Журнал обчислювальної та прикладної математики
2022, № 2
Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.6
MSC 35R11, 65M06

STUDY OF ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF SYSTEMS OF SINGULARLY PERTURBED DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TURNING POINTS

V. V. Sobchuk, I. O. Zelenska
Mechanics and Mathematics Faculty, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: v.v.sobchuk@gmail.com, kopchuk@gmail.com

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ТОЧКАМИ ЗВОРОТУ

В. В. Собчук, І. О. Зеленська
Механіко-математичний факультет, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна, E-mail: v.v.sobchuk@gmail.com, kopchuk@gmail.com

Abstract. We study a system with a small parameter at the highest derivatives. Using model operator Airy–Langer for defined regular function. Received the conditions of construction an uniform asymptotic solution for a given system. Keywords: singularly perturbed equations, Airy functions, turning point.

Анотація. Вивчається система лінійних рівнянь з малим параметром при старшій похідній. За допомогою модельного оператора Ейрі–Лангера визначається регуляризуюча функція. Одержані умови побудови рівномірної асимптотики розв'язку для заданої системи. Ключові слова: сингулярно збуренні рівняння, функції Ейрі, точки звороту.

Вступ

Сингулярно збурені диференціальні рівняння з точкою звороту утворюють значущий клас задач, які є надзвичайно складними, і навіть сьогодні залишається ще багато невирішених питань в цій області. Інтерес до такого виду математичних феноменів в останні роки обумовлений їх значенням в моделюванні процесів в таких галузях як оптика, теорія керування, гідродинаміка, а також побудовою різноманітних моделей для фізіологічних процесів або захворювань. У таких видах задач збурення використовують для відображення швидкої зміни величини у дуже вузькій області. Точки звороту можуть міститися як на кінцях досліджуваної області, так і бути внутрішніми [3, 4]. Відомо, що такого виду рівняння не інтегруються у квадратурах. Тому їх розв'язки виражають через розв'язки найпростіших диференціальгих рівнянь другого порядку зі змінними коефіцієнтами —

"модельні рівняння". Одним з найбільш вдалих модельних рівнянь є рівняння виду [1]

$$TW = W'' \equiv W''(t) - tW(t) = 0.$$

1. Постановка задачі

Розглянемо систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь з точкою звороту (ССЗДР)

$$\varepsilon Y'(x,\varepsilon) - A(x,\varepsilon)Y(x,\varepsilon) = H(x), \qquad (1)$$

де

$$A(x,\varepsilon) = A_0(x) + \varepsilon A_1(x),$$

— відома матриця, причому

$$\mathbf{A_0}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $\varepsilon \to 0$, $x \in [-4,0]$, $Y(x,\varepsilon) \equiv Y_k(x,\varepsilon) = col(y_1(x,\varepsilon), y_2(x,\varepsilon), y_3(x,\varepsilon))$ — шукана вектор-функція, $H(x) = col(0,0,h(x))$ — задана вектор-функція.

Систему (1) будемо досліджувати за таких умов:

1. $\tilde{a}(x),\ b(x),\ h(x) \in C^\infty[-4;0]$,
2. $a(x) \equiv x\tilde{a}(x),\ \tilde{a}(x) = 3x,\ b(x) = 3x+20, h(x) = 6x+2.$

Вироджене рівняння, що відповідає даній системі має вигляд

$$x\tilde{a}(x)\omega'(x) + b(x)\omega(x) = h(x).$$

Характеристичне рівняння для системи (1):

$$|A(x,0) - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -b(x) & -a(x) & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - x\tilde{a}(x)\lambda = 0.$$

Корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{x\tilde{a}(x)}$.

2. Регуляризація системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь

За розробленою методикою для побудови РАР системи (1) замість $y(x,\varepsilon)$ будемо вивчати розширену функцію $\tilde{y}(x,t,\varepsilon)$, при чому розширення проводимо таким чином, щоб мала місце тотожність

$$\tilde{y}(x,t,\varepsilon)\big|_{t=\varepsilon^{-1}\varphi(x)} \equiv y(x,\varepsilon)\ ,$$

яка є необхідною умовою методу істотно-особливих функцій.

