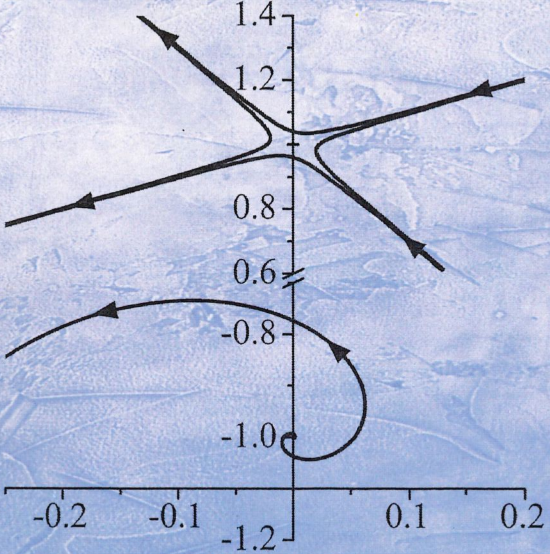
КИЇВСЬКИЙ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. А. Львов
А. О. Косогор
Д. Л. Попадюк

ПРОСТО ПРО СКЛАДНЕ
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

В. А. Львов
А. О. Косогор
Д. Л. Попадюк

ПРОСТО ПРО СКЛАДНЕ
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

КИЇВський УНІВЕРСИТЕТ
2021

УДК 517(075.8)
Л89

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. І. О. Парасюк,
канд. фіз.-мат. наук, доц. О. М. Радченко
(Київський національний університет імені Тараса Шевченка),
д-р фіз.-мат. наук, проф. С. О. Решетняк
(НТУ України "КПІ імені Ігоря Сікорського)

*Рекомендовано до друку вченою радою
факультету радіофізики, електроніки та комп'ютерних систем
(протокол № 7 від 9 листопада 2021 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 11-21 від 24 грудня 2021 року)*

Львов В. А.
Л89 Просто про складне: звичайні диференціальні рівняння : навч. посіб. / В. А. Львов, А. О. Косогор, Д. Л. Попадюк. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2021. – 153 с.

ISBN 978-966-933-169-4

Викладено основні методи інтегрування звичайних диференціальних рівнянь. Окрему увагу приділено лінійним рівнянням другого порядку та системам двох рівнянь першого порядку. Математично описано особливості резонансних коливань, зумовлених періодичною силою, що прикладена до коливальної системи. Пояснено принцип дослідження стійкості стаціонарних станів динамічних систем у лінійному наближенні. Загальні положення щодо методів і результатів розв'язання диференціальних рівнянь пояснено простими прикладами та проілюстровано графіками, побудованими за допомогою спеціалізованих комп'ютерних програм.

Для студентів природничих та інженерно-технічних факультетів університетів.

УДК 517(075.8)

ISBN 978-966-433-169-4

РОЗДІЛ 1

Типові задачі, що потребують розв'язання диференціальних рівнянь, і пов'язані з цими рівняннями поняття

1.1. Процеси, що описуються диференціальними рівняннями

Звичайним диференціальним рівнянням називають таке рівняння, яке пов'язує невідому функцію однієї змінної $y(x)$ з її похідними і самою змінною x. Рівняння, яке пов'язує функцію декількох змінних з її частинними похідними, називають *рівнянням у частинних похідних*[1].

Необхідність вивчення основних методів розв'язання диференціальних рівнянь (ДР) зумовлена тим, що такі рівняння описують важливі процеси, які відбуваються в природі та суспільстві. Дуже поширеними та практично важливими є процеси наближення різних систем (фізичних, біологічних, кібернетичних, соціальних) до рівноважних станів та коливальні процеси, що відбуваються в таких системах. Розглянемо ці процеси, щоб пояснити основні поняття, що стосуються диференціальних рівнянь.

1.1.1. Процес наближення рухомої системи до рівноважного стану

Процеси наближення різних систем до рівноваги називають *процесами релаксації*. Загально відомим прикладом процесу ре-

---

[1] В усіх розділах посібника розглянуто виключно звичайні диференціальні рівняння. Хвильове рівняння, яке є рівнянням у частинних похідних, розглянуто окремо, у додатку 1.

лаксації є процес охолодження розігрітої води: коли гаряча вода наближається до стану теплової рівноваги з оточуючим повітрям, її температура наближається до температури повітря. Різниця температур води і повітря є тією змінною величиною, що характеризує відхилення фізичного стану води від стану теплової рівноваги. Важливо, що чим меншою стає різниця температур води та повітря, тим повільніше змінюється температура води, тобто швидкість зміни температури води пропорційна різниці температур води і повітря. Величезна кількість експериментів у різних галузях науки показує, що ця властивість процесу охолодження води притаманна процесам наближення до рівноваги багатьох фізичних, хімічних, біологічних та соціальних систем: швидкість наближення системи до рівноважного стану пропорційна величині $y(t)$, яка характеризує відхилення системи від рівноваги і поступово зменшується з плином часу t. Швидкість зміни функції $y(t)$ дорівнює її похідній y', тому пропорційність величини цієї функції до швидкості її зміни виражається диференціальним рівнянням

$$y' = -\gamma y, \tag{1.1}$$

де коефіцієнт пропорційності $\gamma > 0$ не залежить від часу.

Щоб зрозуміти, чому рівняння (1.1) називають диференціальним, згадаємо, що диференціал будь-якої функції однієї змінної $y(t)$ дорівнює добутку похідної y' на інтервал значень її аргументу Δt, який відраховується від "поточного значення", позначеного вище літерою t.

Отже, для диференціала dy будь-якої функції $y(t)$ справджується рівність

$$dy = y'\Delta t. \tag{1.2}$$

Підставивши до цієї рівності функцію $y(t) = t$ та її похідну $y' = 1$, доходимо висновку, що $dt = \Delta t$, і тому з рівності (1.2) випливають необхідні для розв'язання диференціальних рівнянь математичні співвідношення:

$$dy = y'dt, \; y' = \frac{dy}{dt}. \tag{1.3}$$

Беручи до уваги співвідношення (1.3), виразимо ліву частину рівняння (1.1) через диференціали:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma y \,. \tag{1.4}$$

Із рівняння (1.4) стає очевидним, чому рівняння, що містять похідні, називають диференціальними, а не диференційними: ці рівняння виражаються через диференціал невідомої функції та диференціал незалежної змінної.

Домножимо ліву та праву частини рівняння (1.4) на dt:

$$dy = -\gamma y dt \,. \tag{1.5}$$

Відокремимо змінні у рівнянні (1.5), тобто зробимо так, щоб біля диференціала змінної t не було змінної y:

$$\frac{dy}{y} = -\gamma dt \,. \tag{1.6}$$

Зінтегруємо обидві частини рівняння (1.6):

$$\int \frac{dy}{y} = -\gamma \int dt \,. \tag{1.7}$$

Візьмемо інтеграли в рівності (1.7):

$$\ln y = -\gamma t + \ln |C| . \tag{1.8}$$

Замість довільної сталої C, яка завжди виникає при обчисленні невизначених інтегралів, до $-\gamma t$ додано функцію $\ln |C|$, яка може набувати будь-яких значень, означена як для від'ємних, так і для додатних величин сталої C, і дозволяє записати розв'язок рівняння релаксації у простій формі

$$y = Ce^{-\gamma t} \,. \tag{1.9}$$

При обчисленні інтеграла у правій частині рівняння (1.7) додавати до результату довільну сталу не потрібно, тому що цю сталу можна перенести до лівої частини рівності (1.8), зважити на те, що сума двох довільних сталих також є довільною сталою, і позначити цю суму логарифмом числа $|C|$. У більшості випадків величина відхилення системи від рівноваги в початковий момент $y(0)$ відома, тому $C = y(0)$ і розв'язок рівняння (1.1) виражається формулою

$$y(t) = y(0)e^{-\gamma t}, \tag{1.10}$$

яка показує, що в процесі релаксації величина відхилення системи від рівноваги експоненціально зменшується від початкового значення і прямує з плином часу до нуля.

Із практичного погляду важливо, що диференціальне рівняння (1.1) описує не лише процеси релаксації, але й багато інших явищ, серед яких слід згадати процес розпаду радіоактивних речовин і, за певних умов, зміну кількості населення певної території або кількості випадків захворювання на інфекційну хворобу. (Експоненціальне зменшення величини y перетворюється на збільшення, якщо параметр γ стає від'ємним).

Для вивчення методів розв'язання диференціальних рівнянь важливо, що на прикладі рівняння (1.1) можна побачити ті етапи розв'язання, які обов'язкові в більшості випадків, а саме:

1) перехід у рівнянні, що містить похідні, до еквівалентного йому рівняння, що містить диференціали (у розглянутому прикладі – перехід від (1.1) до (1.5));

2) відокремлення змінних (у розглянутому прикладі – перехід від (1.5) до (1.6));

3) інтегрування диференціального рівняння "у квадратурах";

4) відшукання розв'язку рівняння шляхом обчислення невизначених інтегралів (див. (1.8), (1.9));

5) визначення величини довільної сталої з початкових умов процесу, який описує диференціальне рівняння (див. (1.10)).

Застарілий термін "інтегрування у квадратурах" означає, що задача розв'язання диференціального рівняння зведена до задачі обчислення невизначених інтегралів (див. рівняння (1.7)). Зауважимо, що інтегрувати рівняння з невідокремленими змінними (у розглянутому прикладі, рівняння (1.5)) не має сенсу, оскільки до інтеграла за незалежною змінною ввійде невідома функція (у розглянутому прикладі, отримаємо інтеграл від $y(t)dt$).

1.1.2. Процес коливань навколо положення рівноваги

Для пояснення ще деяких важливих властивостей диференціальних рівнянь, а також методів і результатів їхнього розв'язання, розглянемо відомі всім гармонічні коливання. Поширеність таких коливань у природі зумовлена тим, що рівноважний стан механічної системи відповідає мінімуму її потенціальної енергії, зумовленої діючими на систему гравітаційними, електростатичними, пружними силами або якимось іншими чинниками. У багатьох випадках цю енергію можна описувати функцією $U(y)$ однієї змінної y. Ця змінна описує відхилення системи від стану рівноваги, а отже, дорівнює нулю в рівноважному стані. Незалежно від того, у якій саме системі відбуваються коливання, якщо їхня амплітуда мала, енергію $U(y)$ можна наближено представити стандартною формулою

$$U(y) = U(0) + \frac{1}{2}U''(0)y^2, \tag{1.11}$$

де $U''(0)$ – величина другої похідної від потенціальної енергії в точці $y = 0$, тобто у положенні рівноваги. Величина $U''(0)$ додатна, оскільки відхилення від рівноваги збільшує енергію системи. Права частина формули (1.11) складається з двох доданків загальновідомої формули Тейлора і не містить доданка з першою похідною енергії, оскільки в положенні рівноваги ця похідна дорівнює нулю. Сила, що повертає фізичну систему до стану рівноваги, спрямована в бік зменшення потенціальної енергії, тому вона дорівнює похідній від потенціальної енергії, узятій з оберненим знаком, тобто

$$F = -dU / dy \equiv -ky, \tag{1.12}$$

де $k \equiv U''(0) > 0$. У процесі коливань відхилення від рівноваги y періодично змінюється із часом. Якщо водночас із потенціальною силою (1.12) на систему діє сила, пропорційна другій похідній за часом від функції $y(t)$, то баланс сил, що діють на систему, математично виражається диференціальним рівнянням

$$\mu y'' = -ky. \tag{1.13}$$

Фізична суть коефіцієнта пропорційності μ залежить від того, яка система описується рівнянням (1.13), (якщо це матеріальна точка, то μ це її маса). Рівняння (1.13) є одним із лінійних диференціальних рівнянь. Означення та логічно обґрунтовані методи розв'язання лінійних рівнянь розглянемо далі, а зараз використаємо для відшукання розв'язку рівняння (1.13) метод "пробної функції", який застосовується, коли досліджуване явище "підказує", якого типу розв'язок має те рівняння, що описує це явище. У випадку періодичних коливань слід спробувати підставити функцію

$$y(t) = A\cos(\omega t + \alpha), \tag{1.14}$$

де ω – кутова частота коливань, A та α – амплітуда і фаза коливань, відповідно. Підставивши пробну функцію до рівняння, одержуємо рівність

$$-A\mu\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) = -Ak\cos(\omega t + \alpha). \tag{1.15}$$

Ця рівність перетворюється на тотожність, якщо $\omega^2 = k / \mu$. Оскільки коефіцієнт k – додатний, то система, що розглядається, може коливатися навколо положення рівноваги лише в тому разі, якщо коефіцієнт μ також додатний. Щодо коефіцієнтів A та α, то для них ніяких математичних обмежень не виникає, а отже, їх слід вважати довільними сталими. Розглянуті приклади дозволяють зрозуміти суть основних понять, що стосуються диференціальних рівнянь та їхніх розв'язків.

1.2. Означення основних понять

У багатьох випадках функцію, яку треба визначити з диференціального рівняння, буває зручно зобразити у вигляді графіка на площині, тому її доцільно позначити як $y(x)$ і вважати x та y декартовими координатами точок цієї площини. Похідні першого, другого та третього порядків від функції $y(x)$ позначають символами y', y'' та y''', відповідно, а символом $y^{(n)}$ позначають похідну порядку n.

Означення 1.1. Якщо рівняння містить похідну $y^{(n)}$, а похідних більш високого порядку в ньому немає, то число n називають *порядком диференціального рівняння.*

Згідно з означенням 1.1 рівняння релаксації є диференціальним рівнянням 1-го порядку, а рівняння коливань – диференціальним рівнянням 2-го порядку. Будь-яке диференціальне рівняння n-го порядку можна записати у формі

$$F(x, y, y', y'', y'''...y^{(n)}) = 0, \tag{1.16}$$

тому що праву частину рівняння можна перенести ліворуч, змінивши її знак. В окремих випадках у диференціальному рівнянні n-го порядку можуть бути відсутніми незалежна змінна та/або невідома функція, та/або деякі похідні порядку меншого за n. Наприклад, у рівнянні релаксації $F = y' + \gamma y = 0$ відсутня незалежна змінна, а в рівнянні коливань $F = \mu y'' + ky = 0$ немає першої похідної від невідомої функції.

Означення 1.2. *Розв'язком диференціального рівняння* називають таку функцію, підстановка якої до рівняння перетворює його на тотожність.

Із цього означення випливає можливість знайти розв'язок рівняння шляхом підстановки до нього пробної функції.

Розв'язок (1.9) рівняння 1-го порядку (1.1) містить одну довільну сталу C, яка з'явилася внаслідок обчислення інтегралів, що містяться в рівності (1.7). Розв'язок (1.14) рівняння 2-го порядку (1.13) містить дві довільні сталі – A та α. (Кутова частота коливань ω не є довільною сталою, оскільки її величина визначається конструкцією коливальної системи). Розв'язання рівняння n-го порядку передбачає n-кратне інтегрування, унаслідок чого до розв'язку такого рівняння входять n довільних сталих.

Означення 1.3. Розв'язок диференціального рівняння n-го порядку, який містить n довільних сталих, називають *загальним інтегралом* цього рівняння, а процедуру відшукання загального інтеграла називають *інтегруванням диференціального рівняння.*

Термін "загальний інтеграл" цілком природно випливає з того, що розв'язок простішого диференціального рівняння $y' = f(x)$ виражається через невизначений інтеграл формулою

$$y = \int f(x)dx + C\,. \tag{1.17}$$

Зауважимо, що, розв'язуючи диференціальні рівняння, слід вважати $\int f(x)dx$ однією з первісних функцій, і додавати до неї сталу інтегрування, як показано у формулі (1.17). Причина цього стане зрозумілою при розв'язуванні більш складних рівнянь.

Означення 1.4. *Частинним розв'язком диференціального рівняння* називають функцію, яку отримують із загального інтеграла, зафіксувавши значення наявних у ньому довільних сталих.

Наприклад, зафіксувавши в загальному інтегралі рівняння коливань значення $A = 1$, $\alpha = \pi / 4$ (див. вираз (1.14)), отримаємо частинний розв'язок цього рівняння

$$y(t) = \cos(\omega t + \pi / 4)\,. \tag{1.18}$$

Зауважимо, що при розв'язуванні більшості практично важливих задач значення довільних сталих визначаються з початкових умов, тобто зі значень функції $y(t)$ та її похідної $y'(t)$ у початковий момент часу $t = 0$. Частинний розв'язок (1.18) задовольняє початкові умови $y(0) = 1 / \sqrt{2}$, $y'(0) = -\omega / \sqrt{2}$.

Означення 1.5. Графік частинного розв'язку диференціального рівняння називають *інтегральною кривою* цього рівняння.

Загальний інтеграл диференціального рівняння зображується сім'єю інтегральних кривих. Аналізуючи окремих "представників" цієї сім'ї, будують відповідні інтегральні криві і за їхньою допомогою доходять певних висновків про загальний інтеграл уцілому.

Універсального методу, за допомогою якого можна зінтегрувати будь-яке диференціальне рівняння, не існує. Більше того, при розв'язуванні практично важливих задач зустрічаються такі рівняння, які досі нікому не вдалося зінтегрувати. А отже, далі будемо розглядати методи інтегрування окремих типів рівнянь, починаючи з найпростіших. Значну увагу приділимо лінійним диференціальним рівнянням. Насамкінець стисло розглянемо розв'язки системи двох диференціальних рівнянь 1-го порядку, і проаналізовано стійкість стаціонарних розв'язків таких рівнянь.

Більш докладний виклад питань, що стосуються диференціальних рівнянь, можна знайти в підручниках [1–4], виданих для студентів фізико-математичних факультетів університетів. Велику кількість звичайних диференціальних рівнянь представлено в підручнику [4] та задачниках [5, 6].

РОЗДІЛ 2

Інтегрування диференціальних рівнянь першого порядку

2.1. Загальна форма звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, відокремлення змінних

Загальною формою звичайного диференційного рівняння 1-го порядку є рівняння

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.1}$$

яке випливає з рівняння (1.16), якщо покласти в ньому $n = 1$. Далеко не всі рівняння типу (2.1) вдається розв'язати (зінтегрувати), тому почнемо з розгляду *рівнянь, розв'язаних відносно похідної*, тобто рівнянь типу

$$y' = f(x, y). \tag{2.2}$$

Зінтегруємо це рівняння за етапами, зазначеними наприкінці п. 1.1.1.

На першому етапі перейдемо від похідних до диференціалів, тобто перепишемо рівняння (2.2) у формі

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.3}$$

Домноживши обидві частини рівняння (2.3) на dx, отримаємо рівняння

$$dy = f(x, y)dx. \tag{2.4}$$

Зауважимо, що будь-яку функцію $f(x, y)$ можна представити у вигляді частки від ділення двох функцій:

$$f(x, y) = M(x, y)/N(x, y)$$

(в окремих випадках $N(x,y)$ може бути просто числом). Доможивши обидві частини рівняння (2.4) на $N(x,y)$, одержимо рівняння

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{2.5}$$

На другому етапі слід відокремити змінні в рівнянні (2.5). Універсального способу відокремлення змінних не існує, тому далі будемо розглядати різні типи диференціальних рівнянь і показувати, у який спосіб слід відокремлювати змінні в рівняннях, приналежних до кожного з розглянутих типів.

Найлегше відокремлюються змінні в тому окремому випадку, коли $M(x,y)$ та $N(x,y)$ є добутками функцій однієї змінної, або x, або y, тобто, коли

$$M(x,y) = M_1(x)M_2(y) \quad \text{та} \quad N(x,y) = N_1(x)N_2(y)\,.$$

У цьому випадку рівняння (2.5) перетворюється на рівняння

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0\,, \tag{2.6}$$

і відокремлення змінних виконується шляхом ділення обох частин рівняння (2.6) на $N_1 M_2$:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0. \tag{2.7}$$

У рівнянні з відокремленими змінними (рівнянні (2.7)) перед диференціалом змінної y немає функції від змінної x, а перед диференціалом змінної x немає функції від змінної y, тобто змінні x та y відокремленні одна від одної.

На третьому етапі легко розв'язуємо рівняння з відокремленими змінними у квадратурах, оскільки ліва частина рівняння (2.7) є похідною від суми двох невизначених інтегралів, а саме, від суми:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy. \tag{2.8}$$

Як відомо зі шкільного курсу математики та курсу математичного аналізу, кожен з інтегралів у цій сумі є сім'єю функцій, що відрізняються одна від одної на сталу величину. Але, як було зазначено у підрозд. 1.2, зручно вважати, що кожен з інтегралів $\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx$ та $\int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy$ є однією із сім'ї функцій, а сталі інтегрування C_1 та C_2, відповідно, записувати явно. Позначивши $C = C_1 + C_2$, виражаємо загальний інтеграл ДР у квадратурах:

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C. \qquad (2.9)$$

Зауваження 2.1. Якщо ДР зінтегровано у квадратурах, то вважається, що завдання теорії диференціальних рівнянь виконано, а знаходження та дослідження функції $y(x)$ шляхом обчислення інтегралів є завданням математичного аналізу. Це завдання можна виконати або самотужки, або за допомогою програмного забезпечення персонального комп'ютера.

Зауваження 2.2. Поділивши (2.6) на $N_1 M_2$, слід розглянути розв'язок $y_0(x)$ рівняння $N_1(x)M_2(y) = 0$. Може так статися, що $y_0(x)$ є розв'язком рівняння (2.6). Тоді виникають дві можливості: або $y_0(x)$ є однією з функцій, що входять до загального інтеграла рівняння (2.6), або $y_0(x)$ не можна отримати із загального інтеграла, фіксуючи значення довільної сталої C.

Означення 2.1. Розв'язок диференціального рівняння, який не можна отримати із загального інтеграла за жодних значень довільних сталих, називають *особливим розв'язком* цього рівняння.

Означення 2.1 застосовне також до ДР n-го порядку, загальний інтеграл якого містить n довільних сталих.

●Приклад 2.1. Зінтегруємо рівняння

$$xy' - y = 0. \qquad (2.10)$$

Переходимо від похідних до диференціалів:

$$x\frac{dy}{dx} - y = 0, \qquad xdy - ydx = 0.$$

Відокремлюємо змінні шляхом ділення обох частин останнього рівняння на добуток xy:

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0.$$

Інтегруємо рівняння у квадратурах:

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dx}{x} = C.$$

Виконуємо інтегрування:

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C|.$$

Знаходимо загальний інтеграл рівняння (2.10):

$$y = Cx. \qquad (2.11)$$

Графічним зображенням загального інтеграла (2.10) є сім'я прямих, зображених пунктиром на рис. 2.1.

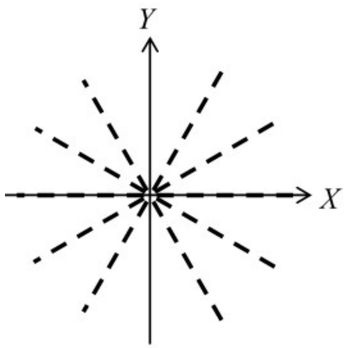


Рис. 2.1. Інтегральні лінії рівняння (2.10)

Поділивши обидві частини рівняння на xy, ми могли "втратити" особливий розв'язок, що задовольняє рівняння $xy = 0$, але не втратили, оскільки лінія $y = 0$ відповідає значенню $C = 0$, тобто цей розв'язок входить до загального інтеграла. Рівняння $x = 0$ є рівнянням вертикальної лінії, яка не є графіком функції

$y(x)$, оскільки за означенням поняття функції кожному значенню змінної x має відповідати одне-єдине значення $y(x)$.●

Відокремлення змінних, а отже, й інтегрування у квадратурах, вдається здійснити далеко не для всіх ДР. Далі розглянемо такі типи рівнянь, для яких математики знайшли той чи інший спосіб відокремлення змінних, і почнемо з таких рівнянь, у яких можна відокремити змінні, шляхом заміни в рівнянні функції $y(x)$ на певну функцію $z(y,x)$.

2.2. Рівняння з відокремлюваними змінними

2.2.1. Рівняння типу $y' = f\left(y/x\right)$

Доведемо, що будь-яке рівняння типу $y' = f\left(y/x\right)$ можна зінтегрувати у квадратурах шляхом відокремлення змінних заміною функції y на функцію

$$z = y/x\,. \tag{2.12}$$

Для доведення цього факту перейдемо в рівнянні зазначеного типу до диференціалів

$$dy = f(y/x)dx \tag{2.13}$$

і виключимо з (2.13) функцію $y(x)$, помітивши, що $y = xz$, а тому

$$dy = xdz + zdx\,. \tag{2.14}$$

Із виразів (2.13) та (2.14) випливає, що $f(z)dx = xdz + zdx$, тобто

$$xdz = \left[f(z) - z\right]dx.$$

Поділивши ліву та праву частини останньої рівності на $x\left[f(z) - z\right]$, відокремлюємо змінні

$$\frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо рівняння $y' = f(y/x)$ у квадратурах:

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln\left|Cx\right|. \tag{2.15}$$

Далі методами математичного аналізу виконуємо інтегрування і знаходимо функцію $y = xz$.

●Приклад 2.2. Зінтегруємо рівняння

$$xy' = y + x\,\mathrm{tg}\left(y/x\right). \tag{2.16}$$

Можна розв'язати це рівняння, замінивши функцію y на функцію $z = y/x$, визначити функцію $f(z)$ для рівняння (2.16) та скористатися формулою (2.14). Проте на практиці діють інакше, а саме, запам'ятовують лише вираз (2.12) для функції z, щоб знайти з нього вираз (2.14) для диференціала функції y. Потім переходять у рівнянні, яке розв'язують, до диференціалів. Рівняння (2.16) після переходу до диференціалів набуває форми

$$xdy = \left[y + x\,\mathrm{tg}\left(y/x\right)\right]dx\,,$$

з якої випливає рівність

$$dy = \left[z + \mathrm{tg}z\right]dx\,. \tag{2.17}$$

Далі слід робити те, що в багатьох випадках вчиняють при розв'язуванні різних ДР, а саме, прирівнювати один до одного два різних вирази для однієї і тієї ж величини, у нашому випадку виразів (2.14) та (2.17), для диференціала функції y:

$$xdz + zdx = \left[z + \mathrm{tg}z\right]dx\,.$$

Потім збирають подібні доданки та відокремлюють змінні:

$$\frac{dx}{x} = \mathrm{ctg}z\,dz\,,$$

і завдяки цьому розв'язують рівняння (2.16) у квадратурах:

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{d(\sin z)}{\sin z}\,.$$

Виконавши табличне інтегрування отримують рівності

$$\ln|x| = \ln|\sin z| - \ln|C|\,,$$

$$\sin z = Cx$$

та знаходять загальний інтеграл рівняння (2.16):

$$y = x\arcsin(Cx).\ \bullet \tag{2.18}$$

●Приклад 2.3. Зінтегруємо рівняння

$$(x+y)dx+(x-y)dy=0\,. \tag{2.19}$$

Опишемо хід розв'язання рівняння конспективно:

$$y=xz\,,$$

$$(1+z)dx+(1-z)dy=0\,,$$

$$dy=xdz+zdx\,,$$

$$(1+z)dx+(1-z)(xdz+zdx)=0\,,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{(1-z)dz}{1+2z-z^2}=0\,.$$

Помічаємо, що

$$1-z=\frac{1}{2}d(1+2z-z^2)\,,$$

інтегруємо в квадратурах

$$\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d(1+2z-z^2)}{1+2z-z^2}=0\,.$$

Виконуємо табличне інтегрування

$$\ln x^2+\ln\left|1+2z-z^2\right|=\ln|C|$$

та отримуємо загальний інтеграл рівняння (2.19):

$$x^2+2xy-y^2=C\,. \tag{2.20}$$

(Те, що функцію $y(x)$ не виражено з алгебраїчного рівняння *явно*, вважають при розв'язуванні ДР за норму).●

Зауваження 2.3. ДР типу $y'=f\left(y/x\right)$ називають *однорідними диференціальними рівняннями*. Це зразок невдалої математичної термінології, оскільки набагато частіше називають однорідними такі рівняння або системи рівнянь (диференціальних та алгебраїчних), права частина яких дорівнює нулю.

2.2.2. *Рівняння типу* $y' = f\left(ax + by\right)$

Для відокремлення змінних у рівняннях типу $y' = f\left(ax + by\right)$ застосовують цілком очевидну заміну функції y на функцію

$$z = ax + by. \qquad (2.21)$$

Перейшовши від похідних до диференціалів, одержують простий вираз для диференціала функції y:

$$dy = f(z)dx\,. \qquad (2.22)$$

Із рівнянь (2.21), (2.22) випливають співвідношення між диференціалами функцій z, y та диференціалом змінної x:

$$dz = adx + bdy = adx + bf(z)dx\,, \qquad (2.23)$$

за допомогою яких легко отримати рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx$$

та зінтегрувати його у квадратурах:

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + C\,. \qquad (2.24)$$

Таким чином, яка б не була функція $f(z)$, заміна функції (2.21) зводить відшукання загального інтеграла рівняння цього типу до обчислення невизначеного інтеграла, що стоїть у правій частині рівності (2.24).

●Приклад 2.4. Зінтегруємо рівняння

$$y' = \frac{1}{x - y} + 1.$$

Для цього замінимо y на $z = x - y$ та одержимо два вирази для диференціала функції y:

$$\begin{cases} dy = \left(\dfrac{1}{z} + 1\right)dx \\ dy = dx - dz. \end{cases}$$

Прирівняємо ці вирази один до одного:

$$\left(\frac{1}{z}+1\right)dx = dx - dz \ .$$

Зберемо подібні доданки:

$$\frac{dx}{z} + dz = 0.$$

Відокремимо змінні:

$$dx + zdz = 0 \ .$$

Виконаємо табличне інтегрування:

$$x + z^2 / 2 = C \ .$$

Згадаємо означення функції z і визначимо загальний інтеграл рівняння:

$$(x-y)^2 + 2x = C. \bullet$$

2.2.3. Рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Зауваження 2.4. Рівняння типу $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ зазвичай подають у задачниках в диференціальній формі

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx + (a_2x+b_2y+c_2)dy = 0 \ . \qquad (2.25)$$

Основна вказівка: *інтегрування рівнянь такого типу слід починати з розв'язання допоміжної системи алгебраїчних рівнянь*

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 = 0. \end{cases} \qquad (2.26)$$

Існують дві принципово різні процедури інтегрування вихідного рівняння.

