Київський національний університет імені Тараса Шевченка

факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
зі спеціальності 113 «Прикладна математика»
на тему:

L^p - збіжність мартингалу Біггінса з комплексним параметром

студента 4 курсу

Гудзенка Дмитра Станіславовича

Науковий керівник:

професор

Іксанов О.М.

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ДЕК, протокол № від 2021 р.

Завідувач кафедри дослідження операцій

проф. Іксанов О.М.

Київ - 2021

Зміст

Сторінка

Умовні позначення, символи та скорочення

$\mathbb{R}$ - дійсна пряма $(-\infty, \infty)$.

$\bar{\mathbb{R}}$ - доповнена дійсна пряма $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

δ_x - дельта-функція Дірака, вироджена в точці. $x \in \bar{\mathbb{R}}$

$Re(\gamma)$ позначає дійсну частину комплексного числа γ.

$Im(\gamma)$ позначає уявну частину комплексного числа γ.

$x \vee y = max(x, y) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq y \\ y, & \text{якщо } y > x \end{cases}$ - максимум двох величин.

$x \wedge y = min(x, y) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \leq y \\ y, & \text{якщо } y < x \end{cases}$ - мінімум двох величин.

ГВБ - гіллястий випадковий процес.

μ - інтенсивність породження нових індивідуумів ГВБ.

МГВБ - мартингал, пов'язаний з гіллястим випадковим процесом.

|u|, де u - індивідуум випадкового процесу - покоління, в якому індивідуум u виник.

const - константи, значення яких не має значення. Два таких записи можуть мати різні значення незалежно від того, як вони розміщені в тексті чи формулах.

$m(\gamma)$ - перетворення Лапласа.

В даній роботі, якщо не вказано іншого під збіжністю та границею маються на увазі збіжність м.н. та границя у просторі L^p.

Вступ

Мартингал з точки зору математики - такий випадковий процес, що найкращим передбаченням довільного його майбутнього стану буде стан нинішній, без залежності від минулого. Мартингали досліджуються в багатьох розділах математики як моделі реальних процесів. Перші роботи по цій темі з'явились в середині 20 сторіччя в сфері теорії ігор. Так, мартингалом намагалися узагальнити поняття "чесної"гри, де матсподівання виграшу кожної зі сторін буде рівною.

Перший мартингал являв собою стратегію для гри в азартні ігри "чесного"типу, яка полягала в подвоєнні ставки після кожного програшу - таким чином матсподівання виграшу після кожної гри складало нуль.

Неформально, мартингалом називається такий випадковий процес, що кращою апроксимацією довільного його майбутнього стану буде нинішній стан цього процесу незалежно від минулих станів процесу.

Мартингали використовувались для моделювання економічних процесів, наприклад, курсів валют або цін акцій і, хоча статистично це припущення не підтвердилось, мартингали полягають в основі багатьох класичних і неокласичних економічних моделей, таких, як модель Блека-Шоулза-Мертона, модель Башельє. Мартингальна модель дозволяє сформулювати основні положення теорій таких економічних об'єктів, як опціон або форвард. Загалом, мартингал добре описує концепцію ефективного ринку, що ідеально визначає ціну кожного активу в кожен момент часу.

Гіллясте випадкове блукання на дійсній прямій є моделлю еволюції популяції, відмінність особин якої можна вважати одновимірною змінною. Воно застосовується для моделювання таких класичних об'єктів статистичної фізики, як, наприклад, напрямлені полімери на невпорядкованих деревах.

Для дослідження граничної поведінки гіллястого випадкового блукання застосовуються певні невід'ємні аддитивні мартингали, що називатимемо мартингалами, пов'язаними з гіллястим випадковим блуканням. Їх також називають мартингалами Біггінса (англ. Biggins' martingales), вшановуючи його вирішальний вклад в знаходження умов збіжності мартингалів, пов'язаних з гіллястими випадковими блуканнями, з дійсним параметром до невироджених границь.

У цій роботі досліджуються умови збіжності мартингалів, пов'язаних з гіллястими випадковими блуканнями, з комплексним параметром. Встановлено критерій L^p-збіжності цих мартингалів для $p \geq 2$, який дозволяє легко встановлювати збіжність чи розбіжність мартингала за його виглядом.

