

УДК 514.764.7

DOI: <https://doi.org/10.17721/1029-4171.2025/1.12>

Олександр ПРИШЛЯК, Д-р. фіз.-мат. наук, Проф.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

ЗАНУРЕННЯ ПЛЯШКИ КЛЕЙНА В ТРИВИМІРНИЙ ПРОСТІР

***Анотація.** Розглядається вкладення та занурення поверхонь (двовимірних многовидів) в тривимірний евклідів простір. Наводяться приклади вкладень для тора, циліндра та стрічки Мебіуса. Для пляшки Клейна будуються два занурення, що мають в самоперетині замкнену криву. Перше занурення можна розглядати як вкладення двох стрічок Мебіуса, що мають спільну межу, а також перетинаються по спільній середній лінії. Ця поверхня отримана скрученим обертанням вісімки навколо осі. Друге занурення отримане як об'єднання чотирьох вкладених циліндрів з горизонтальними основами. Вкладення двох з цих циліндрів можна розглядати як половини вкладених торів*

***Ключові слова:** занурення; вкладення; неорієнтовний; стрічка Мебіуса; пляшка Клейна; регулярна поверхня.*

1. Вступ

Теми топології та геометрії поверхонь мають фундаментальне значення у сучасній математиці та її застосуваннях у фізиці, інформатиці та інженерії. Занурення та вкладення поверхонь у тривимірний простір відкривають нові можливості для дослідження складних структур, зокрема незвичайних поверхонь з гладкою топологією, таких як пляшка Клейна. Вивчення особливостей та прикладів таких занурень допомагає краще зрозуміти геометричну та топологічну складність цих об'єктів, а також їх роль у моделях уявлень та фізичних систем.

У (Пришляк, 2024) описано геометричні та топологічні властивості проективної площини, неорієнтовної поверхні роду 1. В цій статті ми описуємо пляшку Клейна, що є замкненою неорієнтовною поверхнею роду 2. Для замкнених вкладених в \mathbb{R}^3 поверхонь орієнтація задається вибором одиничного вектора нормалі в кожній точці. Цей вибір здійснюється умовою, що промінь породжений ним, перетинає без дотику поверхню в парній кількості точок. Тому пляшка Клейна, так само як і інші замкнені неорієнтовані поверхні, не може бути вкладена без точок самоперетину в \mathbb{R}^3 . На n -вимірний випадок цей факт узагальнено у роботі (Milnor, 1956). Також відомо (Lashof & Smale, 1958), що існує обмежена кількість топологічних класів занурень з певною кількістю самоперетинів. Зокрема, для пляшки Клейна існує лише два топологічних типи занурень з однією компонентною самоперетинів, що є простою замкненою кривою.

Поняття вкладення та занурення включено до багатьох підручників з диференціальної топології, наприклад у (Пришляк, 2015).

Об'єктом дослідження в цій роботі є поверхні, зокрема, поверхня пляшки Клейна та її занурення у тривимірний простір.

Метою роботи є опис двох топологічно різних занурень цієї поверхні з однією компонентною точок самоперетину.

2. Занурення та вкладення поверхонь

Нехай M є множиною на якій задана метрика (відстань між точками) $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді M називається *поверхнею* (поверхнею з межею), якщо для кожної точки $p \in M$ існує $\varepsilon > 0$, що в ε -околі $B(p, \varepsilon) = \{q \in M: d(q, p) < \varepsilon\}$, можна увести локальну систему двох координат (u, v) , що задається його гомеоморфізмом на область площини (верхньої півплощини $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \geq 0\}$). Поверхня є замкненою, якщо вона не має межі і з довільного покриття її ε -околома можна виділити скінчене підпокриття. Будемо надалі вважати, що на поверхні зафіксовано покриття її ε -околами, а в кожному з них локальну систему координат.