Перша процедура застосовна, коли допоміжна система сумісна, тобто, коли вона має розв'язок

$$x = x_0, \quad y = y_0.$$

Як відомо з аналітичної геометрії, рівняння системи (2.26) є рівняннями прямих, що перетинаються в точці з координатами (x_0, y_0). Щоб зінтегрувати рівняння (2.25), треба перенести початок координат до точки (x_0, y_0) [1], тобто ввести змінні

$$\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0, \tag{2.27}$$

які дорівнюють нулю, коли $x = x_0, y = y_0$. Оскільки у нових змінних допоміжна система має розв'язок $\bar{x} = \bar{y} = 0$, то вона в цих координатах перетворюється на систему

$$\begin{cases} a_1\bar{x} + b_1\bar{y} = 0 \\ a_2\bar{x} + b_2\bar{y} = 0, \end{cases}$$

а вихідне рівняння – на рівняння

$$\bar{y}' = f\left(\frac{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}}{a_2\bar{x} + b_2\bar{y}}\right),$$

оскільки $y' = \bar{y}'$. Тепер можна у чисельнику та знаменнику аргументу функції f винести за дужки змінну $\bar{x}$ та звести рівняння до розглянутого вище однорідного

$$y' = f\left(\frac{a_1 + b_1\bar{y}/\bar{x}}{a_2 + b_2\bar{y}/\bar{x}}\right).$$

А далі слід відокремити змінні та зінтегрувати це однорідне ДР так, як було вказано в п. 2.2.1.

Друга процедура інтегрування рівняння

$$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \tag{2.28}$$

застосовується тоді, коли допоміжна система (2.26) несумісна. У цьому разі рівняння допоміжної системи є рівнянням паралельних прямих. Як відомо з аналітичної геометрії, паралельні прямі мають однакові кутові коефіцієнти $k_1 = k_2 \equiv k$. У даному випад-

---

[1] У новій системі координат точка (x_0, y_0) має координати $(0, 0)$, а отже, вона лежить на початку координат.

ку, кутовими коефіцієнтами паралельних прямих є відношення $-a_1 / b_1$ та $-a_2 / b_2$, тому рівняння (2.28) має форму

$$y' = f\left(\frac{-kx + y + c_1/b_1}{-kx + y + c_2/b_2} \right),$$

а отже, рівняння (2.28) може бути зінтегроване заміною $z = y - kx$, тому що належить до типу $y' = f(ax + by)$ з $a = -k$, $b = 1$.

Допоміжна вказівка: якщо треба зінтегрувати рівняння типу (2.28), доцільно насамперед визначити, чи дорівнюють одне одному відношення a_1/b_1 та a_2/b_2, а потім обрати відповідну процедуру інтегрування.

●Приклад 2.5. Для рівняння $(2x - 4y + 6)dx = (4x + 2y - 3)dy$ допоміжною системою є

$$\begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ 4x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи є рівняннями прямих із кутовими коефіцієнтами $k_1 = 1/2$, $k_2 = -4/2$, а отже, $k_1 \neq k_2$, допоміжна система сумісна і це рівняння розв'язується шляхом зсуву системи координат до точки з координатами $x_0 = 0$, $y_0 = 3/2$, які є розв'язком допоміжної системи.●

●Приклад 2.6. Рівняння $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3) = 0$ зводиться до однорідного, оскільки $k_1 = -2$, $k_2 = -4/2 = k_1$.●

2.3. Рівняння з повним диференціалом

Ліва частина деяких рівнянь, що мають форму

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{2.29}$$

є диференціалом певної функції двох змінних $u(x, y)$, тобто

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y). \tag{2.30}$$

Згадавши, що диференціал функції двох змінних пов'язаний із цими змінними та їхніми диференціалами співвідношенням

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2.31}$$

доходимо висновку, що для таких рівнянь мають справджуватись умови

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \end{cases} \tag{2.32}$$

де $M(x, y)$ та $N(x, y)$ є відомими функціями, якщо задано конкретне ДР. З умов (2.32) випливає, що

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}.$$

Оскільки результат обчислення частинної похідної другого порядку не залежить від послідовності диференціювання, то *ознакою того, що ДР, яке слід розв'язати, є рівнянням із повним диференціалом, є виконання рівності*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.33}$$

Отже, перед розв'язуванням рівняння (2.29) так, як буде запропоновано нижче, слід перевірити, чи справджується зазначена умова. На щастя, це дуже легко зробити для всіх рівнянь, наведених у задачниках, які призначені для студентів університетів.

Доцільно запам'ятати, що в умові (2.33) функції M та N слід диференціювати за "чужою" змінною: для доданка Mdx "чужою" є змінна y, а для доданка Ndy – змінна x.

Основна вказівка: *процедура інтегрування рівнянь з повним диференціалом базується на розгляді допоміжної системи рівнянь* (2.32).

Допоміжна вказівка: слід отримати з першого рівняння допоміжної системи вираз для частинної похідної $\partial u / \partial y$ і прирівняти його до правої частини другого рівняння.

Виконуємо вказівки:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \Rightarrow u = \int M(x, y)dx + \tilde{C}(y) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{d\tilde{C}}{dy}.$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx + \frac{d\tilde{C}}{dy} = N(x, y) \Rightarrow \frac{d\tilde{C}}{dy} = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)dx.$$

Далі слід шляхом звичайного інтегрування знайти функцію $\tilde{C}(y)$ і функцію

$$u = \int M(x, y)dx + \tilde{C}(y). \qquad (2.34)$$

Із рівностей (2.29), (2.30) випливає, що диференціал функції u дорівнює нулю, тому ця функція є сталою величиною C. У такому разі загальний інтеграл рівняння з повним диференціалом виражається формулою

$$\int M(x, y)dx + \tilde{C}(y) = C. \qquad (2.35)$$

Зауваження 2.5. Іноді буває, що $\int M(x, y)dx$ та (або) інтеграл від похідної $d\tilde{C}(y) / dy$ важко обчислити. Тоді слід спробувати "поміняти місцями" у процедурі розв'язання рівняння з повним диференціалом допоміжні рівняння для $\partial u / \partial x$ та $\partial u / \partial y$. У такому разі задача полягатиме в обчисленні інтеграла $\int N(x, y)dy$ та інтеграла від похідної $d\tilde{C}(x) / dx$. Якщо пощастить, це буде легко.

●Приклад 2.7. Рівняння $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$, розглянуте як приклад однорідного ДР (див. приклад 2.3), є водночас рівнянням із повним диференціалом, оскільки справджується ознака (2.33):

$$\frac{\partial}{\partial y}(x + y) = \frac{\partial}{\partial x}(x - y) = 1.$$

Допоміжною є система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи знаходимо функцію

$$u = \int (x+y)dx = \frac{x^2}{2} + xy + \tilde{C}(y)$$

та її похідну

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + \frac{d\tilde{C}}{dy}.$$

Прирівнюємо цю похідну до правої частини другого допоміжного рівняння

$$\frac{d\tilde{C}}{dy} + x = x - y.$$

Шляхом елементарного інтегрування знаходимо функцію

$$\tilde{C}(y) = -y^2 / 2$$

і функцію

$$u = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2},$$

яка є сталою, і тому загальний інтеграл виражається формулою

$$x^2 - y^2 + 2xy = C.$$

Саме цей загальний інтеграл було знайдено в інший спосіб при розгляді прикладу 2.3.●

●Приклад 2.8. Зінтегруємо рівняння

$$(x + y + 1)dx + (x - y^2 + 3)dy = 0.$$

На відміну від попереднього, це рівняння не однорідне, оскільки містить y^2, тому, поділивши праву та ліву частини рівняння на x, отримаємо доданок $(y/x)\,y$. Проте виконується умова

$$\frac{\partial}{\partial x}(x - y^2 + 3) = \frac{\partial}{\partial y}(x + y + 1),$$

тому ліва частина рівняння є повним диференціалом певної функції і інтегрування слід виконувати за допомогою допоміжної системи рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = x + y + 1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x - y^2 + 3, \end{cases}$$

з якої випливають рівності

$$u = \frac{x^2}{2} + xy + x + \tilde{C}(y),$$

$$\frac{d\tilde{C}}{dy} + x = x - y^2 + 3, \quad \tilde{C}(y) = -\frac{1}{3}y^3 + 3y,$$

$$u = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3 + xy + x + 3y.$$

Величина $6u$ є сталою, тому загальний інтеграл цього ДР можна виразити формулою

$$3x^2 - 2y^3 + 6xy + 6x + 18y = C. \bullet$$

Зауваження про "інтегрувальний множник". Іноді буває, що для рівняння типу (2.28) умова $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ не виконується, але вдається знайти таку функцію $f(x, y)$, що після множення обох частин рівняння на цю функцію, воно стає рівнянням з повним диференціалом, оскільки виконується умова

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x, y) f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) f(x, y).$$

Тоді помножене на $f(x, y)$ рівняння можна зінтегрувати у вищеописаний спосіб. Тому функцію $f(x, y)$ називають інтегрувальним множником.

Опис шляхів відшукання інтегрувального множника виходить за межі стислого навчального курсу з диференціальних рівнянь, але корисно попрактикуватися в інтуїтивному відшуканні цього множника.

●Приклад 2.9. Знайдемо інтегрувальний множник для рівняння

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0. \qquad (2.36)$$

Для цього візьмемо до уваги рівності

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + x) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x} y = 0.$$

Щоб задовольнити умову (2.33), треба знайти таку функцію $f(x)$, що $\partial f(x)/\partial x = 2f(x)$. Тоді отримаємо рівність $f(x)\cdot 2y = 2f(x)\cdot y$. Такою функцією є експонента

$$f(x) = e^{2x}.$$

Далі доцільно розглянути допоміжну систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = ye^{2x} \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = (x^2 + y^2 + x)e^{2x}, \end{cases}$$

знайти з першого рівняння системи функцію

$$u = \frac{1}{2} y^2 e^{2x} + \tilde{C}(x),$$

та її похідну

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 e^{2x} + \frac{d\tilde{C}}{dx}.$$

Читачеві варто самостійно завершити розгляд цього прикладу, визначивши за допомогою другого рівняння системи функції $\tilde{C}(x)$, $u(x, y)$ і знайшовши загальний інтеграл рівняння (2.36).●

Зауважимо, що для одного й того самого ДР можуть існувати декілька істотно різних інтегрувальних множників.

2.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

2.4.1. Нагадування про лінійні простори та лінійні оператори

У лінійній алгебрі існує поняття лінійного простору. *Лінійним простором* називають сукупність математичних елементів, для яких означені операції додавання та множення на число такі, що: а) додаючи елементи один до одного, отримуємо елемент цієї ж сукупності; б) помноживши будь-який елемент на число, отримуємо елемент цієї ж сукупності. Окрім того, щоб сукупність елементів була лінійним простором необхідно, щоб операції додавання елементів та множення їх на число мали такі ж властивості, як операції з геометричними векторами (комутативність та асоціативність додавання, комутативність, асоціативність та дистрибутивність множення на число). Неперервні функції є елементами лінійного простору, тому що сума неперервних функцій і добуток неперервної функції та числа є неперервними функціями. Неважко упевнитися також у тому, що алгебраїчні дії з функціями мають такі ж властивості, як і операції з геометричними векторами.

Важливим поняттям лінійної алгебри є поняття оператора. *Оператором* називають математичне правило, за яким кожен елемент простору $\mathbf{x}$ перетворюється на елемент $\mathbf{y}$ того ж самого або іншого простору. Кажуть, що *оператор* $\hat{L}$ *діє на елемент* $\mathbf{x}$ *і перетворює його на елемент* $\mathbf{y}$. Це твердження виражають формулою

$$\hat{L}\mathbf{x} = \mathbf{y} . \qquad (2.37)$$

Оператор $\hat{L}$ називають *лінійним*, якщо правило його дії на будь-які елементи простору $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ має дві властивості, а саме:

1) $\hat{L}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \hat{L}\mathbf{x}_1 + \hat{L}\mathbf{x}_2$;

2) $\hat{L}\lambda\mathbf{x}_{1,2} = \lambda\hat{L}\mathbf{x}_{1,2}$,

де λ – дійсне або комплексне число.

Означимо оператор диференціювання $\frac{d}{dx}$ як такий оператор, що діє у просторі функцій і перетворює кожну функцію на її похідну:

$$\frac{d}{dx}y(x) = y'(x). \tag{2.38}$$

Оператор диференціювання є лінійним оператором, тому що похідна суми функцій дорівнює сумі їхніх похідних, а похідна від добутку числа на функцію дорівнює добутку числа на похідну від функції, тобто

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[y_1(x) + y_2(x)\right] = \frac{d}{dx}y_1(x) + \frac{d}{dx}y_2(x) \\ &\frac{d}{dx}\lambda y(x) = \lambda\frac{d}{dx}y(x). \end{aligned} \tag{2.39}$$

2.4.2. Означення лінійного диференціального рівняння першого порядку

Поняття *лінійне диференціальне рівняння* і процедура інтегрування лінійних диференціальних рівнянь тісно пов'язані з означенням та властивостями лінійного оператора.

Означення 2.2. *Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* називають рівняння типу

$$a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x), \tag{2.40}$$

де $a_1(x), a_0(x)$ та $b(x)$ задані функції.

Рівняння (2.40) називають *лінійним*, тому що його можна записати в операторній формі

$$\hat{L}y(x) = b(x), \tag{2.41}$$

де

$$\hat{L} = a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{2.42}$$

– лінійний оператор, функції $a_1(x)$ та $a_2(x)$ називають коефіцієнтами лінійного рівняння, а $b(x)$ його правою частиною.

Означення 2.3. Лінійне ДР називають *однорідним*[1], якщо його права частина дорівнює нулю.

Згідно з означеннями 2.2 та 2.3 рівняння

$$a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x)=0, \tag{2.43}$$

є однорідним лінійним рівнянням.

Якщо $a_1(x)$ не обертається на нуль у точках інтервалу $[x_1,x_2]$, то у цьому інтервалі неоднорідне лінійне ДР зручно переписати у формі

$$y'(x)+p(x)y=f(x), \tag{2.44}$$

де $p(x)=a_0(x)/a_1(x)$, $f(x)=b(x)/a_1(x)$. Відповідне однорідне лінійне ДР виразимо як

$$y'(x)+p(x)y=0\ . \tag{2.45}$$

Дуже важливо, що рівняння (2.44) та (2.45) можна записати в операторній формі , а саме:

$$\hat{L}y(x)=f(x) \tag{2.46}$$

та

$$\hat{L}y(x)=0, \tag{2.47}$$

де

$$\hat{L}=\frac{d}{dx}+p(x). \tag{2.48}$$

2.4.3. Інтегрування лінійного диференціального рівняння першого порядку методом варіації довільної сталої

Метод варіації довільної сталої базується на тому, що однорідне ДР є рівнянням з відокремлюваними змінними, оскільки з (2.45) випливають рівності:

$$dy=-p(x)ydx\ ,$$

---

[1] Це поняття однорідності узгоджується з поняттям, яке використовують для систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx,$$

$$\ln|y| - \ln|C| = -\int p(x)dx,$$

і тому завжди можна знайти загальний інтеграл цього рівняння

$$y = C\varphi(x), \tag{2.49}$$

де введено позначення

$$\varphi(x) = e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.50}$$

Підстановка загального інтеграла в однорідні рівняння (2.45) та (2.47) перетворює ці рівняння на тотожності:

$$\varphi'(x) + p(x)\varphi(x) \equiv 0, \tag{2.51}$$

$$\hat{L}\varphi(x) = 0. \tag{2.52}$$

Слід запам'ятати, що інтегрування неоднорідного лінійного ДР виконують у два етапи.

На першому етапі інтегрують однорідне лінійне ДР і записуємо його загальний інтеграл

$$y_{\text{з.о.}} = C\varphi(x), \tag{2.53}$$

де скорочення "з.о." означає "загальний однорідного".

На другому етапі виконують *варіацію довільної сталої* C. Це ще один приклад невдалої термінології. Насправді, функцію $C\varphi(x)$ замінюють на пробну функцію

$$y = u(x)\varphi(x), \tag{2.54}$$

підставляють її до неоднорідного рівняння та знаходять таку функцію $u(x)$, яка дозволяє представити розв'язок неоднорідного лінійного рівняння у квадратурах, тобто звести проблему до обчислення невизначеного інтеграла. Щоб виразити цю функцію через коефіцієнт $p(x)$ і праву частину рівняння (2.44), підставимо пробну функцію (2.54) до цього рівняння:

$$\left[u(x)\varphi(x)\right]' + p(x)u(x)\varphi(x) = f(x).$$

Виконаємо диференціювання добутку:

$$u'(x)\varphi(x) + \left[\varphi'(x) + p(x)\varphi(x)\right]u(x) = f(x).$$

Урахувавши, що сума доданків у квадратних дужках дорівнює нулю (див. (2.51)), знайдемо співвідношення

$$u'(x) = f(x)/\varphi(x),$$

$$u(x) = \int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx + C .$$

Підставивши знайдену функцію $u(x)$ до (2.54), зінтегруємо неоднорідне лінійне рівняння у квадратурах, тобто виразимо загальний інтеграл неоднорідного рівняння через невизначений інтеграл:

$$y_{\text{з.н.}} = C\varphi(x) + \left[\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right] \varphi(x), \qquad (2.55)$$

де скорочення "з.н." означає "загальний неоднорідного". Таким чином ми довели, що для відшукання загального інтеграла неоднорідного лінійного рівняння достатньо обчислити невизначений інтеграл у правій частині рівності (2.55).

Теорема 2.1. Загальний інтеграл неоднорідного лінійного рівняння є сумою загального інтеграла однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного:

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}} . \qquad (2.56)$$

На теоремі 2.1 базується ще один метод інтегрування лінійних рівнянь, який застосовний до рівнянь не лише першого порядку.

Доведення. Розглянемо рівність (2.55) для загального інтеграла неоднорідного лінійного рівняння. Вираз (2.53) показує, що перший доданок у правій частині цієї рівності є загальним інтегралом однорідного рівняння. Залишається довести, що другий доданок, тобто функція

$$\psi(x) \equiv \left[\int \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx \right] \varphi(x), \qquad (2.57)$$

є частинним розв'язком неоднорідного рівняння. Для цього, зваживши на (2.53), (2.55) та (2.57), перепишемо отриману вище формулу (2.55) для загального інтеграла неоднорідного рівняння у тотожній формі

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + \psi(x) .$$

Оскільки загальний інтеграл $y_{\text{з.н.}}$ є сукупністю розв'язків неоднорідного лінійного рівняння (2.46), то підстановка його до (2.46) перетворює це рівняння на тотожність

$$\hat{L}y_{\text{з.н.}} \equiv f(x).$$

Оператор $\hat{L}$ лінійний, тому

$$\hat{L}y_{\text{з.н.}} = \hat{L}(y_{\text{з.о.}} + \psi) = \hat{L}y_{\text{з.о.}} + \hat{L}\psi ,$$

і наведена вище тотожність набуває форми

$$\hat{L}y_{\text{з.о.}} + \hat{L}\psi \equiv f(x). \tag{2.58}$$

Тепер згадуємо, що $y_{\text{з.о.}}$ є розв'язком однорідного рівняння (2.47), тому

$$\hat{L}y_{\text{з.о.}} \equiv 0. \tag{2.59}$$

Із виразів (2.58) та (2.59) випливає, що підстановка функції ψ до неоднорідного лінійного рівняння перетворило його на тотожність $\hat{L}\psi \equiv f(x)$, а це означає, що функція ψ є частинним розв'язком неоднорідного лінійного рівняння.

2.4.4. Метод подібності до правої частини рівняння

Метод подібності до правої частини рівняння застосовується тільки тоді, коли права частина лінійного ДР є такою функцією, диференціювання якої не веде до зміни її типу. Такими функціями є експонента Ae^{ax}, лінійна комбінація синусів та косинусів $A\sin ax + B\cos ax$, поліном $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ та деякі комбінації цих функцій. У такому разі можна взяти пробний розв'язок, подібний до правої частини лінійного ДР, підставити його до цього ДР і знайти такі величини коефіцієнтів A, B, a, a_k за яких пробний розв'язок задовольнить це рівняння. Найкраще метод подібності пояснюється на конкретних прикладах.

●Приклад 2.10. Зінтегруємо рівняння

$$y' - y = e^{2x} . \tag{2.60}$$

Процес інтегрування розділяється на три кроки.

Крок перший: зінтегруємо однорідне лінійне рівняння:

$$y' - y = 0 , \tag{2.61}$$

$$\frac{dy}{y} = dx ,$$

$$\ln|y| - \ln|C| = x ,$$

$$y_{\text{з.о.}} = Ce^{x} . \tag{2.62}$$

Крок другий: беремо пробний розв'язок неоднорідного рівняння, подібний до правої частини цього ДР:

$$y_{\text{ч.н.}} = Ae^{2x} ,$$

підставляємо його до рівняння (2.60), знаходимо невідомий коефіцієнт A та частинний розв'язок цього рівняння:

$$2Ae^{2x} - Ae^{2x} = e^{2x} \Rightarrow A = 1 ,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = e^{2x}. \tag{2.63}$$

Крок третій: беремо до уваги теорему 2.1 і знаходимо загальний інтеграл рівняння (2.60) як суму функцій (2.62) та (2.63):

$$y_{\text{з.н.}} = Ce^{x} + e^{2x}. \tag{2.64}$$

Перевіримо отриманий результат методом варіації довільної сталої. Перший крок цього методу такий самий, як і попереднього, – відшукання загального інтеграла однорідного рівняння, тобто функції (2.62). На другому кроці варіюємо довільну сталу, тобто замінюємо у функції (2.62) довільну сталу на невідому функцію $u(x)$, підставляємо до рівняння (2.60) пробний розв'язок

$$y_{\text{з.н.}} = u(x)e^{x} ,$$

$$y' - y = e^{2x} \Rightarrow u'e^{x} + ue^{x} - ue^{x} = e^{2x}$$

та отримуємо рівняння для визначення невідомої функції

$$u' = e^{x} . \tag{2.65}$$

Зауважимо, що доданки, які не містять похідної u', знищилися саме тому, що, якби u була сталою величиною, то вона б задовольнила однорідне рівняння $y' - y = 0$. Отже, взаємознищення доданків, що не містять похідної від $u(x)$, має відбуватися *завжди* і це гарний перевірочний момент.

Із рівняння (2.65) знаходимо функцію $u = e^x + C$ і загальний інтеграл

$$y_{\text{з.н.}} = (e^x + C)e^x,$$

який збігається з тим, що був знайдений методом подібності (див. (2.64)).●

●Приклад 2.11. Зінтегруємо рівняння $y' - y = \sin x - 2\cos x$.

На першому кроці розглядаємо однорідне рівняння, яке є однаковим з рівнянням (2.61), тому його загальний інтеграл описується виразом (2.62).

На другому кроці підставляємо пробний розв'язок:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\sin x + B\cos x$$

до неоднорідного рівняння й отримуємо тотожну рівність

$$(A - B)\cos x - (A + B)\sin x \equiv \sin x - 2\cos x.$$

Тотожна рівність має виконуватися для будь-яких значень змінної x, тому мають бути попарно однаковими коефіцієнти біля синусів та косинусів:

$$\begin{cases} A - B = -2 \\ A + B = -1. \end{cases}$$

Із цієї системи рівнянь знаходимо значення сталих, що містяться в загальному інтегралі, а саме:

$$A = -\frac{3}{2},\ B = \frac{1}{2}.$$

На третьому кроці беремо до уваги теорему 2.1 і визначаємо загальний інтеграл ДР:

$$y_{\text{з.н.}} = Ce^x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\ .●$$

2.4.5. Рівняння Бернуллі

Означення 2.4. *Рівнянням Бернуллі* називають рівняння типу

$$y' + p(x)y = y^m f(x)\,. \tag{2.66}$$

Рівняння такого типу слід інтегрувати шляхом зведення їх до лінійного неоднорідного рівняння. Для цього зручно переписати рівняння (2.66) у формі

$$y^{-m}y' + p(x)y^{1-m} = f(x)\,. \tag{2.67}$$

Легко помітити, що

$$(y^{1-m})' = (1-m)y^{-m}y'\,.$$

Зробивши заміну $z = y^{1-m}$, знаходимо рівність

$$y^{-m}y' = \frac{z'}{1-m}$$

та отримуємо лінійне неоднорідне рівняння

$$\frac{z'}{1-m} + p(x)z = f(x)\,.$$

Це рівняння можна зінтегрувати методом варіації довільної сталої або методом подібності.

2.5. Задача Коші для функції $y(x)$. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Особливі точки на площині інтегральних кривих

2.5.1. Задача Коші

Припустимо, що в ході вирішення практично важливого інженерного завдання або наукової проблеми виникла необхідність зінтегрувати ДР 1-го порядку для функції $y(x)$ та вибрати із загального інтеграла $y \equiv \phi(x, C)$ такий розв'язок рівняння, який задовольняє умову $y(x_0) = y_0$, де x_0, y_0 – задані сталі величини.

Означення 2.5. Задача Коші для диференціального рівняння першого порядку полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок рівняння, який задовольняє задану початкову умову.

Формально задача Коші для ДР першого порядку задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} F(x, y, y') = 0 \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{2.68}$$

перше з яких є заданим ДР, а друге з історичних причин називають початковою умовою[1], накладеною на функцію $y(x)$.

Якщо вдається знайти явну форму загального інтеграла $y = \phi(x, C)$, то проблема розв'язання задачі Коші зводиться до відшукання такого значення $C = C_0$, за якого $\phi(x_0, C_0) = y_0$.

2.5.2. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші

Існують три принципово різні можливості:

а) задача Коші не має розв'язку;

б) задача Коші має один-єдиний розв'язок;

в) задача Коші має більш ніж один розв'язок.

Достатні умови того, що задача Коші має один-єдиний розв'язок формулюють у формі теореми існування та єдиності розв'язку. У більшості підручників теорему існування та єдиності розв'язку формулюють для задачі Коші, поставленої для ДР, розв'язаного відносно похідної:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.69}$$

Слід пам'ятати, що цю теорему формулюють у різних підручниках не зовсім однаково. Для визначеності, сформулюємо її так, як це зроблено у підручнику [2]. Для цього позначимо ла-

---

[1] Завдання, про яке тут йдеться, уперше виникло ймовірно при вивченні руху небесних тіл, а точка $P_0(x_0, y_0)$ була точкою розташування тіла в полі зору телескопа *на початку* спостереження.

тинською літерою D (від англ. *domain*) область означення функції $f(x, y)$ на площині XOY.

Теорема 2.2. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\partial f / \partial y$ неперервні в області D, то крізь кожну точку (x_0, y_0) області D проходить одна-єдина інтегральна крива.

Зауваження 2.6. Різниця у формулюванні теореми існування та єдиності розв'язку, що міститься у різних підручниках, спричинена здебільшого тим, що в цій теоремі сформульовано *достатні* умови існування та єдиності розв'язку, а тому умову неперервності похідної можна замінити більш м'якою умовою[1].

Зауваження 2.7. Доведення теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші виходить за межі стислого курсу диференціальних рівнянь[2].

2.5.3. Неперервна залежність розв'язку задачі Коші від початкових умов та параметрів задачі

Розглянемо задачу Коші, задану рівняннями (2.69). Якщо виконані умови теореми існування та єдиності розв'язку цієї задачі, то зміна початкових величин функції y та її аргументу (y_0 та x_0, відповідно) веде до зміни частинного розв'язку диференціального рівняння, тобто частинний розв'язок залежить від початкових величин x_0 та y_0 як від параметрів. На практиці, початкові величини x_0 та y_0 визначаються наближено, і зазвичай бажано, щоб невеличка зміна початкових умов не призводила до великої зміни функції $y(x)$, яка характеризує роботу інженер-

---

[1] Таку неоднозначність можна пояснити простим прикладом із життя: для того, щоб не застрягти в ліфті *достатньо* не виходити з квартири, але можна накласти на себе м'якішу умову, а саме, виходити з квартири і не користуватися ліфтом, а йти сходами, – цього також достатньо, щоб не застрягти в ліфті.

[2] Доведення теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші бажаючі можуть знайти у підручнику [3].

ного пристрою, або перебіг певного процесу (фізичного, хімічного, соціального тощо).

Отже, постає запитання: у якому випадку незначна зміна початкових умов веде лише до незначної зміни функції $y(x, x_0, y_0)$?

З означення неперервності функції, наведеного в підручниках з математичного аналізу, відомо, що це запитання еквівалентне такому: у якому випадку розв'язок задачі Коші є неперервною функцією параметрів x_0, y_0 ?[1] Відповідь на це запитання дає теорема 2.3.

Теорема 2.3. Якщо в околі початкової точки (x_0, y_0) виконані умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші, то розв'язок звичайного диференціального рівняння є неперервною функцією параметрів x_0, y_0.

При розв'язуванні практично важливих задач зустрічаються такі диференціальні рівняння, до яких поряд із функцією, яку треба визначити, входять параметри μ_k ($k = 1, 2, ..., m$ – номер параметра), задані умовами задачі.

Теорема 2.4. Якщо в околі точки (x_0, y_0) функція f задовольняє умову теореми існування та єдиності розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} y' = f(x, y, \mu_k) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.70}$$

та є неперервною функцією параметра μ_k, то розв'язок задачі Коші також є неперервною функцією цього параметра[2].

2.5.4. Особливі точки на площині інтегральних кривих

Значення змінної x та функції y є координатами точок на площині інтегральних кривих диференціального рівняння.

---

[1] Звичайно ж, у підручниках з математичного аналізу йдеться не про задачу Коші, а про два еквівалентні означення неперервності функції.

[2] Доведення теорем 2.3 та 2.4 бажаючі можуть знайти у підручнику [3].

Означення 2.6. Точки (x_0, y_0), крізь які проходить більше ніж одна інтегральна крива або не проходить жодна інтегральна крива, називають *особливими точками*.