Для визначення розширеної функції одержимо розширене векторне рівняння

$$\tilde{L}\tilde{y}(x,t,\varepsilon) \equiv \varepsilon^{1-p}\varphi'\frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial t} + \varepsilon\frac{\partial \tilde{y}(x,t,\varepsilon)}{\partial x} - A(x,\varepsilon)\tilde{y}(x,t,\varepsilon) = h(x). \qquad (2)$$

Побудуємо рівномірну асимптотику розв'язку розширеного рівняння (2) у вигляді ряда

$$\tilde{Y}_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{2}D_k(x,t,\varepsilon)+f_k(x,\varepsilon)\nu(t)+\varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\nu'(t)+\omega_k(x,\varepsilon), \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{2}D_k(x,t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon^{s1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\\ \varepsilon^{s2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\\ \varepsilon^{s3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i(t)+\varepsilon^\gamma\begin{pmatrix}\varepsilon^{k1}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\\ \varepsilon^{k2}\beta_{k2}(x,\varepsilon)\\ \varepsilon^{k3}\beta_{k3}(x,\varepsilon)\end{pmatrix}U_i'(t),$$

де $\alpha_{ik}(x,\varepsilon)$, $\beta_{ik}(x,\varepsilon)$, $f_k(x,\varepsilon)$, $g_k(x,\varepsilon)$, $\omega_k(x,\varepsilon)$, $k=\overline{1,3}$ — шукані аналітичні функції, які залежать від параметра $\varepsilon>0$ та нечкінченно диференційовні на проміжку $x\in[-4;0]$.

Для того, щоб обчислити регуляризуючу змінну, необхідно визначити показник p і функцію $\varphi(x)$. Для цього подієமо розширеним оператором $\tilde{L}_\varepsilon$ на вектор функцію $D_k(x,t,\varepsilon)$. Підставимо результат в однорідне розширене рівняння. Будемо мати

$$\tilde{L}_\varepsilon(\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_{ik}(t)+\varepsilon^\gamma\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t))=\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)U_i'(t)-$$
$$-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)U_i(t)-A(x,\varepsilon)\alpha_{ik}(x,\varepsilon)U_i(t)-$$
$$-\varepsilon^\gamma A(x,\varepsilon)\beta_{ik}(x,\varepsilon)U_i'(t)+\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon)U_i(t)+\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon)U_i'(t)=0.$$

Зрівняємо коефіцієнти при $U_i(t)$ в отриманій системі $(i=1,2)$:

$$U_i'(t):\varepsilon^{1-p}\alpha_{ik}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\varepsilon^\gamma[A_0(x)+\varepsilon A_1]\beta_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon^{1+\gamma}\beta_{ik}'(x,\varepsilon), \tag{4}$$

$$U_i(t):-\varepsilon^{1+\gamma-2p}\beta_k(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-[A_0(x)+\varepsilon A_1]\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=-\varepsilon\alpha_{ik}'(x,\varepsilon). \tag{5}$$

Отримані алгебраїчні системи необхідно регуляризувати відносно малого параметра $\varepsilon>0$. Для цього показники степенів в кожному рівнянні мають бути однаковими. В такому разі ми зможемо виконати скорочення малого параметра за цими показниками степенів. З цією метою запишемо однорідні векторні рівняння з використанням тільки основної матриці $A_0(x)$.

$$\begin{cases}\varepsilon^{1-p+s_1}\alpha_{k1}(x,\varepsilon)\varphi'(x)=0,\\ \varepsilon^{1-p+s_2}\alpha_{k2}(x,\varepsilon)\varphi'(x)-\beta_{k3}(x,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon^{1-p+s_3}\alpha_{k3}(x,\varepsilon)\varphi'(x)+(4x-6)\beta_{k1}(x,\varepsilon)+4x\beta_{k2}(x,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+k_1}\beta_{k1}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)=0,\\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+k_2}\beta_{k2}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)+\alpha_{k3}(x,\varepsilon)=0,\\ \varepsilon^{1+\gamma-2p+k_3}\beta_{k3}(x,\varepsilon)\varphi(x)\varphi'(x)-(4x-6)\alpha_{k1}(x,\varepsilon)-4x\alpha_{k2}(x,\varepsilon)=0.\end{cases} \tag{6}$$

