probability and Statistics>>. -- Aachen, Germany. -- 2008. -- P. 103.

22. Knopova V. Some Lévy and Lévy-type processes with analytic characteristic function / V. Knopova // International Conference <<Stochastic Processes and Applications>>. --- Berlin, Germany. --- 2009. --- P. 166.

23. Knopova V. On some Lévy and Lévy type processes with analytic characteristic function / V. Knopova // International conference <<Stochastic Analysis and Random Dynamics>>, Lviv, Ukraine. -- 2009. -- P. 113.

24. Knopova V. Some conditions on the existence of the transition probability density for Lévy processes / V. Knopova // International conference <<Modern Stochastics: Theory and Applications II>>. -- Kiev, Ukraine. -- 2010. -- P. 48.

25. Knopova V. Transition density estimates for Lévy processes and some Lévy functionals / V. Knopova // International Conference <<Lévy Pro-cesses: Theory and Applications>>. Dresden, Germany. -- 2010. -- P. 24.

26. Knopova V. Asymptotic property of the transition desnity of Lévy functionals / V. Knopova // International conference <<8th International ISAAC Congress>>. -- Moscow, Russia. -- 2011. -- P. 351.

27. Кнопова В. Метод параметрикса для побудови імовірнісної щільності процесу типу Леві / В. Кнопова // Всеукраїнська конференція <<Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу>>. -- Ворохта, Україна. -- 2011. -- С. 9.

28. Кнопова В. Поведінка імовірнісної щільності деяких процесів Леві при малих значеннях часу / В. Кнопова // Всеукраїнська конференція <<Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу>>. -- Ворохта, Україна. -- 2012. -- С. 17.

29. Knopova V. Parametrix construction for the transition probability of some Lévy-type processes / V. Knopova // International conference <<Nonlocal Operators: Analysis, Probability, Geometry and Applications>>. -- Bielefeld, Germany. -- 2012. -- P. 36.

30. Knopova V. Parametrix construction of the transition probability of some Lévy-type processes / V. Knopova // International conference <<Modern Stochastics: Theory and Applications III>>. -- Kiev, Ukraine. -- 2012. -- P. 52.

31. Кнопова В. Метод параметрикса для дослідження деяких марковських процесів / В. Кнопова // Всеукраїнська конференція <<Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу>>. -- Ворохта, Україна. -- 2013. -- С. 13.

32. Knopova V. On the parametrix solution to the Cauchy problem for some non-local operators / V. Knopova // International conference <<Semigroups of Operators: Theory and

Applications>>. -- Bedlewo, Poland. -- 2013. -- P. 56.

33. Knopova V. Compound kernel estimates for some Markov processes / V. Knopova // International conference <<Mathematics in Armenia: Advances and Perspectives>>. -- Tsaghkadzor, Armenia. -- 2013. -- P. 97.

34. Knopova V. On the construction of a Markov process related to certain pseudo-differential operator / V. Knopova // International conference <<7-th International Conference of Stochastic Analysis and its applications>>. -- Seoul, South Korea. -- 2014. -- P. 28.

35. Knopova V. On the construction of a Markov process associated with some pseudo-differential operator / V. Knopova // International conference <<International Congress of Mathematicians>>. -- Seoul, South Korea. -- 2014. -- P. 421.

36. Кнопова В. Побудова та властивості деякого класу процесів Маркова / В. Кнопова // Всеукраїнська конференція <<Сучасні проблеми теорії ймовірностей та математичного аналізу>>. -- Ворохта, Україна. -- 2015. -- С. 29.

37. Knopova V. Hausdorff dimention of the level sets of some Lévy-type processes / V. Knopova // International conference // Міжнародна конференція <<Probability and Analysis>>. -- Bedlewo, Poland. -- 2015. -- P. 74.

38. Knopova V. On paths properties of some Lévy-type processes / V. Kno-pova // International conference <<Probability, reliability and optimization>>. -- Київ, Ukraine. -- 2015. -- P. 74.

39. Knopova V. On paths properties of some Lévy-type processes / V. Knopova // International conference <<Stochastic Processes in Abstract Spaces, dedicated to the 80th anniversary of Professor A.Ya. Dorogovtsev>>, Kiev, Ukraine. -- 2015. -- P. 25.

Анотація

Кнопова В.П. Локальні властивості розподілу та траєкторій процесів типу Леві. --- Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.05 --- теорія ймовірностей та математична статистика. --- Київський національний університет імені Тараса Шевченка Міністерства освіти і науки України, Київ, 2016.

Дисертаційну роботу присвячено локальним властивостям процесів Леві, функціоналів від процесів Леві, та процесів типу Леві. Першим напрямком досліджень є дослідження умов існування щільності розподілу процесів Леві, функціоналів від процесу Леві, дослідження її структури, асимптотичної поведінки та побудові її верхніх та нижніх оцінок. Другий напрямок дослідження полягає у побудові процесу типу Леві, локальні характеристики якого подібні до характеристик відповідного процесу Леві. Третій напрям дослідження присвячено застосуванню оцінок щільності перехідної імовірності процесу типу Леві, які було отримано на попередньому етапі. Встановлено, за яких умов міра належить класу Като відносно знайденої щільності перехідної імовірності процесу типу Леві. Побудовано напівгрупу Фейнмана -- Каца, та отримано оцінки на щільність ядра цієї напівгрупи відносно міри Лебега. Четвертим напрямком є дослідження властивостей траєкторій процесу типу Леві. Доведено закон повторного логарифму Чанга, та встановлено оцінки на розмірність Хаусдорфа множин рівня та зіткнень процесу типу Леві.