Попередні теоретичні відомості

Мартингал

Для початку наведемо означення мартингалу з дискретним часом.
Послідовність випадкових величин $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ називаємо мартингалом з дискретним часом, якщо:
1. $E|X_n| < \infty, n \in \mathbb{N}$
2. $E[X_{n+1}|X_1, ..., X_n] < \infty, n \in \mathbb{N}$

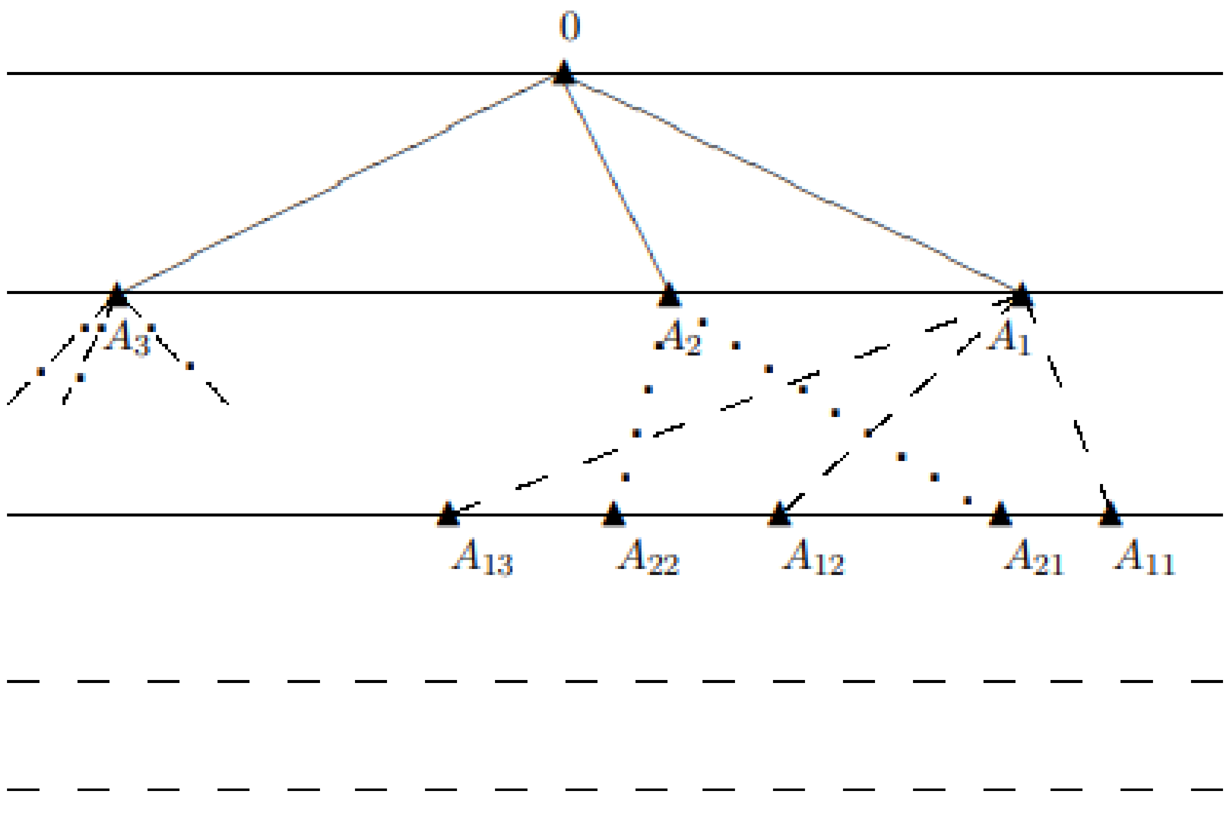
В загальному випадку мартингал не є марківським процесом і навпаки, марківський процес не обов'язково є мартингалом.

