Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра дослідження операцій

ВИПУСКНА КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА БАКАЛАВРА
на здобуття ступеня бакалавра
за спеціальністю 113 «Прикладна математика»
на тему:

C*-алгебри задані графами

Студента 4 курсу
Голембовського Олеся Ігоровича

Науковий керівник:
професор,
доктор фізико-математичних наук
Маринич Олександр Віталійович

Робота заслухана на засіданні кафедри дослідження операцій та рекомендована до захисту в ЕК, протокол №9 від 23 травня 2023 р.

Завідувач кафедри ДО проф. Іксанов О.М.

Київ – 2023

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи 40 сторінок та 22 використані джерела.

Об'єктом дослідження є C*-алгебри та графові C*-алгебри.

Метою роботи є проведення огляду та дослідження графових C*-алгебр, огляд області їх використання та розв'язок деяких задач теорії графових C*-алгебр.

У роботі наведено огляд таких фундаментальних понять, як гільбертовий простір, банаховий простір, інволюція та неперервний лінійний оператор.

Детально розглянуто такі області використання C*-алгебр, як теорія операторів, фізика, криптографія, теорія статистики.

Розглянуто основні властивості C*-алгебр, а також різноманітні приклади таких алгебр. Окрему увагу приділено такому підвиду C*-алгебр, як графові.

ЗМІСТ

ВСТУП

Перш за все потрібно визначитись, що таке взагалі алгебраїчна структура? Отож, алгебра визначається, як структура, що складається з непорожньої множини А, набору операцій над А та скінченного набору тотожностей, відомого як аксіоми.

Також потрібно визначитись з поняттям *-алгебри. Отож, *-алгебра А, визначається як *-кільце з інволюцією *, яке є асоціативною алгеброю над комутативним *-кільцем R з інволюцією *, така що: $(ar)^* = a'r^* \; \forall r \in R, a \in A$.

Необхідно визначити також банахову алгебру, котра є асоціативною алгеброю В над банаховим простором, де норма задовольняє умову $||ab|| \leq ||a||||b|| \; \forall a, b \in B$.

Опираючись на визначення банахової алгебри та *-алгебри дуже просто дати визначення С*-алгебрі. Отож, С*-алгеброю називають банахову *-алгебру. Базуючись на тому, що таке С*-алгебра, дамо визначення графовій С*-алгебрі. Отож, графовою С*-алгеброю є така С*-алгебра, котра може бути побудована за допомогою графу. Кожному орієнтованому графу можна поставити у відповідність С*-алгебру, яка називається графовою С*-алгеброю.

Конкретніше, графова С*-алгебра складається з операторів, які задаються на просторі Гільберта, що породжується вершинами та дугами графа. Оператори цих вершин та дуг мають задовольняти відповідним умовам, щоб утворювати С*-алгебру.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

1. Пояснення важливих понять

1.1. Гільбертовий простір

Гільбертовий простір, математичне поняття, котре узагальнює поняття евклідового простору на нескінченно вимірний випадок. Виник він на межі 19 і 20 ст. як природного логічного висновку з робіт ньому математика Гільберта в результаті узагальнення фактів та методів, що належать до розкладу функцій в ортогональні ряди та до дослідження інтегральних рівнянь. Поступово розвиваючись поняття гільбертового простору знаходило дедалі ширші додатки у різних розділах математики та теоретичної фізики. Це поняття належить до найважливіших поняття математики.

Спочатку гільбертовий простір розумілося як простір послідовностей з рядом квадратів, що збігаються (т. н. простір l_2). Елементами (векторами) такого простору є нескінченні числові послідовності.

$$x = (x_1, x_2 \dots, x_n \dots)$$

такі, що ряд x_1^2+x_2^2+...+x_n^2... збігається. Суму двох векторів $x + y$ та векторλx, де λ — дійсне число, визначають природним чином:

$$x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n),$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots, \lambda x_n \dots)$$

Для будь-яких векторів $x, y \in l_2$ формула

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n + \cdots$$

визначає їх скалярний добуток, а під довжиною (нормою) вектора х мається на увазі невід'ємне число виду:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 + \cdots}$$

1.2. Банаховий простір

Банаховим простором називається повний нормований векторний простір. Це означає, що банаховий простір — це векторний простір V над полем дійсних чи комплексних чисел з певною нормою ‖·‖ так, що будь-яка фундаментальна послідовність V має границю, яка також належить V.

1.3. Інволюція

Нехай F є нескінченним полем, існує відображення *: F -> F, яке називається інволюцією, якщо для кожного елемента a з F має місце наступне: a* = a**, де a* позначає результат застосування інволюції до елемента a.

Інволюція може мати різні властивості, залежно від конкретного поля. Наприклад, в деяких полях інволюція може бути тотожним відображенням (тобто $a^* = a$ для всіх елементів), тоді як в інших полях вона може бути нетривіальною, змінюючи значення елементів.

1.4. Банахова алгебра, *-алгебра та банахова *-алгебра

Банахова алгебра A визначається, як асоціативна алгебра A над банаховим простором, де норма задовольняє умову $||ab|| \le ||a||||b|| \, \forall a, b \in$ A.

*-алгебра A, визначається як *-кільце з інволюцією *, яке є асоціативною алгеброю над комутативним *-кільцем R з інволюцією *, така що: $(ar)^* = a'r^* \, \forall r \in R, a \in A$. Також, таку алгебру називають асоціативною алгеброю з інволюцією.

Банаховою *-алгеброю A є структура, що є одночасно і банаховою алгеброю, і *-алгеброю. Достатньою умовою для того, щоб банахова алгебра була *-алгеброю, є виконання наступного: $\forall x \in A: \left||x^*|\right| = \left||x|\right|$. При цьому, банахова *-алгебра є C*-алгеброю.

1.5. Неперервний лінійний оператор

Лінійний неперервний оператор $\mathrm{A}: X \rightarrow Y$, що діє з лінійного топологічного простору *X* в лінійний топологічний простір *Y* - це лінійне відображення з *X* в *Y*, що має властивість неперервності.