Нехай x, y, z – прямокутні декартові координати у тривимірному просторі \mathbb{R}^3 . Відображення $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ називається *зануренням поверхні*, якщо для кожної локальної системи координат (з числа тих, що ми зафіксували на поверхні) для покоординатного запису відображення f :

$$x = f_1(u, v), \quad y = f_2(u, v), \quad z = f_3(u, v)$$

вектори

$$\left\{ \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial u} \right\}, \quad \left\{ \frac{\partial f_1(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial f_2(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial f_3(u, v)}{\partial v} \right\}$$

не є колінеарними (їх координати не пропорційні). Занурені поверхні ще називають *регулярними*. Занурення f має таку властивість: для достатньо малого ε обмеження $f|_{B(p, \varepsilon)}$ є *ін'єктованим відображенням*, і при зменшенні ε поверхня наближається до області на площині (так само як для людей, що живуть на поверхні сфери здається, що Земля плоска). Кажуть, що для занурених поверхонь виконується *умова локальної планарності*.

Проте глобально (для різних околів) можуть існувати спільні точки у образів. Такі точки називають *точками самоперетину поверхні*. *Вкладенням* називається занурення, яке є ін'єктованим відображенням. Іншими словами, вкладення – це занурення без точок самоперетину.

Приклад 1. Розглянемо двовимірний тор $T^2 = S^1 \times S^1$, що є декартовим добутком двох кіл $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$. За локальні координати u, v на торі візьмемо полярні кути на кожному з кіл. Тоді вкладення тора в \mathbb{R}^3 може бути описано формулою

$$f(u, v) = \{(2 + \cos u) \cos v, (2 + \cos u) \sin v, \sin u\}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]. \quad (1)$$

Як видно з цього прикладу відображення тора є періодичним за кожною з координат, якщо його задавати як відображення з площини в тривимірний простір. Зауважимо, що задати періодичну функцію на прямій – це те саме, що задати функцію на відрізку, яка приймає рівні значення на кінцях відрізка. В топології кажуть, що коло отримано з відрізка склеюванням його кінців, що означає введення відношення еквівалентності, за яким кінці відрізка еквівалентні, та взяття факторпростору за цим відношенням еквівалентності.

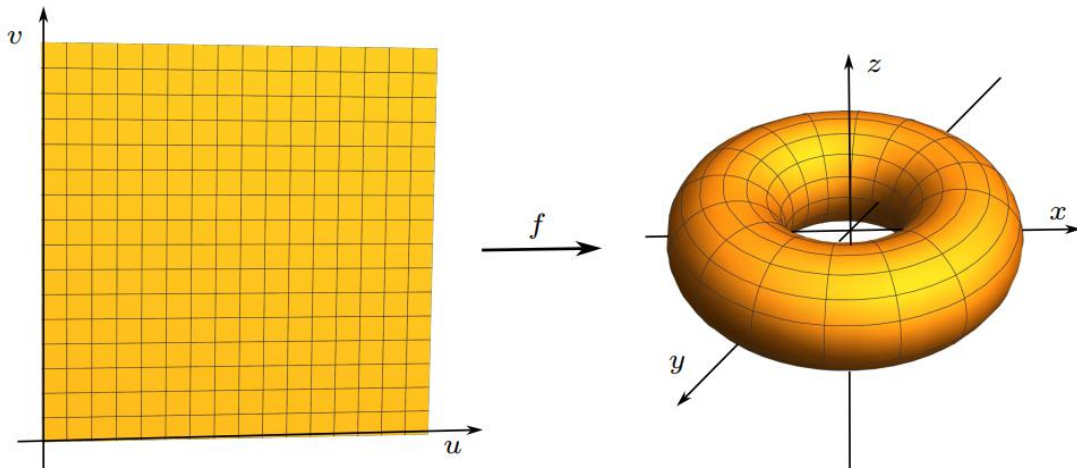


Рис. 1. Вкладення тора

За аналогією, тор розглядається як квадрат $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ у якого склеєні протилежні точки за відношенням еквівалентності, що задається правилами:

$$(0, v) \sim (2\pi, v), \quad (u, 0) \sim (u, 2\pi), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Іншими словами, склеюються точки протилежних сторін квадрата, що симетричні відносно горизонтальної або вертикальної осей симетрії квадрата.