Гіллясте випадкове блукання

Розглянемо особину, що знаходиться на початку координат дійсної прямої в момент часу n=0. В момент n=1 вона створює випадкове число J нащадків першого покоління, які розміщуються у точках дійсної прямої відповідно до точкового випадкового процесу

$$\mathcal{M}(\omega) = \sum_{i=1}^{J(\omega)} \delta_{X_i(\omega)},$$

де $J = \mathcal{M}(\mathbb{R})$, $\{X_i\}_{i=1..J}$ — точки $\mathcal{M}$, δ_X — міра Дірака, зосереджена у точці X. В момент n=2 кожен індивідуум першого покоління створює нових нащадків, кількість яких визначається копіями J, та зсунуті відносно батьківської згідно на реалізації копій точкового процеса $\mathcal{M}$. Аналогічно продовжується розвиток популяції у наступних поколіннях.



Формально гіллясте випадкове блукання (ГВБ) визначають як послідовність точкових процесів $\{\mathcal{M}_n\}_{n=0,1,\ldots}$, де для борелівської множини $A \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{M}_0 = \delta_0(A), \mathcal{M}_{n+1}(A) = \sum_r \mathcal{M}_{n,r}(A - X_{n,r}), n = 0, 1, ...,$$

де $\{X_{n,r}\}$ — точки $\mathcal{M}_n$, $\{\mathcal{M}_{n,r}\}$ — незалежні копії $\mathcal{M}$.

Інтенсивність породження нових особин позначаємо μ

Дерево $\mathcal{T}$ з коренем $\emptyset$ - це підмножина U, що містить $\emptyset$ така, що з того, що з $i_{.}.i_n \in \mathcal{T}, k \leq n$ випливає $i_{.}.i_k \in \mathcal{T}$. Кожному елементу $i_{.}.i_n \in \mathcal{T}$ поставлено у відповідність $L_{i_1..i_n} \in [0, \infty]$ при цьому $i_1..i_n j \in \mathcal{T}$ еквівалентне $j \in \{1, ..., L_{i_1..i_n}\}$. Якщо кожному $u \in \mathcal{T}$ поставлено у відповідність мітку ν_u, дерево називається поміченим.

Таким чином, кожну реалізацію гіллястого випадкового процесу можно поставити у відповідність дереву з коренем у множині $\emptyset$. Елементи цього дерева відповідають індивідуумам реалізації гіллястого випадкового процесу, порожня множина - початковим (n=0) предком, мітка ν_u може бути розглянута як вектор, i-то координата якого рівна зсуву i-го нащадка індивідуума u відносно позиції предка. n відповідає поколінню предка і позначається |u|=n.

Важливу роль впродовж дослідження матиме перетворення

Лапласа інтенсивності μ:

$$m(\gamma) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma x}\mu(dx) = E\sum_{|u|=1} e^{-\gamma S(u)}, \gamma \in \mathbb{C}$$

Мартингал, пов'язаний з гіллястим випадковим блуканням

Гіллясте випадкове блукання породжує таку послідовність:

$$W_n(\gamma) = m^{-n}(\gamma)\int_{\mathbb{R}} e^{\gamma x}\mathcal{M}(dx) = m^{-n}(\gamma)\sum_{|u|=n} e^{\gamma A_u} = \sum_{|u|=n} Y_u,$$

де $Y_u = e^{\gamma A_u}/m^{|u|}(y)$. Послідовність $\{(W_n, F_n)\}_{n=0,1,\ldots}$ — невід'ємний мартингал, який називаємо мартингалом, пов'язаним з випадковим блуканням, скорочено МГВБ. В англійськомовній літературі він називається мартингалом Біггінса (Biggins' martingale).

Покажемо, що послідовність $\{(W_n, F_n)\}_{n=0,1,\ldots}$ є мартингалом:

Позначимо $L_i = W_i(\gamma)m^i(\gamma)$.

$$L_n = \sum_{u=n} e^{-\gamma S_n}$$

Також позначимо через $v\backslash u$ твердження "v є нащадком u".