Термін «лінійний неперервний оператор» зазвичай використовують у разі, коли *Y* багатовимірний. Якщо *Y* одновимірний, тобто збігається з самим полем ($\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$) то прийнято використовувати термін лінійний неперервний функціонал. Множина всіх лінійних неперервних операторів з *X* до *Y* позначається *L(X,Y)*.

2. Області використання C*-алгебри

C*-алгебра - це математичний об'єкт, який зазвичай застосовується в теорії операторів та фізиці. Ось кілька прикладів використання C*-алгебри:

- Теорія операторів: C*-алгебри використовуються для вивчення лінійних обмежених операторів на банахових просторах. Зокрема, вони забезпечують абстрактний підхід до функцій, зображень та інших операторів.
- Фізика: C*-алгебри використовуються для моделювання фізичних систем. Наприклад, вони можуть бути застосовані для аналізу квантової механіки, статистичної механіки та теорії поля.
- Криптографія: C*-алгебри використовуються в криптографії для захисту інформації від несанкціонованого доступу. Зокрема, вони можуть бути застосовані для розробки криптографічних протоколів та алгоритмів.
- Теорія статистики: C*-алгебри використовуються для статистичного аналізу даних. Вони можуть бути застосовані для моделювання стохастичних процесів та інших статистичних завдань.

Це далеко не повний список застосувань C*-алгебр, оскільки вони мають широке застосування в математиці та інших галузях науки.

2.1. C*-алгебри у теорії операторів

C*-алгебри широко застосовуються в теорії операторів та математичній фізиці, оскільки вони дозволяють описувати і аналізувати різноманітні класи лінійних операторів та їх властивості.

Ось декілька прикладів використання C*-алгебр у теорії операторів:

- Функціональна аналіз: C*-алгебри є важливим інструментом в функціональному аналізі, оскільки вони дозволяють описувати класи лінійних операторів, таких як унітарні банахові простори та операторні алгебри. Основне використання C*-алгебр у функціональному аналізі включає наступні аспекти:

1) Представлення операторів: Кожен обмежений оператор на гільбертовому просторі має представлення в C*-алгебрі. Це дає змогу досліджувати властивості операторів за допомогою алгебраїчних методів і використовувати теорію C*-алгебр для отримання результатів про оператори.
2) Гомотопічна теорія: C*-алгебри також використовуються для розвитку гомотопічної теорії. Гомотопічна теорія досліджує індексні властивості операторів, такі як індекс Фредгольма та індекс відображення Дірака. Ці поняття мають важливе значення в різних галузях математики, включаючи топологію, диференціальні рівняння та математичну фізику.
3) Некомутативна геометрія: C*-алгебри також знайшли своє застосування у некомутативній геометрії. Це галузь математики, яка вивчає геометричні структури на некомутативних алгебрах. Використовуючи ідеї C*-алгебр та функціонального аналізу, в некомутативній геометрії

вивчаються некомутативні алгебри координат, некомутативні простори та некомутативні вершинні алгебри.

- Геометрія операторів: C*-алгебри дозволяють описувати геометрію операторів та допомагають у розумінні їх властивостей. Дослідження геометрії операторів базується на ідеях C*-алгебр та функціонального аналізу і включає наступні аспекти:

1) Операторна топологія: У геометрії операторів C*-алгебри використовуються для встановлення топології на просторі операторів. Це дозволяє досліджувати збіжність операторів, неперервність та компактність. Зокрема, C*-норма, визначена на C*-алгебрі операторів, відображає їх геометричні властивості.
2) Спектральна теорія операторів: C*-алгебри надають основу для розвитку спектральної теорії операторів. Спектральна теорія досліджує спектр операторів, який включає власні значення та точковий спектр. Це дозволяє аналізувати спектральні властивості операторів, такі як спектральна проекція, спектральна міра та спектральні властивості компактних операторів.
3) Некомутативна геометрія операторів: C*-алгебри також знайшли застосування у некомутативній геометрії операторів. Ця галузь геометрії вивчає геометричні структури на C*-алгебрах операторів, таких як операторні простори, гільбертові модулі та операторні алгебри. Вона дозволяє моделювати та досліджувати некомутативні простори та операторні системи.
4) Геометрична теорія груп: C*-алгебри також знайшли використання в геометричній теорії груп, де вивчаються групи операторів та їх дії на просторах. C*-алгебри дозволяють вивчати геометричні властивості групових дій, такі як незмінні розподіли, підгрупи стабілізаторів та групові C*-алгебри.

- Теорія апроксимації: C*-алгебри можуть бути використані для описування класів лінійних операторів, що можуть бути наближені дискретними операторами. Використання C*-алгебр у теорії апроксимації включає наступні аспекти:

1) Апроксимація операторів: C*-алгебри надають зручний каркас для дослідження апроксимації операторів. У теорії апроксимації вивчаються методи наближення скінченновимірними операторами або обмеженими операторами з простими структурами, такими як матриці або оператори зі структурованим ядром. C*-алгебри дозволяють формалізувати та досліджувати апроксимаційні процеси для операторів у більш загальному контексті.
2) Апроксимація функцій: У теорії апроксимації велику увагу приділяють апроксимації функцій за допомогою скінченновимірних або простих класів функцій. C*-алгебри дозволяють вивчати апроксимаційні властивості функцій та досліджувати можливості їх наближення за допомогою елементів C*-алгебр. Наприклад, теорія апроксимації у функціональному аналізі використовує апроксимативні одиниці в C*-алгебрах для наближення функцій.
3) Теорія апроксимативних спектрів: C*-алгебри є важливим інструментом для вивчення апроксимативних спектрів операторів. Апроксимативний спектр оператора є підмножиною спектра, яка характеризує його апроксимаційні властивості. C*-алгебри дозволяють формалізувати та досліджувати поняття апроксимативного спектру та його зв'язок з властивостями оператора.
4) Апроксимаційні методи у дослідженнях C*-алгебр: Зворотно, апроксимаційні методи широко використовуються у дослідженнях C*-алгебр. Наприклад, апроксимаційні методи можуть бути використані для доведення алгебраїчних або топологічних властивостей C*-алгебр, таких як ізоморфізми або неперервність функціоналів.[18]