Приклад 2. Розглянемо циліндр $S^1 \times [0, 1]$, який отримано з квадрата склеюванням точок лівої та правої сторін з однаковими ординатами. Нехай u – це полярний кут на колі, а v – координата на відрізку $[0, 1]$. Тоді вкладення циліндра в \mathbb{R}^3 може бути описано формулою

$$f_1(u, v) = \{\cos u, \sin u, v\}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 1] \quad (2)$$

або

$$f_2(u, v) = \{(1 + v) \cos u, (1 + v) \sin u, 0\}, \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 1]. \quad (3)$$

Аналогічно до розглянутих прикладів, довільну поверхню можна зобразити у вигляді багатокутників зі склеєними сторонами. У (Пришляк, 2023) описано як за таким зображенням визначити топологічні характеристики поверхні.

3. Занурення пляшки Клейна

Пляшка Клейна є однією із замкнених неорієнтованих поверхонь. Такі поверхні характеризуються тим, що в них є підмножина, гомеоморфна стрічці Мебіуса.

Приклад 3. *Стрічка Мебіуса – це поверхня, що отримана з квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ склеюванням вертикальних сторін за відношенням еквівалентності, які задані правилами:*

$$(0, v) \sim (2\pi, 2\pi - v), \quad v \in [0, 2\pi].$$

Іншими словами, склеюються точки горизонтальних сторін квадрата, що симетричні відносно центру симетрії квадрата. Вкладення стрічки Мебіуса в \mathbb{R}^3 може бути описано формулою

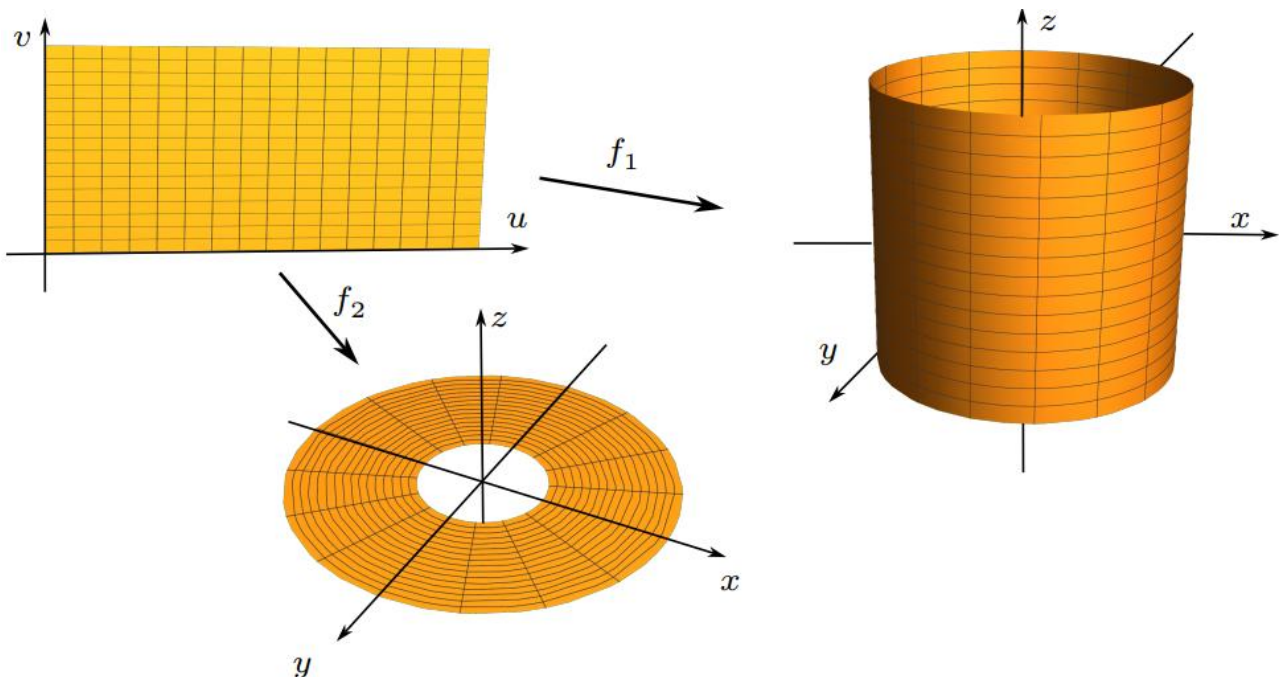


Рис. 2. Два вкладення циліндра

$$g(u, v) = \left\{ \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u, \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \right\}, \quad (4)$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [-1, 1]$$

При цьому, відображення квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ задається як $(u, v) \rightarrow g\left(u, \frac{v}{\pi} - 1\right)$.