Тоді

$$L_{n+1} = \sum_{|u|=m+1} e^{-\gamma S_n} = \sum_{|u|=n}\sum_{v\backslash u} e^{\gamma S_v} =$$

$$= \sum_{|u|=n} \sum_{v \backslash u} e^{-\gamma(A_v + S_u)} = \sum_{|u|=n} e^{-\gamma S_n} \sum_{v \backslash u} e^{-\gamma A_v}$$

Таким чином,

$$E(W_{n+1} - W_n | F_n) = E(m^{-n-1}(\gamma)(L_{n+1} - L_n m(\gamma))|F_n) =$$

$$= E(L_{n+1}|F_n) = E(\sum_{|u|=n} e^{-\gamma S_u} \sum_{v \backslash u} e^{-\gamma A_v} |F_n) =$$

$$= \sum_{|u|=n} e^{-\gamma S_n | E(\sum_{v \backslash u} e^{-\gamma A_v})} = E(L_n|F_n) m(\gamma)$$

Отже, МГВБ і справді являє собою мартингал.

Властивості мартингалів, пов'язаних з ГВБ

Розглядаються надкритичні ГВБ, тобто такі, що $EJ > 1$, оскільки в такому випадку ймовірність виживання популяції є додатньою. У докритичних ГВБ популяція майже напевне вимирає, відповідно, і пов'язаний з нею мартингал збіжний.

Теорема Буркхольдера

Теорема 1. *Нехай $p > 1$ та $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — дійснозначний мартингал, що стартує з нуля $X_0 = 0$. Тоді мартингал $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ — $L^p -$ і тоді і тільки тоді, коли*

$$E(\sum_{n\geq 0}|X_{n+1} - X_n|^2)^{p/2} < \infty.$$

Ця умова рівносильна

$$c_p E(\sum_{n\geq 0}|X_{n+1} - X_n|^2)^{p/2} \leq E|X|^p \leq C_p E(\sum_{n\geq 0}|X_{n+1} - X_n|^2)^{p/2}$$

для деяких додатних та скінченних постійних c_p та C_p, де X — границя $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Доведемо, що дана теорема виконується для комплекснозначних мартингалів. З нерівності Йенсена для $r, i \geq 0, p \geq 1$ маємо:

$$(\frac{r}{2}+\frac{i}{2})^p \leq \frac{r^p}{2}+\frac{i^p}{2}$$

$$(r+i)^p \leq 2^{p-1}(r^p+i^p)$$

$$r^p+i^p \leq (r+i)^p \leq 2^{p-1}(r^p+i^p)$$

Аналогічно, для $r, i \geq 0, p \leq 1$

$$r^p+i^p \geq (r+i)^p \geq 2^{p-1}(r^p+i^p),$$

тобто

$$(2^{p-1} \wedge 1)(r^p+i^p) \leq (r+i)^p \leq (2^{p-1}) \vee (r^p+i^p),$$

з чого отримуємо

$$(2^{p-1} \wedge 1)(|Re(X)|^p+|Im(X)|^p) \leq |X|^p \leq (2^{p-1}) \vee (|Re(X)|^p+|Im(X)|^p).$$

Тоді,

$$E|X|^p \leq (2^{p/2-1} \vee 1)(E|Re(X)|^p + E|Im(X)|^p) \leq$$

$$\leq (2^{p/2-1} \vee 1)C_p^*(E[(\sum_{n\geq 0}(Re(X_{n+1}-X_n))^2)^{p/2}]+$$

$$+E[(\sum_{n\geq 0}(Im(X_{n+1}-X_n))^2)^{p/2}]) \leq$$

$$\leq \frac{(2^{p/2-1} \vee 1)}{(2^{p/2-1} \wedge 1)} C_p^* E(\sum_{n\geq 0} |X_{n+1} - X_n|^2)^{p/2}$$

З іншої сторони,

$$E|X|^p \geq (2^{p/2-1} \wedge 1)(E|Re(X)|^p + E|Im(X)|^p) \geq$$

$$\geq (2^{p/2-1} \wedge 1) C_p^* (E[(\sum_{n\geq 0}(Re(X_{n+1} - X_n))^2)^{p/2}] +$$

$$+ E[(\sum_{n\geq 0}(Im(X_{n+1} - X_n))^2)^{p/2}]) \geq$$

$$\geq \frac{(2^{p/2-1} \wedge 1)}{(2^{p/2-1} \vee 1)} C_p^* E(\sum_{n\geq 0} |X_{n+1} - X_n|^2)^{p/2}$$

Теорема доведена.

