Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2019, № 2 (131) | Journal of Numerical & Applied Mathematics

УДК 519.834
MSC 91A12

ON COOPERATIVE GAME APPROACH TO PROFIT SHARING IN A FEW PROJECTS MANAGEMENT PROBLEM

N. Boyko[1], S. Dotsenko[2]

[1]Faculty of Information Technologies, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: boikon13@ukr.net
[2]Information systems Support Center, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: sergei204@ukr.net

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ НЕСКОЛЬКИМИ ПРОЕКТАМИ С ТРАНСФЕРАБЕЛЬНОЙ ПОЛЕЗНОСТЬЮ

Н. Бойко[1], С. Доценко[2]

[1]Факультет информационных технологи, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: boikon13@ukr.net
[2]Центр сопровождения и поддержки информационных технологий, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: sergei204@ukr.net

Abstract. The article is consider three different mechanisms of project's profit sharing, assuming that the projects have common resource pool and both resources and profit may be distributed at arbitrary way without losses. The resources and profit distribution mechanisms are based on cooperative game theory thesis. As three different alternatives, such cooperative game solutions, as Shapley value, nucleolus ant τ-value are proposed. The calculation routine is delivered by easy typical example.
Keywords: resources distribution, projects conflict, linear programming problem, cooperative game, characteristic function, core, Shapley value, nucleolus, τ-value.

Аннотация. Рассмотрено три различные механизма распределения прибыли между проектами, имеющими общий фонд ресурсов в предположении, что как исходные ресурсы, так и полученная прибыль может быть распределена произвольным образом между проектами без потерь. В основу механизмов распределения ресурсов и прибыли положен математический аппарат кооперативной теории игр. В качестве трех различных альтернатив распределения предлагается использование трех решений кооперативной игры, таких как вектор Шепли, n-ядро и τ-значение. Техника нахождения решений показана на простом примере.
Ключевые слова: распределение ресурсов, конфликт проектов, задача линейного программирования, кооперативная игра, характеристическая функция, C-ядро, вектор Шепли, n-ядро, τ-значение.

Введение

Параллельная реализация нескольких взаимосвязанных проектов неизбежно порождает разнообразные конфликтные ситуации между ними, например такие, как претензии на совместные ограниченные ресурсы, необходимые для их реализации. Одним из возможных способов сглаживания такого рода конфликтов является применение аппарата кооперативной теории игр, что позволяет построить эффективный механизм распределения или взаимообмена ресурсами между проектами, принять решение, будет ли каждый из проектов реализован полностью или частично и рассчитать долю прибыли каждого из проектов.

1. Постановка задачи

Пусть имеется n проектов, каждый из которых может быть реализован полностью или частично. Пусть a_i — прибыль от реализации i-го проекта в случае, если проект будет реализован полностью. Предположим, что если проект будет реализован частично, то тогда прибыль пропорциональна степени его реализации, т.е. если x_i — степень реализации i-го проекта (где $0 \leq x_i \leq 1$), то прибыль составит $a_i x_i$. Предположим, что в ходе реализации n проектов задействовано k ресурсов, так что для реализации i-го проекта в полной мере требуется одновременно израсходовать β_{ij} единиц j-го ресурса и пусть b_j — суммарное количество j-го ресурса, доступного для реализации всех проектов, где $j = 1, ..., k$.

Пусть $\vec{a} = (a_1, ..., a_n)$ — вектор коэффициентов прибыли от реализации, $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ — вектор степени реализации проектов, тогда суммарная величина прибыли равна

$$(\vec{a}, \vec{x}) = a_1 x_1 + ... + a_n x_n.$$

Предположим, что проекты были реализованы в разной степени, и это описывается вектором $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$. Тогда для произвольного j было потрачено j-го ресурса в общей сложности в количестве $\beta_{1j} x_1 + ... + \beta_{nj} x_n$. Эта величина не должна превышать b_j, т.е. количества, в котором j-й ресурс имеется в наличии. И так по всем видам ресурсов, от 1 до k.

Однако, часто может возникать дефицит ресурсов, следствием которого все проекты не могут быть реализованы одновременно и в полной мере, что приводит к возникновению конфликта проектов.

Задача состоит в том, чтобы для данной ситуации обеспечения ресурсами найти механизм, указывающий, как распределить ресурсы между проектами и как перераспределить прибыль, образующуюся в ходе их реализации (полной или частичной).