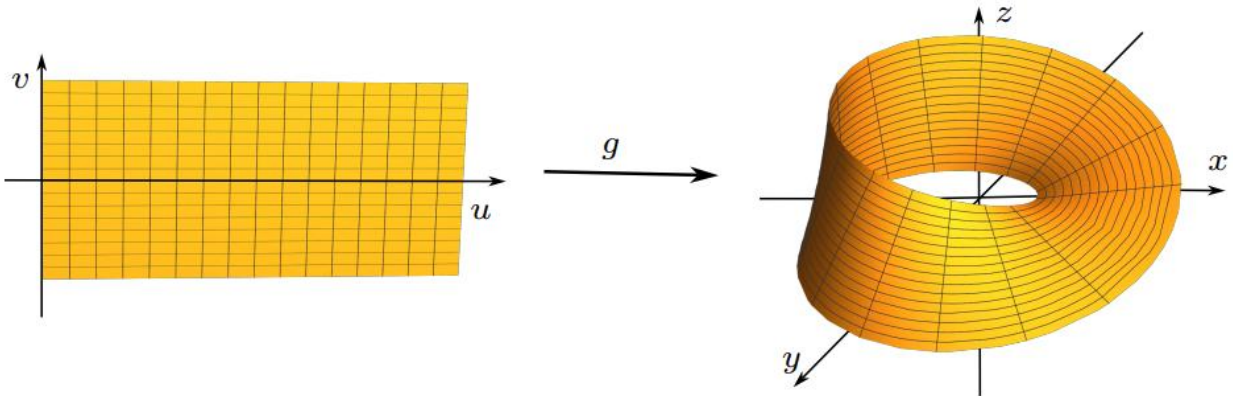


Рис. 3. Вкладення стрічки Мебіуса

Означення 1. Пляшка Клейна (Kl) – це поверхня, що отримана з квадрата $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ склеюванням точок протилежних сторін за відношенням еквівалентності, які задані правилами:

$$(0, v) \sim (2\pi, v), \quad (u, 0) \sim (2\pi - u, 2\pi), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Іншими словами горизонтальні сторони квадрата, склеюються за осьовою симетрією відносно горизонтальної осі симетрії квадрата, а вертикальні сторони за центральною симетрією відносно центра симетрії квадрата.

Зауважимо, що підмножина точок пляшки Клейна з $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ є прямокутником, який після склеювання верхньої та нижньої сторони стане гомеоморфним листу Мебіуса. Аналогічно, підмножина точок пляшки Клейна з $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ гомеоморфна стрічці Мебіуса.

З цього випливає, що пляшку Клейна можна отримати з двох стрічок Мебіуса, якщо у них ототожнити межу. Для цього в площині xOz беремо криву у формі вісімки, що має одну точку перпендикулярного самоперетину, що є центром симетрії кривої, зміщуємо її по осі Ox так, що відстань від центру симетрії до осі Oz більша за половину діаметра кривої. Далі обертаємо криву навколо свого центру з постійною кутовою швидкістю, а при цьому обертаємо криву з подвійною швидкістю навколо осі Oz (рис. 4).

Теорема 1. Занурення $G: Kl \rightarrow \mathbb{R}^3$ пляшки Клейна у тривимірний простір (фігура Ліссажу, див. рис. 4), можна задати формулою

$$G(u, v) = \begin{cases} g_1(u, v), & u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad v \in [0, 2\pi], \\ g_2(u - \pi, v), & u \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad v \in [0, 2\pi], \\ g_1(u - 2\pi, v), & u \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \quad v \in [0, 2\pi], \end{cases} \quad (5)$$

де

$$g_1(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \left(2 + \cos u \cos \frac{u}{2} \cos v + \cos u \sin \frac{u}{2} \sin v\right) \cos 2v, \\ \left(2 + \cos u \cos \frac{u}{2} \cos v + \cos u \sin \frac{u}{2} \sin v\right) \sin 2v, \\ -\cos u \cos \frac{u}{2} \sin v + \cos u \sin \frac{u}{2} \cos v \end{array} \right\},$$

$$g_2(u, v) = \left\{ \begin{array}{l} \left(2 - \cos u \cos \frac{u}{2} \cos v + \cos u \sin \frac{u}{2} \sin v\right) \cos 2v, \\ \left(2 - \cos u \cos \frac{u}{2} \cos v + \cos u \sin \frac{u}{2} \sin v\right) \sin 2v, \\ +\cos u \cos \frac{u}{2} \sin v + \cos u \sin \frac{u}{2} \cos v \end{array} \right\},$$

з параметрами $u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $v \in [0, \pi]$.