Нехай $(a_n)_{n\geq 0}$ - послідовність додатних чисел, що задовольняє $a := \sum_{n\geq 0} a_n < \infty$. Оскільки функція $x \mapsto x^{p/2}$ опукла вгору на $[0, \infty)$

$$R^{p/2} = a^{p/2}(\sum_{n\geq 0}(a_n/a)(1/a_n)|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^2)^{p/2} \geq$$

$$\geq a^{p/2} \sum_{n\geq 0}(a_n/a)(1/a_n)^{p/2}|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p) =$$

$$= a^{p/2} \sum_{n\geq 0} a_n^{1-p/2}|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p)$$

З теореми Буркхольдера отримуємо

$$C_p E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^2 |W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^2)^{p/2} \geq E|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p \geq$$

$$\geq c_p E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^2 |W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^2)^{p/2} \tag{1}$$

цей вигляд теореми Буркхольдера найбільш зручний для подальшої роботи.

Лема про границю матсподівань МГВБ

Лема 2. *Нехай* $m(pRe(\gamma) \geq m(Re(\gamma))^p)$ *та* $E[W_1(Re(\gamma) < \infty)]$ *для деякого* p>*1 та* $Re(\gamma) \in \mathbb{R} \backslash \{0\})$. *Тоді для деякої невід'ємної константи* c

$$E[W_n(Re(\gamma))^p] = O(n^c (\frac{m(pRe(\gamma)}{m(Re(\gamma)^p))})^n), n \to \infty$$

Ця лема була сформульована і доведена у [5] як Лема 3.3.

Достатня умова збіжності МГВБ

Лема 3. *Нехай* $p \in (1, 2), \lambda \in \mathbb{R}$ *та* $0 < |m(\gamma)| < m(Re(\gamma)) < \infty$. *Тоді, для деяких* $r \in [p, 2]$ *умови*

$$E|W_1(\gamma)|^r < \infty, \tag{2}$$

$$\frac{m(rRe(\gamma)}{|m(\gamma)|^r} < 1$$

є достатніми для збіжності мартингалу $(W_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}_0}$

Доведення. Нехай маємо r, що задовольняє нерівності (2)

$$ER^{p/2} \leq C_p E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^2 |W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^2)^{p/2} \leq$$

$$\leq C_p E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^r |W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^r)^{p/r} \leq$$

$$\leq C_p [E|W_1(\gamma) - 1|^r]^{p/r} \sum_{n \geq 0} (\frac{m(rRe(\gamma)}{|m(\gamma)|^r)})^{np/r} < \infty$$

Що, відповідно до теореми Буркхольдера 1 доводить твердження. Перша нерівність була отримана у доведенні теореми (нерівність 1). Друга і третя нерівності отримані відповідно до субадитивності $x \mapsto x^{p/2}$ та нерівності Йенсена, відповідно.

Збіжність мартингалів, пов'язаних з ГВБ

Збіжність дійснозначних мартингалів, пов'язаних з гіллястим випадковим блуканням

Теорема 4. *Нехай p>1 та* $m(\gamma) < \infty$ *для деякого* $\gamma \in \mathbb{R}$. *Тоді мартингал* $(W_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *збіжний у* L^p *тоді та тільки тоді, коли*

$$E[W_1(\gamma)]^p < \infty],$$

$$\frac{m(p\gamma)}{m(\gamma)^p} < 1$$

Ця теорема добре відома та може бути знайдена в багатьох джерелах, наприклад, у [6]. Надалі розглядатимемо тільки мартингали, що не розглядаються даною теоремою, тобто такі, що $|m(\gamma)| \neq 0$

Покладання обмежень на мартингал, пов'язаний з гіллястим випадковим блуканням

Розглянемо мартингал $(W_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$, який задовольняє таким умовам:

$$E|W_1(\gamma)^p| < \infty, \tag{3}$$

$$\frac{m(2Re(\gamma))}{|m(\gamma)|^2} \vee \frac{m(2Re(\gamma))}{|m(\gamma)|^p} < 1 \tag{4}$$

$$p > 2, E[W_1(2Re(\gamma))]^{p/2} < \infty \tag{5}$$

Перевіримо даний мартингал на збіжність.