Если рассмотреть все проекты в совокупности, то для нахождения максимальной суммарной прибыли по всем проектам следует решить такую вспомогательную задачу линейного программирования (ЗЛП):

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + ... + a_n x_n \to \max$$

$$\beta_{11} x_1 + \beta_{12} x_2 + ... + \beta_{1n} x_n \leq b_1$$

$$\beta_{21} x_1 + \beta_{22} x_2 + ... + \beta_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\text{..}$$

$$\beta_{k1}x_1 + \beta_{k2}x_2 + ... + \beta_{kn}x_n \leq b_k \tag{1}$$

$$0 \leq x_1 \leq 1, \ ... \ , \ 0 \leq x_n \leq 1.$$

Однако, после нахождения оптимального решения данной ЗЛП возникает естественный вопрос — а как правильно разделить полученную прибыль между проектами? Ответ на этот вопрос можно получить, применив аппарат кооперативной теории игр. Рассмотрим вначале основные положения [1–4].

2. Основные сведения о кооперативных играх

Кооперативная игра задается парой $\langle N, V\rangle$, где N — конечное множество игроков, n — их количество, V — отображение $2^N \to \mathbb{R}$ из множества всех коалиций в множество действительных чисел, называемое характеристической функцией (х.ф.) (которая ставит в соответствие каждой коалиции совместный заработок ее членов), и при этом $V(\emptyset) = 0$ (что по сути означает, что пустая коалиция никогда ничего не зарабатывает). Множество всех кооперативных игр на множестве игроков N обозначается через G^N.

Кооперативная игра называется супераддитивной, если

$$\forall\, S,\, T \in 2^N,\ S \cap T = \emptyset: \quad V(S) + V(T) \leq V(S \cup T).$$

Кооперативная игра называется выпуклой, если

$$\forall\, S,\, T \in 2^N: \quad V(S) + V(T) \leq V(S \cup T) + V(S \cap T).$$

Решением кооперативной игры $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ называется отображение $f : G^N \to \mathbb{R}^n$, ставящее в соответствие каждой кооперативной игре n-мерный вектор, i-я компонента которого равна платежу i-му игроку в данной игре. Решение игры называется эффективным, если $X(N) = V(N)$, где $X(S) = \sum_{i \in S} x_i$. Эффективность решения означает, что заработок гранд-коалиции распределяется между ее членами без потерь.

C-ядром игры называется множество эффективных и стабильных решений $\vec{x}$, таких, что любая коалиция S, отделившись от гранд-коалиции, не сможет обеспечить суммарный заработок ее членов больший, чем $X(S)$:

$$C(V) := \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n |\ X(N) = V(N),\ X(S) \geq V(S),\ \forall\, S \in 2^N\right\}.$$

Рассмотрим некоторую перестановку игроков

$$\pi = (i_1, ..., i_n)\,.$$

Пусть $\pi(i)$ — номер позиции i-го игрока в данной перестановке π, а $\pi^i = \{j \in N |\, \pi(j) \leq \pi(i)\}$ — множество игроков, включающее i и всех, кто стоит перед ним в перестановке π. Назовем маргинальным вкладом игрока i в перестановку π величину $m_i^\pi = V\left(\pi^i\right) - V\left(\pi^i \backslash \{i\}\right)$. Очевидно, что для любой перестановки сумма маргинальных вкладов всех игроков равна $V(N)$.

Вектором Шепли (В.Ш.) называется решение кооперативной игры, представляющее собой вектор маргинальных вкладов игроков, усредненных по всем возможным $n!$ перестановкам. Компоненты В.Ш. также могут быть вычислены по формуле

$$Sh_i(V) = \sum_{S \subset N \setminus \{i\}} \frac{|S|!\,(n-|S|)!}{n!} \left(V\left(S \cup \{i\}\right) - V\left(S\right)\right). \qquad (2)$$

Если разделить слагаемые на те, что содержат/не содержат игрока i, то формулу (2) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Sh_i(V) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{|S|=k,\\ i \in S}} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} V(S) - \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{|S|=k,\\ i \notin S}} \frac{k!(n-1-k)!}{n!} V(S) \qquad (3) \end{aligned}$$

Безусловно, В.Ш. является наиболее распространенным решением кооперативной игры. Однако, наряду с ним, применяются и другие решения, например n-ядро и τ-значение.