2.2. C*-алгебри у фізиці

C*-алгебра є важливим інструментом у фізиці, особливо у таких її розділах, як теоретичній фізиці і квантовій механіці. Ось кілька прикладів використання C*-алгебр у цих областях:

- Квантова механіка: Один з головних об'єктів дослідження квантової механіки - оператори. Вони можуть бути визначені як елементи C*-алгебри, і вони є важливими для формулювання законів квантової механіки. Основні використання C*-алгебр у квантовій механіці включають:

1) Алгебра операторів: У квантовій механіці C*-алгебри використовуються для представлення та властивостей операторів, що описують квантові системи. Зокрема, унітарні оператори, які відображають фізичні становища та еволюцію системи в часі, можуть бути представлені в C*-алгебрах. Це дозволяє досліджувати їхні спектральні властивості, комутаційні та антикомутаційні відношення та інші характеристики.
2) Гільбертові простори: C*-алгебри також пов'язані з гільбертовими просторами, які є основою квантової механіки. Гільбертові простори використовуються для моделювання станів квантової системи та векторів стану. Оператори в C*-алгебрах відображаються як лінійні оператори на гільбертових просторах, де вони задають квантові спостереження та еволюцію системи.
3) Спектральна теорія: C*-алгебри забезпечують спектральну теорію для операторів, яка дозволяє аналізувати їхні спектральні властивості. В квантовій механіці спектральна теорія операторів використовується для визначення допустимих енергетичних рівнів та спектральних характеристик квантових систем.
4) Квантові поля: У квантовій механіці C*-алгебри використовуються для моделювання квантових полів. Квантові поля описують частинки та їх

взаємодію в рамках квантової теорії поля. Використання C*-алгебр дозволяє досліджувати комутаційні відношення, антикомутаційні відношення та інші властивості квантових полів.

5) Алгебри K*-алгебр: K*-алгебри, що є спеціальними типами C*-алгебр, також використовуються у квантовій механіці. Вони моделюють обмежені оператори та мають важливі застосування в квантовій теорії інформації та квантових обчислень.

- Квантова теорія поля: У квантовій теорії поля, C*-алгебри використовуються для опису взаємодії між елементами поля. Основні аспекти використання C*-алгебр у квантовій теорії поля включають:

1) Алгебри K*-алгебр: K*-алгебри використовуються для моделювання квантових полів та їх операторних розкладів. K*-алгебри дозволяють представити квантові поля як набори операторів, що задовольняють комутаційні або антикомутаційні відношення, відповідно до статистики частинок, які поля описують.
2) Операторні поля: Використання C*-алгебр дозволяє описувати квантові поля як операторні поля, де поля розглядаються як операторні розподіли на просторі Мінковського. Операторні поля в C*-алгебрах дозволяють моделювати взаємодію та еволюцію квантових полів.
3) Локальні алгебри та алгебри відносин: У квантовій теорії поля C*-алгебри, відповідні різним просторовим регіонам, часто розглядаються як локальні алгебри. Локальні алгебри дозволяють досліджувати локальні властивості поля в різних просторових областях. Крім того, алгебри відносин в C*-алгебрах можуть використовуватись для опису відносин між полями та їхніми властивостями.
4) Станові простори: C*-алгебри також пов'язані з просторами станів квантових полів. Простори станів можуть бути визначені як ультра-слабкі замикання C*-алгебр, що відповідають квантовим полям. Вони дозволяють описати стани квантових полів та обчислювальні властивості.

5) Суперсиметрія: C*-алгебри також використовуються в контексті суперсиметрії, яка є важливим поняттям в квантовій теорії поля. Суперсиметрія використовує спеціальні типи C*-алгебр, відомі як супералгебри, для моделювання та дослідження суперсиметричних систем.

- Статистична механіка: У статистичній механіці, C*-алгебри використовуються для моделювання квантових систем з великою кількістю частинок. Використання C*-алгебр у статистичній механіці включає такі аспекти:

1) Алгебра операторів: В C*-алгебрах можна визначити оператори, які представляють статистичні спостереження, які можна зробити над системою. Ці оператори можуть включати енергію, магнітний момент, спін та інші величини, які характеризують систему. Використовуючи алгебри операторів, можна досліджувати комутаційні відношення між операторами та їхні властивості.
2) Кореляційні функції: C*-алгебри дозволяють описувати кореляційні функції між різними спостереженнями системи. Кореляційні функції дозволяють вивчати статистичні взаємодії та кореляції між різними величинами в системі, що є важливими для аналізу статистичних властивостей.
3) Статистичні оператори: У статистичній механіці C*-алгебри використовуються для визначення статистичних операторів, які описують стан системи. Статистичні оператори використовуються для розрахунку очікуваних значень спостережень та інших статистичних величин.
4) Унітарні представлення: C*-алгебри також дозволяють використовувати унітарні представлення для опису станів системи та їх еволюції у часі. Унітарні оператори в C*-алгебрах можуть відображати еволюцію системи від початкового стану до кінцевого стану.

5) Фазовий простір: Фазовий простір системи може бути описаний за допомогою C*-алгебр, де елементи алгебри відповідають різним конфігураціям системи. Використання C*-алгебр у фазовому просторі дозволяє аналізувати різноманітні статистичні властивості системи, включаючи фазові переходи та критичні явища.

- Квантова топологія: У квантовій топології, C*-алгебри використовуються для вивчення топологічних властивостей квантових просторів. Основні аспекти використання C*-алгебр у квантовій топології включають:

1) Топологічні властивості операторів: З використанням C*-алгебр можна аналізувати топологічні властивості операторів, такі як компактність, неперервність та інші. Топологічні властивості операторів дозволяють визначати їх збіжність, розглядати простори функцій та метричні простори операторів.
2) K*-алгебри: K*-алгебри, що є спеціальними типами C*-алгебр, також використовуються у квантовій топології. Вони моделюють обмежені оператори та дозволяють аналізувати їх топологічні властивості.
3) Теорія відображень: C*-алгебри також використовуються для вивчення теорії відображень та гомотопічних властивостей квантових просторів. Вони дозволяють досліджувати відображення між C*-алгебрами та їхніми властивостями, такими як ізоморфізми, проекції та інше.
4) Топологічні квантові поля: Використання C*-алгебр також відіграє важливу роль у вивченні топологічних аспектів квантових полів. Вони дозволяють моделювати та аналізувати топологічні властивості квантових полярних теорій, які включають топологічні дефекти, градієнтні стани та інші топологічні об'єкти. [19]

2.3. C*-алгебри у криптографії

C*-алгебри можуть бути корисним інструментом для розв'язання деяких задач у криптографії, особливо для захисту інформації від шпигунів.