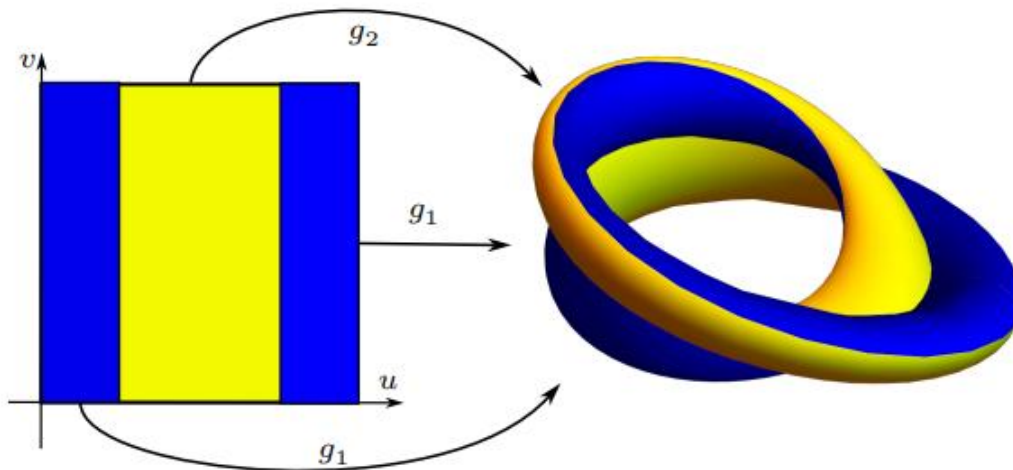


Рис. 4. Занурення пляшки Клейна скрученим обертанням вісімки (фігура Ліссажу)

Кожне з відображень g_1, g_2 задає вкладення стрічки Мебіуса (синя та жовті частини поверхні). При цьому вкладені стрічки Мебіуса мають спільну межу, а також спільну середню лінію.

Доведення. Регулярність кожного з двох відображень у внутрішніх точках перевіряється безпосереднім обчисленням похідних. Перевіримо регулярність у точках склеювання

$$g_1\left(\frac{\pi}{2}, v\right) = \{2 \cos 2v, 2 \sin 2v, 0\} = g_2\left(-\frac{\pi}{2}, v\right).$$

Перевіримо колінеарність похідних у відповідних точках:

$$(g_1)'_u \left(\frac{\pi}{2}, v \right) = (g_2)'_u \left(-\frac{\pi}{2}, v \right) =$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos v + \sin v) \cos 2v, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos v + \sin v) \sin 2v, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin v - \cos v) \right\},$$

$$(g_1)'_v \left(\frac{\pi}{2}, v \right) = (g_2)'_v \left(-\frac{\pi}{2}, v \right) = \{-4 \sin 2v, 4 \cos 2v, 0\}.$$

Отже, в точках що склеюються збігаються як значення відображень, так і значення їх похідних. Тому ці точки є регулярними. Аналогічно,

$$g_1 \left(-\frac{\pi}{2}, v \right) = \{2 \cos 2v, 2 \sin 2v, 0\} = g_2 \left(\frac{\pi}{2}, v \right),$$

а також збігаються похідні. Це означає, що і на іншій парі сторін, що склеюються, умови регулярності виконуються. Таким чином, формула (5) задає занурення пляшки Клейна. ■

Інший спосіб отримати занурення пляшки Клейна полягає у послідовній склейці сторін квадрату. Якщо склеїти спочатку горизонтальні сторони, то вийде циліндр, який можна вкласти в тривимірний простір за формулою (1), в якій $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$. Залишилось склеїти компоненти межі (кола). Для цього одне до одного з кіл доклеюємо прямий циліндр і не приклеєну компоненту основу циліндра з'єднуємо з другим колом косим циліндром. Отримана поверхня не буде регулярною (зануренням в точках приклеювання). Щоб отримати регулярну поверхню в точках склеювання не повинно бути кутів. Ця ідея реалізована в наступному твердженні.