Достатність покладених умов

Згідно нерівності Буркхольдера, достатньо перевірити $ER^{p/2} < \infty$. Згідно нерівності трикутника у просторі $L^{p/2}$

$$ER^{p/2} \leq (\sum_{n\geq}[E|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p]^{2/p})^{p/2}$$

Покажемо, що права частина нерівності скінченна:

$$C_p^{-1}E|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p \leq$$

$$\leq E(\sum_{|u|=n}|Y_u(\gamma)|^2|W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^2)^{p/2} =$$

$$= E(\sum_{|v|=n}|Y_v(\gamma)|^2\sum_{|u|=n}\frac{|Y_u(\gamma)|^2}{\sum_{|u|=n}|Y_v(\gamma)|^2}|W_q^{(u)}(\gamma) - 1|^2)^{p/2} \leq$$

$$\leq E|W_1(\gamma) - 1|^p E(\sum_{|u|=n}|Y_u(\gamma)|^2)^{p/2} =$$

$$= E|W_1(\gamma) - 1|^p(\frac{m(2Re\gamma)}{|m(\gamma)|^2})^{np/2}$$

Перша нерівність випливає з нерівності 1, а друга - з опуклості $x \mapsto x^{p/2}$ на $[0, \infty)$.

Розглянемо цю нерівність у трьох випадках:

Випадок 1: p=2 . Права частина нерівності рівна $E|W_1(\gamma) - 1|^2 (\frac{m(2Re(\gamma))}{|m(\gamma)|^2})^n$. Таким чином, умови $E|W_1(\gamma)|^2 < \infty$ та $m(2\gamma) < |m(\gamma)|^2$ забезпечують $ER < \infty$.

Випадок 2: $p > 2, m(p\gamma) < m(2\gamma)^{p/2}$,. Маємо $sup_{n \geq 0} E[W_n(2Re(\gamma))]^{p/2}$ згідно теореми 4. Таким чином права частина нерівності має вигляд $\frac{O((m(2\gamma)}{|m(\gamma)|^2)^{np/2})}$. Оскільки $m(2\gamma) < |m(\gamma)|^2$,це доводить $ER^{p/2} < \infty$. Якщо $Re(\gamma)$ це доводить достатність розглянутих умов для збіжності мартингалу,оскільки умова $m(0) \geq m(2Re(\gamma))^{p/2}, \gamma \in \mathbb{R} \backslash 0$ неможлива при $m(0) \in \{1, \infty\}$.

Якщо $Re(\gamma) \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$, можемо застосувати лему 2. Отримуємо

$$E[W_n(2Re(\gamma))]^{p/2} = O(n^c (\frac{m(pRe(\gamma))}{m(2Re(\gamma))^{p/2}})^n), n \to \infty$$

для деякої скінченної константи c. Таким чином, права частина нерівності має вигляд $O(n^c (\frac{m(pRe(\gamma))}{m(2Re(\gamma))^{p/2}})^n)$, що, з урахуванням $m(pRe(\gamma)) < |m(\gamma)|^p$ доводить $ER^{p/2} < \infty$.

Отримуємо, що розглянутий набір умов є достатнім для збіжності мартингалу $(W_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Необхідність покладених умов

Припустимо, що $(W_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$ збігається у L^p та покладемо

$$R = \sum_n \geq 0|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^2$$

Тоді $E(W^{p/2} < \infty)$ згідно теореми Буркхольдера 1.

Оскільки $p \geq 2$ та за допомогою супераддитивності $x \mapsto x^{p/2}$ на $[0, \infty)$ отримуємо

$$\sum_{n\geq 0} E|W_{n+1}(\gamma) - W_n(\gamma)|^p \leq ER^{p/2} < \infty$$

Також, з нерівності 1 та з вказаної супераддитивності отримуємо:

$$A_n \geq E \sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^p |W_1^(u)(\gamma) - 1|^p = E|W_1(\gamma) - 1|^p (\frac{m(pRe(\gamma))}{|m(\gamma)|^p})^n$$

Звідси випливає необхідність 3 для $p \geq 2$ та $m(pRe(\gamma)) < |m(\gamma)|^p$

.