- Одним з прикладів використання C*-алгебр у криптографії є криптосистеми, що базуються на теорії операторних алгебр. В цих криптосистемах ключі кодуються як оператори в алгебрі лінійних обмежених операторів. При цьому шифрування виконується шляхом застосування криптографічних функцій до ключа, інформації та шифрованого повідомлення.
- Інший приклад використання C*-алгебр у криптографії полягає у застосуванні теорії групових представлень до побудови криптографічних систем з використанням груп. Основна ідея полягає в тому, що ключі кодуються як елементи групи, а шифрування виконується за допомогою перетворень, які діють на групі.
- C*-алгебри також можуть бути корисними для побудови протоколів підтвердження знання, які використовуються в криптографії для підтвердження ідентичності. У цьому випадку довірча сторона може використовувати властивості C*-алгебр для перевірки правильності доведення.

Загалом, C*-алгебри можуть бути корисним інструментом для розв'язання певних задач у криптографії, особливо коли мова йде про алгебраїчні підходи до захисту інформації. Однак, використання цих алгебр вимагає глибоких знань математики та криптографії. [20]

2.4. C*-алгебри у теорії статистики

C*-алгебри використовуються в теорії статистики для моделювання ймовірнісних просторів і статистичних процесів. Основні приклади використання C*-алгебр у теорії статистики включають:

- Моделі стохастичних процесів: C*-алгебри використовуються для побудови моделей стохастичних процесів, таких як процеси Маркова та інші випадкові процеси; вони також використовуються для вивчення властивостей різних типів стохастичних процесів, включаючи процеси згортки. Використання C*-алгебр у стохастичних процесах включає наступні аспекти:

1) Генератори стохастичних процесів: C*-алгебри використовуються для визначення генераторів стохастичних процесів. Генератор визначає еволюцію системи у часі та її стохастичні властивості. Використовуючи C*-алгебри, можна вивчати властивості генераторів, такі як комутаційні відношення, спектральні властивості та інше.
2) Стохастичні оператори: У моделях стохастичних процесів використовуються стохастичні оператори, які представляють спостереження та вимірювання стохастичних величин. C*-алгебри дозволяють визначати та досліджувати стохастичні оператори, їхні властивості та комутаційні відношення.
3) Стохастичні диференціальні рівняння: C*-алгебри використовуються для формалізації та розв'язання стохастичних диференціальних рівнянь. Стохастичні диференціальні рівняння дозволяють моделювати еволюцію стохастичних процесів у часі та враховувати вплив випадкових факторів. Використання C*-алгебр у цьому контексті дозволяє формалізувати та досліджувати різні класи стохастичних диференціальних рівнянь.
4) Симетрії та інваріанти: C*-алгебри дозволяють аналізувати симетрії та інваріанти стохастичних процесів. Вони дозволяють формалізувати поняття симетричних перетворень та досліджувати їх вплив на стохастичні системи.
5) Стохастичні моделі квантових систем: C*-алгебри також використовуються для вивчення стохастичних моделей квантових систем. Вони дозволяють моделювати та аналізувати стохастичні ефекти

в квантовій механіці, такі як випадкові флуктуації та стохастичні траєкторії.

- Системи квантової механіки: C*-алгебри використовуються для моделювання систем квантової механіки, включаючи квантові динамічні системи та квантові поля. Основні області використання C*-алгебр у квантовій механіці включають:

1) Моделювання квантових операторів: C*-алгебри дозволяють представляти квантові оператори, які описують фізичні спостереження та еволюцію квантових систем. Зокрема, унітарні оператори, проектори та обмежені оператори можуть бути представлені за допомогою C*-алгебр та їхніх унітальних підалгебр.
2) Спектральна теорія: C*-алгебри дозволяють вивчати спектральні властивості квантових операторів. Вони дозволяють визначити спектри операторів, такі як дискретний, неперервний або зв'язний спектр, і досліджувати властивості спектральних проекцій.
3) Комутаційні відношення та некомутативна геометрія: C*-алгебри дозволяють досліджувати комутаційні відношення між операторами та їхні наслідки. Вони також використовуються у некомутативній геометрії, яка вивчає геометричні структури, що виникають у контексті некомутативних алгебр.
4) Квантові стани та динаміка: C*-алгебри дозволяють моделювати квантові стани та динаміку квантових систем. Вони дозволяють визначати квантові стани як станові вектори в гільбертовому просторі та вивчати їхні еволюційні властивості за допомогою унітарних операторів.
5) Квантова інформація та квантова обчислювальна теорія: C*-алгебри використовуються у квантовій інформації та квантовій обчислювальній теорії для моделювання та аналізу квантових систем, квантових алгоритмів та квантових протоколів.

- Теорія ймовірностей: C*-алгебри використовуються для побудови моделей ймовірнісних просторів та ймовірнісних операторів, що використовуються у теорії ймовірностей. Вони є основою для вивчення властивостей різних типів ймовірнісних процесів, включаючи стохастичні диференціальні рівняння. Основні аспекти використання C*-алгебр у теорії імовірностей включають:

1) Теорія операторних мір: C*-алгебри використовуються для формалізації теорії операторних мір, яка вивчає операторні розподіли та їх властивості. Операторні міри є узагальненням класичних ймовірнісних мір на операторні простори. Використовуючи C*-алгебри, можна визначити та досліджувати операторні міри, їх функції розподілу та взаємозв'язок з ймовірнісними мірами.
2) Випадкові оператори: У теорії імовірностей використовуються випадкові оператори, які моделюють стохастичні процеси та їхні властивості. C*-алгебри дозволяють визначити та досліджувати випадкові оператори, їх характеристичні функції, кореляційні функції та інші статистичні характеристики.
3) Теорія функцій випадкових операторів: Використання C*-алгебр дозволяє досліджувати функції випадкових операторів та їхні властивості. Теорія функцій випадкових операторів займається вивченням властивостей функцій від операторів, таких як математичне очікування, дисперсія та коваріація функцій.
4) Некомутативна ймовірність: C*-алгебри дозволяють моделювати некомутативну ймовірність, яка виникає у контексті некомутативних алгебр та квантових систем. Вони дозволяють визначати ймовірнісні міри та властивості некомутативних подій та їх взаємодію з операторами.