Теорема 2. *Пляшку Клейна можна розбити на чотири частини, кожна з яких вкладається в тривимірний простір такими формулами*

$$h_1(u, v) = \{(2,5 + 1,5 \cos[v]) \cos[u], (2,5 + 1,5 \cos[v]) \sin[u], -1,5 \sin[v]\},$$

$$h_2(u, v) = \{2 - 2 \cos[v] + \sin[u], \cos[u], 3v\},$$

$$h_3(u, v) = \{2 + (2 + \cos[u]) \cos[v], \sin[u], 3\pi + (2 + \cos[u]) \sin[v]\},$$

$$h_4(u, v) = \{(-2,5 + 1,5 \cos[v]) \cos[u], (2,5 - 1,5 \cos[v]) \sin[u], 3\pi - 3v\},$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi].$$

Ці вкладення разом задають занурення H пляшки Клейна в \mathbb{R}^3 :

$$H(u, v) = \begin{cases} h_1(u, v), & u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi/2], \\ h_2(u, 2v - \pi), & u \in [0, 2\pi], \quad v \in [\pi/2, \pi], \\ h_3(u, 2v - 2\pi), & u \in [0, 2\pi], \quad v \in [\pi, 3\pi/2], \\ h_4(u, 2v - 3\pi), & u \in [0, 2\pi], \quad v \in [3\pi/2, 2\pi]. \end{cases}$$

Доведення. Зробимо перевірку регулярності поверхні у точках склеювання:

1. $h_1(u, \pi) = \{\cos u, \sin u, 0\} i_{x,y} h_2(u, 0)$, $i_{x,y}(x, y, z) = (y, x, z)$. Отже, спільна компонента межі – одиничне коло. Похідна по u – одиничний дотичний вектор до кола (ці вектори протилежно напрямлені). Похідна по v : $2(h_1)'_v(u, \pi) = \{0, 0, 3\} = (h_2)'_v(u, 0)$. Оскільки похідні по v співнаправлені, а по u – колінеарні, то поверхня регулярна в цих точках.

2. $h_2(u, \pi) = \{4 + \sin u, \cos u, 3\pi\} = i_{4+x,y} h_3(u, 0)$. Аналогічно першому випадку, похідні по u колінеарні, а похідні по v $((h_2)'_v(u, \pi) = \{0, 0, 3\} \uparrow \{0, 0, 2 + \cos u\} = (h_3)'_v(u, 0))$ співнаправлені. Отже, ці точки також регулярні.

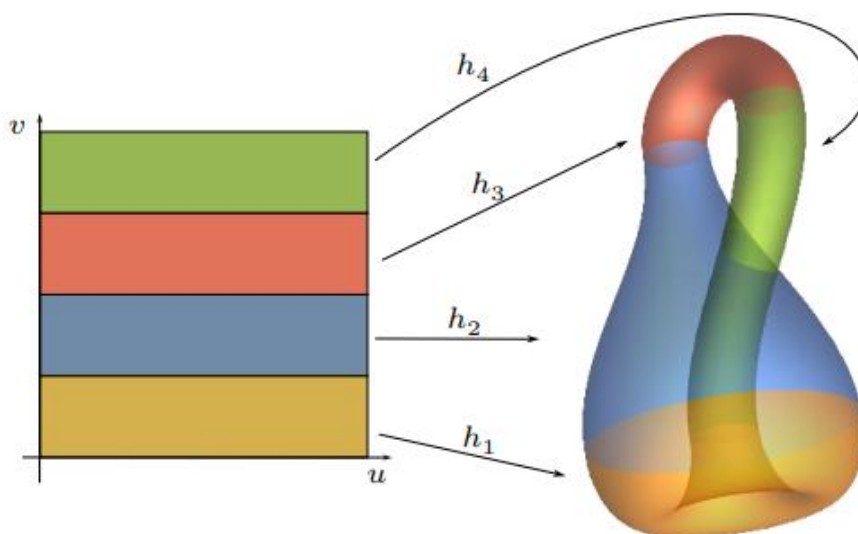


Рис. 5. Занурення пляшки Клейна чотирма частинами

3. $h_3(u, \pi) = \{-\cos u, \sin u, 3\pi\} = h_4(u, 0)$. Похідні по u збігаються, а похідні по v $((h_3)'_v(u, \pi) = \{0, 0, -2 - \cos u\} \uparrow \{0, 0, -3\} = (h_4)'_v(u, 0))$ співнаправлені. Тому, ці точки також регулярні.