Після елементарних перетворень визначимо

$$p=\frac{2}{3},\qquad \gamma=\frac{1}{3},\qquad k_1=k_2=s_3=0,\qquad s_1=s_2=k_3=-\frac{1}{3}. \tag{7}$$

Векторні рівняння (4) і (5) запишемо у вигляді такої системи алгебраїчних рівнянь: $(i=1;2)$:

$$\begin{cases}\varphi'(x)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3[\beta_{i2}(x,\varepsilon)-\beta_{i1}'(x,\varepsilon)],\\ \varphi'(x)\alpha_{i2}(x,\varepsilon)-\beta_{i3}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i2}'(x,\varepsilon),\\ \varphi'(x)\alpha_{i3}(x,\varepsilon)+(4x-6)\beta_{i1}(x,\varepsilon)+4x\beta_{i2}(x,\varepsilon)=-\mu^3\beta_{i3}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i1}(x,\varepsilon)=\mu^3[\alpha_{i1}'(x,\varepsilon)-\alpha_{i2}(x,\varepsilon)],\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i2}(x,\varepsilon)+\alpha_{i3}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i2}'(x,\varepsilon),\\ \varphi(x)\varphi'(x)\beta_{i3}(x,\varepsilon)-(4x-6)\alpha_{i1}(x,\varepsilon)-4x\alpha_{i2}(x,\varepsilon)=\mu^3\alpha_{i3}'(x,\varepsilon).\end{cases} \tag{8}$$

Отже, система диференціальних рівнянь (7) є регулярно збуреною відносно малого параметра параметра μ.

3. Побудова формальних розв'язків однорідної системи

Розв'язки регулярно збуреної системи (7) побудуємо у вигляді ряду

$$\alpha_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\alpha_{ikr}(x),\qquad \beta_{ik}(x,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{+\infty}\mu^r\beta_{ikr}(x). \tag{9}$$

Підставимо ці ряди у векторні рівняння, тоді для визначення вектор-функцій $\alpha_{ikr}=colon(\alpha_{i1r}(x),\alpha_{i2r}(x),\alpha_{i3r}(x))$ та

$$\beta_{ikr}(x)=colon(\beta_{i1r}(x),\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x))$$

отримаємо такі рекурентні системи

$$\Phi(x)Z_{k0}(x)=0,\quad k=0,1,2,\quad \Phi(x)Z_{kr}(x)=FZ_{k(r-3)}(x),\quad r\geq 3, \tag{10}$$

за умови, що $Z_{kr}(x)=colon(\alpha_{i1r}(x),\alpha_{i2r}(x),\alpha_{i3r}(x),\beta_{i1r}(x),\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x))$, та

$$\Phi(x)=$$
$$=\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varphi'(x) & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & \varphi'(x) & 4x-6 & 4x & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) & 0\\ -(4x-6) & -4x & 0 & 0 & 0 & \varphi(x)\varphi'(x) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$FZ_{k(r-3)}(x)=colon\left(\ z_{i1(r-3)},z_{i2(r-3)},z_{i3(r-3)},z_{i4(r-3)},z_{i5(r-3)},z_{i6(r-3)}\ \right)$, де $z_{i1(r-3)}=(\beta_{i2(r-3)}(x)-\beta_{i1(r-3)}(x))$, $z_{i2(r-3)}=-\beta_{i2(r-3)}(x)$, $z_{i3(r-3)}=-\beta_{i3(r-3)}(x)$, $z_{i4(r-3)}=(\alpha_{i1(r-3)}(x)-\alpha_{i2(r-3)}(x))$, $z_{i5(r-3)}=\alpha_{i2(r-3)}(x)$, $z_{i6(r-3)}=\alpha_{i3(r-3)}(x)$.