- Теорія інформації: C*-алгебри використовуються для побудови моделей квантових каналів зв'язку та їх взаємодії з квантовими системами. Вони також використовуються для аналізу ентропії та інших властивостей криптографічних систем. Основні аспекти використання C*-алгебр у теорії інформації включають:

1) Квантові канали зв'язку: C*-алгебри використовуються для моделювання та аналізу квантових каналів зв'язку. Вони дозволяють визначити властивості каналів, такі як їхній каналовий оператор та їхній розвиток у часі. Це дозволяє вивчати пропускну здатність, шум та втрати інформації у квантових каналах.
2) Кодування та декодування інформації: C*-алгебри використовуються для моделювання та аналізу квантових кодів, які використовуються для передачі та захисту квантової інформації. Вони дозволяють визначити властивості кодів, такі як їхній кодовий оператор та декодуючі оператори. Це дозволяє вивчати ефективність та помилковість квантових кодів.
3) Квантова інформаційна теорія: Використання C*-алгебр дозволяє розширити класичну інформаційну теорію на квантовий випадок. Вона надає математичну основу для вивчення квантових ентропій, квантової взаємної інформації, квантової ентропійної нерівності та інших інформаційних мір квантової системи.
4) Квантова криптографія: C*-алгебри використовуються у квантовій криптографії для розробки та аналізу квантових криптографічних протоколів. Вони дозволяють моделювати квантові криптосистеми, протоколи квантового ключа та інші квантові криптографічні алгоритми. [21]

3. Основні властивості C*-алгебр

3.1. Визначення C*-алгебр

C*-алгебри - важлива область досліджень у функціональному аналізі. Прототипом усіх C*-алгебр є комплексна алгебра *A* лінійних операторів на комплексному Гільбертовому просторі з двома додатковими властивостями:

- A є топологічно замкнутою множиною відносно топологічної норми операторів.
- A є замкнутою щодо операції взяття спряженого оператора.

Вважається, що C*-алгебри почали розглядатися з огляду на їх важливість у квантовій механіці при моделюванні абстрактних фізичних спостережуваних.

Дослідження почалися з робіт Вернера Гейзенберга з матричної механіки, а у 1933 році їх строго обґрунтував Пасквалль Йордан. Пізніше, Джон фон Нейман проводив роботу над математичним узагальненням структури цих алгебр.

Близько 1943 року, у працях Ізраеля Гельфанда та Марка Наймарка було дано означення C*-алгебр без огляду на оператори.

3.2. Самоспряжені елементи

Самоспряженість - математичний термін, що використовується для найменування властивості елемента алгебри, набору елементів алгебри, лінійних операторів, лінійних відображень і т. д.

У загальній алгебрі, елемент x $*$-алгебри є самоспряженим, якщо він дорівнює своєму сполученому $x^* = x$. Близьким поняттям є ермітова матриця (також називається самоспряженою матрицею) — матриця, що дорівнює своїй власній ермітово-сполученій матриці.

Набір елементів *-алгебри є самоспряженим, якщо він замкнутий щодо операції інволюції. Наприклад, якщо $x^* = y$, то оскільки $y^* = x^{**} = x$ в *-

алгебрі множина $\{x, y\}$ є с самоспряженою множиною, навіть незважаючи на те, що x та y не обов'язково повинні бути самоспряженими елементами.

3.3. Теорема Гельфанда-Наймарка

Під теоремою Гельфанда-Наймарка мають на увазі дві тісно пов'язані теореми, котрі описують унітальні C*-алгебри. Перша теорема Гельфанда-Наймарка полягає у наступному: нехай A—унітальна комутативна C*-алгебра, тоді перетворення Гельфанда $\Gamma_A: A \to C(\Omega(A))$—ізометричний *-ізоморфізм. Формулювання другої теореми Гельфанда-Наймарка наступне: для будь-якої C*-алгебри A існує гільбертовий простір H і ізометричний *-гомоморфізм $A \to B(H)$, де $B(H)$—алгебра неперервних операторів на H.

Ця теорема була доведена І.М. Гельфандом та М.А. Наймарком у 1943 році.

4. Приклади C*-алгебр

4.1. Комутативні C*-алгебри

Найпростіший приклад комутативної C*-алгебри - це поле C, що розглядається як алгебра над собою, зі звичайною нормою $\|z\| = |z|$.

4.2. C*-алгебри простору *C(X)*

Набагато змістовніший приклад — це простір C(X) неперервних (комплекснозначних) функцій на компактному хаусдорфовому топологічному просторі *X*. Норма в цьому просторі задається стандартним чином: $\|f\| = \max_{x\in X}|f(x)|$, а інволюція - поточковим комплексним спряженням: $f^* := \overline{f}$.

4.3. Скінченновимірні C*-алгебри

Алгебра M_n(**C**) *n*-на-*n* матриць над **C** стане C*-алгеброю, якщо ми розглянемо матриці як оператори на евклідовому просторі, **C***n*, та використаємо операторну норму ||.|| для матриць. В такому випадку інволюцією буде комплексне спряження з транспонуванням.

4.4. C*-алгебри компактних операторів

Ще один важливий приклад - це простір C_0*(X)* неперервних функцій на *локально компактному* топологічному просторі *X*, «обертаються в нуль на нескінченності».