Ключові слова: процес типу Леві, щільність перехідної імовірності, функціонал від процесу Леві, метод параметриксу, клас Като, напівгрупа Фейнмана -- Каца, траекторії процесу типу Леві, розмірність Хаусдорфа випадкової множин, простори узагальненої гладкості.

Аннотация

Кнопова В.П. Локальные свойства распределения и траекторий процессов типа Леви. --- Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 --- теория вероятностей и математическая статистика. --- Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко Министерства образования и науки Украины, Киев, 2016.

Диссертационная работа посвящена локальным свойствам процессов Леви, функционалов от процесса Леви, а также процессов типа Леви. Первым направлением исследования является изучение условий существования плотности распределения процесса Леви, функционала от процесса Леви, изучение ее структурных свойств, асимптотического поведения, а также построение верхних и нижних оценок. Второе направление посвящено построению процесса типа Леви, локальные характеристики которого подобны характеристикам соответствующего процесса Леви. Приведены условия, при которых нелокальный оператор типа Леви допускает замыкание, которое является генератором феллеровской полугруппы, которая соответсвует процессу типа Леви, а переходная вероятностная мера процесса имеет плотность относительно меры Лебега. Третье направление исследования посвящено применению оценок плотности переходной вероятности процесса типа Леви, полученных на предыдущем этапе. Доказано, при каких условиях мера принадлежит классу Като относительно найденной плотности переходной вероятности процесса типа Леви. Построена полугруппа Фейнмана -- Каца, а также получены оценки на плотность ядра этой полугруппы относительно меры Лебега. Четвертое направление посвящено изучению свойств траекторий процесса типа Леви. Доказан закон повторного логарифма Чанга, а также найдены оценки на размерности Хаусдорфа множеств уровня и столкновений процесса типа Леви.

Ключевые слова: процесс типа Леви, плотность переходной вероятности, функционал от процесса Леви, метод параметрикса, класс Като, полугруппа Фейнмана--Каца, траектории процесса типа Леви, размерность Хаусдорфа случайного множества, пространства обобщенной гладкости.

Abstract

english *Knopova V.P.* Local properties of distribution and trajectories of a Lévy type process. --- Manuscript.

Doctor's thesis in Physics and Mathematics, speciality 01.01.05 --- probability theory and mathematical statistics. --- Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kyiv, 2016.

The thesis is devoted to the local properties of Lévy processes, functionals of Lévy processes, and Lévy type processes. The first direction of the research is devoted to the study of the conditions for the existence of the distribution density of a Lévy process and some of its functionals, to the investigation of its structure, its asymptotic behaviour as well as to the construction of upper and lower bounds. In particular, the scope of investigated functionals includes the fractional Lévy motion and the fractional Ornstein-Uhlenbeck process, which are of particular importance in many applied problems. Special attention is paid to the structure of the estimates on the transition probability density of a Lévy process in small time. This structure allows to treat the cases when the corresponding Lévy measure is singular; in this case the estimates reflect the intrinsic structure of the support of the Lévy measure, and have the compound kernel structure.

The second direction is devoted to the construction of a Lévy type process, the local characteristics of which are similar to those of the respective Lévy process. Under certain conditions it is shown that a non-local Lévy type operator admits a closure, which is the generator of a Feller semigroup, corresponding to a Lévy type process, and its transition probability measure of the process has a density with respect to the Lebesgue measure. In this part a modification of the parametrix method is developed. Upper and lower estimates on this transition probability density are constructed. On this step the estimates on the transition probability density of the Lévy process are of crucial importance, in particular, the estimates constructed in the Lévy-type case have the same structure as those in the Lévy case.

The third direction is devoted to the application of estimates on the transition probability density of a Lévy type process, obtained on the previous step. In particular, the conditions under which a measure belongs to the Kato class with respect to the transition probability density of the constructed Lévy type process are established, which allows to construct functionals of this process. In particular, we constructed a Feynman -- Kac semigroup, and obtained estimates on the density of its kernel with respect to a Lebesgue measure. This estimates also have the compound kernel structure, inherited from the structure of the original Lévy type process.

The forth direction concerns the investigation of the properties of trajectories of Lévy type processes. The Chung law of iterated logarithm for a Lévy type process is proved. The crucial difference from the Lévy case is the lack of the independence of increments. Instead, the fact that a Lévy type process is strong Markov is used. The other result contained in this part consists in establishing the estimates on the Hausdorff dimension of level and collision sets of a Lévy type process discussed above.

Key words: Lévy process, transition probability density, functional of a Lévy process, fractional Lévy process, estimates of a distribution density of a functional of a Lévy process, Lévy type process, parametrix method, Kato class, Feynman -- Kac semigroup, Hausdorff dimension of a random set, spaces of generalized smoothness.

Підписано до друку 08.09.2016. Формат 60×84/16. Папір офс.
Цифровий друк. Ум. друк. арк. 1,89. Ум. фарбо-відб. 2,09.
Обл.-вид. акр. 2,0. Зам. 57. Тираж 100 примірників.

Редакційно-видавничий відділ
Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України
03680, МПС, Київ-187, проспект Академіка Глушкова, 40