4. $h_4(u, \pi) = \{-4 \cos u, 4 \sin u, 0\} s_x h_1(u, 0)$, $s_x(x, y, z) = (-x, y, z)$. Похідні по u колінеарні, як і у першому випадку, а похідні по v $((h_4)'_v(u, \pi) = \{0, 0, -3\} \uparrow \{0, 0, 1, 5\} = (h_1)'_v(u, 0))$ співнаправлені. Отже, ці точки також регулярні.

Оскільки всі точки, за якими відбувається ототожнення, є регулярними, то маємо занурення пляшки Клейна. ■

Вправа. Перевірити, що формула

$$r(u, v) = \left(6 \cos u (1 + \sin u) + 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \cos \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \cos v, \right. \\ \left. 16 \sin u + 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \sin \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \cos v, \quad 4 \left(1 - \frac{\cos u}{2} \right) \sin v \right), \quad (7) \\ u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, 2\pi]$$

також задає занурення пляшки Клейна.

4. Висновки

Описано два топологічно різні занурення пляшки Клейна в тривимірний простір та доведено регулярність побудованих відображень. Ці занурення дозволяють будувати занурення неорієнтованих поверхонь парного роду завдяки операції зв'язної суми.

Цікавим питанням є описання занурень неорієнтованих поверхонь непарного роду, зокрема проєктивної площини.

Список використаних джерел

Milnor, John (1956). On the immersions of n -manifolds in $(n+1)$ -space. *Commentarii mathematici Helvetici*, 30, 275-284. <https://eudml.org/doc/139128>

Lashof R. and Smale S. (1958). On the immersion of manifolds in Euclidean space. *Annals of Mathematics* 68(3), 562-583 <https://doi.org/10.2307/1970156>

Hirsch M. W. (1976) *Differential Topology*. Springer-Verlag. <https://archive.org/details/springer-10.1007-978-1-4684-9449-5>

Guillemin V. and Pollack A. (1974). *Differential Topology*. Prentice Hall. [difftopGP.pdf](#)

Пришляк О.О. (2015) Топологія многовидів. Київський університет. <http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wpcontent/uploads/2018/03/topolog-pryshlyak.pdf>

Пришляк О. (2023) Алгоритмічні та комп'ютерні методи в топології та теорії динамічних систем. Навчальний посібник. <https://mechmat.knu.ua/wp-content/uploads/2023/12/algkom.pdf>

Пришляк О., Білун С. (2024) Геометрія та топологія проєктивної площини. *У світі математики*, 1: 70-76. <https://usm.knu.ua/index.php/usm/article/view/30/16>

Отримано редакцією журналу: 25.05.2025

Прорецензовано: 02.06.2025

Схвалено до друку: 10.06.2025

Alexandr PRISHLYAK, D.Sc. (Phys&Math), Prof.

ORCID: 0000-0002-7164-807X

e-mail: prishlyak@knu.ua.

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

IMMERSION OF THE KLEIN BOTTLE IN THREE-DIMENSIONAL SPACE

Abstract. We study embeddings and immersions of surfaces (i.e., two-dimensional manifolds) into three-dimensional Euclidean space. Examples of embeddings are presented for the torus, the cylinder, and the Möbius strip. For the Klein bottle, two distinct immersions are constructed, each exhibiting a closed curve of self-intersection. The first immersion can be interpreted as an embedding of two Möbius strips that share a common boundary and intersect along their midline. This surface is generated by a twisted rotation of a figure-eight curve around an axis. The second immersion is constructed as a union of four embedded cylinders with horizontal bases. Two of these cylinders can be viewed as forming halves of an embedded torus.

Keywords: immersion; embedding; non-orientable surface; Möbius strip; regular surface.