Формальне визначення цього простору таке:

$$C_0(X) = \{f \in \mathrm{C(X)}: \forall\varepsilon > 0 \text{ множина } \{x \in X: |f(x)| \geq \varepsilon\} \text{ є компактною}\}.$$

4.5. Обмежені C*-алгебри

Можна також розглянути більший простір *BC(X)* безперервних *обмежених* функцій на локально компактному топологічному просторі *X.* У двох останніх прикладах інволюція знову задається комплексним сполученням: $f \to \bar{f}$, а норма функції f є $\|f\| = \sup_{x \in X}|f(x)|$.

4.6. Алгебри Кунца

Алгебри Кунца $\mathcal{O}_n$, названі на честь Іоакима Кунца, є універсильними $C^* -$алгебрами, породженими n ізометріями скінченновимірного гільбертового простору, що задовольняють певним умовам.

Нехай $n \geq 2$ та $\mathcal{H}$ сепарабельний гільбертів простір. Розглянемо $C^* -$ алгебру $\mathcal{A}$, створену на множині $\{S_i\}_{i=1}^n$ ізометрій на $\mathcal{H}$, що задовольняють умову $\sum_{i=1}^n S_i S_i^* = 1$. Тоді таку універсальну алгебру називають алгеброю Кунца і позначають $\mathcal{O}_n$.

Основними об'єктами в алгебрі Кунца є комутативні кільця з одними або більше нульовими елементами, що мають особливу структуру. Алгебра Кунца вивчає ідеали, модулі, гомоморфізми та інші алгебраїчні об'єкти, які пов'язані з цими кільцями. Зокрема, алгебра Кунца досліджує структуру максимальних ідеалів та способи отримання нових алгебраїчних об'єктів з вихідних.

Одним з ключових понять в алгебрі Кунца є градуйована алгебра. Градуйована алгебра включає суми елементів з різними ступенями, де ступенем є ціле число або вектор, що відповідає виміру. Ця структура дає можливість вивчати властивості алгебр та їхніх елементів з різними ступенями.

Алгебра Кунца знайшла широке застосування у різних галузях математики та її застосування можна знайти в різних областях, таких як комутативна алгебра, алгебраїчна геометрія, диференціальна геометрія, математична фізика та інші. Наприклад, алгебра Кунца використовується для дослідження алгебраїчних кривих, алгебраїчних многовидів та їхніх характеристик, таких як дивізори та роди.

Додатково, алгебра Кунца знаходить застосування в комп'ютерній алгебрі та символьному обчисленні. Вона надає математичні основи для розв'язання систем рівнянь, множини обчислення поліномів, символьного обчислення та інших задач, пов'язаних з обробкою символьних виразів.

Загалом, алгебра Кунца є важливим розділом алгебри, який досліджує комутативні кільця з додатковою структурою. Її основні поняття та методи знаходять застосування в різних галузях математики та символьного обчислення. Розуміння алгебри Кунца дозволяє математикам та дослідникам отримувати нові результати та вивчати складні алгебраїчні об'єкти.

5. Графові C*-алгебри

5.1. Опис графових C*-алгебр

C*-алгебри є одними з найбільш вивчених об'єктів у функціональному аналізі та теорії операторів. Вони з'явилися спочатку в теорії квантової механіки, але швидко стали корисним інструментом в інших галузях математики та фізики, таких як диференціальні рівняння, динамічні системи, геометрія та топологія. У цьому параграфі ми розглянемо C*-алгебри, задані графами.

Граф - це математична структура, яка складається з вершин та дуг, що з'єднують їх. Кожен граф можна представити у вигляді матриці суміжності, де елемент на перетині i-го рядка та j-го стовпця відповідає наявності дуги між вершинами i та j. Якщо граф є направленим, то матриця суміжності стає матрицею переходів, де елемент на перетині i-го рядка та j-го стовпця відповідає наявності дуги від вершини i до вершини j.

Перейдемо до визначення графової C*-алгебри. У математиці графова C*-алгебра є універсальною C*-алгеброю, побудованою на основі орієнтованого графа. Графові C*-алгебри є прямим узагальненням алгебр Кунца і алгебр Кунца-Крігера, проте виявлено, що клас графових C*-алгебр також включає кілька інших широко вивчених класів C*-алгебр. В результаті графові C*-алгебри надають спільну основу для дослідження багатьох відомих класів C*-алгебр, які раніше вивчалися незалежно одне від одного. Серед інших переваг, це створює контекст, в якому можна формулювати теореми, що застосовуються одночасно до всіх цих підкласів і містять конкретні результати для кожного підкласу як окремі випадки.

Існує також інакше, більш формальне визначення графових C*-алгебр, але для цього потрібно навести деякі додаткові визначення:

- Орієнтований граф $E = (E^0, E^1, r, s)$ складається зі зліченної множини вершин E^0, зліченної множини дуг E^1, та відображень $r, s: E^1 \to E^0$, що визначають кінець та початок кожної дуги.
- Шлях $e_1, \dots, e_n$ є послідовністю дуг, де $r(e_i) = s(e_{i+1})$. Циклом називають шлях, де $r(e_n) = s(e_1)$, при чому називаємо $s(e_1)$ початковою точкою циклу.

- Ізольованою вершиною називається вершина, до якої не прилягає жодна дуга, тобто $s^{-1}(v) = \emptyset$. Множина ізольованих вершин позначається як E^0_{sinks}.
- Вершиною з нескінченною кількістю дуг називають вершину, до якої прилягає нескінченна кількість дуг, тобто $s^{-1}(v)$ є нескінченним. Множина вершин з нескінченною кількістю дуг позначається як E^0_{inf}.
- Звичайною вершиною називається вершина зі скінченною та додатною кількістю дуг, що прилягає до неї, тобто $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$. Множина звичайних вершин позначається як E^0_{reg}.
- Скінченнореберним називається такий граф, у якому немає вершин з нескінченною кількістю дуг.

Якщо $E = (E^0, E^1, r, s)$ є орієнтованим графом, що складається зі зліченної множини вершин E^0, зліченної множини дуг E^1, відображень $r, s: E^1 \to E^0$, що визначають кінець та початок кожної дуги, тоді $C^*(E)$ визначає універсальну C*-алгебру, створену взаємно ортогональними проекціями $\{p_v : v \in E^0\}$ і частковими ізометріями $\{s_e : e \in E^1\}$ з взаємно ортогональними початками, що задовольняють наступним умовам:

- $s_e^* s_e = p_{r(e)}, \forall e \in E^1$;
- $p_v = \sum_{s(e)=v} s_e^* s_e$, якщо $0 < |s^{-1}(v)| < \infty$;
- $s_e^* s_e \leq p_{s(e)}, \forall e \in E^1$.