Обчислимо визначник цієї системи. Будемо мати:

$$\det\Phi(x)=(16x^2-8x\varphi(x)\varphi'^2(x)+\varphi^2(x)\varphi'^4(x))\cdot\varphi(x)\varphi'^2(x).$$

Визначимо регуляризуючу функцію $\varphi(x)$ як розв'язок задачі, яку після спрощення запишемо у вигляді

$$\varphi^2(x)\varphi'^4(x)-8x\varphi(x)\varphi'^2(x)+16x^2=0,\qquad \varphi(0)=0,$$
$$\varphi'^2\varphi(x)=4x,\qquad \varphi(0)=0. \tag{12}$$

Тоді

$$\varphi(x)=\left(\frac{3}{2}\int_0^x\sqrt{-x\tilde{a}(x)}dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Оскільки $\det\Phi(x)\equiv 0$, то існує нетривіальний розв'язок системи

$$\Phi(x)Z_{kr}=0,$$

коли $r=\overline{0,2}$ вигляду

$$Z_{ikr}(x)=colon\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i3r}(x),-\frac{4x}{\sqrt[3]{4}}\beta_{i2r}(x),0,\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x)\right), \qquad (13)$$

де $\beta_{isr}(x), i=1;2, s=2;3$ — до певного часу довільні, достатньо гладкі функції при $x\in[-4;0]$.

Отже, два лінійно незалежні розв'язки для системи (3) можна побудувати у вигляді

$$D_k(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{ikr}(x)U_i(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(t)], \qquad i=1;2, \qquad (14)$$

де $\alpha_{ikr}(x)=col(\alpha_{i1r}(x),\alpha_{i2r}(x),\alpha_{i3r}(x))$, $\beta_{ikr}(x)=col(\beta_{i1r}(x),\beta_{i2r}(x),\beta_{i3r}(x))$ — відомі вектор-функції.

Тоді при поступовому розв'язанні (3) ми отримаємо два формальні розв'язки однорідного рівняння

$$D_k(x,\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x),\varepsilon)=$$
$$=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r[\alpha_{ikr}(x)U_i(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))+\varepsilon^{\frac{1}{3}}\beta_{ikr}(x,\varepsilon)U_i'(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}\varphi(x))]. \quad (15)$$

Третій формальний розв'язок однорідного векторного рівняння (1) ми побудуємо у вигляді рядів

$$\omega(x,\varepsilon)\equiv\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_r(x)\equiv$$
$$\equiv colon\left(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{1r}(x),\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{2r}(x),\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\omega_{3r}(x)\right). \quad (16)$$

4. Побудова формальних частинних розв'язків

Для побудови частинних розвязків задачі (1) необхідно вивчити дію розширенного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$ (2) на елемент ряду

$$f_k(x,\varepsilon)\psi(t)+\varepsilon^\gamma g_k(x,\varepsilon)\psi'(t)+\bar{\omega}_k(x,\varepsilon).$$

Результат запишемо у вигляді

$$\tilde{L}_\varepsilon(f_k(x,\varepsilon)\nu(t)+\mu g_k(x,\varepsilon)\nu'(t)+\omega_k(x,\varepsilon))=\mu f_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\nu(t)+$$
$$+g_k(x,\varepsilon)\varphi'(x)\varphi(x)\nu(t)-A(x,\varepsilon)f_k(x,\varepsilon)\nu(t)-$$
$$-\mu A(x,\varepsilon)g_k(x,\varepsilon)\nu'(t)+\mu^3f_k'(x)\nu(t)+\mu^4g_k'(x)\nu'(t)+$$
$$+\mu^2\varphi'(x)g_k(x)\pi^{-1}+\mu^3\omega'(x)-A(x,\varepsilon)\omega_k(x)=H(x).$$

Таким чином, частинний розвя'зок розширеного векторного рівняння визначається у вигляді рядів

$$\tilde{Y}_{\text{part.}}(x,t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\left[f_{kr}(x)\nu(t)+\varepsilon^{\frac{1}{3}}g_{kr}(x)\nu'(t)\right]+\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\bar{\omega}_{kr}(x).$$

Звуження розв'язку, коли $t = \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)$, у вигляді ряду

$$\tilde{Y}_{\text{part.}}(x,t,\varepsilon) =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \left[f_{kr}(x)\nu(\varepsilon^{\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x)) + \varepsilon^{\frac{1}{3}} g_{kr}(x) \frac{d\nu(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))}{d(\varepsilon^{-\frac{2}{3}} \cdot \varphi(x))} \right] + \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \bar{\omega}_{kr}(x), \quad (17)$$

і буде частинним формальним розв'язком для ССЗДР (1).

Висновок

Таким чином, в роботі отримано покроковий алгоритм побудови рівномірної асимптотики розв'язку системи сингулярно збурених диференціальних рівнянь з диференціальною точкою звороту.