іншої сторони,

$$A_{\geq} E[E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^2 |W_1^{(u)}(\gamma) - 1|^2 F_n)^{p/2}] =$$
$$= (E|W_1(\gamma) - 1|^2)^{p/2} E(\sum_{|u|=n} |Y_u(\gamma)|^2)^{p/2} \geq$$
$$\geq (E|W_1(\gamma) - 1|^2 (\frac{m(2Re(\gamma)}{|m(\gamma)|^2})^n)^{p/2},$$

де обидві нерівності напряму випливають з нерівності Йенсена. Це доводить необхідність $m(2Re(\gamma) < |m(\gamma)|^2)$. Також, у n=1, бачимо, що

$$E(\sum_{|u|=1} |Y_u(\gamma)|^2)^{p/2} = \frac{1}{|m(\gamma)|^p} E(\sum_{|u|=1} e^{-2Re\gamma S(u)})^p/2 < \infty$$

що, разом з перевіреною раніше скінченністю $m(2Re(\gamma))$ доводить необхідність умови 5. Нарешті, якщо $Re(\gamma) = 0$, то з умов $m(0) > 1$ та $m(0) < m|(\gamma)|^2$ випливає, що $|m(\gamma)| > 1$. таким чином, $m(0) < |m(\gamma)|^p$ є наслідком $m(0) < |m(\gamma)|^2$.

Основний результат

Таким чином, можемо сформулювати основний результат - теорему, що дозволяє визначити L^p-збіжність мартингалу, пов'язаного з гіллястим випадковим блуканням за його виглядом для довільного $p \geq 2$. Пошук критерію збіжності для p=1 залишається відкритою задачею для майбутніх досліджень.

Теорема 5. *Нехай* $p \geq 2, Re(\gamma), Im(\gamma) \in (R)$ *та*

$0 < |m(\gamma)| < m(Re(\gamma))$. *Якщо* $Re(\gamma) \neq 0$, *то збіжність мартингалу* $(W_n(\gamma))_{n\in\mathbb{N}_0}$ *у* L^p *еквівалентна*

$$E|W_1(\gamma)^p| < \infty,$$

$$\frac{m(2Re(\gamma))}{|m(\gamma)|^2} \vee \frac{m(2Re(\gamma))}{|m(\gamma)|^p} < 1$$

та, якщо $p > 2$

$$E[W_1(2Re(\gamma))]^{p/2} < \infty$$

Якщо $Re(\gamma) = 0$, *остання умова має вигляд:*

$$\frac{m(0)}{|m(\gamma)|^2} < 1$$

Висновки

У даній роботі критерій L^p-збіжності мартингала, пов'язаного з гіллястим випадковим блуканням було поширено на мартингали з комплексним параметром за припущення $p > 2$. Основний теоретичний результат роботи - теорема 5 дозволяє перевіряти збіжність мартингалу $(W_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}_0}$, знаючи лише перетворення Лапласа інтенсивності гіллястого випадкового блукання.

Бібліографія

1. О. Іксанов. Випадкові ряди спеціального вигляду, гіллясте випадкове блукання та саморозкладність. Монографія. 2007.
2. R. Durett. Essentials of Stochastic Processes. 2012.
3. Y. Chow, H. Teicher. Probability Theory. Indepemdence, Interchangeability, Martingales. 1988.
4. P. Boutaud, P. Maillard. A revisited proof of the Seneta-Heyde norming for branching random walks under optimal assumptions. 2019.
5. G. Alsmeyer, A. Iksanov, S. Polotskiy and U. R¨osler, Exponential rate of Lp-convergence of intrinsic martingales in supercritical branching random walks. Theory Stoch. Proc. 15(31) (2009)
6. J. Biggins, Martingale convergence in the branching random walk. J. Appl. Probab. 1977