Понятие n-ядра было впервые введено в [1]. Это точечное решение кооперативной игры, которое базируется на понятиях эксцесса и лексикографического порядка.

Определение 1. Эксцесс коалиции — это значение

$$e(x,S) = V(S) - \sum_{i \in S} x_i, \;\; \vec{x} \in D(V), \;\; S \in 2^N, \qquad (4)$$

где $D(V)$ множество решений игры $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, удовлетворяющих условиям эффективности и индивидуальной рациональности, т.е. $\sum\limits_{i \in N} x_i = V(N)$ и $x_i \geq V(i)$, $i = \overline{1,n}$, соответственно.

Замечание 1. Другими словами, эксцесс является мерой сожаления того, что суммарный заработок коалиции не такой большой, как хотелось бы. Если суммарный заработок членов коалиции S больше, чем $V(S)$, то эксцесс будет отрицательным.

Определение 2. Вектор $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ лексикографически меньше, чем $\vec{y} = (y_1, ..., y_n)$, если существует некоторое $k \in \{1, ..., n\}$, такое, что $x_k < y_k$ и $x_i = y_i$ для всех $i < k$.

Определение 3. n-ядро (nucleolus) кооперативной игры — это эффективное решение $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$, для которого достигается лексикографический минимум эксцессов на множестве всех непустых коалиций $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, выписанных в убывающем порядке.

Определение 4. Маргинальной выплатой игроку i называется величина $M_i = V(N) - V(N\backslash i)$, а минимальным правом игрока i —

$$m_i = \max_{i\in S}\left(V(S) - \sum_{j\in S\backslash i} M_j\right).$$

Вектора $\vec{M}$ и $\vec{m}$ с компонентами M_i и m_i называются векторами маргинальных выплат и минимальных прав соответственно.

Определение 5. τ-значение — это решение кооперативной игры, задаваемое вектором, являющимся пересечением отрезка $[\vec{m}, \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных решений $\sum\limits_{i\in N} x_i = V(N)$.

3. Решения кооперативной игры в задаче распределения ресурсов между проектами

Чтобы применить аппарат кооперативной теории игр к какой-либо задаче, нужно прежде всего определить характеристическую функцию кооперативной игры, соответствующую поставленной задаче. Здесь это можно сделать, например, таким образом.

Заметим, что членами коалиции являются проекты. Пусть некоторая коалиция проектов S отделилась от гранд-коалиции. Отделившись, она получает в свое распоряжение вектор ресурсов, равный

$$\vec{b}_S = \frac{|S|}{n}\left(b_1, ..., b_k\right), \tag{5}$$

т.е. коалиции выделяется доля каждого ресурса, пропорциональная численности коалиции (т.е. количеству проектов в коалиции). Положим, что выигрыш коалиции S равен значению оптимального решения задачи (1) с правыми частями в форме (5). Оказывается, что определенная таким образом х.ф. является супераддитивной. Действительно, рассмотрим две произвольные непересекающиеся коалиции S, T, $S \cap T = \emptyset$. Заметим, что объединение оптимальных решений (1), (5) для S и T по отдельности является лишь допустимым решением для (1), (5) для $S \cup T$, отсюда $V(S) + V(T) \le V(S \cup T)$.

Тогда в качестве распределения прибыли, полученной по всем проектам при оптимальном использовании совместных ресурсов можно взять одно из решений кооперативной игры (вектор Шепли, n-ядро либо τ-значение).

Сделаем замечание относительно вычисления х.ф. для одноэлементных коалиций. В этом случае $V(j)$ — это оптимальное решение задачи (1), (5), которая приобретает вид:

$$\begin{aligned}
&a_j x_j \to \max\\
&\beta_{1j} x_j \le b_1/n,\\
&\beta_{2j} x_j \le b_2/n,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
&\beta_{kj} x_j \le b_k/n,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$0 \le x_j \le 1.$$

Таким образом,

$$x_j^* = \min\left(b_1/(n\beta_{1j}), b_2/(n\beta_{2j}), ..., b_k/(n\beta_{kj}),\ 1\right),$$
$$V(j) = a_j \cdot \min\left(b_1/(n\beta_{1j}), b_2/(n\beta_{2j}), ..., b_k/(n\beta_{kj}),\ 1\right) =$$
$$= \frac{a_j}{n} \cdot \min\left(b_1/\beta_{1j}, b_2/\beta_{2j}, ..., b_k/\beta_{kj}, n\right). \quad (7)$$