В особливих точках порушуються умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші, але не всі точки, у яких порушуються ці умови, особливі, тому що умови існування та єдиності розв'язку є достатніми, але не є необхідними. Іншими словами: якщо в точці (x_0, y_0) умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші не виконані, то слід перевірити, чи не є ця точка особливою. Щоб надати загального уявлення про суть проблеми та перелічити різні типи особливих точок, розглянемо ті випадки, коли таку перевірку вдається здійснити шляхом знаходження загального інтеграла ДР, хоча особливі точки можуть існувати також і на площині інтегральних кривих таких рівнянь, розв'язок яких не вдається визначити аналітично.

Розглянемо ДР 1-го порядку

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\,. \tag{2.71}$$

Рівняння (2.71) можна переписати у двох еквівалентних формах:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\,, \text{ або } \frac{dx}{dy} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}\,. \tag{2.72}$$

Досвід людства показує, що в ході вирішення переважної більшості практичних завдань виникають такі рівняння, у яких функції $M(x,y)$, $N(x,y)$ та їхні частинні похідні неперервні. Якщо хоч для одного із рівнянь (2.72) виконано умови теореми існування та єдиності розв'язку в точці (x_0, y_0), то ця точка не є особливою. Отже, особливою може бути лише точка, у якій справджуються умови

$$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0\,, \tag{2.73}$$

тому що в цій точці функції, що стоять у правих частинах обох рівнянь (2.72), мають нескінченний розрив.

Щоб ознайомитися з різними типами особливих точок розглянемо декілька рівнянь, на площині інтегральних кривих яких існують точки, де порушуються умови (2.73).

1. Знайдемо особливі точки на площині інтегральних кривих рівняння

$$(x-2)y' = 2(y-1)\,, \tag{2.74}$$

яке належить до рівнянь, розглянутих у п. 2.2.3. Представимо рівняння у формі (2.71):

$$(x-2)dy = 2(y-1)dx .$$

Запишемо умови (2.73): $x-2=y-1=0$. Точка з координатами $x_0=2$, $y_0=1$ може бути особливою. Зробимо заміну $\overline{x}=x-2;\ \overline{y}=y-1$:

$$\overline{x}d\overline{y}=2\overline{y}d\overline{x} .$$

Зінтегруємо рівняння у квадратурах:

$$2\int\frac{d\overline{x}}{\overline{x}}=\int\frac{d\overline{y}}{\overline{y}} .$$

Знайдемо рівняння інтегральних кривих:

$$\overline{y}=C\overline{x}^2 .$$

Сім'я цих інтегральних кривих є сукупністю незліченої кількості парабол. Усі вони проходять крізь точку з координатами $x_0=2$, $y_0=1$, а отже, ця точка є особливою точкою.

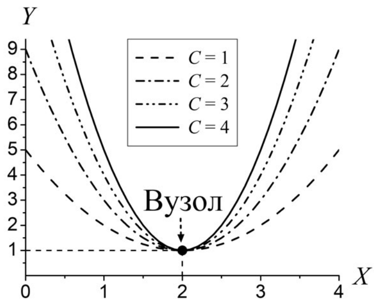


Рис. 2.2. Інтегральні криві рівняння (2.74), що відповідають чотирьом значенням довільної сталої і проходять крізь особливу точку типу *вузол*

На рис. 2.2 зображено інтегральні криві, які відповідають чотирьом значенням сталої *C*. Вони мають вигляд мотузок, зв'язаних одна з одною в особливій точці. Тому особливу точку, крізь яку проходить більш ніж одна інтегральна крива, називають *вузловою точкою*, або просто *вузлом*, на площині інтегральних кривих.

2. Перевіримо на наявність особливих точок площину інтегральних кривих рівняння

$$y' = -\frac{y}{x}. \qquad (2.75)$$

Переписавши це рівняння у формі $xdy = -ydx$, бачимо, що точка $x_0 = y_0 = 0$ може бути особливою точкою. Щоб з'ясувати, чи проходять крізь цю точку інтегральні криві, інтегруємо рівняння у квадратурах

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y},$$

і знаходимо загальний інтеграл

$$y = \frac{C}{x}. \qquad (2.76)$$

Інтегральні криві рівняння (2.75) зображено на рис. 2.3 для додатних (суцільні лінії) та від'ємних (пунктирні лінії) значень довільної сталої C: суцільні лінії відповідають додатним значенням, а пунктирні – від'ємним. Чим менше абсолютне значення довільної сталої, тим ближче підходить інтегральна крива до точки $x_0 = y_0 = 0$, але жодна інтегральна крива не проходить крізь цю точку[1]. Тому ця точка є особливою точкою, яку називають *сідлом*.

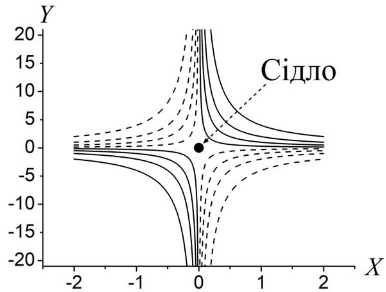


Рис. 2.3. Особлива точка типу *сідло* та інтегральні криві рівняння (2.75), що відповідають значенням довільної сталої ±0.3, ±1, ±2, ±4

[1] Тут спостерігаємо дуже тонку ситуацію: крізь точку (0,0) проходить лінія $y = 0$, яка, на перший погляд, відповідає нульовому значенню довільної сталої в загальному інтегралі (2.76). Але насправді, якщо $C = 0$, у цій точці виникає невизначеність 0/0.

3. Знайдемо особливі точки на площині інтегральних кривих рівняння

$$(y+2)y' = 1 - x\,. \tag{2.77}$$

Переписавши це рівняння у формі $(y+2)dy = -(x-1)dx$, бачимо, що точка $x_0 = 1$, $y_0 = -2$ може бути особливою:

$$(y+2)dy = -(x-1)dx\,.$$

Шляхом елементарного інтегрування знаходимо загальний інтеграл

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = C^2$$

і бачимо, що інтегральними кривими є концентричні кола радіуса C із центром у точці (1, –2). Тут, як і в попередньому прикладі зі зменшенням довільної сталої, інтегральні криві наближаються до точки (x_0, y_0), але не проходять крізь неї, а отже, ця точка є особливою точкою типу центр (рис. 2.4).

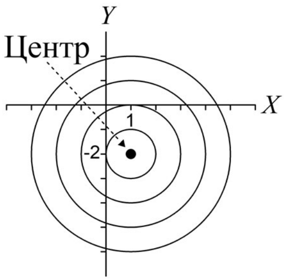


Рис. 2.4. Особлива точка типу *центр* та інтегральні криві рівняння (2.77), що відповідають значенням *C* = 1, 2, 3, 4

4. Перевіримо на наявність особливих точок площину інтегральних кривих рівняння

$$y' = \frac{x+y}{x-y}\,. \tag{2.78}$$

Із цією метою виразимо це рівняння через диференціали:

$$(x-y)dy - (x+y)dx = 0\,.$$

З умов $x - y = 0$, $x + y = 0$ випливає, що точка з координатами $x_0 = y_0 = 0$ може бути особливою. Якщо винести x за дужки, легко зрозуміти, що шляхом введення функції $z = y / x$ це рівняння легко зінтегрувати у квадратурах так, як вказано в п. 2.2.1, та отримати рівність

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{1-z}{1+z^2} dz .$$

Виконаємо інтегрування:

$$\operatorname{arctg}(z) - \frac{1}{2}\ln(1+z^2) = \ln x + \tilde{C} .$$

Підставивши в останню рівність функцію $z = y / x$, урахувавши, що $\ln x = \frac{1}{2}\ln x^2$, і перегрупувавши доданки, знайдемо загальний інтеграл

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \ln|C|,$$

який доцільно виразити у формі

$$\sqrt{x^2 + y^2} = |C| e^{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}} . \tag{2.79}$$

Ліва частина рівності (2.79) дорівнює відстані r від точки інтегральної кривої з координатами (x, y) до початку координат, а показник експоненти дорівнює куту α між радіус-вектором точки та віссю абсцис, оскільки $y / x = \operatorname{tg}\alpha$. З огляду на це рівняння інтегральних кривих $r = |C| e^{\alpha}$ описує віддалення точки інтегральної кривої від початку координат при зростанні кута α.

Скориставшись можливостями персонального комп'ютера, неважко побудувати графіки інтегральних кривих $y(x, C)$, зображені на рис. 2.5 для чотирьох значень довільної сталої. Усі ці криві починаються з точки (0,0), тобто ця точка лежить на всіх цих кривих, і тому вона є особливою точкою, яку називають *фокусом*, до якого сходяться всі інтегральні криві.

Зауваження 2.8. Надана вище класифікація особливих точок має візуальний (оснований на вигляді інтегральних кривих) характер. Формальні ознаки, за якими відрізняються особливі точки різних типів, буде надано пізніше, при дослідженні стійкості динамічних систем до малих збурень.

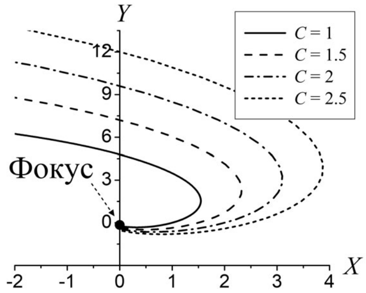


Рис. 2.5. Особлива точка типу *фокус* та інтегральні криві рівняння (2.79)

Зауваження 2.9. Коли задачу Коші поставлено для рівняння, не розв'язаного відносно похідної, то буває, що це рівняння є еквівалентним до двох або більше рівнянь, розв'язаних відносно похідної. Тоді крізь певні точки площини *XOY* може проходити дві або більше інтегральних кривих, але ці точки особливими не вважають. Проілюструємо це прикладом.

●Приклад 2.12. Зінтегруємо рівняння

$$y\sqrt{1+y'^2}=1. \qquad (2.80)$$

Підставивши до цього рівняння $y'=\operatorname{tg} t$, неважко впевнитися, що $y=\cos t$, $x=-\sin t+C$, і тому координати інтегральних кривих задовольняють рівняння

$$(x-C)^2+y^2=1,$$

яке є рівнянням кіл, центри яких лежать у різних точках осі *OX*. Інтегральними кривими є лише верхні половини кіл, оскільки $\sqrt{1+y'^2}>0$, тому з рівняння (2.80) випливає нерівність $y>0$.

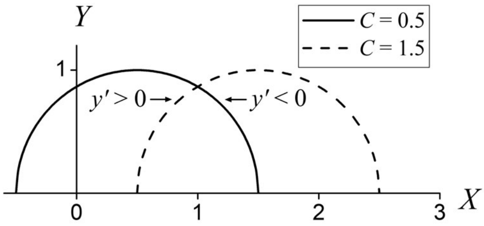


Рис. 2.6. Інтегральні криві рівняння (2.80), що відповідають значенням C = 0.5 та C = 1.5. Поблизу точки перетину кривих похідні функції y відрізняються за знаком

Рис. 2.6 ілюструє той факт, що в кожній точці з координатою $y < 1$ перетинаються дві інтегральні криві. Ці точки не вважають особливими, оскільки рівняння (2.80) еквівалентне до двох рівнянь, розв'язаних відносно похідної:

$$y' = +\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\ , \ y > 0, \quad y' > 0,$$

$$y' = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\ , \ y > 0, \quad y' < 0.$$

Із рис. 2.6 видно, що в точках перетину інтегральних кривих рівняння (2.80) один із частинних розв'язків є зростаючою, а другий – спадною функцією. Ці функції відповідають двом різним рівнянням, розв'язаним відносно похідної, і крізь кожну точку площини з координатою $y < 1$ проходить лише одна інтегральна крива кожного з рівнянь.●

2.6. Інтегрування рівнянь, не розв'язаних відносно похідної

2.6.1. Інтегрування шляхом розв'язання відносно похідної

Як було зазначено, будь-яке диференціальне рівняння першого порядку можна представити у формі

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.81}$$

тому що, яким би не було це рівняння, усі його доданки, розташовані праворуч від знака рівності, можна перенести ліворуч, змінивши знак цих доданків на протилежний. Стаючи до інтегрування такого рівняння слід спробувати розв'язати його відносно y'. Після цього слід спробувати звести рівняння, розв'язане відносно похідних до одного з типів, які вже були розглянуті. Це не гарантує успіху, але дає гарні шанси на успіх. Пояснімо це твердження прикладами.

●Приклад 2.13. Зінтегруємо рівняння

$$y' = x\sqrt{1 + y'^2}\ . \tag{2.82}$$

Це рівняння дуже просто розв'язати відносно y':

$$y'^2 = x^2(1 + y'^2) \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

Перейдемо до диференціалів:

$$dy = \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}\ .$$

Виконаємо інтегрування:

$$y - C = \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int (1 - x^2)^{-1/2} d(1 - x^2) = -(1 - x^2)^{1/2}\ .$$

Виразимо загальний інтеграл у формі алгебраїчного рівняння

$$(y - C)^2 + x^2 = 1\ .$$

Це рівняння сім'ї кіл, але з (2.82) випливає, що $y' > 0$, якщо $x > 0$, та $y' < 0$, якщо $x < 0$, тому загальним інтегралом є безліч напівкіл, три з яких зображено на рис. 2.7.●

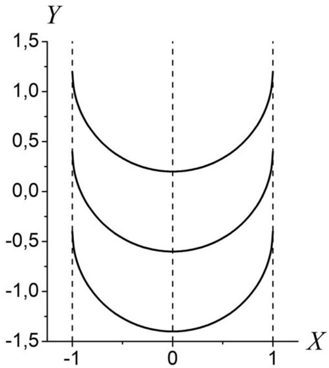


Рис. 2.7. Інтегральні криві рівняння (2.82)

●Приклад 2.14. Зінтегруємо рівняння

$$\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = 1 . \qquad (2.83)$$

Розв'язавши його відносно y', знаходимо два рівняння:

$$y' = \pm\sqrt{y^2 - 1} .$$

Зводимо два рівняння, розв'язаних відносно похідної, до квадратур

$$x + C = \pm\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}} .$$

Читачеві може бути корисно самостійно виконати інтегрування та отримати загальний інтеграл

$$y = \pm\mathrm{ch}(x + c) .● \qquad (2.84)$$

Значну кількість диференціальних рівнянь не вдається зінтегрувати шляхом розв'язання їх відносно похідної, але можна зробити це, ввівши параметр $t = y'$ і виразивши через цей параметр величини x та y.

2.6.2. Завдання функцій у параметричній формі

Суть параметричного завдання функцій легко зрозуміти, розглянувши відоме механічне явище, а саме, рух камінця, який у момент $t = 0$ жбурнули з високого берега річки з початковою горизонтальною швидкістю v. Розраховуючи траєкторію руху камінця в першому наближенні, опором повітря можна знехтувати. Тоді рух тіла буде складатися з горизонтального руху зі сталою швидкістю v та вертикального падіння з прискоренням сили тяжіння g. Якщо початок системи координат розташований на початку траєкторії камінця, його координати визначаються формулами

$$\begin{cases} x(t) = vt \\ y(t) = -\dfrac{gt^2}{2}. \end{cases} \tag{2.85}$$

Із першої формули легко знайти величину $t = x / v$, підставити її до другої формули, і у такий спосіб знайти рівняння траєкторії руху камінця, яка, як загальновідомо, є параболою

$$y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v^2} \cdot x^2 . \tag{2.86}$$

У цьому контексті час t називають *параметром*, а формули (2.85) – *параметричними рівняннями параболи*. Параметричні рівняння (2.85) еквівалентні рівнянню параболи (2.86).

2.6.3. Рівняння, які інтегруються введенням параметра t = y′

Розглянемо два типи рівнянь, які можна зінтегрувати, позначивши $y' = t$ і виразивши змінну x та функцію y через параметр t, тобто, знайшовши параметричну форму загального інтеграла.

1. ***Рівняння першого типу*** – це такі рівняння, які не містять функції y, тобто рівняння

$$F(x, y') = 0. \tag{2.87}$$

Ведення параметра $y' = t$ веде до успіху, якщо рівняння (2.87) вдається розв'язати відносно змінної x, тобто звести до форми

$$x = \varphi(y'). \qquad (2.88)$$

Щоб це довести, перейдемо в рівнянні (2.88) до диференціалів

$$dy = tdx. \qquad (2.89)$$

Продиференціюємо рівняння (2.88):

$$dx = d\varphi(t) = \frac{d\varphi}{dt}dt.$$

Підставляємо dx до рівняння (2.89):

$$dy = t\frac{d\varphi}{dt}dt.$$

Інтегруючи обидві частини останнього рівняння та підставляючи $y' = t$ до рівняння (2.88), знаходимо параметричну форму загального інтеграла

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int t\frac{d\varphi}{dt}dt + C. \end{cases} \qquad (2.90)$$

Зауваження 2.10. Бажано обчислити інтеграл, що входить до рівнянь (2.90), і знайти з них функцію $y(x)$. Якщо таке зробити не вдається або вираз для функції виявляється надто громіздким, це не є великою проблемою, тому що програми, які входять до програмного забезпечення персонального комп'ютера, дозволяють швидко знайти числові значення заданих у параметричній формі функцій і побудувати графіки на площині XOY.

●Приклад 2.15. Зінтегруємо рівняння

$$y'^3 - y' - (x+1) = 0. \qquad (2.91)$$

Це рівняння є кубічним алгебраїчним відносно y'. Розв'язок кубічного алгебраїчного рівняння дуже громіздкий, що утруднить спробу його інтегрування. Тому краще розв'язати (2.91) відносно змінної x та ввести в розв'язок параметр $t = y'$:

$$x = t^3 - t - 1 .$$

Далі знаходимо диференціал функції $x(t)$:

$$dx = 3t^2 - 1$$

і за допомогою рівності (2.89) пов'язуємо диференціал функції $y(x)$ із параметром t:

$$dy = tdx = t(3t^2 - 1) .$$

Звідси виражаємо функцію y через параметр t:

$$y = \int t(3t^2 - 1)dt + C ,$$

та знаходимо параметричну форму загального інтеграла

$$\begin{cases} x = t^3 - t - 1 \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 - \dfrac{1}{2}t^2 + C. \end{cases} \bullet$$

Зауваження 2.11. Представляючи загальний інтеграл рівняння типу (2.91), слід записувати його як систему двох рівнянь, а не писати лише рівняння для функції y, забувши про рівняння для змінної x.

2. ***Рівняння другого типу*** не містять змінної x, тобто мають форму

$$F(y, y') = 1. \tag{2.92}$$

Покажемо, що введення параметра $y' = t$ дозволяє зінтегрувати це рівняння у квадратурах, якщо його вдається розв'язати відносно функції y, тобто записати у формі

$$y = \varphi(y') .$$

У такому разі диференціал функції $y(x)$ задовольняє два співвідношення

$$dy = d\varphi(t) = \frac{d\varphi}{dt}dt$$

та $dy = tdx$. Із цього випливає рівність

$$tdx = \frac{d\varphi}{dt} dt$$

та параметрична форма загального інтеграла

$$\begin{cases} x = \int \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dt}{t} + C \\ y = \varphi(t). \end{cases} \bullet$$

●Приклад 2.16. Зінтегруємо рівняння

$$y'^3 - y' - (y+1) = 0 .$$

Викладемо процедуру інтегрування цього рівняння конспективно, оскільки вона подібна до тієї, що була описана при розгляді прикладу 2.15. Виражаємо функцію та незалежну змінну через параметр

$$y = t^3 - t - 1,\ dy = (3t^2 - 1)dt = tdx ,$$

$$x = \int \left(3t - \frac{1}{t} \right) dt ,$$

виконуємо інтегрування й отримуємо загальний інтеграл у параметричній формі

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} t^2 - \ln|t| + C \\ y = t^3 - t - 1. \end{cases} \bullet$$

2.6.4. Рівняння Лагранжа та рівняння Клеро

Окрім рівнянь двох типів, розглянутих вище, існують ще окремі види рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, які вдається зінтегрувати шляхом введення параметра $y' = t$. Найбільш відомим із них є рівняння Лагранжа

$$y = x\mu(y') + \eta(y') \tag{2.93}$$

та його окремий випадок, рівняння Клеро:

$$y = xy' + \eta(y') . \tag{2.94}$$

Покажемо, що шляхом введення параметра t рівняння Лагранжа можна перетворити на лінійне неоднорідне ДР. Для цього виразимо рівняння (2.93) через цей параметр:

$$y(t) = x\mu(t) + \eta(t) . \tag{2.95}$$

Продиференціюємо його праву та ліву частини:

$$dy = \mu dx + x\frac{d\mu}{dt}dt + \frac{d\eta}{dt}dt . \tag{2.96}$$

Згадаємо, що $dy = tdx$, і підставимо це у рівність (2.96):

$$tdx = \mu dx + x\frac{d\mu}{dt}dt + \frac{d\eta}{dt}dt .$$

Згрупуємо доданки, що містять dt та dx:

$$(t-\mu)dx = \left(x\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)dt . \tag{2.97}$$

Поділивши праву і ліву частини рівняння (2.97) на $(t-\mu)dt$ та позначивши

$$P(t) \equiv -\frac{d\mu(t)/dt}{t-\mu(t)}, \qquad f(t) = \frac{d\eta(t)/dt}{t-\mu(t)},$$

отримаємо неоднорідне лінійне рівняння для функції $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} + P(t)x = f(t),$$

яке можна зінтегрувати методом варіації довільної сталої й у такий спосіб знайти функцію $x(t)$. Знайдений вираз для $x(t)$ та вираз (2.95) для $y(t)$ будуть параметричною формою загального інтеграла рівняння Лагранжа.

Важливо, що рівняння (2.93) не зводиться до лінійного в окремому випадку $\mu(t) = t$, тому що в цьому випадку $P(t)$ дорівнює нескінченності, тобто не існує. Оскільки $t = y'$, то в цьому випадку $\mu(y') = y'$, а отже, рівняння Лагранжа перетворюється на рівняння Клеро (2.94).

Оскільки рівняння Клеро не перетворюється на лінійне ДР, то розглянемо процедуру його інтегрування окремо. Виразивши праву частину рівняння Клеро через параметр t, отримаємо рівність

$$y = xt + \eta(t)\,. \tag{2.98}$$

Продиференціювавши цю рівність, знайдемо вираз для диференціала функції y:

$$dy = d(xt + \eta) = tdx + xdt + d\eta\,. \tag{2.99}$$

Оскільки $dy = tdx$ та $d\eta = \dfrac{d\eta}{dt}dt$, то з рівності (2.99) випливає, що

$$\left(x + \frac{d\eta}{dt}\right)dt = 0\,.$$

Остання рівність еквівалентна двом рівнянням:

$$\begin{cases} dt = 0 \\ x + \dfrac{d\eta}{dt} = 0, \end{cases} \tag{2.100}$$

перше з яких показує, що параметр t є сталою величиною, тобто $t = C$.

Підставивши стале значення параметра до рівності (2.98), знаходимо загальний інтеграл рівняння Клеро

$$y = xC + \eta(C)\,. \tag{2.101}$$

(Функція $\eta(t)$ відома, коли інтегрується конкретне рівняння).

У наступному підрозділі буде показано, що друге з рівнянь (2.100) дозволяє знайти особливий розв'язок рівняння Клеро, а наразі проілюструємо це твердження конкретним прикладом.

●Приклад 2.17. Зінтегруємо рівняння

$$y = xy' - y'^2\,. \tag{2.102}$$

Введемо в це рівняння параметр $y' = t$: $y = xt - t^2$.

Підставивши до останньої рівності стале значення параметра t, знайдемо загальний інтеграл $y = Cx - C^2$, який є сукупністю лінійних функцій змінної x. У цьому прикладі $\eta(t) = t^2$,

$\frac{d\eta}{dt} = 2t$, і тому другим із рівнянь (2.100) є рівняння $x - 2t = 0$, з якого випливає, що $y' = x/2$. Підставивши цю похідну до рівняння (2.102), доходимо висновку, що квадратична функція

$$y = \frac{x^2}{4}$$

є особливим розв'язком цього рівняння, оскільки вона не входить до загального інтеграла.

2.7. Відшукання особливих розв'язків диференціального рівняння першого порядку

У підрозд. 2.1 особливий розв'язок ДР був означений як такий розв'язок, який не можна отримати із загального інтеграла за жодних значень довільних сталих. У цьому підрозділі буде доведено теорему, яка дозволяє доповнити це означення та вивести систему двох рівнянь для знаходження особливих розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку.

Теорема 2.5. Обвідна лінія сім'ї інтегральних кривих є графіком особливого розв'язку диференціального рівняння першого порядку.

Доведення. Розглянемо рівняння

$$y' = f(x, y). \tag{2.103}$$

Позначимо як $y = \phi(x, C)$ загальний інтеграл та $y = \psi(x)$ − рівняння обвідної лінії сім'ї інтегральних кривих. За означенням розв'язку ДР, підстановка будь-якої функції сім'ї $\phi(x, C)$ перетворює це рівняння на тотожність

$$\phi'(x, C) \equiv f(x, y). \tag{2.104}$$

Розглянемо один із безлічі розв'язків, що входять до загального інтеграла, зафіксувавши значення довільної сталої $C = C_0$. Цей розв'язок дотикається до обвідної лінії в певній точці, координати якої позначимо (x_0, y_0) , рис. 2.8. У цій точці функції $\phi(x, C_0)$ та $\psi(x)$ мають однакове значення, тобто

$$\phi(x_0, C_0) = \psi(x_0) \tag{2.105}$$

і більше того, однакову похідну, оскільки в цій точці їхні графіки мають спільну дотичну. Отже, виконується рівність

$$\phi'(x_0, C_0) = \psi'(x_0)\,. \tag{2.106}$$

(Рівність похідних у точках дотику є формальним означенням обвідної лінії сім'ї заданих кривих).

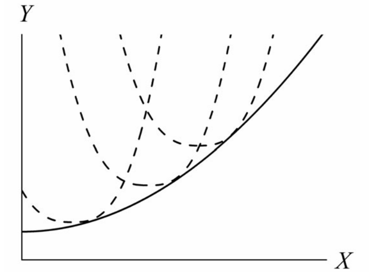


Рис. 2.8. Схематичне представлення особливого розв'язку диференціального рівняння (суцільна лінія) **і трьох частинних розв'язків** (пунктирні лінії)

Оскільки будь-яка точка обвідної лінії $y = \psi(x)$ є точкою дотику до якоїсь інтегральної кривої, то в усіх точках цієї лінії виконується рівність

$$\phi'(x, C) = \psi'(x)\,, \tag{2.107}$$

де $C = C(x)$, тому що до різних точок дотикаються різні функції із сім'ї інтегральних кривих. Із рівностей (2.104) та (2.107) випливає, що умова $\psi'(x) \equiv f(x, y)$ виконується в кожній точці обвідної лінії, а отже, функція $y = \psi(x)$ є розв'язком диференціального рівняння (2.103), що і треба було довести.

Доведена теорема дозволяє доповнити надане в підрозд. 2.1 означення особливого розв'язку диференціального рівняння для випадку рівняння 1-го порядку.

Доповнене означення особливого розв'язку: особливий розв'язок диференціального рівняння першого порядку – це такий розв'язок, що не входить до загального інтеграла і зображується обвідною лінією сім'ї інтегральних кривих.

Скористаємось рівністю (2.107), щоб вивести систему рівнянь для знаходження особливих розв'язків ДР першого порядку. Для цього візьмемо до уваги, що загальний інтеграл завжди можна записати у формі якогось *не*диференціального рівняння, що пов'язує між собою x, y та C:

$$\Phi(x, y, C) = 0 . \tag{2.108}$$

Диференціал будь-якої сталої величини, а отже, і диференціал функції $\Phi(x, y, C)$ дорівнює нулю:

$$d\Phi(x, y, C) = 0 . \tag{2.109}$$

Зауважимо, якщо перейти з однієї точки в просторі змінних (x, y, C) до іншої точки в цьому ж просторі, координати якої задовольняють рівняння (2.108), то диференціал функції Φ дорівнюватиме

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial C} dC = 0 . \tag{2.110}$$

Якщо обидві точки лежать на *одній* з інтегральних кривих, то

$$dy = d\phi = \phi' dx, \quad dC = 0,$$

тому що кожна інтегральна крива відповідає фіксованому значенню C. Якщо ж обидві точки лежать на обвідній, то

$$dy = d\psi = \psi' dx, \quad dC \neq 0,$$

оскільки різні точки обвідної відповідають різним значенням C. Тому, при переході з точки до точки *вздовж інтегральної кривої* справджується рівність

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \phi' \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx = 0 , \tag{2.111}$$

а *вздовж обвідної лінії* – рівність

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \psi' \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial \Phi}{\partial C} dC = 0 . \tag{2.112}$$

Тепер, як було анонсовано, використаємо рівність (2.107) та перепишемо рівняння (2.112) у формі

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \phi' \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx + \frac{\partial \Phi}{\partial C} dC = 0 . \tag{2.113}$$

Віднявши від лівої та правої частини рівняння (2.113) ліву та праву частини рівняння (2.111), одержуємо рівність $(\partial\Phi/\partial C)dC = 0$. Зваживши на те, що $dC \neq 0$ уздовж обвідної, і згадавши про рівняння (2.108), одержуємо систему рівнянь для знаходження особливих розв'язків диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \tag{2.114}$$

Особливий розв'язок не містить сталої C, тому завдання щодо його знаходження полягає у виключенні цієї сталої із системи рівнянь (2.114).

●Приклад 2.18. Знайдемо загальний інтеграл та особливий розв'язок рівняння

$$y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y. \tag{2.115}$$

Загальний інтеграл неважко знайти таким чином, як було запропоновано в п. 2.6.3, а саме, зробивши заміну $y' = t$. Читачеві може бути корисним самостійно здійснити необхідні обчислення і переконатись у тому, що для цього рівняння загальним інтегралом є сім'я функцій

$$y = \phi(x, C) = \frac{1}{4}C^2 - \frac{1}{2}(x - C)^2.$$

Три функції із цієї сім'ї функцій показано на рис. 2.9.