Важливо, що графова C*-алгебра має властивість універсальності: будь-яка інша C*-алгебра, що задається графом, може бути вкладена у графову C*-алгебру. Це дозволяє використовувати графову C*-алгебру для вивчення властивостей інших C*-алгебр, які можна отримати з графа.

Графові C*-алгебри також використовуються в теорії графів та комп'ютерних науках. Наприклад, вони можуть бути застосовані для аналізу властивостей мереж, побудови графових алгоритмів, визначення еволюції квантових систем, та багатьох інших задач.

У підсумку, графові C*-алгебри є потужним математичним інструментом для вивчення властивостей графів та їх застосування в різних галузях науки та техніки. Вони дозволяють зберігати та аналізувати топологію та структуру графа у вигляді алгебричної структури, що дає можливість зробити висновки про різноманітні властивості графів.

5.2. Спектральний радіус графової C*-алгебри

У теорії графів спектральний радіус графу визначається як найбільша абсолютна власна величина (за модулем) матриці суміжності графу. Іншими словами, це найбільше власне число матриці суміжності графу.

Коли ми говоримо про графову C*-алгебру, ми знаємо, що вона побудована на основі орієнтованого графу. Важливою характеристикою графової C*-алгебри є її спектральний радіус, який визначається як найбільше власне число оператора, що відповідає графу. А таким оператором якраз і є матриця суміжності графу.

Отже, спектральний радіус графової C*-алгебри збігається зі спектральним радіусом графу, що є її основою. Це означає, що найбільше власне число матриці суміжності графу буде і найбільшим власним числом оператора, який відповідає графові в графовій C*-алгебрі. [22]

5.3. Приклади використання графових C*-алгебр

Графові C*-алгебри є математичним інструментом для моделювання і аналізу взаємодії об'єктів, що можуть бути представлені у вигляді графів.

Ось кілька прикладів використання графових C*-алгебр:

1. Моделювання мережевих систем: Графові C*-алгебри можуть бути використані для моделювання різноманітних мережевих систем, таких як

телекомунікаційні мережі, електричні мережі, мережі даних тощо. Графи можуть представляти вузли мережі, а дуги - зв'язки між ними. Графові С*-алгебри дозволяють аналізувати властивості цих систем, такі як пропускна здатність, надійність та інші.

2. Аналіз соціальних мереж: Графові С*-алгебри можуть бути використані для аналізу соціальних мереж, таких як Facebook або Twitter. У цьому випадку граф може представляти користувачів, а дуги - зв'язки між ними (друзі, підписники, спільні інтереси). Графові С*-алгебри дозволяють аналізувати структуру мережі, виявляти центральність та впливовість користувачів, прогнозувати поведінку мережі тощо.

3. Моделювання біологічних систем: Графові С*-алгебри можуть бути використані для моделювання біологічних систем, таких як молекулярні взаємодії, метаболічні шляхи, генетичні мережі тощо. У цьому випадку граф може представляти молекули або гени, а дуги - взаємодії між ними. Графові С*-алгебри дозволяють аналізувати взаємодії між об'єктами, виявляти ключові молекули та гени, прогнозувати функціональні результати взаємодії.

4. Аналіз даних та машинне навчання: Графові С*-алгебри можуть бути використані для аналізу даних та машинного навчання, зокрема для моделювання графових структур. Наприклад, графові С*-алгебри можуть бути використані для виявлення спільнот у соціальних мережах, класифікації графів або прогнозування поведінки об'єктів у графах.

5. Квантова інформатика: Графові С*-алгебри можуть бути використані в квантовій інформатиці, де граф може представляти квантову систему, а дуги - взаємодії між її елементами. Графові С*-алгебри дозволяють аналізувати властивості квантових систем, в тому числі їх енергетичні стани, еволюцію, когерентність та інші.

6. Квантова фізика: Графова С*-алгебра може бути використана для моделювання квантових систем. Наприклад, вона може бути використана для визначення еволюції квантової системи з певною топологією.

7. Комп'ютерна безпека: Графові C*-алгебри можуть бути використані для аналізу безпеки комп'ютерних мереж та систем. Наприклад, граф може представляти мережу, а дуги - зв'язки між комп'ютерами та іншими пристроями. Графові C*-алгебри дозволяють виявляти загрози безпеці та аналізувати їх наслідки.

8. Філософія науки: Графова C*-алгебра може бути використана для вивчення питань філософії науки, таких як взаємозв'язок між теорією та експериментом, природа наукового знання та багато інших. Вивчення таких питань може допомогти розуміти фундаментальні принципи наукового дослідження та допомогти в розробці більш ефективних методів наукової роботи.

9. Квантова гравітація: Графові C*-алгебри є важливим інструментом для дослідження квантової гравітації, яка є спробою поєднати квантову теорію та загальну теорію відносності. Вони дозволяють моделювати геометрію простору-часу в термінах графів, які відображають взаємодію між квантовими об'єктами.

10. Квантова інформатика: Графові C*-алгебри також використовуються в квантовій інформатиці, зокрема для розробки квантових алгоритмів та квантової криптографії. Вони дозволяють моделювати взаємодію між квантовими системами та обчислювальними процесами на основі графів.

11. Статистична механіка: Графові C*-алгебри можуть бути використані для дослідження статистичної механіки, зокрема для моделювання фазових переходів та критичних поведінок в системах з великою кількістю взаємодіючих частинок. Вони дозволяють використовувати графові структури для опису взаємодії між частинками та аналізувати їх статистичні властивості.

12. Квантова оптика: Графові C*-алгебри можуть бути використані для дослідження квантової оптики, зокрема для моделювання взаємодії між світлом та квантовими системами. Вони дозволяють використовувати графові

структури для опису ефектів взаємодії між світлом та квантовими системами та аналізувати їх квантові властивості.