Рассмотрим простой типовой пример для случая трех проектов и двух ресурсов. Пусть исходная ЗЛП имеет вид:

$$9x_1 + 6x_2 + 5x_3 \to \max$$
$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \le 9,$$
$$10x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 12,$$
$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1.$$

Решение ЗЛП небольшой размерности можно легко найти, используя модуль «поиск решения» в программе Excel. Решение данной ЗЛП имеет вид: $x^* = (2/3,\ 2/3,\ 1)$, $F_{\max} = 15$. Значит $V(1,2,3) = 15$.

ЗЛП для вычисления характеристической функции для двухэлементных коалиций получаем из исходной, по очереди вычеркивая столбцы переменных и множа столбец правых частей на 2/3:

$$\begin{array}{ccc} 9x_1 + 6x_2 \to \max & 9x_1 + 5x_3 \to \max & 6x_2 + 5x_3 \to \max \\ 2x_1 + 4x_2 \le 6, & 2x_1 + 5x_3 \le 6, & 4x_2 + 5x_3 \le 6, \\ 10x_1 + 5x_2 \le 8, & 10x_1 + 2x_3 \le 8, & 5x_2 + 2x_3 \le 8, \\ 0 \le x_1, x_2 \le 1, & 0 \le x_1, x_3 \le 1, & 0 \le x_2, x_3 \le 1 \\ x^* = (0.3,\ 1), & x^* = (0.609,\ 0.956), & x^* = (1,\ 0.4), \\ V(1,2) = F^* = 8.7, & V(1,3) = F^* = 10.26, & V(2,3) = F^* = 8. \end{array}$$

Значения характеристической функции от одноэлементных коалиций вычисляются по формуле (6):

$$V(1) = \frac{9}{3}\min\left(\frac{9}{2}, \frac{12}{10}, 3\right) = 3 \cdot 1.2 = 3.6,$$
$$V(2) = \frac{6}{3}\min\left(\frac{9}{4}, \frac{12}{5}, 3\right) = 3 \cdot 2.25 = 4.5,$$
$$V(3) = \frac{5}{3}\min\left(\frac{9}{5}, \frac{12}{2}, 3\right) = 3.$$

По найденной характеристической функции найдем В.Ш. Для первой компоненты В.Ш. при $n = 3$ формула (2) приобретает вид:

$$Sh_1 = \frac{1}{3}V(1) + \frac{1}{6}\left(V(1,2) + V(1,3)\right) + \frac{1}{3}V(1,2,3) - \frac{1}{6}\left(V(2) + V(3)\right) - \frac{1}{3}V(2,3).$$

Формулы для получения других компонент получаем из данной циклической перестановкой индексов. Отсюда $Sh = (5.443, 4.763, 4.793)$.

Найдем τ-значение. Вектор маргинальных выплат имеет вид:

$$\vec{M} = (V(1,2,3) - V(2,3), V(1,2,3) - V(1,3), V(1,2,3) - V(1,2)) = \\ = (7, 4.74, 6.3)\,.$$

Найдем вектор минимальных претензий. Его первая компонента равна:

$$m_1 = \max\left(V(1), V(1,2) - M_2, V(1,3) - M_3, V(1,2,3) - M_2 - M_3\right).$$

Заметим, что 2-я, 3-я и 4-я компоненты, стоящие под знаком максимума равны между собой и равны $V(1,2) + V(1,3) - V(1,2,3)$, поэтому

$$m_1 = \max\left(V(1), V(1,2) + V(1,3) - V(1,2,3)\right).$$

Формулы для остальных компонент можно получить из данной циклической перестановкой индексов, т.е.

$$m_2 = \max\left(V(2), V(1,2) + V(2,3) - V(1,2,3)\right),$$

$$m_3 = \max\left(V(3), V(1,3) + V(2,3) - V(1,2,3)\right).$$

Следовательно, $m_1 = \max(3.6, 3.96) = 3.96$, $m_2 = \max(4.5, 1.7) = 1.7$, $m_3 = \max(3, 3.26) = 3.26$. Таким образом, $\vec{m} = (3.96, 1.7, 3.26)$. τ-значение находим как пересечения отрезка $[\vec{m}, \vec{M}]$ и гиперплоскости эффективных распределений $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, т.е. $\tau = (5.538, 4.625, 4.838)$.