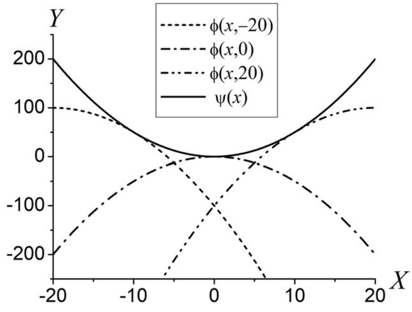


Рис. 2.9. Три частинних розв'язки та особливий розв'язок рівняння (2.115)

Система (2.114), призначена для знаходження особливого розв'язку, має форму

$$\begin{cases} 4y - C^2 + 2(x - C)^2 = 0 \\ -2C - 4(x - C) = 0. \end{cases}$$

Із другого рівняння системи випливає, що $C = 2x$, а тоді перше рівняння дає особливий розв'язок

$$y = \psi(x) = \frac{1}{2}x^2,$$

представлений на рис. 2.9 суцільною лінією.●

●Приклад 2.19. За допомогою системи рівнянь (2.114) знайдемо особливий розв'язок рівняння Клеро із його загального інтеграла

$$y = xC + \eta(C), \qquad (2.116)$$

(див. (2.101)). У цьому випадку перше рівняння системи (2.114) має форму

$$xC + \eta(C) - y = 0,$$

тому другим рівнянням системи є

$$x + \frac{d\eta}{dC} = 0. \qquad (2.117)$$

Розглянемо параметр $t = y'$. Із рівності (2.116) випливає, що $t = C$, тому рівність (2.117) перетворюється на рівняння

$$x + \frac{d\eta}{dt} = 0.$$

Тобто щойно було доведено, що друге рівняння системи (2.100), яке було отримано в ході інтегрування рівняння Клеро, є рівнянням особливого розв'язку.

РОЗДІЛ 3

Інтегрування рівнянь порядку, вищого за перший

3.1. Перший інтеграл диференціального рівняння. Зниження порядку рівняння

3.1.1. Перший інтеграл диференціального рівняння

Розпочнемо з ілюстративного прикладу. Розглянемо рівняння 2-го порядку, яке описує декілька важливих фізичних систем

$$y'' - \sin y \cos y = 0\,. \tag{3.1}$$

Домноживши його на $2y'$, отримаємо рівняння

$$2y'y'' - 2y' \sin y \cos y = 0. \tag{3.2}$$

Легко помітити, що рівняння (3.2) еквівалентне рівнянню

$$\frac{d}{dx}(y'^2 - \sin^2 y) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$y'^2 - \sin^2 y = C_1, \tag{3.3}$$

де C_1 – довільна стала. Рівняння (3.3) також еквівалентне рівнянню (3.1), але його порядок на одиницю менший, ніж порядок рівняння (3.1).

Поняття *перший інтеграл диференціального рівняння* є узагальненням наведеного прикладу.

Означення 3.1. *Першим інтегралом* диференціального рівняння n-го порядку називають еквівалентне до нього рівняння $(n-1)$-го порядку, яке містить одну довільну сталу.

5

Оскільки рівняння 2-го порядку особливо важливі для опису природних та соціальних явищ, а для рівнянь 1-го порядку існують описані в розд. 2 способи інтегрування, то відшукання першого інтеграла є актуальним завданням.

3.1.2. Зниження порядку диференціальних рівнянь

Розглянемо ДР *n*-го порядку

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 . \tag{3.4}$$

Відшукання такого рівняння порядку $n-k$, яке еквівалентне рівнянню *n*-го порядку, називають зниженням порядку рівняння. Існують такі випадки, у яких порядок рівняння може бути знижений за допомогою певних математичних перетворень.

Випадок 1. Ліва частина рівняння (3.4) може бути представлена у вигляді першої похідної від функції

$$U(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) .$$

Одне рівняння такого типу вже розглянуто вище. Другим є рівняння $y'y'' + x = 0.$ Це рівняння можна представити у формі

$$\frac{d}{dx}(y'^2 + x^2) = 0.$$

Звідси знаходимо перші інтеграли

$$y_1' = \sqrt{x^2 + C_1},$$

$$y_2' = -\sqrt{x^2 + C_1}.$$

Обидва рівняння зводяться до квадратур:

$$y_1 = \pm\int \sqrt{x^2 + C_1}\, dx + C_2.$$

Випадок 2. Рівняння не містить шуканої функції та її молодших похідних, тобто має форму

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0 .$$

У цьому випадку порядок рівняння знижується введенням функції $p = y^{(k)}$. Це перетворює рівняння *n*-го порядку (3.4) на рівняння порядку $(n-k)$ для функції p .

●Приклад 3.1. Зінтегруємо рівняння 4-го порядку

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{1}{x}\frac{d^3y}{dx^3} = 0,$$

яке можна записати також у формі

$$y^{(4)} - \frac{1}{x}y''' = 0.$$

Вводимо функцію $p = y'''$ та одержуємо рівняння 1-го порядку

$$p' - \frac{1}{x}p = 0.$$

Відокремлюємо змінні

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x},$$

виконуємо елементарне інтегрування, $p = Cx$ і знаходимо перший інтеграл рівняння 4-го порядку

$$y''' = C_1 x\,.$$

(У цьому прикладі $n - k = 1$). Виконуємо елементарне інтегрування:

$$y'' = \frac{C_1 x^2}{2} + C_2\,,$$

$$y' = \frac{C_1 x^3}{6} + C_2 x + C_3\,,$$

$$y = \frac{C_1 x^4}{24} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4\,.$$

Перепозначивши "задля краси" довільні сталі, знаходимо загальний інтеграл цього рівняння

$$y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \bullet$$

Випадок 3. Рівняння не містить незалежної змінної

$$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \tag{3.5}$$

Зниження порядку рівняння на одиницю здійснюється переходом від функції y та її похідних за змінною x до функції

$p = y'$ та її похідних за змінною y. Цей перехід виконується за допомогою формул

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}, \tag{3.6}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right) = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)... \tag{3.7}$$

●Приклад 3.2. Зінтегруємо рівняння $y'' - \sin y \cos y = 0$.

Здійснімо зазначений вище перехід за формулою (3.6):

$$p\frac{dp}{dy} - \sin y \cos y = 0,$$

відокремимо змінні та зінтегруємо рівняння у квадратурах

$$\int pdp = \int \sin y d(\sin y).$$

Виконаємо інтегрування

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2}\sin^2 y + C_1$$

та знайдемо перший інтеграл рівняння

$$y' = \sin^2 y + C_1 .●$$

Випадок 4. Ліва частина диференціального рівняння (3.4) є однорідною функцією порядку m відносно $y, y', y'', ...y^{(n)}$.

Функцію F називають однорідною, у випадку, коли вона задовольняє умову

$$F(x, \alpha y, \alpha y', \alpha y'', ..., \alpha y^{(n)}) = \alpha^m F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}), \tag{3.8}$$

де m – ціле число. Покажемо, що в цьому випадку порядок рівняння знижується на одиницю заміною функції y на функцію $z = y'/y$. Для цього запишемо

$$y' = yz,$$

$$y'' = (yz)' = y'z + z'y = yz^2 + yz' = y(z^2 + z').$$

Позначимо $\phi_1(z, z') \equiv (z^2 + z')$ і зауважимо, що

$$y''' = (y\phi_1)' = y'\phi_1 + y\phi_1' = y(z\phi_1 + \phi_1').$$

А тепер позначимо $y(z\phi_1+\phi_1')\equiv\phi_2(z,z',z'')$ і зауважимо, що

$$y^{(4)}=(y\phi_2)'=y'\phi_2+y\phi_2'=y(z\phi_2+\phi_2').$$

Увівши позначення $y(z\phi_2+\phi_2')\equiv\phi_3(z,z',z'',z''')$, доходимо висновку, що

$$y^{(n)}=y\phi_{n-1}(z,z',z'',...,z^{(n-1)}),$$

тому диференціальне рівняння (3.4) перетворюється на рівняння

$$F(x,y,yz,y\phi_1,y\phi_2,y\phi_{n-1})=0,$$

у якому ϕ_{n-1} залежить від $z,z',z'',...,z^{(n-1)}$. Завдяки однорідності функції F, і тому що y, як і параметр α у рівнянні (3.8), набуває числових значень, рівняння (3.6) буде еквівалентним рівнянню

$$y^m F(x,1,z,\phi_1,\phi_2,...,\phi_{n-1})=0.$$

Поділивши обидві частини цього рівняння на y^m і врахувавши, що одиницю в аргументах функції F можна не писати (як, наприклад, у функції $f(x)=3x^2+1$), перетворюємо рівняння (3.8) на диференціальне рівняння порядку $(n-1)$:

$$F(x,z,z',z'',...,z^{(n-1)})=0, \tag{3.9}$$

оскільки

$$F\left[\phi_1(z,z')\right]=F(z,z'),\quad F\left[\phi_2(z,z',z'')\right]=F(z,z',z''),$$

і так далі.

Якщо функцію $z=y'/y$ буде знайдено, вдасться звести рівняння (3.9) до квадратур, зваживши на рівність

$$\frac{dy}{y}=z(x)dx,$$

з якої випливає вираз для загального інтеграла

$$y=Ce^{\int z(x)dx}.$$

●Приклад 3.3. Зінтегруємо рівняння $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

У кожному доданку цього рівняння сума степенів функції y, та її похідних y', y'' дорівнює двом, тому, якщо помножити функцію y та її похідні на множник α, усі доданки помножаться на α^2, а отже, справдиться умова (3.8) з $m = 2$.

Вводимо функцію $z = y'/y$ та підставляємо до рівняння похідні $y' = yz$ та $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$:

$$y^2z' + y^2z^2 = y^2z^2 + 15y^2\sqrt{x} .$$

Звівши подібні доданки, знаходимо співвідношення

$$z' = 15\sqrt{x}, \quad z = 15\int\sqrt{x}dx = 10x^{3/2} + C_1, \quad y = C_2e^{\int(10x^{3/2}+C_1)dx}$$

та загальний інтеграл $y = C_2e^{4x^{5/2}+C_1x}$.●

3.2. Лінійні диференціальні рівняння порядку, вищого за перший

3.2.1. Відомості з вищої алгебри, необхідні для інтегрування лінійних диференціальних рівнянь

У навчальних курсах вищої алгебри, які викладають в університетах студентам технічних та природничих факультетів, поняття *лінійний простір* означається як сукупність математичних об'єктів/елементів, для якої задано правило додавання елементів і правило множення елемента на число, причому, для того, щоб можна було вважати сукупність елементів простором, мають виконуватись такі вимоги:

а) результат додавання елементів та множення елемента на число має бути елементом тієї ж сукупності;

б) операції додавання елементів та множення їх на число повинні мати ті ж властивості, що притаманні операціям з геометричними векторами;

в) сукупність елементів має містити нульовий елемент;

г) поряд із кожним елементом сукупності до неї має входити елемент, що протилежний цьому елементу.

Для інтегрування лінійних ДР і систем таких ДР слід розглянути два лінійних простори, а саме:

1) сукупність неперервних функцій;

2) сукупність матриць порядку $m \times 1$ (m – ціле число), елементами яких є неперервні функції:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{m1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{m2}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{pmatrix} y_{13}(x) \\ y_{23}(x) \\ \vdots \\ y_{m3}(x) \end{pmatrix} \ldots \qquad (3.10)$$

Такі матриці називають *вектор-стовпчиками*. Правила додавання вектор-стовпчиків $\mathbf{y}_\alpha$ та множення цих стовпчиків на довільні сталі визначаються формулами:

$$\mathbf{y}_\alpha + \mathbf{y}_\beta = \begin{pmatrix} y_{1\alpha}(x) + y_{1\beta}(x) \\ y_{2\alpha}(x) + y_{2\beta}(x) \\ \vdots \\ y_{m\alpha}(x) + y_{m\beta}(x) \end{pmatrix}; \quad C_\alpha \mathbf{y}_\alpha = \begin{pmatrix} C_\alpha y_{1\alpha}(x) \\ C_\alpha y_{2\alpha}(x) \\ \vdots \\ C_\alpha y_{m\alpha}(x) \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

Із цих формул випливає що:

✓ сума вектор-стовпчиків та добуток вектор-стовпчика на число є вектор-стовпчиками;

✓ операції з вектор-стовпчиками подібні до операцій з геометричними векторами $\mathbf{y}_\alpha$ та $\mathbf{y}_\beta$, декартовими координатами яких є функції $y_{1\alpha}(x)$, $y_{2\alpha}(x)$, ... $y_{m\alpha}(x)$ та $y_{1\beta}(x)$, $y_{2\beta}(x)$, ... $y_{m\beta}(x)$, відповідно;

✓ нульовим елементом є стовпчик, що складається із функцій, що тотожно дорівнюють нулю;

✓ протилежні елементи утворюються шляхом зміни знака перед усіма координатами вектор-стовпчика.

Отже, для вектор стовпчиків виконуються умови а) – г), і саме тому вектор-стовпчики є елементами лінійного простору.

Означення 3.2. Лінійною комбінацією вектор-стовпчиків $\mathbf{y}_\alpha$ називають вектор-стовпчик

$$\mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha \mathbf{y}_\alpha, \tag{3.12}$$

де p – ціле число, C_α – довільні сталі.

Означення 3.3. Вектор-стовпчики $\mathbf{y}_\alpha(x)$ називають лінійно залежними, якщо з них можна утворити лінійну комбінацію, яка для всіх значень x з області означення вектор-стовпчиків задовольняє рівність

$$\sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha \mathbf{y}_\alpha(x) = 0, \tag{3.13}$$

у якій *не всі* коефіцієнти C_α дорівнюють нулю.

Умову (3.13) називають умовою лінійної залежності стовпчиків $\mathbf{y}_\alpha(x)$. Якщо *всі* коефіцієнти C_α дорівнюють нулю, то рівність (3.13) перетворюється на тотожність і не накладає ніяких умов на вектор-стовпчики $\mathbf{y}_\alpha$.

Означення 3.4. Якщо для виконання рівності (3.13) *необхідно*, щоб *усі* сталі C_α дорівнювали нулю, то стовпчики $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ... $\mathbf{y}_p$ називають лінійно незалежними.

Зауваження 3.1. Поняття лінійної залежності/незалежності вектор-стовпчиків застосовне і до функцій $y_\alpha(x)$, оскільки вектор-стовпчики перетворюються на функції, якщо покласти $m = 1$ у виразах (3.10).

Означення 3.5. Лінійний простір називають n-вимірним, якщо в ньому можна знайти n лінійно незалежних елементів $\mathbf{y}_\alpha$, а будь-який $(n+1)$-й елемент можна представити у вигляді лінійної комбінації цих лінійно незалежних елементів.

Означення 3.6. Елементи (стовпчики, функції), що входять до сукупності n лінійно незалежних елементів n-вимірного простору, називають базисними елементами. Сукупність базисних елементів $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, ... $\mathbf{y}_n$ називають базисом у просторі елементів (стовпчиків, функцій) $\mathbf{y}$.

Зауваження 3.2. Якщо елемент $\mathbf{y}$ представлено у вигляді лінійної комбінації базисних елементів (розкладено по елементах базису), то не обов'язково всі коефіцієнти розкладу

$$\mathbf{y} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha \mathbf{y}_\alpha(x) = 0$$

не є нулями.

Зауваження 3.3. Умову лінійної залежності стовпчиків $\mathbf{y}_\alpha$ (рівність (3.13)) можна записати у розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} y_{11}C_1 + y_{12}C_2 + \ldots + y_{1n}C_n = 0, \\ y_{21}C_1 + y_{22}C_2 + \ldots + y_{2n}C_n = 0, \\ \qquad\qquad \vdots \\ y_{n1}C_1 + y_{n2}C_2 + \ldots + y_{nn}C_n = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

Для теорії лінійних ДР актуальним є той випадок, коли коефіцієнти C_α можуть набувати різних значень, а функції $y_{j\alpha}$ $(j = 1,2,...n)$ є заданими функціями. Тоді система рівнянь (3.14) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь для невідомих величин C_α із коефіцієнтами $y_{j\alpha}$, залежними від змінної x. Система рівнянь (3.14) вочевидь має тривіальний розв'язок, тобто розв'язок, у якому всі невідомі C_α дорівнюють нулю.

З університетського курсу алгебри відомо, що нетривіальний розв'язок (тобто розв'язок, у якому хоча б одна невідома C_α не дорівнює нулю) існує лише тоді, коли визначник системи

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} \equiv W \tag{3.15}$$

дорівнює нулю. Це означає, що умова

$$W = 0 \tag{3.16}$$

є критерієм лінійної залежності стовпчиків визначника, тобто елементів $\mathbf{y}_\alpha$.

Означення 3.7. Оператором $\hat{L}$ називають математичне правило, за яким кожен елемент лінійного простору перетворюється на інший елемент цього або іншого лінійного простору.

Кажуть, що "оператор діє на елементи простору" та "перетворює кожен елемент простору на інший елемент". Якщо оператор $\hat{L}$ діє на вектор-стовпчики, то запис $\hat{L}\mathbf{y} = \mathbf{b}$ означає, що цей оператор перетворює вектор-стовпчик $\mathbf{y}$ на вектор-стовпчик $\mathbf{b}$. Якщо оператор $\hat{L}$ діє на функції, то запис $\hat{L}y(x) = b(x)$ означає, що оператор перетворює функцію $y(x)$ на функцію $b(x)$.

Означення 3.8. Оператор називають лінійним, якщо математичне правило, за яким він діє на елементи простору, задовольняє *умови лінійності*:

$$\begin{aligned} &1)\quad \hat{L}\left(\mathbf{y}_\alpha + \mathbf{y}_\beta\right) = \hat{L}\mathbf{y}_\alpha + \hat{L}\mathbf{y}_\beta, \\ &2)\quad \hat{L}C_\alpha\mathbf{y}_\alpha = C_\alpha\hat{L}\mathbf{y}_\beta, \end{aligned} \tag{3.17}$$

де $\mathbf{y}_\alpha$ та $\mathbf{y}_\beta$ – будь-які елементи простору.

3.2.2. Загальна форма лінійного диференціального рівняння

Лінійним ДР порядку n називають рівняння типу

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x). \tag{3.18}$$

Функції $a_j(x)$ $(j = 0,1,2,...n)$ називають коефіцієнтами лінійного ДР, а функцію $b(x)$ – його правою частиною.

Означальною рисою лінійного ДР є те, що його можна записати в операторному вигляді

$$\hat{L}(x)y(x) = b(x)\,, \tag{3.19}$$

де

$$\hat{L}(x) = a_n(x)\frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{d}{dx} + a_0(x) \tag{3.20}$$

є лінійним оператором, тому що похідна від суми функцій дорівнює сумі похідних і, якщо перед функцією $y(x)$ стоїть числовий коефіцієнт C, то його можна винести за знак похідної. Завдяки цьому виконуються умови лінійності цього оператора:

$$\begin{aligned} &1)\quad \hat{L}(x)\big(y_1(x) + y_2(x)\big) = \hat{L}(x)y_1(x) + \hat{L}(x)y_2(x), \\ &2)\quad \hat{L}(x)Cy(x) = C\hat{L}y(x). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Зауваження 3.4. Із того, що перша умова лінійності виконується для двох функцій, як це зазначено у виразах (3.21), випливає, що вона справедлива і для більшої кількості функцій.

Визначаючи, чи є лінійним те рівняння, яке треба зінтегрувати для розв'язання тієї чи іншої задачі, доцільно пам'ятати, що до лінійного ДР входять лише перші степені функції $y(x)$ та її похідних і не входять $y^2, y'^2, y''^2, \ldots$ та інші степені цих величин.

3.2.3. Принцип суперпозиції розв'язків та загальний підхід до інтегрування однорідних лінійних диференціальних рівнянь

Означення 3.9. Однорідним називають лінійне диференціальне рівняння, права частина якого дорівнює нулю.

Запишемо однорідне лінійне ДР у двох еквівалентних формах:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{3.22}$$

та

$$\hat{L}(x)y(x) = 0\,. \tag{3.23}$$

Означений формулою (3.20) оператор $\hat{L}$ задовольняє вимоги лінійності (3.21), із яких випливає основна властивість однорідних лінійних ДР – принцип суперпозиції розв'язків.

Принцип суперпозиції розв'язків *полягає в тому, що будь-яка лінійна комбінація розв'язків однорідного лінійного ДР є його розв'язком.*

Доведемо справедливість принципу суперпозиції розв'язків. Подіємо оператором $\hat{L}$ на довільну лінійну комбінацію розв'язків

$$y(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha y_\alpha(x), \tag{3.24}$$

урахувавши умови лінійності цього оператора:

$$\hat{L}\sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha y_\alpha(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} \hat{L} C_\alpha y_\alpha(x) = \sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha \hat{L} y_\alpha(x).$$

Якщо функції $y_\alpha(x)$ є розв'язками однорідного лінійного ДР, то підстановка кожного з них до рівняння (3.23) перетворює рівняння на тотожність $\hat{L} y_\alpha(x) \equiv 0$, завдяки чому

$$\hat{L}\sum_{\alpha=1}^{p} C_\alpha y_\alpha(x) \equiv 0,$$

тобто функція (3.24) є розв'язком рівняння (3.23), а отже, і еквівалентного йому рівняння (3.22).

З огляду на принцип суперпозиції розв'язків і на той факт, що загальний інтеграл диференціального рівняння порядку n містить n довільних сталих, у математиків виникла ідея утворити загальний інтеграл $y_{\text{з.о.}}(x)$ однорідного лінійного ДР у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків, кількістю n:

$$y_{\text{з.о.}}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha y_\alpha(x). \tag{3.25}$$

При цьому виникло запитання: чи з будь-яких частинних розв'язків кількістю n можна утворити загальний інтеграл? Відповідь на поставлене запитання майже очевидна. Щоб дати її, розглянемо однорідне лінійне ДР 3-го порядку і його частинні розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$. Утворимо лінійну комбінацію цих розв'язків:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + C_3 y_3(x). \qquad (3.26)$$

Припустимо, що частинні розв'язки $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ лінійно залежні. Тоді один із них, для визначеності $y_3(x)$, є лінійною комбінацією двох інших:

$$y_3(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x), \qquad (3.27)$$

де K_1, K_2 – сталі коефіцієнти. Підставивши вираз (3.27) до виразу (3.26), одержуємо функцію

$$y(x) = (C_1 + K_1) y_1(x) + (C_2 + K_2) y_2(x),$$

яка містить лише дві довільні сталі, а саме: $\tilde{C}_1 \equiv C_1 + K_1$ та $\tilde{C}_2 \equiv C_2 + K_2$. Отже, ця функція не може бути загальним інтегралом ДР 3-го порядку, до якого обов'язково входять три довільні сталі. Зменшення кількості довільних сталих від трьох, які мають бути наявними в загальному інтегралі ДР 3-го порядку, до двох трапилося внаслідок того, що функція $y_3(x)$ є, за припущенням, лінійно залежною від $y_1(x)$ та $y_2(x)$. Звідси випливає надважливе твердження, яке є відповіддю на поставлене запитання:

Твердження: загальний інтеграл однорідного лінійного ДР порядку n є лінійною комбінацією n *лінійно незалежних* частинних розв'язків.

Справедливість цього твердження вище була щойно продемонстрована для ДР 3-го порядку, а для ДР порядку n це твердження доводять шляхом розгляду задачі Коші, яка полягає у знаходженні такого розв'язку однорідного лінійного ДР, що задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (3.28)$$

де величини y_0', y_0'', ... $y_0^{(n-1)}$ є не похідними від сталої y_0, а зручними позначеннями сталих значень похідних порядку 1, 2, ... $n-1$, відповідно. Розглядаючи задачу Коші, беруть до уваги, що для кожного фіксованого значення x_0 її розв'язок відповідає певним значенням довільних сталих у загальному інтегралі (3.25), а змінюючи значення x_0, можна отримати всі розв'язки рівняння[1].

Функція (3.25) задовольняє однорідне лінійне ДР за своїм означенням, а для того, щоб бути розв'язком задачі Коші, вона має задовольнити початкові умови. Після підстановки функції (3.25) до початкових умов (3.28) ці умови стають системою алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \ldots + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \ldots + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots . + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{3.29}$$

для невідомих C_α. Із цієї системи лише тоді можна знайти такі значення цих невідомих, за яких лінійна комбінація частинних розв'язків $y_\alpha(x)$ є розв'язком задачі Коші, коли визначник системи не дорівнює нулю. Це випливає, серед іншого, із формул Крамера для розв'язку неоднорідної лінійної системи алгебраїчних рівнянь. Для системи рівнянь (3.29) це формула

$$C_\alpha = \frac{\Delta^{(\alpha)}}{W},$$

де

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \ldots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \ldots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

є визначником основної матриці цієї системи рівнянь, а $\Delta^{(\alpha)}$ – визначниками, у яких стовпчик визначника W з номером α замінений на праві частини рівнянь.

[1] Умови існування розв'язку задачі Коші вважають виконаними.

Тепер зважимо на те, що задачу Коші можна поставити для будь-якого значення змінної x, а отже, *лінійна комбінація частинних розв'язків є загальним інтегралом однорідного лінійного ДР лише за умови*

$$W \equiv \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.30)$$

Визначник W названо *визначником Вронського* на честь відомого польського математика.

Щоб завершити доведення сформульованого вище твердження, зауважимо, що умова $W \neq 0$ є умовою лінійної незалежності стовпчиків визначника Вронського, а отже, і функцій $y_\alpha(x)$ [1].

Висновок. Загальний підхід до розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння полягає у пошуку сукупності n лінійно незалежних частинних розв'язків рівняння і представленні загального інтеграла рівняння у формі лінійної комбінації цих частинних розв'язків.

Зауваження 3.5. Математики назвали сукупність n лінійно незалежних частинних розв'язків однорідного лінійного ДР *фундаментальною системою розв'язків* і довели, що вона існує для будь-якого однорідного лінійного ДР.

3.2.4. Інтегрування однорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне лінійне ДР:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad (3.31)$$

---

[1] Якби для функцій $y_\alpha(x)$ виконувалася умова лінійної залежності (3.13), то диференціюючи праву і ліву частини рівняння (3.13) ми б отримали умову лінійної залежності рядків визначника W .

у якому $a_m = \text{const}$. Оскільки експоненціальні функції з різними показниками $y_j = e^{k_j x}$ лінійно незалежні (жодну з них не можна представити у вигляді лінійної комбінації експонент $e^{k_l x}$ з показниками $k_l \neq k_j$), то зі сформульованого вище твердження випливає ідея розглянути пробну функцію

$$y(x) = e^{kx} \tag{3.32}$$

і з'ясувати, яким має бути коефіцієнт k, щоб ця функція була частинним розв'язком рівняння (3.31). Для цього слід підставити функцію (3.32) до цього рівняння. Кожне диференціювання експоненти e^{kx} помножує її на k тобто

$$\frac{d^m}{dx^m} e^{kx} = k^m e^{kx}. \tag{3.33}$$

Підставивши функцію (3.32) до рівняння (3.31), зваживши на вираз (3.33) та скоротивши ліву частину рівняння на e^{kx}, доходимо висновку, що функція (3.32) є частинним розв'язком рівняння (3.31) лише в тому разі, якщо коефіцієнт k задовольняє таке алгебраїчне рівняння порядку n:

$$a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \ldots + a_1 k + a_0 = 0. \tag{3.34}$$

Означення 3.10. Рівняння (3.34) називають характеристичним рівнянням лінійного ДР зі сталими коефіцієнтами, а його корені – характеристичними числами.

Яким саме є розв'язок однорідного лінійного ДР, залежить від того, які корені має характеристичне рівняння.

1. Якщо характеристичне рівняння має лише *прості* (не кратні) корені і всі ці корені *дійсні* $k = k_\alpha$, то кількість коренів дорівнює порядку рівняння. Тоді слід розглянути добірку з n лінійно незалежних частинних розв'язків $y_\alpha(x) = e^{k_\alpha x}$ та утворити з них загальний інтеграл

$$y(x) = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{k_{n-1} x} + C_n e^{k_n x}\,. \qquad (3.35)$$

2. Якщо серед *простих* коренів характеристичного рівняння є *комплексні*, то поряд з кожним комплексним коренем

$$k_\alpha = \gamma_\alpha + i\omega_\alpha$$

є комплексно-спряжений корінь[1]

$$k_\alpha = \gamma_\alpha - i\omega_\alpha\,,$$

де γ_α та ω_α – дійсна та уявна частини кореня k_α. Тоді диференціальне рівняння (3.31) задовольняють комплексні функції $y_\alpha^{(c)} = e^{\gamma_\alpha + i\omega_\alpha}$ та $y_{\alpha+1}^{(c)} = e^{\gamma_\alpha - \omega_\alpha}$, з яких слід утворити дійсні частинні розв'язки

$$y_\alpha = \frac{1}{2}(y_\alpha^{(c)} + y_{\alpha+1}^{(c)}) = e^{\gamma_\alpha x}\cos\omega_\alpha x,$$

$$y_{\alpha+1} = \frac{1}{2i}(y_\alpha^{(c)} - y_{\alpha+1}^{(c)}) = e^{\gamma_\alpha x}\sin\omega_\alpha x$$

і включити до загального інтеграла доданки

$$C_\alpha y_\alpha + C_{\alpha+1} y_{\alpha+1} = e^{\gamma_\alpha x}(C_\alpha \cos\omega_\alpha x + C_{\alpha+1}\sin\omega_\alpha x). \qquad (3.36)$$

3. Якщо серед коренів характеристичного рівняння є *дійсний корінь кратності* m_α, то можна довести, що до загального інтеграла слід включити доданки

---

[1] Із курсу алгебри відомо, що алгебраїчне рівняння можна записати у вигляді $a_n \prod\limits_\alpha (k - k_\alpha)^{m_\alpha} = 0$, де m_α – кратність кореня k_α. Добуток двох комплексно-спряжених коренів є дійсним числом:

$$\left[k - (\gamma_\alpha + i\omega_\alpha)\right]\left[k - (\gamma_\alpha - i\omega_\alpha)\right] = (k - \gamma_\alpha)^2 + {\omega_\alpha}^2\,.$$

Якщо ж корінь $k_\alpha = \gamma_\alpha + i\omega_\alpha$ "не має пари", то до рівняння ввійде доданок з уявним коефіцієнтом, пропорційний числу ω_α.

$$C_\alpha y_j + C_\alpha y_{\alpha+1} + \ldots + C_\alpha y_{\alpha+m-1} = e^{\gamma_\alpha x}(C_\alpha + C_{\alpha+1}x + \\ + C_{\alpha+2}x^2 + \ldots + C_{\alpha+m-1}x^{\alpha+m-1}). \qquad (3.37)$$

4. Також можна довести, що за наявності *комплексного кореня кратності* m_α до загального інтеграла слід включити доданки

$$(A_\alpha + A_{\alpha+1}x + A_{\alpha+2}x^2 + \ldots + A_{\alpha+m-1}x^{\alpha+m-1})e^{\gamma_\alpha x}\cos\omega_\alpha x + \\ +(B_\alpha + B_{\alpha+1}x + B_{\alpha+2}x^2 + \ldots + B_{\alpha+m-1}x^{\alpha+m-1})e^{\gamma_\alpha x}\sin\omega_\alpha x. \qquad (3.38)$$

Необхідність включення до загального інтеграла доданків (3.37), (3.38) можна пояснити так: якщо б кожному значенню кратного кореня відповідав лише один доданок, то це призвело би до того, що кількість частинних розв'язків $y_\alpha(x)$, з яких утворений загальний інтеграл, була б меншою за порядок рівняння, а отже, і кількість довільних сталих була б меншою за порядок рівняння n, а це не відповідає означенню загального інтеграла. Саме тому, що розв'язки рівняння (3.34) показують, яким є загальний інтеграл лінійного однорідного ДР, рівняння (3.34) називають характеристичним.