1 крок. *Розширення сингулярно збуреної задачі.* В сингулярно збуреній системі з точкою звороту поряд із незалежною змінною x вводиться нова вектор-змінна $t = \varepsilon^{-p} \cdot \varphi(x)$. Тоді замість шуканої вектор-функції $Y(x,\varepsilon)$ вивчається нова „розширена вектор-функція" $\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)$. При чому розширення проводиться таким чином, щоб виконувалась умова як в методі регуляризації

$$\tilde{Y}(x,t,\varepsilon)|_{t=\varepsilon^{-p}\cdot\varphi(x)} \equiv Y(x,\varepsilon).$$

p і $\varphi(x)$ визначається для кожного конкретного випадку. Відбувається перехід від задачі з однiє змінно, до задачі з двома змінними t і x.

2 крок. *Простір безрезонансних розв'язків.* Для регуляризації вводиться конкретний простір функцій, цей простір називають *простором безрезонансних розв'язків* і для кожної кокретної задачі цей простір має свою специфіку.

$$\sum_{k=1}^{2} D_k(x,t,\varepsilon), f_k(x,\varepsilon)\psi(t), \varepsilon^{\gamma} g_k(x,\varepsilon)\psi'(t), \omega_k(x,\varepsilon)$$

3 крок. *Регуляризація сингулярно збуреної задачі.* Розширена задача вивчається у просторі безрезонансних розв'язків і зводиться до рівняння, у яке малий параметр $\varepsilon > 0$ входить регулярно.

4 крок. *Формалізм побудови розв'язку задачі.* Оскільки розширена задача є регулярно збуреною відносно малого параметра в ПБР, то розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду

$$\tilde{Y}(x,t,\mu) = \sum_{r=-2}^{\infty} \mu^r Y(x), \quad (18)$$

де $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$ — малий параметр.

Побудову асимптотичного ряду розпочинаємо з від'ємних степенів малого параметра з метою одержання рівномірної асимптотики розв'язку ССЗДР. Права частина системи буде мати розрив другого роду в точці звороту. Тому в загальному випадку вона не належатиме множині значень головного розширеного оператора $\tilde{L}_\varepsilon$. Підставивши ряд (18)) в систему (11)), для визначення коефіцієнтів цього ряду, отримаємо деяку систему рекурентних рівнянь з точковими початковими чи крайовими умовами.

5 крок. *Побудова формальних розв'язків однорідної розширеної системи.* Отримані в попередньому пункті рекурентні рівняння для визначення коефіцієнтів ряду (18) є рівняннями в частинних похідних з точковими крайовими умовами. Покажемо, що ця система рівнянь є асимптотично коректною у ПБР D_k. На цьому етапі розробляється теорія існування ітераційного рівняння виду

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ — матриця системи (11), $Z_{kr}(x)$ — вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_1(x, \varepsilon)$. І будуються перші члени асимптотичного розв'язку однорідної дослуджуваної задачі.

6 крок. *Побудова формальних розв'язків неоднорідної розширеної системи.* В цьому розділі будується розв'язок неоднорідної задачі за допомогою рекурентного рівняння

$$\Phi(x) \cdot Z_{kr}(x) = F \cdot Z_{kr}(x),$$

де $\Phi(x)$ — матриця системи (11), $Z_{kr}(x)$ — вектор-стовпець складений з аналітичних функцій $\theta_2(x, \varepsilon)$.

Література

1. Bobochko V. N., Perestuk N. A. Asymptotic integration of the Liouville equation with turning points. Kyiv: Naukova dumka. 2002. 310 p.
2. Zelenska I. O. Differential turning point for singularly perturbed systems. *Theoretical and applied aspects of Cybernetics.* 2014. Kyiv. P. 251–257.
3. Hussain A. F. Numerical solution of singulary perturbed multiple turning point problems. *School of Mathematical and Computing Sciences, College of Engineering, Science and Technology, Fiji National University* 2021. 73 p.
4. Melesse W. G., Tiruneh A. A., Derese G. A. Uniform hybrid difference scheme for singularly perturbed differential-difference turning point problems exhibiting boundary layers. *Hindawi Abstract and Applied Analysis.* 2020. P. 1–14.

Надійшла: 25.09.2022 / Прийнята: 29.09.2022