Найдем n-ядро данной характеристической функции. В общем случае оно ищется путем решения последовательности вспомогательных задач линейного программирования, однако для случая трех игроков это значение может быть найдено аналитически (см. [2]). При этом вначале по исходной характеристической функции строится так называемая редуцированная характеристическая функция по формуле

$$W(S) = \frac{V(S) - \sum_{i\in S} V(i)}{V(N) - \sum_{i\in N} V(i)}. \tag{8}$$

Согласно построения, значение редуцированной х.ф. от всех отдельных игроков равно нулю, а от гранд-коалиции — единице. Затем вычисляются значения $W(1,2)$, $W(1,3)$, $W(2,3)$ и упорядочиваются в порядке возрастания, обозначим найденные значения через c_1, c_2, c_3, где $0 \le c_1 \le c_2 \le c_3 \le 1$. В зависимости от соотношения c_1, c_2, c_3 существует пять формул вычисления n-ядра для редуцированной х.ф. и при помощи обратного перехода от редуцированной х.ф. к исходной восстанавливаются значения n-ядра для исходной задачи по формуле

$$n_V(i) = \left(V(N) - \sum_{i\in N} V(i)\right) n_W(i) + V(i) \tag{9}$$

Для данной задачи имеем:

$$V(1,2,3) - V(1) - V(2) - V(3) = 3.9.$$

$$W(1,2) = \frac{V(1,2) - V(1) - V(2)}{V(1,2,3) - V(1) - V(2) - V(3)} = \frac{8.7 - 3.6 - 4.5}{3.9} = 0.154,$$

$$W(1,3) = \frac{V(1,3) - V(1) - V(3)}{V(1,2,3) - V(1) - V(2) - V(3)} = \frac{10.26 - 3.6 - 3}{3.9} = 0.938,$$
$$W(2,3) = \frac{V(2,3) - V(2) - V(3)}{V(1,2,3) - V(1) - V(2) - V(3)} = \frac{8 - 4.5 - 3}{3.9} = 0.128.$$

Отсюда $c_1 = 0.128$, $c_2 = 0.154$, $c_3 = 0.938$, что соответствует перестановке агентов $(1,3,2)$. В данном случае имеет место соотношение $c_3 > \frac{1}{3}$, $c_1 > \frac{1-c_3}{2}$, $c_1 + c_2 \leq \frac{1+c_3}{2}$. В этом случае компоненты n-ядра вычисляются по формуле $\left(\frac{c_2+c_3}{2}, \frac{1-c_2}{2}, \frac{1-c_3}{2}\right)$. Таким образом, n-ядро редуцированной игры равно $(0.546, 0.423, 0.031)$. Принимая во внимание перестановку агентов и формулу обратного преобразования (9), находим компоненты n-ядра исходной характеристической функции:

$$n_1 = 3.9 \cdot 0.564 + 3.6 = 5.729,$$
$$n_2 = 3.9 \cdot 0.031 + 4.5 = 4.621,$$
$$n_3 = 3.9 \cdot 0.423 + 3 = 4.650,$$
$$nucleolus = (5.729, 4.621, 4.650).$$

Заключение

В статье рассмотрено три механизма распределения прибыли между проектами, имеющими общий фонд ресурсов в предположении, что как исходные ресурсы, так и полученная прибыль может быть распределена произвольным образом между проектами без потерь. В основу механизмов распределения ресурсов и прибыли положен математический аппарат кооперативной теории игр. В качестве трех различных альтернатив распределения предлагается использование трех решений кооперативной игры, таких как вектор Шепли, n-ядро и τ-значение. Техника нахождения решений показана на простом примере.

Литература

1. Schmeidler D. The nucleolus of a characteristic function game. *SIAM Journal of applied mathematics.* 1969. Vol. 17. P. 1163–1170.
2. Mazalov V. Mathematical game theory and applications. Wiley. 2010.
3. Shapley L. S. A value for n-person games. In: Kuhn H., Tucker A. (eds.) Contributions to the Theory of Games II. Ann. Math. Stud. Princeton University Press, Princeton. 1953. P. 307–317.
4. Tijs S. Introduction to Game theory. Hindustan Book Agency. 2003.

Поступила: 28.03.2019 / Принята: 22.05.2019