Висновок. Щоб зінтегрувати однорідне лінійне ДР слід розв'язати характеристичне рівняння і знайти загальний інтеграл за такими правилами:

1) кожному простому дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає доданок $C_\alpha y^{k_\alpha x}$, який слід включити до формули загального інтеграла;

2) кожній парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння відповідають два доданки (3.36), які слід включити до формули загального інтеграла;

3) кожному кратному дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає сукупність доданків (3.37), яку слід включити до формули загального інтеграла;

4) кожному кратному комплексному кореню характеристичного рівняння відповідає сукупність доданків (3.38), яку слід включити до формули загального інтеграла.

Загальний інтеграл лінійного однорідного ДР є сумою доданків, що відповідають всім кореням характеристичного рівняння.

●Приклад 3.4. Зінтегруємо рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\gamma^2 y=0\,.$$

Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^2-\gamma^2=0, \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm\gamma\,.$$

За правилом 1) знайдемо загальний інтеграл

$$y=C_1e^{\gamma x}+C_2e^{-\gamma x}\,.●$$

●Приклад 3.5. Зінтегруємо рівняння вільних коливань

$$\ddot{y}+\omega^2 y=0\,,$$

(див. розд. 1). Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^2+\omega^2=0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm i\omega\,.$$

За правилом 2) знайдемо загальний інтеграл, узявши до уваги, що $\gamma=0$, $e^0=1$:

$$y=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t\,.●$$

●Приклад 3.6. Зінтегруємо рівняння $y''-4y'+5y=0$.

Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^2-4k+5=0, \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm i\,.$$

За правилом 2) знайдемо загальний інтеграл

$$y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)\,.●$$

●Приклад 3.7. Зінтегруємо рівняння $y^{(4)}-9y=0.$

Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^4-9=0\Rightarrow(k^2+3)(k^2-3)=0, \quad \Rightarrow \quad k_{1,2}=\pm\sqrt{3},\, k_{3,4}=\pm i\sqrt{3}\,.$$

За правилами 1), 2) знайдемо загальний інтеграл

$$y=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2e^{-\sqrt{3}x}+C_3\cos(\sqrt{3}x)+C_4\sin(\sqrt{3}x)\,.●$$

●Приклад 3.8. Зінтегруємо рівняння $y^{(4)} - 2y''' = 0$.

Розв'яжемо характеристичне рівняння

$$k^3(k-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2,3} = 0, k_4 = 2 .$$

За правилами 1), 3) знайдемо загальний інтеграл, урахувавши, що $e^0 = 1$:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^{2x} .●$$

3.2.5. Інтегрування неоднорідного лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами методом подібності розв'язку до правої частини рівняння

Запишемо неоднорідне лінійне диференціальне рівняння у двох еквівалентних формах

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b(x) , \qquad (3.39)$$

де $a_m = \text{const}$, та

$$\hat{L}y(x) = b(x) . \qquad (3.40)$$

Метод подібності застосовують, якщо права частина рівняння $b(x)$ є такою функцією, що похідні $b('x), b''(x), b'''(x), \ldots b^{(n)}(x)$ є функціями такого ж типу, як і $b(x)$, тобто, якщо права частина рівняння є або експонентою $b(x) = \eta e^{\beta x}$, або лінійною комбінацією синусів та косинусів $b(x) = \eta_1 \sin(\beta x) + \eta_2 \cos(\beta x)$, або поліномом, $b(x) = \eta_m x^m + \eta_{m-1} x^{m-1} + \ldots + \eta_1 x + \eta_0$, або сумою таких функцій, або добутком полінома на експоненту чи полінома на лінійну комбінацію синусів та косинусів.

Метод подібності спирається на теорему, згідно з якою *загальний інтеграл неоднорідного лінійного ДР є сумою загального інтеграла однорідного лінійного ДР та частинного розв'язку неоднорідного.* У п. 2.4.3 цю теорему було доведено для неоднорідного лінійного ДР 1-го порядку, виходячи з операторної форми такого рівняння (2.46). Оскільки операторне рівняння (3.40) не відрізняється від неоднорідного лінійного ДР 1-го порядку

(2.46), то ця теорема доводиться для рівняння порядку n таким саме чином, яким вона була доведена в п. 2.4.3.

Оператор $\hat{L}$ перетворює експоненту $e^{\beta x}$ на добуток

$$(a_n\beta^n + a_{n-1}\beta^{n-1} + \ldots + a_1\beta + a_0)e^{\beta x},$$

лінійну комбінацію синуса та косинуса на іншу лінійну комбінацію синуса та косинуса, а поліном – на інший поліном. Тому можна взяти *пробну функцію* у вигляді

$$y_1(x) = Ae^{\beta x},$$

або

$$y_2(x) = A\sin(\beta x) + B\cos(\beta x),$$

або

$$y_3 = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0,$$

або у формі добутків $y_1 y_2$, $y_1 y_3$, $y_2 y_3$, та знайти такі коефіцієнти A, B, A_m, щоб ці функції задовольнили рівняння (3.39), тобто були його частинним розв'язком. Завдяки цьому буде знайдений частинний розв'язок неоднорідного ДР.

Щоб знайти загальний інтеграл неоднорідного лінійного ДР необхідно:

а) відкинути його праву частину і розв'язати характеристичне рівняння однорідного лінійного ДР;

б) за правилами 1) – 4) скласти загальний інтеграл однорідного ДР;

в) додати до загального інтеграла однорідного ДР знайдений частинний розв'язок неоднорідного ДР.

●Приклад 3.9. Зінтегруємо рівняння $y'' + y = 5e^{3x}$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 1 = 0$ має уявні розв'язки $k_{1,2} = \pm i$, тому, як було вже показано, $y_{\text{з.о.}} = C_1\cos x + C_2\sin x$. Підставляємо пробний частинний розв'язок $y = Ae^{3x}$ до рівняння і знаходимо

$$9Ae^{3x} + Ae^{3x} = 5e^{3x}, \quad 10A = 5 \quad \Rightarrow \quad y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2}e^{3x}.$$

Загальний інтеграл неоднорідного ДР:

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}e^{3x} . \bullet$$

●Приклад 3.10. Зінтегруємо рівняння $y'' + 4y' = \sin x$.

Характеристичне рівняння $k^2 + 4k = 0$ має корені $k_1 = 0,\quad k_2 = -4$, якими визначається загальний інтеграл однорідного рівняння

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 + C_2 e^{-4x} .$$

Пробний частинний розв'язок: $y = A\sin x + B\cos x$.

Важливо, що права частина це $\sin x$*, а пробний розв'язок містить і синус, і косинус, тому що похідною від синуса є косинус.*

Підстановка до рівняння пробного розв'язку має перетворити це рівняння на тотожність

$$-A\sin x - B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x \equiv \sin x ,$$

тобто

$$(4A - B)\cos x - (A + 4B)\sin x \equiv \sin x .$$

Тотожність має справджуватись для всіх значень змінної x, тому коефіцієнт біля косинуса має дорівнювати нулю, а біля синуса – одиниці:

$$\begin{cases} 4A - B = 0 \\ -(A + 4B) = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши ці рівняння, знаходимо частинний розв'язок

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{1}{17}\sin x - \frac{4}{17}\cos x$$

і загальний інтеграл

$$y = C_1 + C_2 e^{-4x} - \frac{1}{17}\sin x - \frac{4}{17}\cos x. \bullet$$

●Приклад 3.11. Зінтегруємо рівняння $y'' + y = \sin x.$

Розв'язання: загальним інтегралом однорідного рівняння, вже знайденим у прикладі 3.9, є функція

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Якщо взяти пробний розв'язок $y = A\cos x + B\sin x$, і підставити його до рівняння, то вийде $0 = \sin x$, оскільки цей розв'язок входить до загального інтеграла, коли $C_1 = A$, $C_2 = B$. Отже, цей розв'язок не задовольняє неоднорідне рівняння.

Висновок. Якщо права частина рівняння є одним із доданків загального інтеграла, то треба шукати $y_{\text{ч.н.}}$ в іншій формі. Математики з'ясували, що в такому випадку треба помножити пробний розв'язок на x, тобто підставити до рівняння функцію

$$y = x(A\cos x + B\sin x)$$

та її другу похідну. Розрахувавши похідні

$$y' = A\cos x + B\sin x + x(B\cos x - A\sin x),$$

$$y'' = -A\sin x + B\cos x + B\cos x - A\sin x - x(A\cos x + B\sin x),$$

і підставивши y та y'' до рівняння, одержимо

$$2B\cos x - 2A\sin x = \sin x,$$

$$y_{\text{ч.н.}} = -\frac{1}{2}x\cos x.$$

Загальним інтегралом є функція

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x. \bullet$$

На останньому прикладі бачимо, що при застосуванні методу подібного вигляду можуть виникнути ускладнення, і тоді доцільно застосувати інший метод.

3.2.6. Метод варіації довільних сталих

Вище було доведено, що загальний інтеграл *однорідного* лінійного диференціального рівняння є лінійною комбінацією лінійно незалежних частинних розв'язків y_α (див. рівняння (3.25)).

Спробуємо знайти розв'язок *неоднорідного* рівняння у формі

$$y(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} u_\alpha(x) y_\alpha(x). \tag{3.41}$$

Щоб знайти невідомі функції $u_\alpha(x)$, підставимо пробний розв'язок до рівняння (3.39). Оскільки це рівняння містить похідні

$y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$, то для відшукання функцій $u_\alpha(x)$ треба обчислити ці похідні.

Надважливий момент: для відшукання функцій $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... $u_n(x)$ є лише одне рівняння (3.39), тому при обчисленні похідних можна накласти на ці функції $n-1$ таких додаткових умов, які спростять подальші розрахунки:

$$y' = \sum_\alpha u_\alpha y'_\alpha + \sum_\alpha u'_\alpha y_\alpha ,$$

умова 1: $\sum\limits_\alpha u'_\alpha y_\alpha = 0$,

$$y'' = \sum_\alpha u_\alpha y''_\alpha + \sum_\alpha u'_\alpha y'_\alpha ;$$

умова 2: $\sum\limits_\alpha u'_\alpha y'_\alpha = 0$,

$$y^{(n-1)} = \sum_\alpha u_\alpha y_\alpha{}^{(n-1)} + \sum_\alpha u'_\alpha y_\alpha{}^{(n-2)} \quad ;$$

умова $n-1$: $\sum\limits_\alpha u'_\alpha y_\alpha{}^{(n-2)} = 0$,

$$y^{(n)} = \sum_\alpha u_\alpha y_\alpha{}^{(n)} + \sum_\alpha u'_\alpha y_\alpha{}^{(n-1)}.$$

При обчисленні останньої похідної умова не накладається, тому що вже отримано n рівнянь (включно з рівнянням (3.39)) для функцій $u_\alpha(x)$.

Підставимо вирази для всіх похідні до рівняння (3.39):

$$\begin{gathered} a_n(x)\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha{}^{(n)} + a_{(n-1)}(x)\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha{}^{(n-1)} \ldots \\ \ldots + a_1(x)\sum_\alpha u_\alpha y'_a + a_0(x)\sum_\alpha u_\alpha y_a + a_n(x)\sum_\alpha u'_\alpha y_\alpha{}^{(n-1)} = b(x). \end{gathered} \tag{3.42}$$

В усіх доданках рівняння (3.42), окрім останнього, є співмножник u_α, який можна винести за дужки

$$\sum_{\alpha} u_{\alpha}[a_n(x)y_{\alpha}^{(n)} + a_{n-1}(x)y_{\alpha}^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_{\alpha}]$$
$$+a_n(x)\sum_{\alpha} u'_{\alpha} y_{\alpha}{}^{(n-1)} = b(x). \tag{3.43}$$

Доданки у квадратних дужках є лівою частиною однорідного лінійного ДР, а y_{α} − його частинними розв'язками, тому сума доданків у квадратних дужках дорівнює нулю. Завдяки цьому рівняння (3.43) перетворюється на *умову* n :

$$a_n(x)\sum_{\alpha} u'_{\alpha} y_{\alpha}^{(n-1)} = b(x),$$

якою слід доповнити умови, накладені на невідомі функції. Доповнена сукупність умов є системою n диференціальних рівнянь 1-го порядку для n функцій $u_{\alpha}(x)$. Важливо, що ці рівняння зводяться до квадратур, якщо $y_{\alpha}(x)$ знайдені в ході інтегрування однорідного лінійного ДР.

Зауваження 3.6. Тут ми *не* вважали, що коефіцієнти $a_j(x)$ є сталими, але у випадку коефіцієнтів, залежних від координат, серйозна проблема полягає у знаходженні розв'язків однорідного рівняння $y_{\alpha}(x)$.

●Приклад 3.12. Зінтегруємо рівняння $y'' + y = 1 + e^x$.

Загальний інтеграл однорідного рівняння вже знайдений при розгляді прикладу 3.9:

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Підставимо до рівняння пробну функцію

$$y = u_1(x)\cos x + u_2(x)\sin x . \tag{3.44}$$

Диференціюючи цю функцію накладемо *умову* 1, яка у даному випадку має форму

$$u'_1 \cos x + u'_2 \sin x = 0 . \tag{3.45}$$

за цієї умови похідні функції y дорівнюють

$$y' = -u_1 \sin x + u_2 \cos x ,$$

$$y'' = -u_1 \cos x - u_2 \sin x - u'_1 \sin x + u'_2 \cos x.$$

Підставимо їх до рівняння, щоб отримати *умову* 2:

$$-u_1 \cos x - u_2 \sin x - u_1' \sin x + u_2' \cos x + u_1 \cos x + u_2 \sin x = 1 + e^x .$$

Гарний перевірочний момент: доданки, що не містять похідних $u_{1,2}'$, скорочуються, тому що, якби функції $u_{1,2}$ були сталими, то доданків з похідними не було б, а пробна функція була б розв'язком однорідного ДР. Отже, на доповнення до рівняння (3.45) одержуємо рівняння

$$-u_1' \sin x + u_2' \cos x = 1 + e^x \tag{3.46}$$

Із рівняння (3.45) випливає вираз

$$u_1' = -u_2' \frac{\sin x}{\cos x}, \tag{3.47}$$

підстановка якого до рівняння (3.46) дає

$$u_2' \cos x + u_2' \frac{\sin^2 x}{\cos x} = 1 + e^x . \tag{3.48}$$

Із системи рівнянь (3.47), (3.48) знаходимо вирази для похідних

$$u_2' = (1 + e^x)\cos x,$$

$$u_1' = -(1 + e^x)\sin x.$$

Виконуємо інтегрування

$$u_2 = \int (1 + e^x)\cos x dx = \sin x + \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C_2,$$

$$u_1 = -\int (1 + e^x)\sin x dx = \cos x - \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C_2.$$

Підставивши ці вирази для u_2 та u_1 до пробного розв'язку (3.44), знаходимо загальний інтеграл

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(1 + \frac{e^x}{2}\right).$$

Зауважимо, що цей результат можна отримати також методом подібного вигляду, розглянувши пробний частинний розв'язок $y_{\text{ч.н.}} = A + Be^x$.●

РОЗДІЛ 4

Лінійні диференціальні рівняння
другого порядку

Вступне зауваження: винесення питання про інтегрування лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в окремий розділ зумовлене двома фактами:

1) лінійні ДР 2-го порядку мають видатне значення для інженерії та природничих наук;

2) для таких рівнянь існують додаткові порівняно з лінійними ДР вищих порядків можливості інтегрування, насамперед – інтегрування за допомогою формули Остроградського–Ліувілля, яка дозволяє знайти загальний інтеграл *однорідного лінійного ДР* зі змінними коефіцієнтами, якщо вдається "вгадати" один частинний розв'язок. Завдяки цьому виникає можливість зінтегрувати *неоднорідне лінійне ДР* з такою ж лівою частиною методом варіації довільної сталої.

4.1. Інтегрування лінійного рівняння
зі змінними коефіцієнтами
за допомогою формули Остроградського–Ліувілля

*4.1.1. Правило диференціювання
визначника Вронського*

Обчислимо спочатку похідну визначника 2-го порядку:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix}'.$$

Розкриємо визначник $\Delta' = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})'$. Продиференціювавши добутки його елементів одержимо рівність

$$\Delta' = a'_{11}a_{22} - a_{11}a'_{22} - a'_{21}a_{12} + a_{21}a'_{12},$$

яка тотожно перетворюється на формулу

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) \end{vmatrix}. \qquad (4.1)$$

Формула (4.1) веде до висновку, що похідна визначника є сумою доданків, у кожному з яких продиференційований один із рядків визначника, а інші залишені без змін. Неважко довести, що цей висновок справедливий для визначника будь-якого порядку.

Розглянемо визначник Вронського W для рівняння другого порядку

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}, \qquad (4.2)$$

елементи якого $y_1(x)$ та $y_2(x)$ є частинними розв'язками однорідного лінійного ДР 2-го порядку

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0 \qquad (4.3)$$

та похідними цих розв'язків. Обчислимо похідну визначника Вронського:

$$W' = \begin{vmatrix} y'_1(x) & y'_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) \end{vmatrix}.$$

Перший визначник дорівнює нулю, тому що має два однакові рядки. Отже, справедлива така формула:

$$W' = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y''_1(x) & y''_2(x) \end{vmatrix}. \qquad (4.4)$$

Ця формула виражає правило, застосовне до визначника Вронського рівняння будь-якого порядку.

Правило: щоб продиференціювати визначник Вронського, треба продиференціювати його останній рядок, залишивши інші рядки без змін.

4.1.2. Формула Остроградського–Ліувілля

Щоб знайти формулу Остроградського–Ліувілля, візьмемо до уваги принцип суперпозиції, згідно з яким загальний інтеграл рівняння (4.3) є лінійною комбінацією двох лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,. \tag{4.5}$$

Розглянемо "розширений" визначник

$$\overset{\leftrightarrow}{W} = \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix},$$

утворений з визначника Вронського (4.2) шляхом додавання до нього рядочка та стовпчика з другими похідними. Визначник $\overset{\leftrightarrow}{W}$ дорівнює нулю на всьому інтервалі означення функцій $y_1(x), y_2(x)$, тому що його перший стовпчик є лінійною комбінацією другого та третього стовпчиків. Розкривши $\overset{\leftrightarrow}{W}$ за елементами першого стовпчика, одержуємо тотожність

$$Wy'' - W'y' + \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} y \equiv 0,$$

а отже, функція $y(x)$ є загальним інтегралом рівняння[1]

$$y'' - \frac{W'}{W}y' + \frac{\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}}{W} y \equiv 0. \tag{4.6}$$

Математики довели, що два різних однорідних лінійних ДР 2-го порядку не можуть мати один і той самий загальний інтеграл, тому з рівнянь (4.3) та (4.6) випливає, що

$$p(x) = -\frac{W'}{W}, \tag{4.7}$$

---

[1] $W \neq 0$ в області означення функції $p(x)$, тому що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно незалежні.

тобто $(\ln W)' = -p(x)$, а отже, є справедливим рівняння

$$\ln W = -\int p(x)dx,$$

з якого безпосередньо випливає, що

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}. \quad (4.8)$$

Саме формулу (4.8) і називають формулою Остроградського–Ліувілля.

4.1.3. Знаходження загального інтеграла лінійного диференціального рівняння за одним частинним розв'язком

Припустимо, що однорідне лінійне ДР має очевидний частинний розв'язок $y_1(x) \equiv y_0(x)$. Застосуємо формулу Остроградського–Ліувілля для знаходження другого частинного розв'язку. Запишемо цю формулу, поклавши в ній $C = 1$ та розкривши визначник Вронського:

$$y_0 y_2' - y_0' y_2 = e^{-\int p(x)dx}. \quad (4.9)$$

(Не поклавши $C = 1$, ми б лише помножили шуканий розв'язок $y_2(x)$ на сталу C, а це можна зробити наприкінці процесу розв'язування рівняння).

Далі можна діяти у два різних способи, а саме:

а) помітити, що рівняння (4.9) є неоднорідним лінійним рівнянням 1-го порядку з коефіцієнтами y_0 та y_0' і знайти $y_2(x)$ методом варіації довільної сталої;

б) поділити обидві частини рівняння (4.9) на y_0^2 та отримати рівняння

$$\left(\frac{y_2}{y_0}\right)' = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_0^{\,2}}.$$

Це рівняння вочевидь зводиться до квадратур

$$y_2(x) = y_0(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{{y_0}^2}dx . \qquad (4.10)$$

Зауваження 4.1. Пам'ятати формулу (4.10) не треба. Необхідно лише знати, що існує формула Остроградського–Ліувілля, знайти її у довідниковій літературі, отримати з неї рівняння типу (4.9), а потім зінтегрувати його в один із вказаних вище способів.

Зауваження 4.2. Якщо для розв'язання якоїсь задачі треба зінтегрувати рівняння

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x) = b(x) ,$$

то слід пам'ятати, що перед застосуванням формули Остроградського–Ліувілля треба поділити обидві частини цього рівняння на $a_2(x)$, щоб отримати рівняння (4.3).

●Приклад 4.1. Зінтегруємо рівняння

$$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0. \qquad (4.11)$$

Зауважимо, що невипадково число 4 входить до рівняння двічі, адже завдяки цьому можна знайти частинний розв'язок $y_1 = x$, помітивши, що підстановка його до рівняння перетворює (4.11) на тотожність $4x - 4x \equiv 0$. Другий частинний розв'язок знайдемо за допомогою формули Остроградського–Ліувілля, яка в цьому випадку має форму

$$\begin{vmatrix} x & y_2 \\ 1 & y_2' \end{vmatrix} = e^{-\int p(x)dx} , \qquad (4.12)$$

де $p(x) = \dfrac{4x}{2x+1}$.

Визначимо, чому дорівнює експонента у правій частині рівняння (4.12):

$$-\int p(x)dx = -\int \frac{4x+2-2}{2x+1}dx = -2\int dx + 2\int \frac{dx}{2x+1} ,$$

$$-\int p(x)dx = -2x + \ln|2x+1| ,$$

$$e^{-\int p(x)dx} = (2x+1)e^{-2x}.$$

Підставивши вираз, отриманий для експоненти, до формули (4.12) і розкривши визначник, одержимо рівняння

$$xy_2' - y_2 = (2x+1)e^{-2x}.$$

Діючи у спосіб б), поділимо обидві частини цього рівняння на x^2 та отримаємо співвідношення

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{x}\right) = \frac{y_2'x - y_2}{x^2},$$

з якого випливає, що

$$y_2 = x\int \frac{2x+1}{x^2}e^{-2x}dx = x\left(2\int \frac{e^{-2x}}{x}dx + \int \frac{e^{-2x}}{x^2}dx\right).$$

Позначивши

$$2\int \frac{e^{-2x}}{x}dx \equiv I_1, \qquad \int \frac{e^{-2x}}{x^2}dx \equiv I_2$$

та обчисливши I_2 "по частинах", знаходимо рівняння

$$I_2 = -\frac{e^{-2x}}{x} - I_1,$$

з якого знаходимо другий частинний розв'язок

$$y_2 = x\left(I_1 + I_2\right) = x\left(-\frac{e^{-2x}}{x}\right) = -e^{-2x}.$$

За принципом суперпозиції утворюємо лінійну комбінацію частинних розв'язків

$$y(x) = C_1y_1 + C_2y_2$$

та знаходимо загальний інтеграл рівняння (4.11):

$$y(x) = C_1x + C_2e^{-2x}. \bullet$$

4.2. Задача з крайовими умовами для лінійного диференціального рівняння другого порядку (задача Штурма–Ліувілля)

Означення 4.1. Задачею Штурма–Ліувілля називають задачу, яка полягає у відшуканні такого розв'язку $y(x)$ диференціального рівняння 2-го порядку, який задовольняє дві умови, задані для двох різних значень змінної x.

Позначимо значення змінної, про які йдеться в означенні 4.1, як $x = x_1$ та $x = x_2$. Тоді для лінійного диференціального рівняння 2-го порядку задача з крайовими умовами сформулюється так:

$$\begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \\ \alpha_1 y(x_1) + \beta_1 y'(x_1) = g \\ \alpha_2 y(x_2) + \beta_2 y'(x_2) = h, \end{cases} \tag{4.13}$$

де g, h, α_1, α_2, β_1, β_2 є числами, заданими в умові задачі.

Означення 4.2. Якщо $\beta_1 = \beta_2 = 0$, то крайові умови, накладені *на функцію* $y(x)$, називають *умовами першого роду*.

Означення 4.3. Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то крайові умови, накладені *на похідну функції* $y(x)$ називають *умовами другого роду*.

Означення 4.4. Якщо $g = h = 0$, то крайові умови називають однорідними.

●Приклад 4.2. Розв'яжемо крайові задачі з однорідними умовами першого та другого родів, поставлені для однорідного лінійного диференціального рівняння

$$y'' + q^2 y = 0 \tag{4.14}$$

зі сталим коефіцієнтом ($q = \text{const}$).

1. Крайова задача з однорідними умовами 1-го роду:

$$\begin{cases} y'' + q^2 y = 0 \\ y(0) = y(L) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Задача (4.15) сформульована з урахуванням того, що початок системи координат XOY доцільно розташувати в точці $(x_1, 0)$ і позначити $x_2 = L$, оскільки ця задача має дуже природний вигляд, коли x – це просторова координата точки тонкої струни із закріпленими краями. Тоді L – це довжина струни.

Розв'язання задачі: характеристичне рівняння

$$k^2 + q^2 = 0$$

має два уявні корені $k_{1,2} = \pm iq$, тому загальний інтеграл рівняння (4.14) має форму

$$y(x) = C_1 \cos qx + C_2 \sin qx.$$

Із першої умови, $y(0) = 0$, знаходимо значення сталої C_1:

$$C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0.$$

Тепер маємо частинний розв'язок, який містить одну довільну сталу: $y(x) = C_2 \sin qx$. Накладемо на нього другу умову, $y(L) = 0$: $C_2 \sin qL = 0$. Ця умова накладає обмеження не на сталу C_2, а на коефіцієнт q. Вона виконується, якщо $q = q_m$, де

$$q_m = \frac{\pi}{L} m, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.16}$$

Числа q_m називають *власними числами* крайової задачі. Розв'язок крайової задачі з однорідними умовами 1-го роду є дискретною добіркою функцій

$$y \equiv y_m^{(1)} = C_2 \sin q_m x, \tag{4.17}$$

представлених графічно на рис. 4.1. Ці функції називають *власними функціями* крайової задачі з однорідними умовами 1-го роду.

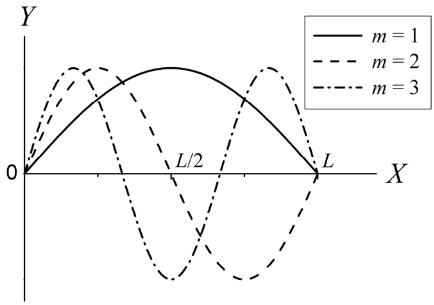


Рис. 4.1. Власні функції крайової задачі з однорідними умовами 1-го роду

Рис. 4.1 наочно показує, що власні функції крайової задачі з однорідними умовами 1-го роду дорівнюють нулю на краях інтервалу $(0, L)$.

2. Крайова задача з однорідними умовами 2-го роду:

$$\begin{cases} y'' + q^2 y = 0 \\ y'(0) = y'(L) = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Розв'язання задачі: накладемо однорідні крайові умови на похідну загального інтеграла (4.14):

$$y'(x) = -C_1 q \sin qx + C_2 q \cos qx \,.$$

Із першої умови, $y'(0) = 0$, знаходимо значення сталої C_2:

$$-C_1 q \sin 0 + C_2 q \cos 0 = 0 \;\Rightarrow\; C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1 = 0 \;\Rightarrow\; C_2 = 0\,.$$

Тепер маємо частинний розв'язок, який містить одну довільну сталу: $y(x) = C_1 \sin qx$. Накладаємо на нього другу умову, $y'(L) = 0$: $C_1 \sin qL = 0$. Із цієї умови випливає, що числа (4.16) є власними числами задачі з однорідними крайовими умовами другого роду, а власними функціями є функції

$$y_m^{(2)} \equiv C_1 \cos q_m x\,, \tag{4.19}$$

представлені графічно на рис. 4.2.

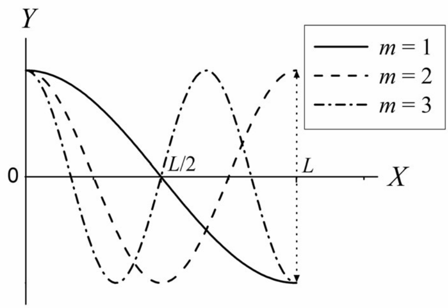


Рис. 4.2. Власні функції крайової задачі з однорідними умовами 2-го роду

Рис. 4.2 наочно показує, що похідні власних функцій крайової задачі з однорідними умовами 2-го роду дорівнюють нулю на краях інтервалу $(0, L)$. Вертикальна двобічна стрілка вказує на ті точки графіків, що відповідають нульовому значенню похідної власних функцій.

Підіб'ємо підсумки. Розв'язки крайових задач (4.14), (4.18) є добірками періодичних функцій $y_m(x)$, періоди яких визначаються числами q_m. Числа q_m називають власними числами, а функції $y_m(x)$ – власними функціями крайової задачі.

4.3. Застосування лінійного диференціального рівняння другого порядку до вивчення коливальних процесів

4.3.1. Вільні коливання

Рівняння вільних коливань є однорідним лінійним рівнянням 2-го порядку. Якщо параметри коливальної системи не змінюються під час її коливань, коефіцієнти рівняння є сталими. Рівняння має вигляд

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \qquad (4.20)$$

де x − змінна величина, що характеризує відхилення системи від рівноваги; $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, t – час, γ – коефіцієнт загасання або наростання коливань (якщо він додатний або від'ємний, відповідно), ω_0 − кутова частота вільних коливань. При записі рівняння коливань було використано те, що всі його доданки можна поділити на коефіцієнт біля другої похідної.

Для визначеності *вважатимемо коефіцієнт* γ *додатним*. Перше, що слід зауважити, це те, що коливання можуть виявитися неможливими в системі з великим коефіцієнтом γ, який у фізиці зазвичай характеризує дисипацію енергії системи, тобто перетворення енергії на тепло. Цей висновок випливає з аналізу характеристичного рівняння

$$k^2 + 2\gamma k + \omega_0^2 = 0, \tag{4.21}$$

розв'язки якого

$$k_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \tag{4.22}$$

дійсні, якщо $\gamma > \omega_0$. У такому разі загальний інтеграл рівняння (4.20) є суперпозицією двох експонент:

$$x = C_1 e^{k_+ t} + C_2 e^{k_- t}, \quad k_- < k_+ < 0. \tag{4.23}$$

Час загасання коливань визначається коренем k_+, оскільки величина першого доданка у формулі (4.23) зменшується із часом повільніше, ніж величина другого. Слід зауважити, що рівняння (4.20) перетворюється на ДР першого порядку, якщо його першим доданком можна знехтувати порівняно з другим. Це можливо, коли в системі відсутні сили інерції, а формально, коли величина розв'язку рівняння $2\gamma\dot{x} = -\omega_0^2 x$ зменшується із часом значно повільніше, ніж розв'язку (4.23) рівняння (4.20). Не будемо заглиблюватися у це питання, а лише зазначимо, що користуватися рівнянням релаксаційного типу можна, коли $\omega_0^2/2\gamma << k_+$, тобто $\omega_0 << 2\gamma$.

Вільні коливання динамічної (не обов'язково механічної) системи можливі, якщо

$$\gamma < \omega_0. \tag{4.24}$$

У цьому разі корені характеристичного рівняння є комплексними, а отже, його загальним інтегралом є функція

$$x_{\text{з.о.}} = e^{-\gamma t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \tag{4.25}$$

де $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ (рівняння (4.22)). Замість довільних сталих C_1 та C_2 введемо до розгляду сталі величини a та α за формулами

$$C_1 = a \cos \alpha, \quad C_2 = a \sin \alpha. \tag{4.26}$$

(Легко впевнитися, що це можна зробити за будь-яких величин C_1 та C_2). Загальний інтеграл рівняння вільних коливань виражається через введені величини формулою

$$x_{\text{з.о.}} = a e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha), \tag{4.27}$$

яка показує, що під час вільних коливань динамічної системи їхня амплітуда експоненціально зменшується.

На практиці a визначається за амплітудою вільних коливань, яка не може набувати будь-яких значень. Обмеження на її величину визначаються індивідуальними особливостями коливальної системи. Фаза коливань α визначається тим, чому дорівнювало відхилення системи від рівноваги на момент початку спостереження коливань.

Для природничих наук та інженерії велике значення мають не лише вільні коливання, але й вільне поширення хвиль у просторі, яке описується хвильовим рівнянням. Хвильове рівняння є рівнянням у частинних похідних. Оскільки вивчення рівнянь у частинних похідних виходить за межі курсу звичайних ДР, то стислий розгляд хвильового рівняння та його розв'язків винесений у додаток 1.

4.3.2. Вимушені коливання під дією періодичної сили

Розглянемо коливання під дією періодичної сили

$$f(t) = f_0 \cos\Omega t, \tag{4.28}$$

де f_0 − максимальна величина сили, Ω − кутова частота зміни сили. Рівняння вимушених коливань

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t \tag{4.29}$$

є неоднорідним лінійним рівнянням, тому його загальний інтеграл є сумою загального інтеграла однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного:

$$x_{\text{з.н.}} = ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) + x_{\text{ч.н.}} \tag{4.30}$$

У більшості випадків для сучасної інженерії дуже важливі коливання звукових, ультразвукових високих та надвисоких частот. У разі таких коливань перший доданок у загальному інтегралі (4.30) зазвичай швидко зменшується за величиною, тому зосередимось на розгляді частинного розв'язку рівняння, який відповідає вимушеним коливанням.

За правилами, сформульованими в п. 3.2.4, частинний розв'язок рівняння (4.29) слід шукати у формі лінійної комбінації синуса та косинуса. Однак до рівняння (4.29) входять декілька параметрів, тому такий спосіб відшукання частинного розв'язку веде до громіздких обчислень. Виявляється, легше діяти в інший спосіб, а саме, розглянути два рівняння:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t,$$

$$i\ddot{y} + 2i\gamma\dot{y} + i\omega_0^2 y = if_0 \sin\Omega t,$$

додати їх одне до одного та отримати рівняння для комплексної змінної $z \equiv x + iy$:

$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = f_0 e^{i\Omega t}, \tag{4.31}$$

яке не еквівалентне до (4.29), але має такий розв'язок, дійсна частина якого є розв'язком рівняння (4.29). Спрощення обчислень відбувається тому, що частинний розв'язок рівняння (4.31) слід шукати у вигляді експоненти

$$z_{\text{ч.н.}} = Ae^{i\Omega t} \tag{4.32}$$

і знаходити сталу A, підставляючи його до рівняння (4.31). Зробимо це:

$$A(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2)e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t}.$$

Звідси випливає вираз для сталої A, яку називають *комплексною амплітудою* коливань:

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega}. \tag{4.33}$$

Далі слід скористатися з очевидних співвідношень для дійсної частини $x = \operatorname{Re} z$ комплексної величини z, яка є добутком комплексних величин $z_1 = A$ та $z_2 = e^{i\Omega t}$:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_1 \times \operatorname{Re} z_2 - \operatorname{Im} z_1 \times \operatorname{Im} z_2.$$

У нашому випадку

$$\operatorname{Re} z_2 = \cos\Omega t, \ \operatorname{Im} z_2 = \sin\Omega t,$$

$$\operatorname{Re} A = \frac{1}{2}(A + A^*) = \frac{1}{2}\left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega} \right),$$

$$\operatorname{Im} A = \frac{1}{2i}(A - A^*) = \frac{1}{2i}\left(\frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} - \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2i\gamma\Omega} \right).$$

Звівши дроби до спільного знаменника та підставивши знайдені $\operatorname{Re} A$ та $\operatorname{Im} A$ до формули

$$x = \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} A \times \cos\Omega t - \operatorname{Im} A \times \sin\Omega t,$$

одержуємо вираз для змінної $x(t)$:

$$x(t) = f_0 \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \cos\Omega t + f_0 \frac{2\gamma\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2} \sin\Omega t. \tag{4.34}$$

Позначимо

$$\frac{\omega_0^2-\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}\equiv\cos\delta,$$
$$\frac{2\gamma\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}\equiv\sin\delta. \tag{4.35}$$

Це можна зробити, оскільки введені позначення забезпечують виконання тригонометричної рівності $\sin^2\delta+\cos^2\delta=1$. Підставимо $\sin\delta$ та $\cos\delta$ до рівняння (4.34):

$$x(t)=f_0\frac{\cos\delta\cos\Omega t}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}+f_0\frac{\sin\delta\sin\Omega t}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}.$$

Введемо до розгляду безрозмірну функцію, означенням якої є формула

$$\chi(\Omega)\equiv\frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2}}, \tag{4.36}$$

Означення 4.5. Функцію $\chi(\Omega)$ називають динамічною сприйнятливістю коливальної системи.

Величина відхилення системи від положення рівноваги пов'язана з динамічною сприйнятливістю співвідношенням

$$x(t)=\frac{f_0}{\omega_0^2}\chi(\Omega)\cos(\Omega t-\delta). \tag{4.37}$$

Проаналізуємо це співвідношення. *По-перше*, воно показує, що δ є різницею фаз періодичного відхилення коливальної системи від рівноваги та сили, що збуджує коливання. *По-друге*, амплітуда вимушених коливань пропорційна не лише амплітудному значенню f_0 сили, що спричиняє коливання, але й величині динамічної сприйнятливості коливальної системи.

4.3.3. Явище резонансу

Стала сила f_0 спричиняє стале відхилення, тому $\ddot{x} = \dot{x} = 0$ і рівняння (4.29) набуває форми $\omega_0^2 x = f_0$, тобто

$$x = f_0 \big/ \omega_0^2 \tag{4.38}$$

– це величина відхилення системи від рівноваги під дією сталої сили.

Досвід показує, що відхилення системи від положення рівноваги під дією періодичної сили може значно перевищувати відхилення під дією сталої сили, що дорівнює за величиною амплітудному значенню періодичної сили. Це може здатися дивним, оскільки в такому разі середня величина модуля періодичної сили у $\sqrt{2}$ разів менша за сталу силу, але це можливо, якщо за певних умов виконується сильна нерівність

$$\chi(\Omega) >> 1, \tag{4.39}$$

(див. (4.37) та (4.38)). Ці умови називають *умовами резонансу*, а те, що відбувається за таких умов – явищем резонансу, або просто, *резонансом*. Дослідимо це явище за умови

$$\gamma << \omega_0 . \tag{4.40}$$

Для цього проаналізуємо функцію $\chi(\Omega)$ і різницю фаз δ, виходячи з означення (4.36) та виразу, який випливає з виразів (4.35):

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \tag{4.41}$$

Розглянемо три випадки, а саме:

а) граничний випадок сталої сили $f(t)$, тобто $\Omega \to 0$. У цьому випадку $\operatorname{tg}\delta \to +0 \;\; \Rightarrow \;\; \delta \to 0; \;\; \chi \to 1, \;\; x \to f_0 \big/ \omega_0^2$, тобто маємо статичне відхилення від рівноваги (4.38);

б) граничний випадок сили високої частоти $\Omega \to \infty$. У цьому випадку $\operatorname{tg}\delta \to -0 \;\; \Rightarrow \;\; \delta \to \pi; \;\; \chi \to 0$, тобто система не встигає відхилитися від рівноваги за половину періоду дії сили;

в) випадок коливань під дією сили, частота якої відповідає максимальній величині динамічної сприйнятливості. У цьому випадку

$$\frac{\partial\chi}{\partial\Omega}=0, \quad \Rightarrow \frac{d}{d\Omega}\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\gamma^2\Omega^2\right]^{-\frac{1}{2}}=0 .$$

Обчисливши похідну, бачимо, що динамічна сприйнятливість набуває максимального значення за умови

$$\Omega=\Omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}. \tag{4.42}$$

Залежність динамічної сприйнятливості від частоти сили представлено на рис. 4.3 для двох малих величин відношення γ/ω_0 .

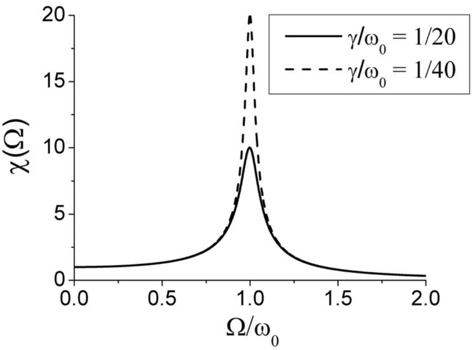


Рис. 4.3. Залежність динамічної сприйнятливості коливальної системи від частоти періодичної сили

Зваживши на сильну нерівність (4.40), бачимо, що на резонансній частоті (4.42) виконуються співвідношення

$$\chi(\Omega_{\text{res}})\approx\frac{\omega_0}{2\gamma}>>1,$$

$$\text{tg}\delta=\frac{2\gamma\sqrt{\omega_0^2-2\gamma^2}}{2\gamma^2}\approx\frac{\omega_0}{\gamma}>>1 .$$

Ці співвідношення показують, що явище резонансу відбувається за виконання умов

$$\gamma<<\omega_0, \ \Omega=\Omega_{\text{res}}, \ \delta\approx\pi/2, \tag{4.43}$$

тобто, якщо коефіцієнт загасання коливань малий порівняно із частотою вільних коливань, частота сили дорівнює резонансній величині (4.42), близькій до частоти вільних коливань, і різниця фаз між періодичною силою та спричиненим нею відхиленням від рівноваги дорівнює $\pi/2$.

Означення 4.6. Умови (4.43) називають умовами резонансу або, що те саме, резонансними умовами.

Вчені досліджують величезну кількість коливальних систем, і для кожної з них розроблені певні методи спостереження явища резонансу. Для фізичних систем одним із найбільш застосовних є спостереження максимуму поглинання енергії генератора коливань на частоті резонансу.

4.3.4. Поглинання енергії генератора коливань

Під час коливань, спричинених періодичною силою, енергія, яку поглинає коливальна система, дорівнює роботі, яку виконує сила. Якщо коливання описуються рівнянням (4.20), то робота змінної сили за малий проміжок часу дорівнює добутку сили на спричинене нею за цей час відхилення від рівноваги Δx. Ця робота описується формулою $\Delta W = f(t)v(t)dt$, оскільки $\Delta x = v(t)dt$, де $v(t) = \dot{x}(t)$ – це швидкість зміни функції $x(t)$. Робота змінної сили за одиницю часу W виражається формулою

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\dot{x}(t)dt, \tag{4.44}$$

де T – період коливань,

$$\dot{x}(t) = -\frac{f_0}{\omega_0^2}\Omega\chi(\Omega)\sin(\Omega t - \delta) \tag{4.45}$$

(див. рівняння (4.37)). Із рівнянь (4.44) і (4.45) випливає, що

$$W = -\frac{f_0^2\Omega}{\omega_0^2}\chi(\Omega)\cdot\frac{1}{T}\int_0^T \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t dt\,. \qquad (4.46)$$

Подальші обчислення спрощуються, якщо зважити на те, що величина

$$\left\langle \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t \right\rangle_T \overset{def}{\equiv} \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t dt \qquad (4.47)$$

– це середнє значення функції, що стоїть у кутових дужках, за період коливань T . Згідно з рівнянням (4.46) робота періодичної сили виражається через це середнє значення:

$$W = -\frac{f_0^2\Omega}{\omega_0^2}\chi(\Omega)\cdot\left\langle \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t \right\rangle_T\,. \qquad (4.48)$$

У випадку частот, далеких від резонансної, тобто, якщо $\Omega \to 0$, $\delta \to 0$, або $\Omega \to \infty$, $\delta \to \pi$, це середнє значення дорівнює нулю:

$$\left\langle \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t \right\rangle_T = \frac{1}{2}\left\langle \sin(2\Omega t) \right\rangle_T = 0.$$

У цьому випадку періодична сила, що діє на коливальну систему, не виконує роботу, а отже, енергія генератора коливань не поглинається. На резонансній частоті збуджуються коливання, зсунуті по фазі відносно діючої сили на $\delta \approx \pi/2$, тому середнє значення набуває максимальної величини:

$$\left\langle \sin(\Omega t - \delta)\cos\Omega t \right\rangle_T = \left\langle \sin(\Omega t - \pi/2)\cos\Omega t \right\rangle_T = \left\langle \cos^2\Omega t \right\rangle_T = 1/2\,.$$

Оскільки резонансна частота відповідає максимуму динамічної сприйнятливості, то на цій частоті спостерігається максимальне поглинання енергії генератора коливань за одиницю часу

$$W_{\max} = -\frac{1}{2} f_0^2 \frac{\Omega}{\omega_0^2}\chi(\Omega_{\mathrm{res}})\,. \qquad (4.49)$$

Аналізуючи фізичну вимірність цієї фізичної величини, слід пам'ятати, що в механіці рівняння (4.29) описує коливання тіла одиничної маси, тому f_0 має вимірність прискорення.

Зауваження 4.3. Оскільки за резонансних умов середня величина (4.47) набуває максимального значення, то поглинання потужності генератора коливань має на резонансній частоті більш гострий максимум, ніж функція $\chi(\Omega)$.

РОЗДІЛ 5

Системи лінійних диференціальних рівнянь першого порядку

5.1. Нормальні та автономні системи рівнянь

5.1.1. Основні означення

Системи диференціальних рівнянь 1-го порядку вперше виникли при розв'язуванні задач механіки, насамперед, задачі про визначення траєкторій рухомих фізичних тіл (планет, гарматних ядер тощо). Тому функціями, що підлягають визначенню, були координати тіл, а змінною, від якої залежать ці функції, був час t. Тому в більшості підручників для функцій, що визначаються із систем ДР, використовується позначення $x_i(t)$, де індекс $i = 1,2,...n$ є номером функції. Диференціювання функції за змінною t зазвичай позначають крапкою над функцією. У цьому розділі для невідомих функцій використано позначення $y_i(t)$, яке у випадку $n = 1$ перетворюється на прийняте у попередніх розділах посібника позначення невідомої функції $y(t)$ і природним чином пов'язує цей розділ з попередніми.

Означення 5.1. Нормальною системою диференціальних рівнянь 1-го порядку називають систему, усі рівняння якої розв'язані відносно похідної:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n; t) \\ \dot{y}_2 = f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n; t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{y}_n = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n; t). \end{cases}$$

Для зручності використовують скорочені форми запису нормальної системи

$$\dot{y}_i = f_i(y_j;t), \ \ i, j = 1,2,...n, \tag{5.1}$$

або

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y};t), \tag{5.2}$$

де $\mathbf{y}$ та $\mathbf{f}$ – це вектор-стовпчики:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}; \ \ \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{y};t) \\ f_2(\mathbf{y};t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{y};t) \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

які, як зазначено в розд. 3, є елементами (векторами) лінійного простору. Вимірність цього простору дорівнює кількості рівнянь системи[1].

Означення 5.2. Розв'язком системи диференціальних рівнянь (5.1) називають сукупність n функцій, підстановка яких до рівнянь перетворює їх на тотожності; сукупність усіх розв'язків називають загальним інтегралом системи диференціальних рівнянь.

Кількість похідних від функцій $y_i(t)$, що входять до системи рівнянь (5.1), дорівнює кількості рівнянь n. Щоб знайти з рівнянь ці функції, треба обчислити n невизначених інтегралів, тому загальний інтеграл системи містить n довільних сталих. Зафіксувавши величини довільних сталих, отримаємо *частинний розв'язок* системи ДР.

Означення 5.3. Простір векторів $\mathbf{y}(t)$ називають фазовим простором системи диференціальних рівнянь першого порядку.

---

[1] Тут і далі розглядатимемо такі системи ДР, у яких жодне з рівнянь не є наслідком інших рівнянь системи.

Зауваження 5.1. Класична механіка вивчає рухи сукупності матеріальних точок у тривимірному просторі. Якщо кількість точок дорівнює N, фазовим простором називають $6N$-вимірний простір, координатами елементів якого є координати радіус-векторів та швидкостей (або імпульсів) цих точок. Сенс такої назви можна пояснити простим прикладом.

●Приклад 5.1. Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -\omega^2 y_1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Продиференціювавши обидві частини 1-го рівняння за змінною t, одержуємо лінійне ДР другого порядку $\ddot{y}_1 = \dot{y}_2$. Підставивши до цього рівняння похідну $\dot{y}_2$ із 2-го рівняння системи (5.4), доходимо висновку, що ця система еквівалентна рівнянню

$$\ddot{y}_1 + \omega^2 \dot{y}_1 = 0.$$

Якщо змінна t є часом, а функція $y_1(t)$ – координатою матеріальної точки, то це рівняння описує вільні одновимірні коливання, а з першого рівняння системи (5.4) випливає, що функція y_2 є швидкістю матеріальної точки. З погляду механіки, вектори з координатами (y_1, y_2) є елементами двовимірного фазового простору матеріальної точки, яка здійснює одновимірні коливання, а згідно з означенням 5.3, ці вектори є елементами двовимірного фазового простору системи рівнянь (5.4).●

Зауваження 5.2. Можливість описати динаміку механічної системи або диференціальними рівняннями 2-го порядку, або системами диференціальних рівнянь 1-го порядку, породила два підходи до класичної механіки, які називають формалізмом Лагранжа та формалізмом Гамільтона. Формалізм Лагранжа базується на ДР другого порядку, а формалізм Гамільтона – на системах ДР першого порядку.

Означення 5.4. Систему диференціальних рівнянь

$$\dot{y}_i = f_i(y_j) \tag{5.5}$$

називають *автономною*.

Ознакою автономної системи є те, що всі функції $f_i(y_j)$ залежать від часу t лише через функції $y_j(t)$, тобто змінна t не входить до правих частин рівнянь явно. Назва "автономна система" пішла, знову таки, з механіки: автономними системами рівнянь описується рух замкненої системи фізичних тіл, що взаємодіють лише між собою, тобто їхній рух відбувається автономно (незалежно від інших систем фізичних тіл).

Розглянемо простір, координатами елементів якого є значення змінної t та значення функцій $y_i(t)$, $i = 1, 2, ...n.$ Вимірність цього простору перевищує кількість рівнянь нормальної системи на одиницю. Інтегральні криві системи рівнянь є кривими у цьому $n+1$-вимірному просторі. Проєкції цих кривих на фазовий простір називають *фазовими траєкторіями*.

●Приклад 5.2. Розглянемо поняття фазової траєкторії на прикладі системи рівнянь (5.4). Оскільки ця система еквівалентна рівнянню вільних коливань матеріальної точки, то її загальним інтегралом є функції

$$y_1 = A\cos(\omega t + \alpha),$$

$$y_2 = -A\omega\sin(\omega t + \alpha),$$

а фазові траєкторії є еліпсами

$$\frac{y_1^2}{A^2} + \frac{y_2^2}{A^2\omega^2} = 1, \tag{5.6}$$

побудованими на площині, координатами точок якої є значення функцій $y_1(t)$ та $y_2(t)$ у фіксовані моменти часу. У тому, що функції $y_1(t), y_2(t)$ задовольняють рівняння (5.6), легко впевнитися, підставивши функції y_1 та y_2 до цього рівняння і врахувавши тригонометричну тотожність

$$\sin^2(\omega t + \alpha) + \cos^2(\omega t + \alpha) = 1.$$

Рівняння (5.6) встановлює залежність між функціями $y_1(t)$ та $y_2(t)$. З одного боку, ці функції є координатами вектора, належного до фазового простору, а з іншого, – координатами точки, яка рухається на площині (y_1, y_2) уздовж еліпса (5.6). Саме цей еліпс і є фазовою траєкторію рухомої точки.●

5.1.2. Теорема існування та єдиності задачі Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь, її наслідок для автономної системи

Означення 5.5. Задачею Коші для нормальної системи диференціальних рівнянь називають задачу відшукання такого розв'язку системи, який задовольняє задані початкові умови. Формальним означенням задачі Коші є система рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_i = f_i(y_i;t) \\ y_i(t_0) = y_{i0}, \quad i = 1,2...n, \end{cases} \tag{5.7}$$

де y_{i0} – числа, задані в умові задачі.

Задачу Коші можна задати також і у векторній формі

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \end{cases} \tag{5.8}$$

де

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

є вектор-стовпчиками, тобто елементами лінійного простору вимірності n (див. п. 3.2.1).

Теорема 5.1. Якщо функції $f_i(y_j;t)$ і всі частинні похідні $\partial f_i / \partial y_j$ неперервні в точці $P_0(y_{i0},t_0)$, то в певному околі цієї точки існує один-єдиний розв'язок задачі Коші (5.7).

Зауваження 5.3. Теорема існування та єдиності розв'язку задачі Коші задає достатні умови того, що крізь точку $P_0(y_{i0},t_0)$ простору вимірності $n+1$ проходить одна-єдина інтегральна крива. Тобто, якщо ці умови порушені, то *може статися*, що крізь цю точку проходить більше, ніж одна інтегральна крива, або не проходить жодної.

Наслідок. Якщо в певній точці $n+1$-вимірного простору виконані умови теореми існування та єдиності розв'язку задачі

Коші для *автономної* системи диференціальних рівнянь, то *фазові траєкторії* не перетинаються в точці $\mathbf{y}_0$, яка є проєкцією точки P_0 на фазову площину.

Доведення теореми 5.1 та її наслідку легко знайти в докладних підручниках з диференціальних рівнянь, наприклад, у підручнику [3].

5.2. Системи двох лінійних рівнянь першого порядку

5.2.1. Означення лінійної системи диференціальних рівнянь

Як було зазначено, фундаментальні рівняння багатьох галузей науки є диференціальними рівняннями 2-го порядку. Те, що система двох ДР першого порядку еквівалентна одному ДР другого порядку, зумовлює важливість систем двох диференціальних рівнянь для природничих наук та інженерії. Нормальна система двох ДР першого порядку має такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = F_1(y_1, y_2, t) \\ \dot{y}_2 = F_2(y_1, y_2, t). \end{cases} \tag{5.9}$$

Означення 5.6. Лінійною системою двох диференціальних рівнянь першого порядку називають систему

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t) y_1 + a_{12}(t) y_2 + f_1(t) \\ \dot{y}_2 = a_{21}(t) y_1 + a_{22}(t) y_2 + f_2(t). \end{cases} \tag{5.10}$$

Систему (5.10) називають *лінійною*, тому що її можна записати в матричній формі:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

ввести до розгляду *лінійний* оператор

$$\hat{L} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} - \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

та тотожно перетворити матричне рівняння (5.10) на операторне

$$\hat{L}\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(t), \tag{5.13}$$

де

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, \ \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}. \tag{5.14}$$

Надане означення лінійної системи ДР 1-го порядку з очевидністю поширюється на системи рівнянь з коефіцієнтами a_{ik} $(i, k = 1, 2, \dots n-1, n)$ для n функцій y_k.

Означення 5.7. Систему лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 \\ \dot{y}_2 = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2. \end{cases} \tag{5.15}$$

називають *однорідною*.

Однорідну лінійну систему можна записати в операторній формі

$$\hat{L}\mathbf{y}(t) = 0. \tag{5.16}$$

Якщо замінити вектор-стовпчик $\mathbf{y}(t)$ на функцію $y(t)$, операторне рівняння (5.16) перетвориться на однорідне лінійне рівняння (3.23). Цей факт зумовлює можливість поширення загального підходу до розв'язання однорідних лінійних ДР (див. п. 3.2.3) на системи однорідних лінійних рівнянь.

5.2.2. Загальний підхід до розв'язання однорідних лінійних систем диференціальних рівнянь першого порядку

Оскільки вектор-стовпчики (5.14) є елементами двовимірного лінійного простору, а оператор $\hat{L}$ є лінійним оператором, то для однорідних лінійних систем справедливий принцип суперпозиції розв'язків.

Принцип суперпозиції розв'язків: будь-яка лінійна комбінація частинних розв'язків однорідної лінійної системи є її розв'язком.

Доведення справедливості принципу суперпозиції розв'язків для систем лінійних ДР подібний доведенню, яке описано в п. 3.2.3 для частинних розв'язків одного лінійного рівняння. Достатньо виконати це доведення для двох розв'язків системи двох однорідних лінійних рівнянь. Для доведення принципу суперпозиції зауважимо, що згідно з означенням частинного розв'язку підстановка частинних розв'язків $\mathbf{y}_1$ та $\mathbf{y}_2$ до системи (5.16) перетворює її на тотожності $\hat{L}\mathbf{y}_1 \equiv 0$ та $\hat{L}\mathbf{y}_2 \equiv 0$. Подіємо оператором $\hat{L}$ на лінійну комбінацію розв'язків:

$$\hat{L}(C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2) = \hat{L}C_1\mathbf{y}_1 + \hat{L}C_2\mathbf{y}_2 = C_1\hat{L}\mathbf{y}_1 + C_2\hat{L}\mathbf{y}_2 .$$

Звідси випливає тотожність

$$\hat{L}(C_1\mathbf{y}_1 + C_2\mathbf{y}_2) \equiv 0 ,$$

яка доводить справедливість принципу суперпозиції розв'язків для систем однорідних лінійних ДР. Узагальнення на випадок більшої кількості рівнянь виконується просто збільшенням кількості доданків у лінійній комбінації частинних розв'язків.

Так само, як і у випадку одного рівняння, із принципу суперпозиції виникає можливість утворити загальний інтеграл однорідної лінійної системи у вигляді лінійної комбінації частинних розв'язків:

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{y}_1(t) + C_2\mathbf{y}_2(t) , \tag{5.17}$$

де C_1 та C_2 – довільні сталі, а $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{y}_1(t)$ та $\mathbf{y}_2(t)$ є вектор-стовпчиками, що містять по два елементи кожен:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}, \ \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

Функції $y_{i\alpha}$ позначені парою індексів $i\alpha$; перший індекс – це номер функції, яка входить до системи рівнянь (5.15) і підлягає визначенню, а другий індекс – це номер частинного розв'язку в лінійній комбінації вектор-стовпчиків (5.17). Ця лінійна комбінація еквівалентна двом лінійним комбінаціям функцій $y_{i\alpha}$:

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12}, \; y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}. \qquad (5.19)$$

Ці вирази для y_1 та y_2 стають очевидними, якщо дивитись спочатку на всі верхні, а потім на всі нижні елементи вектор-стовпчиків (5.18).

Доведемо, що лінійна комбінація частинних розв'язків є загальним інтегралом лише тоді, коли ці частинні розв'язки лінійно незалежні.

Доведення. Виходимо з того, що загальний інтеграл має містити розв'язки задачі Коші:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}(t) y_1 + a_{12}(t) y_2, \\ \dot{y}_2 = a_{21}(t) y_1 + a_{22}(t) y_2, \end{cases} \qquad (5.20)$$
$$y_1(t_0) = y_{10}, \; y_2(t_0) = y_{20}.$$

Принцип суперпозиції гарантує те, що функції (5.19) задовольняють систему рівнянь, і залишається з'ясувати, за якої умови вони задовольняють початкові умови. Підставивши функції (5.19) до початкових умов задачі (5.20), одержуємо систему неоднорідних алгебраїчних рівнянь для невідомих C_1, C_2:

$$\begin{cases} y_{11}(t_0) C_1 + y_{12}(t_0) C_2 = y_{10}, \\ y_{21}(t_0) C_1 + y_{22}(t_0) C_2 = y_{20}. \end{cases} \qquad (5.21)$$

Розв'язок цієї системи можна знайти, скориставшись відомими з курсу алгебри формулами Крамера:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_{10} & y_{12} \\ y_{20} & y_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}, \; C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{10} \\ y_{21} & y_{20} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix}}, \qquad (5.22)$$

де визначник

$$W \equiv \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{vmatrix} \qquad (5.23)$$

називають визначником Вронського системи двох диференціальних рівнянь.

Формули (5.22) показують, що функція (5.19) може задовольнити початкові умови задачі Коші лише за умови, що визначник Вронського не дорівнює нулю. Оскільки загальний інтеграл має містити всі частинні розв'язки, то умова $W \neq 0$ має виконуватись за різних значень змінної t, тобто у формулі (5.23) замість фіксованих величин $y_{i\alpha}(t_0)$ містяться функції $y_{i\alpha}(t)$. Визначник Вронського не дорівнює нулю лише тоді, коли вектор-стовпчики $\mathbf{y}_1$ та $\mathbf{y}_2$ лінійно незалежні[1]. Саме це і треба було довести.

Висновок. Щоб зінтегрувати лінійну однорідну систему двох ДР, достатньо знайти два лінійно незалежних частинних розв'язки. Цю задачу неважко розв'язати, якщо коефіцієнти системи a_{ij} не залежать від t.

5.2.3. Інтегрування систем однорідних лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо систему однорідних лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2, \\ \dot{y}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{5.24}$$

Запишемо її у матричній формі

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{5.25}$$

Підставимо до рівняння (5.25) пробні функції

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} e^{kt} \tag{5.26}$$

та одержимо матричне рівняння

$$k\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix},$$

[1] Як було зазначено у п. 3.2.1, рівність визначника нулю є критерієм лінійної залежності його стовпчиків.

яке тотожно перетворюється на рівняння

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0$$

і на систему однорідних алгебраїчних рівнянь для невідомих λ_1, λ_2:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 = 0, \\ a_{21}\lambda_1 + (a_{22} - k)\lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{5.27}$$

Як вже було зазначено, така система має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто за умови, що

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - k \end{vmatrix} = 0. \tag{5.28}$$

Рівняння (5.28) є квадратним алгебраїчним рівнянням для відшукання таких чисел $k = k_\alpha$ ($\alpha = 1, 2$), за яких функції

$$\begin{pmatrix} y_{1\alpha} \\ y_{2\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{1\alpha} \\ \lambda_{2\alpha} \end{pmatrix} e^{k_\alpha t}, \ \ (\alpha = 1, 2) \tag{5.29}$$

будуть задовольняти задану систему однорідних лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами. Функції (5.29) є частинними розв'язками системи однорідних лінійних диференціальних рівнянь (5.24). Загальний інтеграл цієї системи є лінійною комбінацією частинних розв'язків:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t} + \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}. \tag{5.30}$$

Формула (5.30) показує, що загальний інтеграл однорідної системи визначається (характеризується) тим, які корені має рівняння (5.28), тому його називають *характеристичним рівнянням*. Щоб знайти загальний інтеграл (5.30), треба виконати такі дії:

а) знайти корені характеристичного рівняння $k_{1,2}$;

б) знайти функції (5.29), почергово підставивши до системи (5.27) знайдені k_1 та k_2;

в) скомбінувати із функцій (5.29) дійсний загальний інтеграл. При цьому можуть виникнути три різні ситуації:

1) $k_1 \neq k_2$, дійсні числа;

2) $k_1 = k_2$, кратний дійсний корінь;

3) $k_1 = \gamma + i\omega$, $k_2 = \gamma - i\omega$, комплексно-спряжені числа.

Зауваження 5.4. Оскільки визначник (5.28) алгебраїчної системи (5.27) дорівнює нулю, то після підстановки до цієї системи характеристичного числа k_1 або k_2 її рівняння виявляються лінійно залежними (еквівалентними), і з них вдається знайти лише відношення $\lambda_{21}/\lambda_{11}$ (підстановкою до них $k = k_1$) та $\lambda_{22}/\lambda_{12}$ (підстановкою $k = k_2$). При цьому величина одного коефіцієнта з кожної пари ($(\lambda_{11}, \lambda_{21})$ та $(\lambda_{22}, \lambda_{12})$) може набувати довільних значень, тобто є довільною сталою C_1 та C_2 (відповідно), що входить до загального інтеграла системи ДР.

Зауваження 5.5. У випадку комплексних коренів характеристичного рівняння із частинних розв'язків (5.29) слід скласти дійсний загальний інтеграл. Найлегше зробити це, скориставшись формулою

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix} + \mathrm{Im}\begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Пояснімо процедуру розв'язання системи однорідних лінійних ДР прикладами, узявши до уваги, що автори більшості задачників із диференціальних рівнянь використовують позначення $y_1 \equiv x$, $y_2 \equiv y$.

●Приклад 5.3. Зінтегруємо однорідну лінійну систему

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = 2x - 2y. \end{cases} \quad (5.32)$$

Для цього розглянемо матрицю коефіцієнтів даної системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

і розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & -2-k \end{vmatrix} = 0,$$

яке є алгебраїчним рівнянням 2-го порядку $k^2 + k - 6 = 0$ і має дійсні корені $k_1 = 2$ та $k_2 = -3$.

Знайдемо розв'язок, що відповідає кореню $k = 2$ з матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{pmatrix} = 0,$$

яке тотожне системі алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} -\lambda_{11} + 2\lambda_{21} = 0, \\ 2\lambda_{11} - 4\lambda_{21} = 0. \end{cases}$$

Визначимо співвідношення між коефіцієнтами $\lambda_{11} = 2\lambda_{21} \equiv 2C_1$ і перший фундаментальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Знайдемо розв'язок, що відповідає кореню $k = -3$ із матричного рівняння

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} = 0,$$

тотожного до системи рівнянь

$$\begin{cases} 4\lambda_{12} + 2\lambda_{22} = 0, \\ 2\lambda_{12} + \lambda_{22} = 0, \end{cases}$$

з якої випливає співвідношення $\lambda_{22} = -2\lambda_{12} \equiv -2C_2$. Знайдемо другий фундаментальний розв'язок

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ -2C_2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

і загальний інтеграл системи (5.32):

$$x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t},$$
$$y = C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-3t}.$$ ●

●Приклад 5.4. Зінтегруємо систему однорідних лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \tag{5.33}$$

діючи так само, як у попередньому прикладі. Із цією метою розглянемо матрицю коефіцієнтів цієї системи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

сформулюємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0$$

та рівняння для визначення коефіцієнтів $\lambda_{i\alpha}$:

$$\begin{cases} -k\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ -\lambda_1 - k\lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо корені характеристичного рівняння $k_1 = i$, $k_2 = -i$ та співвідношення між коефіцієнтами $\lambda_{21} = i\lambda_{11} \equiv iC_1$, $\lambda_{22} = -i\lambda_{12} \equiv iC_2$. Визначимо комплексні розв'язки

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t} = \begin{pmatrix} C_1 \\ iC_1 \end{pmatrix} e^{it},$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} -C_2 \\ iC_2 \end{pmatrix} e^{-it},$$

та утворимо з них дійсний загальний інтеграл, використавши для цього формулу (5.31), яка в цьому випадку дає

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\begin{pmatrix} C_1 \\ +iC_1 \end{pmatrix} e^{it} + \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -C_2 \\ iC_2 \end{pmatrix} e^{-it} =$$

$$= \mathrm{Re}\begin{pmatrix} C_1 \\ iC_1 \end{pmatrix}(\cos t + i\sin t) + \mathrm{Im}\begin{pmatrix} -C_2 \\ iC_2 \end{pmatrix}(\cos t - i\sin t) =$$

$$= \begin{pmatrix} C_1\cos t \\ -C_1\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_2\sin t \\ C_2\cos t \end{pmatrix}.$$

Ці співвідношення показують, що загальний інтеграл системи рівнянь (5.33) виражається рівняннями

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$
$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

5.2.4. Інтегрування системи неоднорідних лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами методом подібності розв'язку до правих частин рівнянь

Метод подібності застосовують, якщо похідні $df_i(t)/dt$ правих частин обох рівнянь системи $f_i(t)$ є функціями такого ж типу, як і $f_i(t)$, тобто, якщо праві частини рівняння є або експонентами, або лінійними комбінаціями синусів та косинусів, або поліномами. Вони можуть бути також або сумою таких функцій, або добутком полінома на експоненту чи полінома на лінійну комбінацію синусів та косинусів.

Метод подібності оснований на теоремі, згідно з якою *загальний інтеграл неоднорідного лінійного ДР є сумою загального інтеграла однорідного лінійного ДР та частинного розв'язку неоднорідного:*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{з.н.}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{з.о.}} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{ч.н.}}. \tag{5.34}$$

У п. 2.4.3 цю теорему було доведено для неоднорідного лінійного ДР 1-го порядку, виходячи з операторної форми такого рівняння (2.46). Оскільки операторне рівняння (5.13) відрізняється від неоднорідного лінійного ДР 1-го порядку (2.46) лише заміною функцій $y(x)$ та $f(x)$ на стовпчики $\mathbf{y}(x)$ та $\mathbf{f}(x)$, то ця теорема доводиться для системи рівнянь так само, як вона була доведена в п. 2.4.3.

Зважаючи на вказану теорему, щоб знайти загальний інтеграл неоднорідної лінійної системи ДР необхідно:

а) відкинути праві частини рівнянь і розв'язати характеристичне рівняння лінійної системи однорідних ДР;

б) знайти загальний інтеграл системи однорідних ДР;

в) знайти частинний розв'язок системи неоднорідних ДР;

г) додати до загального інтеграла системи однорідних ДР знайдений частинний розв'язок системи неоднорідних ДР.

Проілюструємо описану процедуру інтегрування системи неоднорідних лінійних ДР зі сталими коефіцієнтами простим прикладом.

●Приклад 5.5. Зінтегруємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x + \cos t. \end{cases} \tag{5.35}$$

Для цього виконаємо такі кроки:

а) відкинемо праву частину другого рівняння та розв'яжемо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} = 0,$$

$$k^2 - 1 = 0, \; k_1 = 1, \; k_2 = -1;$$

б) знайдемо загальний інтеграл системи однорідних ДР:

$$\begin{pmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{cases} -k\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 - k\lambda_2 = 0; \end{cases}$$

$k_1 = 1$:

$$-\lambda_{11} + \lambda_{21} = 0, \quad \lambda_{11} = \lambda_{21} \equiv C_1,$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1 \end{pmatrix} e^t;$$

$k_2 = -1$:

$$\lambda_{12} + \lambda_{22} = 0, \quad \lambda_{12} = -\lambda_{22} \equiv C_2,$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 \\ -C_2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

$$x_{\text{з.о.}} = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad y_{\text{з.о.}} = C_1 e^t - C_2 e^{-t};$$

в) знайдемо частинний розв'язок системи неоднорідних ДР, підставивши до них пробні функції, подібні до правої частини 2-го рівняння[1]:

$$x = A_1 \sin t + B_1 \cos t,$$
$$y = A_2 \sin t + B_2 \cos t.$$

Знаходимо умови

$$A_1 \cos t - B_1 \sin t = A_2 \sin t + B_2 \cos t,$$
$$A_2 \cos t - B_2 \sin t = A_1 \sin t + (B_1 + 1)\cos t.$$

Ці умови мають виконуватись для всіх значень змінної t, а отже, мають дорівнювати один одному коефіцієнти як біля косинусів, так і біля синусів цієї змінної. Коефіцієнти біля косинусів дорівнюють один одному, якщо

$$A_1 = B_2 \text{ та } A_2 = B_1 + 1,$$

а біля синусів, якщо

$$-B_1 = A_2 \text{ та } -B_2 = A_1.$$

Отже, маємо систему чотирьох рівнянь для чотирьох невідомих, розв'язком якої є коефіцієнти $A_1 = B_2 = 0$, $A_2 = -B_1 = 1/2$. Частинним розв'язком системи неоднорідних ДР є функції

$$x_{\text{ч.н.}} = -\frac{1}{2}\cos t, \; y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2}\sin t.$$

Додаємо до знайденого частинного розв'язку загальний інтеграл системи однорідних рівнянь і в такий спосіб визначаємо загальний інтеграл системи рівнянь (5.35):

$$x_{\text{з.н.}} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t,$$
$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^t - C_2 e^{-t} + \frac{1}{2}\sin t.$$

---

[1] Правою частиною другого рівняння системи є косинус змінної *t*, але до пробних функцій додано ще й синус, оскільки похідна від синуса дорівнює косинусу, а отже, вона дорівнює правій частині рівняння.

Бачимо, що до знайденого загального інтеграла входить не лише косинус, але й синус змінної t, а отже, обмежуватися у пробних функціях лише косинусом було б помилкою.●

5.2.5. Інтегрування системи неоднорідних лінійних рівнянь методом варіації довільних сталих

Як було зазначено, загальний інтеграл системи двох однорідних лінійних рівнянь містить дві довільні сталі, тобто він є сім'єю функцій $x_{\text{з.о.}}(t,C_1,C_2)$, $y_{\text{з.о.}}(t)$. Метод варіації довільних сталих полягає в заміні цих сталих двома функціями $u(t)$, $v(t)$, підстановці пробних функцій $x_{\text{з.о.}}[t,u(t),v(t)]$, $y_{\text{з.о.}}[t,u(t),v(t)]$ до системи неоднорідних лінійних ДР і визначенні таких функцій $u(t)$, $v(t)$, які перетворюють рівняння системи на тотожності. Пояснімо метод варіації довільних сталих прикладом.

●Приклад 5.6. Зінтегруємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases} \tag{5.36}$$

Загальний інтеграл однорідної системи був знайдений у результаті розв'язання системи ДР (5.33). Для зручності, запишемо його ще раз:

$$x_{\text{з.о.}} = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$
$$y_{\text{з.о.}} = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Варіюємо довільні сталі $C_1 = u(t)$, $C_2 = v(t)$ та підставляємо пробні функції

$$x = u(t)\cos t + v(t)\sin t\,,\ \ y = -u(t)\sin t + v(t)\cos t$$

до системи ДР (5.36). У результаті цього знаходимо таку систему рівнянь для визначення функцій $u(t)$ та $v(t)$:

$$\begin{cases} \dot{u}(t)\cos t + \dot{v}(t)\sin t = 0, \\ -\dot{u}(t)\sin t + \dot{v}(t)\cos t = \dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$$

(Доданки, що не містять похідних від $u(t)$ та $v(t)$ взаємно знищилися). Помноживши перше рівняння на синус змінної t, друге на косинус і, склавши праві та ліві частини рівнянь, знаходимо:

$$\dot{v}=1,\ \dot{u}=-\mathrm{tg}t,$$

$$u=-\int \mathrm{tg}t dt=\int \frac{d(\cos t)}{\cos t}=\ln\left|\cos t\right|+C_1,\quad v=t+C_2;$$

$$x_{\text{з.н.}}=C_1\cos t+C_2\sin t+\cos t\ln\left|\cos t\right|+t\sin t,$$
$$y_{\text{з.н.}}=-C_1\sin t+C_2\cos t-\sin t\ln\left|\cos t\right|+t\cos t.$$ ●

Зауваження 5.6. Метод варіації довільних сталих може бути застосований і до системи неоднорідних лінійних ДР зі змінними коефіцієнтами, коли вдається знайти загальний інтеграл відповідної системи лінійних ДР.

РОЗДІЛ 6

Стійкість стаціонарних станів динамічної системи

6.1. Постановка задачі

Домовимось, що *динамічна система* (ДС) – це об'єкт або сукупність об'єктів фізичної, хімічної, соціальної або іншої природи, а *система рівнянь* (СР) – автономна система двох диференціальних рівнянь 1-го порядку для функцій $y_1(t)$ та $y_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = F_1(y_1, y_2), \\ \dot{y}_2(t) = F_2(y_1, y_2). \end{cases} \tag{6.1}$$

Розглянемо динамічну систему, зміна стану якої описується функціями $y_1(t)$ та $y_2(t)$. Якщо ДС може перебувати в незмінному стані, то СР має *стаціонарний* (тобто незалежний від часу) розв'язок

$$y_1 = y_{10} = \text{const}, \quad y_2 = y_{20} = \text{const}. \tag{6.2}$$

Припустимо, що ДС, яка перебуває в незмінному стані, у момент $t = 0$ потрапляє під раптовий короткотривалий вплив зовнішнього чинника (для ДС різної природи це може бути механічний поштовх, короткотривала зміна електричної напруги, спалах світла, втручання, що веде до раптової зміни інформаційного трафіку тощо). Під впливом такого чинника спокій системи порушується, вона починає рухатися, і сталі величини (6.2), що описують стан системи, замінюються на залежні від часу величини

$$y_1^* = y_{10} + \tilde{y}_1(t), \quad y_2^* = y_{20} + \tilde{y}_2(t). \tag{6.3}$$

Дуже часто короткотривалий вплив на ДС буває непередбачуваним, тому зумовлені цим впливом доданки $\tilde{y}_1(t)$ та $\tilde{y}_2(t)$ до стаціонарного розв'язку називають *випадковими збуреннями* величин y_{10} та y_{20}. У багатьох реальних випадках навіть невеликий зовнішній вплив може призвести до великих (і часто небезпечних) наслідків. Це трапляється, якщо внаслідок певних властивостей ДС, а формально – для певних функцій $F_1(y_1, y_2)$ та $F_2(y_1, y_2)$, що описують ці властивості, малі за величиною збурення зростають із часом до величин, порівняних із y_{10} та/або y_{20}. У такому разі кажуть, що стаціонарний стан динамічної системи нестійкий до зовнішнього впливу, а стаціонарний розв'язок системи рівнянь нестійкий до малих випадкових збурень $|\tilde{y}_1(0)| << |y_{10}|$, $|\tilde{y}_2(0)| << |y_{20}|$.

Підвищення стійкості ДС до зовнішніх впливів є одним із найважливіших завдань інженерії, а дослідження стійкості стаціонарних розв'язків СР до малих збурень – однією з важливих задач математики.

6.2. Дослідження стійкості стаціонарних розв'язків системи рівнянь у лінійному наближенні

6.2.1. Точки спокою на фазовій площині

Фазова площина – це площина, координатами точок якої є значення функцій y_1, y_2. Якщо стан динамічної системи змінюється, розв'язок системи рівнянь зображується певною кривою $\Phi(y_1, y_2) = 0$ на фазові площині. Цю криву називають *фазовою траєкторією*, тому що кожному "миттєвому" стану динамічної системи відповідає певна точка на ній. Зручно вважати, що ця точка рухається вздовж фазової траєкторії і похідні $\dot{y}_1, \dot{y}_2$ є декартовими координатами вектора швидкості.

Точку, яка відповідає стаціонарному стану ДС, називають *точкою спокою*. Її координатами є стаціонарні розв'язки

$y_1 = y_{10}$, $y_2 = y_{20}$, а її швидкість дорівнює нулю. Стаціонарні розв'язки слід знаходити із системи рівнянь (6.1), у якій покладено $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$, тобто із системи рівнянь

$$\begin{cases} F_1(y_{10}, y_{20}) = 0, \\ F_2(y_{10}, y_{20}) = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Точки спокою класифікують подібно до особливих точок диференціального рівняння 1-го порядку (див. розд. 2), але ще додатково розподіляють точки спокою кожного типу на стійкі та нестійкі до малих збурень. У лінійному за малими збуреннями наближенні для дослідження стійкості точок спокою (*стаціонарних станів* ДС) використовують лінеаризовану систему ДР.

6.2.2. Лінеаризована система диференціальних рівнянь

Розглянемо функції $F_1(y_1, y_2)$ та $F_2(y_1, y_2)$, що стоять у системі рівнянь (6.1), вважаючи, що y_1, y_2 – це "збурені" функції (6.3), у яких збурення малі за величиною настільки, що $\left|\tilde{y}_{1,2}\right|^2 << \left|\tilde{y}_{1,2}\right|$. Наближено представимо $F_{1,2}(y_1, y_2)$ формулою Тейлора, урахувавши доданки нульового та першого порядків за цими малими збуреннями:

$$\begin{aligned} F_1(y_1^*, y_2^*) &\approx F_1(y_{10}, y_{20}) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1^*}\right)_{\tilde{y}_{1,2}=0} \cdot \tilde{y}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2^*}\right)_{\tilde{y}_{1,2}=0} \cdot \tilde{y}_2, \\ F_2(y_1^*, y_2^*) &\approx F_2(y_{10}, y_{20}) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_1^*}\right)_{\tilde{y}_{1,2}=0} \cdot \tilde{y}_1 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial y_2^*}\right)_{\tilde{y}_{1,2}=0} \cdot \tilde{y}_2. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Оскільки y_{10} та y_{20} сталі, то похідні у формулах (6.5) є константами, які доцільно позначити літерами з двома індексами:

$$a_{ij} \equiv \left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j^*}\right)_{\tilde{y}_{1,2}=0}. \tag{6.6}$$

Окрім того, слід зважити на рівняння (6.3). Після цього вирази (6.5) набудуть спрощеної форми

$$F_1(y_1^*, y_2^*) = a_{11}\tilde{y}_1 + a_{12}\tilde{y}_2, \quad F_2(y_1^*, y_2^*) = a_{21}\tilde{y}_1 + a_{22}\tilde{y}_2,$$

а система рівнянь (6.1) перетвориться на однорідну лінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = a_{11}\tilde{y}_1 + a_{12}\tilde{y}_2, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = a_{21}\tilde{y}_1 + a_{22}\tilde{y}_2, \end{cases} \tag{6.7}$$

оскільки $\dot{y}_{10} = \dot{y}_{20} = 0$, і тому $\dot{y}_1^* = \dot{\tilde{y}}_1$, $\dot{y}_2^* = \dot{\tilde{y}}_2$. Систему рівнянь (6.7) називають *лінеаризованою* за малими збуреннями $\tilde{y}_1$ та $\tilde{y}_2$.

6.2.3. Ознака нестійкості стаціонарного стану

Щоб спростити запис лінеаризованої системи рівнянь, перепозначимо малі збурення

$$\tilde{y}_1 \equiv x, \; \tilde{y}_2 \equiv y \tag{6.8}$$

і перепишемо вирази (6.7) у формі

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases} \tag{6.9}$$

У розд. 4 було показано, що загальний інтеграл системи однорідних лінійних рівнянь є сумою двох фундаментальних[1] розв'язків

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{pmatrix} e^{k_1 t}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} e^{k_2 t}, \tag{6.10}$$

де k_1 та k_2 є коренями характеристичного рівняння (5.28), а коефіцієнти $\lambda_{i\alpha}$ із точністю до двох довільних сталих визначаються із системи рівнянь

[1] *Фундаментальними* називають лінійно незалежні частинні розв'язки, кількість яких дорівнює кількості рівнянь у системі однорідних лінійних ДР. Ці розв'язки є функціями $y_1(x_1)$ та $y_2(x_2)$, вираженими через параметр t.

$$\begin{cases} (a_{11}-k_\alpha)\lambda_{1\alpha}+a_{12}\lambda_{2\alpha}=0, \\ a_{21}\lambda_{1\alpha}+(a_{22}-k_\alpha)\lambda_{2\alpha}=0. \end{cases} \tag{6.11}$$

Площина (x, y) є фазовою площиною лінеаризованої системи рівнянь. Із виразів (6.10) можна зробити важливі висновки.

Висновок 6.1. Якщо корені характеристичного рівняння дійсні, то фундаментальні розв'язки зображуються на фазовій площині прямими лініями, які називають *сепаратрисами*.

І справді, якщо корені характеристичного рівняння є дійсними числами, то і коефіцієнти $\lambda_{1\alpha}$ та $\lambda_{2\alpha}$ – також дійсні числа. Із виразів (6.10) випливають співвідношення $(y/x)_1 = \lambda_{21}/\lambda_{11}$ та $(y/x)_2 = \lambda_{22}/\lambda_{12}$, тому рівняння двох фундаментальних розв'язків є рівняннями двох прямих

$$y = h_1 x \text{ та } y = h_2 x, \tag{6.12}$$

із кутовими коефіцієнтами $h_1 = \lambda_{21}/\lambda_{11}$, $h_2 = \lambda_{22}/\lambda_{12}$. Рівняння (6.12) є рівняннями сепаратрис.

Висновок 6.2. Загальний інтеграл лінеаризованої системи

$$\begin{aligned} x &= \lambda_{11}e^{k_1 t} + \lambda_{12}e^{k_2 t}, \\ y &= \lambda_{21}e^{k_1 t} + \lambda_{22}e^{k_2 t}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

зображується сім'єю фазових траєкторій $y(x, C_1, C_2)$. Із системи алгебраїчних рівнянь (6.11) визначаються відношення коефіцієнтів $\lambda_{21}/\lambda_{11}$ та $\lambda_{22}/\lambda_{12}$, а два із чотирьох коефіцієнтів залишаються невизначеними[1], а отже, вони є довільними сталими $C_1 \equiv \lambda_{11}$, $C_2 \equiv \lambda_{12}$.

Висновок 6.3. У виразах (6.13) змінна t є часом, а x та y – малими збуреннями функцій $y_1(t)$ та $y_2(t)$. Якщо хоча б один із коренів характеристичного рівняння має додатну дійсну час-

[1] Корені характеристичного рівняння занулюють визначник системи рівнянь (6.11). Якщо визначник системи однорідних лінійних рівнянь дорівнює нулю, рівняння системи є лінійно залежними, а отже, рівносильними.

тину, то існують такі збурення, які зростають із часом (див. (6.13)). На практиці, зі зростання хоча б одного випадкового збурення науковці та інженери доходять висновку про *нестійкість* стаціонарного стану динамічної системи, оскільки випадкові збурення виникають непередбачувано.

6.3. Класифікація точок спокою

Насамперед зауважимо, що точка спокою має координати $x = y = 0$, тому що в цій точці збурення дорівнюють нулю (див. (6.8)). Класифікація точок спокою різних систем диференціальних рівнянь базується на класифікації коренів характеристичного рівняння лінеаризованої системи за їхнім типом та величиною. Розглянемо почергово різні випадки.

1. Характеристичне рівняння має *два дійсних корені* $k_1 = \gamma_1$, $k_2 = \gamma_2$, і ці корені є числами *одного знака*. У цьому випадку загальний інтеграл визначається формулою

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \end{pmatrix} e^{\gamma_1 t} + \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \end{pmatrix} e^{\gamma_2 t}, \tag{6.14}$$

де відношення $h_1 = \lambda_{21}/\lambda_{11}$ та $h_2 = \lambda_{22}/\lambda_{12}$ визначаються із характеристичного рівняння. Корені характеристичного рівняння завжди можна пронумерувати так, щоб виконувалась нерівність

$$\gamma_1 > \gamma_2 . \tag{6.15}$$

Розглянемо рух точки з координатами $x(t)$, $y(t)$ уздовж фазових траєкторій лінеаризованої системи рівнянь на площині XOY, вважаючи, що *обидва корені характеристичного рівняння додатні*, а час t зростає від від'ємних значень до додатних.

У далекому минулому виконувалися нерівності $\gamma_1 t < \gamma_2 t << -1$, тому доданки в загальному інтегралі були малими за величиною, і перший доданок був менше другого. Унаслідок цього точка, що зображує збурення, була розташована біля точки спокою, і траєкторія її руху пролягала ближче до сепаратриси $y = h_2 x$, ніж до $y = h_1 x$, як показано на рис. 6.1. Напрямок руху точки, координати якої дорівнюють величинам випадкових збурень, зображено стрілочками.

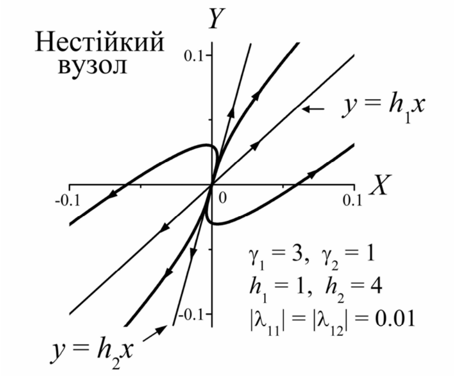


Рис. 6.1. Фазові траєкторії лінеаризованої системи рівнянь, розраховані для випадку двох додатних коренів характеристичного рівняння.

Оскільки корені характеристичного рівняння додатні, то з плином часу обидва доданки в правій частині рівняння (6.14) збільшуються і рухома точка віддаляється від точки спокою, яка лежить на перетині координатних осей. Унаслідок нерівності (6.15) перший доданок збільшується швидше, ніж другий, тому фазові траєкторії відхиляються від сепаратриси $y = h_2 x$, а їхні напрямки наближаються до напрямку сепаратриси $y = h_1 x$. Із рис. 6.1 очевидно, що випадкові збурення зростають із часом, тому стаціонарний стан динамічної системи нестійкий. Зазначимо, що фазові траєкторії, розташовані в різних квадрантах системи координат *XOY*, відповідають різним знакам довільних сталих λ_{11} та λ_{12}, а абсолютні величини цих сталих обрані так, щоб для зображених на рис. 6.1 фазових траєкторій виконувалися умови $|x|^2 << |x|$, $|y|^2 << |y|$, за яких була здійснена лінеаризація системи рівнянь.

Якщо *обидва корені характеристичного рівняння від'ємні*, то фазові траєкторії відрізняються від зображених на рис. 6.1 лише зміною напрямків усіх стрілочок (рис. 6.2). Випадкові збурення експоненціально згасають із часом, тому стаціонарний стан динамічної системи стійкий.

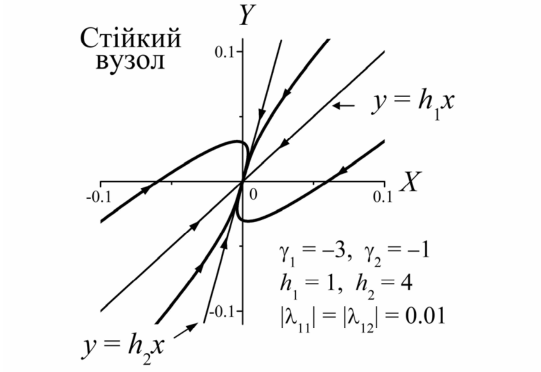


Рис. 6.2. Фазові траєкторії лінеаризованої системи рівнянь, розраховані для випадку двох від'ємних коренів характеристичного рівняння

Означення 6.1. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має *два дійсних корені одного знака*, точку спокою називають *вузлом.* Вузол називають нестійким, якщо корені додатні, і стійким, коли вони від'ємні. Додатні корені характеристичного рівняння називають інкрементами зростання збурень, а від'ємні – декрементами загасання.

2. Характеристичне рівняння має *два дійсних корені* $k_1 = \gamma_1$, $k_2 = \gamma_2$ і ці корені є числами *різного знака*. Головне, що слід зазначити в цьому випадку, полягає в тому, що стаціонарний стан ДС нестійкий, оскільки один із коренів характеристичного рівняння додатний. Щоб з'ясувати, як у цьому випадку проходять фазові траєкторії, слід знову розглянути загальний інтеграл (6.14). З огляду на нерівність (6.15) корінь γ_1 додатний, а корінь γ_2 від'ємний. За від'ємних значень змінної t показники експонент у правій частині рівняння (6.14) задовольняють нерівності $\gamma_2 t > 0$,

$\gamma_1 t < 0$, тому другий доданок у правій частині рівняння (6.14) набагато перевищує перший. Унаслідок цього фазова траєкторія рухомої точки проходить поблизу сепаратриси $y = h_2 x$.

Із плином часу другий доданок у правій частині рівняння (6.14) зменшується і стає від'ємним, а перший – збільшується і стає додатним. Завдяки цьому траєкторія рухомої точки відхиляється від сепаратриси $y = h_2 x$ і наближається до сепаратриси $y = h_1 x$, як показано стрілочками на рис. 6.3. На рис. 6.3 показано фазові траєкторії, кожна з яких відповідає одній із чотирьох можливих комбінацій знаків сталих λ_{11} та λ_{12}. Форма зображених траєкторій асоціюється із формою кінського сідла, тому точку спокою називають *сідлом*.

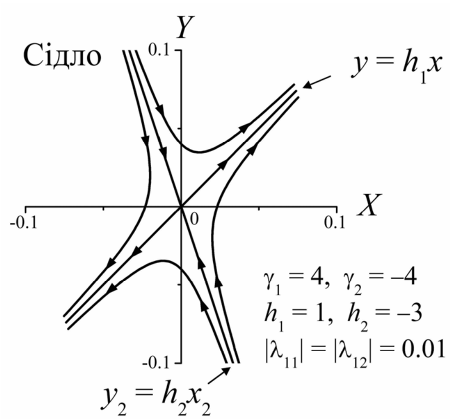


Рис. 6.3. Фазові траєкторії лінеаризованої системи рівнянь, розраховані для випадку різних за знаком коренів характеристичного рівняння

Означення 6.2. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має *два дійсних корені різного знака*, точку спокою називають *сідловою точкою*, *або сідлом.*

3. Характеристичне рівняння має *два уявні корені* $k_1 = i\omega$, $k_2 = -i\omega$, які комплексно-спряжені з огляду на те, що коефіцієнти лінеаризованої системи рівнянь є дійсними числами. Як було показано в розд. 5, у такому випадку загальний інтеграл лінеаризованої системи має форму

$$\begin{aligned} x &= C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t, \\ y &= l_1 \cos \omega t + l_2 \sin \omega t, \end{aligned} \tag{6.16}$$

де l_1 та l_2 є лінійними комбінаціями довільних сталих C_1 та C_2. Щоб з'ясувати, яку форму в цьому випадку мають фазові траєкторії, доцільно виразити загальний інтеграл (6.16) через інші сталі, означені співвідношеннями

$$C_1 = A\cos\alpha, \quad C_2 = -A\sin\alpha,$$
$$l_1 = B\sin\beta, \quad l_2 = B\cos\beta.$$

Загальний інтеграл лінеаризованої системи набуває форми

$$x = A\cos(\omega t + \alpha), \; y = B\sin(\omega t + \beta). \tag{6.17}$$

Якщо $\alpha = \beta$, то рівняннями фазових траєкторій є рівняння еліпсів з осями довжиною в $2A$ та $2B$:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \tag{6.18}$$

Якщо $\alpha \neq \beta$, то фазові траєкторії мають форму еліпсів, що повернуті відносно осей координат (рис. 6.4).

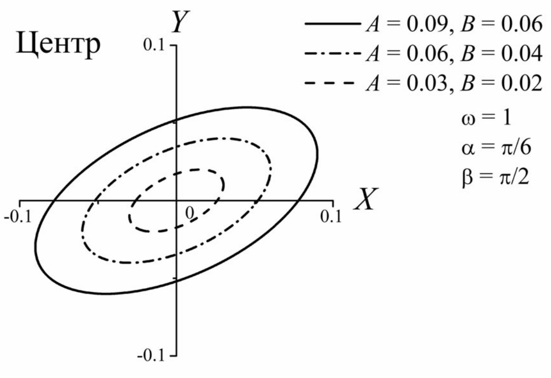


Рис. 6.4. Фазові траєкторії лінеаризованої системи рівнянь, розраховані для випадку уявних коренів характеристичного рівняння

Рис. 6.4 показує, що фазові траєкторії замкнені і цілком лежать в обмеженій області фазової площини, а отже, випадкові збурення періодично змінюються із часом, не перевищуючи певних значень. Практично це означає, що лінійне за збуреннями наближення недостатнє для висновку про стійкість або нестійкість ДС до впливу зовнішніх чинників, і тому треба проводити більш точне дослідження цього питання.

Означення 6.3. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має *два уявних корені*, точку спокою називають *центром.*

Назва точки спокою пояснюється тим, що вона розташована всередині сукупності замкнених фазових траєкторій.

4. Характеристичне рівняння має *два комплексно-спряжених корені* $k_1 = \gamma + i\omega$, $k_2 = \gamma - i\omega$, що мають ненульову дійсну частину γ. У такому разі загальний інтеграл лінеаризованої системи рівнянь має форму

$$x = Ae^{\gamma t}\cos(\omega t + \alpha),$$
$$y = Be^{\gamma t}\sin(\omega t + \beta).$$

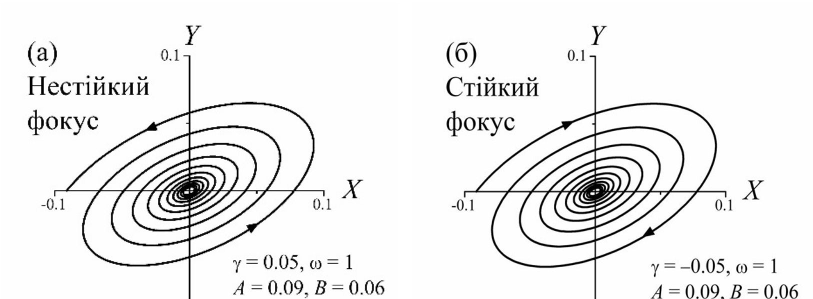


Рис. 6.5. Фазові траєкторії лінеаризованої системи рівнянь, розраховані для випадку комплексних коренів характеристичного рівняння

Можна легко уявити, яку форму матимуть фазові траєкторії, якщо вважати, що $\gamma \ll \omega$. Тоді точка з координатами (x, y) рухається фазовою площиною за майже еліптичною траєкторією, поступово віддаляючись від початку координат, коли $\gamma > 0$, або наближаючись до нього, коли $\gamma < 0$. Отже, фазова траєкторія має форму спіралі (рис. 6.5).

Означення 6.4. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має *два комплексно-спряжених корені з ненульовою дійсною частиною*, точку спокою називають *фокусом.*

Точка спокою "фокус" буде нестійкою, якщо дійсна частина кореня характеристичного рівняння додатна, і буде стійкою, якщо дійсна частина кореня характеристичного рівняння від'ємна.

5. Характеристичне рівняння має *один вироджений корінь* $k = \gamma$. Вироджений корінь є дійсним, оскільки дійсними є коефіцієнти характеристичного рівняння. Із цієї причини загальний інтеграл лінеаризованої системи набуває форми

$$\begin{aligned} x &= (C_1 + C_2 t)e^{\gamma t}, \\ y &= (l_1 + l_2 t)e^{\gamma t}, \end{aligned} \qquad (6.19)$$

де l_1 та l_2 – лінійні комбінації довільних сталих C_1 та C_2. Оскільки збурення x та y пропорційні експоненті, то вони зростають із часом, якщо $\gamma > 0$, або зменшуються, якщо $\gamma < 0$.

Означення 6.5. Якщо характеристичне рівняння лінеаризованої системи має один вироджений корінь, точку спокою називають *виродженим вузлом.*

Вироджений вузол нестійкий, якщо $\gamma > 0$, і стійкий, якщо $\gamma < 0$. Дослідження фазових траєкторій в околі виродженого вузла не має великого практичного значення, оскільки на практиці коефіцієнти системи ДР, а отже, і коефіцієнти характеристичного рівняння, визначаються з певною точністю, а більш точне визначення цих коефіцієнтів зазвичай перетворює вироджений корінь на два близьких за величиною дійсних корені, або на два комплексно-спряжених корені з малою уявною частиною. Відповідно до цього вироджений вузол перетворюється на невироджений або на фокус. (Зображення фазової траєкторії в околі виродженого вузла можна знайти, напр., у підручнику [3].)

6.4. Приклад дослідження стійкості та визначення типу точок спокою

Щоб краще пояснити процедуру дослідження стійкості стаціонарних станів динамічної системи, розглянемо таку нелінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 2y_1 + y_2^2 - 1, \\ \dot{y}_2 = 6y_1 - y_2^2 + 1. \end{cases} \tag{6.20}$$

Координати точок спокою, тобто точок, у яких $\dot{x} = \dot{y} = 0$, знайдемо з рівнянь

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2^2 - 1 = 0, \\ 6y_1 - y_2^2 + 1 = 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

Перше із цих рівнянь можна записати у формі

$$y_2^2 = 1 - 2y_1, \tag{6.22}$$

унаслідок чого друге набуває форми

$$6y_1 + 2y_1 = 0\,. \tag{6.23}$$

Рівняння (6.22) та (6.23) мають розв'язки $y_{10} = 0$, $y_{20} = \pm 1$, звідки випливає, що система (6.20) має дві точки спокою на площині Y_1OY_2 змінних y_1, y_2, а саме:

$$P_1(0,1), \quad P_2(0,-1). \tag{6.24}$$

Визначимо тип та дослідимо стійкість цих точок спокою.

Спочатку лінеаризуємо систему рівнянь (6.20). Для цього додамо до сталих величин малі збурення x та y:

$$y_1 = y_{10} + x = x, \quad y_2 = y_{20} + y, \quad y_2^2 = 1 + 2y_{20}y + y^2\,,$$

знехтуємо величиною y^2, підставимо збурені величини y_1, y_2 та $y_2^2 \approx 1 + 2y_{20}y$ до системи (6.20) та одержимо лінеаризовану систему рівнянь[1]

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y_{20}y, \\ \dot{y} = 6x - 2y_{20}y. \end{cases} \tag{6.25}$$

Тепер дослідимо стійкість та визначимо тип точки P_1. Поклавши в лінеаризованій системі $y_{20} = 1$, одержуємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 6 & -2-k \end{vmatrix} = 0$$

та систему рівнянь

$$\begin{cases} (2-k)\lambda_{11} + 2\lambda_{12} = 0, \\ 6\lambda_{21} - (2+k)\lambda_{22} = 0 \end{cases} \tag{6.26}$$

для знаходження коефіцієнтів загального інтеграла (6.13), (6.14). Знаходимо корені характеристичного рівняння

$$k \equiv \gamma_1 = 4,\ k \equiv \gamma_2 = -4.$$

Висновок 1. *Точка* P_1 *є сідловою точкою, тому вона нестійка.*

По черзі підставивши знайдені корені до системи рівнянь (6.26), визначимо, що для кореня γ_1 виконується співвідношення $\lambda_{21}/\lambda_{11} = 1$, а для кореня γ_2 – співвідношення $\lambda_{22}/\lambda_{12} = -3$. Після цього знаходимо загальний інтеграл лінеаризованої системи:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{11} \end{pmatrix} e^{4t} + \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ -3\lambda_{12} \end{pmatrix} e^{-4t},$$

де λ_{11} та λ_{12} можуть набувати будь-яких дійсних значень. Вводимо до розгляду величини $h_1 \equiv \lambda_{21}/\lambda_{11} = 1$, $h_2 \equiv \lambda_{22}/\lambda_{12} = -3$ і значення $\lambda_{11} = \pm 0{,}1$ та $\lambda_{12} = \pm 0{,}1$, звертаємо увагу на рис. 6.3.

[1] У більш складних випадках слід розкладати праві частини нелінійної системи рівнянь за малими збуреннями, користуючись формулою Тейлора (6.5).

Висновок 2. Із рис. 6.3 стає очевидно, що в околі точки P_1 фазові траєкторії мають такий вигляд, як показано у верхній частині рис. 6.6.

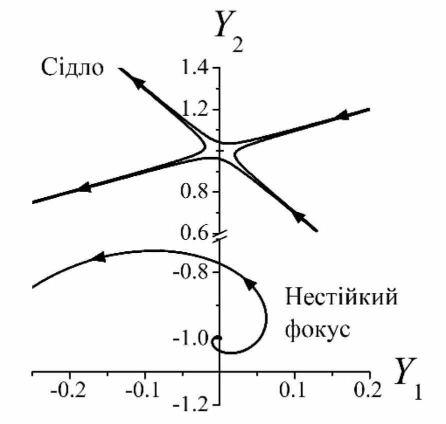


Рис. 6.6. Фазові траєкторії нелінійної системи ДР (6.20) в околі точок спокою $P_1(0,1)$ та $P_2(0,–1)$

На завершення дослідимо стійкість і визначимо тип точки P_2. Поклавши в лінеаризованій системі $y_{20} = -1$, одержимо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-k & -2 \\ 6 & 2-k \end{vmatrix} = 0$$

та лінеаризовану систему рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 2y, \\ \dot{y} = 6x + 2y. \end{cases} \tag{6.27}$$

Характеристичне рівняння має комплексно-спряжені корені $k_{1,2} = 2(1 \pm \sqrt{3}i)$ з додатною дійсною частиною $\gamma = 2$.

Висновок 3. Точка P_2 є нестійким фокусом.

В околі точок спокою форма фазових траєкторій системи (6.20) на площині змінних y_1, y_2 визначається з рівнянь для загального інтеграла

$$
\begin{aligned}
x &= e^{2t}(\lambda_{11}\cos 2\sqrt{3}t - C_{12}\sin 2\sqrt{3}t),\\
y = x &= e^{2t}(\lambda_{11}\sqrt{3}\sin 2\sqrt{3}t + \lambda_{12}\sqrt{3}\cos 2\sqrt{3}t).
\end{aligned}
\qquad (6.28)
$$

Одну із цих фазових траєкторій зображено в нижній частині рис. 6.6. Вона значно відрізняється за формою від фазових траєкторій, накреслених на рис. 6.5, оскільки відповідає значенню $\gamma = 2$, а на рис. 6.5 накреслено траєкторії, розраховані для малої величини γ.

Висновок 4. Рухома точка обертається навколо точки спокою P_2 у напрямку, протилежному до напрямку обертання годинникової стрілки, швидко віддаляючись від цієї точки.

На завершення зазначимо, що як і має бути, напрямок руху навколо точки P_2 узгоджується з напрямком руху повз точку P_1. (Це відображає напрямок стрілочок на фазових траєкторіях, зображених на рис. 6.6).

ЛІТЕРАТУРА

1. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – Київ : Либідь, 2004. – 407 с.

2. Понтрягин А. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва : Наука, 1970. – 33 с.

3. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – Москва : Наука, 1999. – 424 с.

4. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – Київ : Либідь, 2003. – 395 с.

5. Головач Г. П. Збірник задач з диференціальних та інтегральних рівнянь / Г. П. Головач, О. Ф. Калайда. – Київ : Техніка, 1997. – 285 с.

6. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Москва : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2000. – 175 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1. Хвильове рівняння

Найважливішими для розвитку людства коливальними явищами є хвилі, що можуть поширюватись у просторі на великі відстані або існувати в обмежених ділянках простору. Оскільки хвилі характеризуються як своєю частотою, так і довжиною, то для їхнього вивчення недостатньо визначення функцій однієї змінної зі звичайних диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння для функцій декількох змінних формулюють у термінах частинних похідних і вивчають в окремому розділі вищої математики, однак вивчення одного з таких рівнянь можна розпочати, прочитавши розд. 4 цього посібника.

Розглянемо рівняння для функції двох змінних

$$\frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E(x,t)}{\partial t^2} = 0\,, \qquad (Д1.1)$$

де x – це просторова координата, t – час, c – сталий параметр, що має фізичну розмірність швидкості. Проведемо заміну змінних $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$, поступово виразивши через ці змінні ліву частину рівняння (Д1.1):

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial E}{\partial \xi} + \frac{\partial E}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial E}{\partial \xi} - \frac{\partial E}{\partial \eta} \right) = c\left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) E,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 E;$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 E,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 \right] E.$$

Розкривши дужки у цих формулах, легко переконатись, що два доданки з $\partial^2 E / \partial \xi^2$ та два доданки з $\partial^2 E / \partial \eta^2$ входять з різними знаками, і тому взаємно знищуються. У результаті рівняння (Д1.1) набуває вигляду

$$4 \frac{\partial^2 E}{\partial \xi \partial \eta} = 0 . \qquad \text{(Д1.2)}$$

Рівняння (Д1.2) еквівалентне рівнянню

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial E}{\partial \eta} \right) = 0 ,$$

яке показує, що похідна $\partial E / \partial \eta$ не залежить від змінної ξ, тобто є функцією лише змінної η:

$$\frac{\partial E}{\partial \eta} = f(\eta) .$$

У такому разі виконується співвідношення

$$E(\eta, \xi) = \int f(\eta) d\eta + V(\xi) , \qquad \text{(Д1.3)}$$

де $V(\xi)$ є довільною функцією змінної ξ. У справедливості співвідношення (Д1.3) легко переконатися взявши частинну похідну за змінною η від його правої частини і зваживши на те, що

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int f(\eta) d\eta = f(\eta) \quad \text{та} \quad \partial V(\xi) / \partial \eta = 0 .$$

Невизначений інтеграл у правій частині співвідношення (Д1.3) є функцією змінної η:

$$\int f(\eta) d\eta \equiv U(\eta) .$$

Узявши до уваги означення змінних η та ξ, співвідношення (Д1.3) можна виразити у такій формі:

$$E(x,t) = U(x - ct) + V(x + ct)\,. \tag{Д1.4}$$

Дуже важливо, що співвідношення (Д1.4) було виведене з рівняння (Д1.2) без накладання умов або обмежень на функцію $E(x,t)$, а отже, ця функція задовольняє рівняння, якими б не були функції $U(x-ct)$ та $V(x+ct)$ (треба лише щоб існували похідні $\partial^2 E/\partial\xi^2$, $\partial^2 E/\partial\eta^2$ та $\partial^2 E/\partial\xi\partial\eta$). Це означає, що сукупність усіх функцій $E(x,t)$, які виражаються співвідношеннями (Д1.4), є загальним інтегралом рівняння (Д1.2), а отже, і еквівалентного до нього рівняння (Д1.1).

На практиці функція $E(x,t)$ описує залежну від часу та координат фізичну величину (одну зі складових електромагнітного поля, густину якоїсь речовини, концентрацію речовини в розчині тощо). У подальшому називатимемо цю величину полем. У випадку, коли функція $V(x+ct)$ тотожно дорівнює нулю, поле $E(x,t)$ є сталою величиною, якщо є сталою різниця $x-ct$.

Як відомо, $x - ct = \text{const}$ є рівнянням площини, перпендикулярної до координатної осі *OX*. Із плином часу ця площина рухається від менших до більших значень просторової координати $x = \text{const}+ct$. Отже, якщо поле певним чином розподілене в просторі, цей розподіл рухається від менших до більших значень координат. Кажуть, що

$$E(x,t) = U(x - ct) \tag{Д1.5}$$

– це хвиля, що рухається в напрямку збільшення просторової координати x. Її називають *прямою хвилею*. Аналогічно доходимо висновку, що

$$E(x,t) = V(x + ct) \tag{Д1.6}$$

– це хвиля, що рухається в протилежному напрямку. Її називають *оберненою хвилею*.

Висновок Д1. Загальний інтеграл *хвильового рівняння* (Д1.1) описує суперпозицією прямої та оберненої хвилі і при цьому, просторовий розподіл поля хвилі може бути дуже різним (математично – будь-якою функцією, змінних η та $\eta\xi$, для якої існують другі похідні за цими змінними).

Зазвичай хвильові процеси пов'язують з *гармонічними* коливаннями (пружними, електромагнітними тощо), які поширюються у просторі. Але в природі існує безліч різноманітних звуків і відтінків кольорів. Зроблений висновок пояснює цей факт і ще багато практично важливих фактів.

Із теорії рядів Фур'є відомо, що навіть складний розподіл поля у хвилі можна наближено представити суперпозицією гармонічних функцій. Більше того, утворення та поширення гармонічних коливань є процесами, що важливі для функціювання багатьох інженерних пристроїв. Тому розглянемо суперпозицію прямих та обернених гармонічних коливань

$$E(x,t) = a\cos(kx - \omega t) + b\cos(kx + \omega t)\,. \qquad \text{(Д1.7)}$$

де $k = \mathrm{const}$. Згідно з наведеним висновком гармонічні коливання зможуть поширюватися у просторі лише в тому випадку, якщо величини $kx \pm \omega t$ будуть пропорційними $x \pm ct$, тобто, якщо $\omega / k = c$, тобто, якщо справджується рівняння

$$\omega = ck\,, \qquad \text{(Д1.8)}$$

яке за традицією називають дисперсійним рівнянням хвиль типу (Д1.7). За такою термінологією це рівняння виражає собою *лінійний за параметром* k *закон дисперсії* хвиль, зазвичай електромагнітних або пружних.

Параметр k називають хвильовим числом. Щоб зрозуміти, як пов'язаний цей параметр із загальновідомими характеристиками хвиль, достатньо зазначити, що поле $E(x,t)$ не зміниться, якщо додати до x величину $\Delta x = 2\pi / k$, тому Δx – це довжина хвилі λ. Звідси випливає просте, але важливе співвідношення

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \qquad (\text{Д}1.9)$$

Підставивши цей вираз хвильового числа до дисперсійного рівняння, знаходимо співвідношення між довжиною хвилі, кутовою частотою ω та частотою коливань ν:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{c}{\nu}. \qquad (\text{Д}1.10)$$

Частота коливань пов'язана з кутовою частотою співвідношенням $\omega = 2\pi\nu$.

Висновок Д2. Дисперсійне рівняння показує, що*, чим більшою буде задана конструкцією інженерного пристрою частота хвилі, тим меншою буде її довжина, або, чим більшою буде задана довжина хвилі, тим меншою буде її частота.*

Дійти висновку Д2 легко і в інший спосіб, а саме, підставивши функцію (Д1.7) до хвильового рівняння (Д1.1). Після такої підстановки це рівняння набуває форми

$$[a\cos(kx-\omega t)+b\cos(kx-\omega t)](k^2-\omega^2/c^2)=0$$

та перетворюється на тотожність, якщо справджується закон дисперсії (Д1.8).

Поряд із хвилями, що поширюються в просторі, на практиці часто утворюються та використовуються так звані *стоячі хвилі.* Щоб описати стоячу хвилю математично, розглянемо поле, що утворюється, коли одна й та сама хвиля періодично відбивається від перешкод, які розташовані на відстані $\Delta x = \lambda / 2$ одна від одної:

$$E(x,t) = a\left[\cos(kx-\omega t)+\cos(kx+\frac{k\lambda}{2}+\omega t)\right].$$

Із рівняння (Д1.9) випливає, що $k\lambda/2=\pi$, а тому

$$E(x,t) = a\left[\cos(kx-\omega t)-\cos(kx+\omega t)\right] = 2a\sin kx \sin\omega t.$$

Увівши позначення

$$A(x) \equiv 2a \sin kx\,, \qquad (\text{Д}1.11)$$

виражаємо поле хвилі у формі

$$E(x,t) = A(x) \sin \omega t\,. \qquad (\text{Д}1.12)$$

Із рівнянь (Д1.11), (Д1.12) випливає, що в точках відбиття хвилі (точках із координатами $x = 0$ та $x = \lambda / 2$) поле $E(x,t)$ дорівнює нулю, а при віддаленні від цих точок воно зростає і сягає найбільшого значення посередині відрізка між точками відбиття. Якщо така хвиля відображується на екрані осцилографа, а її період менший за час реакції сітківки ока людини на кванти світла, спостерігач побачить на дисплеї нерухомий образ, який цілком природно назвати стоячою хвилею. Саме стоячі хвилі утворюються в приладах, які називають *резонаторами*. Вище розглянуто найдовшу зі стоячих хвиль, довжина якої λ дорівнює подвоєній довжині резонатора. Таку хвилю називають *першою резонансною гармонікою*. Хвилі довжиною $\lambda / 2$, $\lambda / 3$,… також можуть збуджуватися в резонаторі. Їх називають *вищими резонансними гармоніками*.

Додаток 2. Стійкість стаціонарних розв'язків диференціального рівняння другого порядку

Стаціонарні стани і динаміка різних динамічних систем (фізичних, хімічних, соціальних тощо) у багатьох випадках описується не системами двох ДР 1-го порядку, а одним ДР 2-го порядку. Як досліджується стійкість стаціонарних станів ДС у таких випадках, пояснімо на прикладі нелінійного диференціального рівняння 2-го порядку:

$$\ddot{y} + 2\gamma\dot{y} + a^2 y^2 - b^2 = 0\,. \qquad (\text{Д}2.1)$$

Для визначеності вважатимемо, що параметри, якими описується ДС, задовольняють нерівності

$$\gamma > 0\,,\;\; ab > 0\,,\; \gamma^2 < 2ab\,. \qquad (\text{Д}2.2)$$

Розв'язки, що відповідають стаціонарним станам, знаходимо з умови $\ddot{y} = \dot{y} = 0$, яка перетворює рівняння (Д2.1) на рівняння стаціонарних станів

$$a^2 y^2 - b^2 = 0\,.$$

Це рівняння має два розв'язки. Дослідимо стійкість відповідних до них стаціонарних станів.

1. Перший розв'язок: $y = y_1 = -b/a$. Додамо до цього розв'язку випадкове збурення і підставимо збурену функцію $y = y_1 + \tilde{y}$ до рівняння (Д2.1):

$$\ddot{\tilde{y}} + 2\gamma\dot{\tilde{y}} + a^2\left(-\frac{b}{a} + \tilde{y}\right)^2 - b^2 = 0.$$

Знехтувавши малим доданком $\tilde{y}^2$, знайдемо рівняння, лінеаризоване за малим збуренням:

$$\ddot{\tilde{y}} + 2\gamma\dot{\tilde{y}} - 2ab\tilde{y} = 0\,.$$

Характеристичне рівняння $k^2 + 2\gamma k - 2ab = 0$ має два дійсних корені

$$k_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2ab}\,. \qquad (\text{Д}2.3)$$

Із нерівності $ab > 0$ випливає, що корінь k_+ додатний, а отже, *стаціонарний стан, що відповідає розв'язку* $y = -b/a$ *нестійкий.*

2. Другий розв'язок: $y = y_2 = b/a$. Для дослідження стійкості відповідного до цього розв'язку стаціонарного стану достатньо замінити $b \to -b$ у формулі (Д2.3) для коренів характеристичного рівняння. Унаслідок цієї заміни ця формула набуває форми

$$k_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 2ab}.$$

З умови $\gamma^2 < 2ab$ випливає, що корені характеристичного рівняння, які відповідають другому розв'язку рівняння стаціонарних станів, є двома комплексними числами

$$k_{\pm} = -\gamma \pm i\sqrt{2ab - \gamma^2} ,$$

що мають від'ємну дійсну частину $-\gamma$, а отже, *стаціонарний стан, що відповідає розв'язку* $y = b/a$, *стійкий.*

Рівняння (Д2.1) не змінюється при зміні знака параметра b, і тому висновок про те, що стаціонарний стан, який відповідає розв'язку $y_1 = -b / a$, є нестійким, а розв'язку $y_2 = b / a$, – стійким, викликає сумнів. Цей сумнів зникне, якщо помітити, що при заміні b на $-b$ розв'язок y_1 перетворюється на y_2, а розв'язок y_2 перетворюється на y_1, тому результат дослідження стійкості стаціонарних станів рівняння (Д2.1) не змінюється при заміні знака параметра b.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ЛЬВОВ Віктор Анатолійович
КОСОГОР Анна Олексіївна
ПОПАДЮК Дарія Леонідівна

ПРОСТО ПРО СКЛАДНЕ
ЗВИЧАЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Навчальний посібник

Редактор *Л. Львова*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Виконавець *Л. Львова*

Формат 60х84$^{1/16}$. Ум. друк. арк. 9,0. Наклад 100. Зам. № 221-10223.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № Рф6.
Підписано до друку 30.12.21

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"
б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 72; тел./факс (38044) 239 31 28
e-mail: vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.kiev.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02