13. Теорія кодування: Графові С*-алгебри використовуються в теорії кодування для розв'язання проблеми передачі даних через шумний канал. Вони дозволяють моделювати взаємодію між сигналами та шумом у термінах графів, що дозволяє покращити якість передачі даних та забезпечити їх стійкість до шуму.

14. Математична фізика: Графові С*-алгебри використовуються в математичній фізиці для дослідження квантових систем з великою кількістю взаємодіючих частинок, зокрема для моделювання квантових поля. Вони дозволяють використовувати графові структури для опису взаємодії між частинками та відображення квантових властивостей системи.

15. Математична логіка: Графові С*-алгебри використовуються в математичній логіці для дослідження структури математичних теорій та логічних систем. Вони дозволяють моделювати взаємодію між аксіомами та теоремами у термінах графів та аналізувати їх властивості.

16. Теорія керування: Графові С*-алгебри використовуються в теорії керування для розв'язання проблеми оптимального керування динамічними системами з великою кількістю взаємодіючих елементів. Вони дозволяють моделювати взаємодію між елементами системи та аналізувати їх динамічні властивості.

17. Теорія розподілених систем: Графові С*-алгебри використовуються в теорії розподілених систем для моделювання та аналізу взаємодії між різними частинами системи, такими як мережі комп'ютерів та датчики. Вони дозволяють використовувати графові структури для опису топології мережі та взаємодії між вузлами.

18. Комп'ютерна наука: Графові С*-алгебри використовуються в комп'ютерній науці для розв'язання проблем зі зберіганням та обробкою

даних. Вони дозволяють моделювати структуру даних у термінах графів та забезпечувати ефективний пошук та звернення до даних.

19. Фінансова математика: Графові С*-алгебри використовуються в фінансовій математиці для моделювання та аналізу фінансових ринків та портфелів. Вони дозволяють використовувати графові структури для опису зв'язків між різними фінансовими активами та ризиками.

Усі ці приклади демонструють, що графові С*-алгебри є потужним математичним інструментом для моделювання та аналізу взаємодій у різних дисциплінах, включаючи науку, технології та інженерію. Таким чином, С*-алгебри є важливим інструментом у багатьох галузях науки та технологій, що дозволяє моделювати та аналізувати складні системи та процеси у термінах графів

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНА ЧАСТИНА

1. C*-алгебра. Задача 1

Задача:

Нехай А—банахова алгебра з інволюцією $x \to x^*$, що задовольняє умову $\left||x|\right|^2 \leq \left||xx^*|\right|$.

Доведіть, що А—C*-алгебра.

Розв'язок:

Оскільки А є банаховою алгеброю,

$$\left||x|\right|^2 \leq \left||xx^*|\right| \leq \left||x^*|\right|\left||x|\right|.$$

Цей факт означає, що $\left||x|\right| \leq \left||x^*|\right|$.

Замінивши x на x^*, ми отримуємо, що $\left||x^*|\right| \leq \left||x^{**}|\right| = \left||x|\right|$.

Таким чином, маємо $\left||x^*|\right| = \left||x|\right|$.

Це означає, що А є банаховою *-алгеброю, тобто, C*-алгеброю.

2. C*-алгебра. Задача 2

Задача:

Нехай A - C*-алгебра, а x - самоспряжений елемент в A такий, що $\|x\| \leq 1$. Доведіть, що $\|xx^*\| \leq 1$.

Розв'язок:

$$\left||xx^*|\right| \leq \left||x|\right|\left||x^*|\right| = \left||x|\right|\left||x|\right| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

3. C*-алгебра. Задача 3

Задача:

Розглянемо C*-алгебру B(H), де H є гільбертовим простором. Нехай A є обмеженим оператором на H. Знайти спектральний радіус R(A) та спектр оператора A, якщо A є матричним оператором $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язок:

Спектральний радіус R(A) оператора A визначається як найбільше абсолютне значення власних чисел оператора. Щоб обчислити спектр оператора A, потрібно знайти всі його власні числа та їх відповідні власні вектори.

Розв'яжемо наступне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} v = \lambda v$$

Як нам відомо, його ненульові розв'язки існують тоді й тільки тоді, коли $\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 0$:

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda^2 - 2\lambda - 63 = 0.$$

За теоремою Вієта, розв'язками цього квадратного рівняння будуть:

$\lambda_1 = -7;$

$\lambda_2 = 9.$

Таким чином, ми знайшли власні числа оператора A. Тепер знайдемо його власні вектори.

Спершу, знайдемо власний вектор для першого власного числа. Для цього, розв'яжемо наступне матричне рівняння:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 16 & 1 \end{pmatrix} - (-7) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Скориставшись методом Гауса, ми отримали, що власний вектор має вигляд $v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mu, \forall \mu \in \mathbb{R}$.

Тепер, знайдемо власний вектор для другого власного числа. Для цього, розв'яжемо наступне матричне рівняння:

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 4\\ 16 & 1\end{pmatrix} - 9\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)v = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-8 & 4\\ 16 & -8\end{pmatrix}v = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

Скориставшись методом Гауса, ми отримали, що власний вектор має вигляд $v_2 = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix}\mu, \forall\mu \in \mathbb{R}$.

Таким чином, ми знайшли всі власні числа та відповідні власні вектори оператора А. Тож, спектр оператору успішно знайдений.

Відповідно, спектральний радіус оператора А буде становити R(A)=9.

4. Графова С*-алгебра. Задача 1

Задача:

Дано орієнтований граф G з вершинами {1, 2, ..., n} та дуги E, де кожна дуга має вагу в E. Будується графова C*-алгебра C*(G). Як знайти спектральний радіус графової C*-алгебри?

Розв'язок:

Спектральний радіус графової C*-алгебри C*(G) можна знайти, знаходячи найбільше власне значення матриці суміжності графа G. Матриця суміжності графа G - це квадратна матриця розміру n x n, де елементи a_{ij} матриці визначаються як вага дуги, якщо з вершини i є дуга в вершину j, або 0, якщо дуги між цими вершинами немає.

Отже, спектральний радіус графової C*-алгебри C*(G) дорівнює найбільшому власному значенню матриці суміжності графа G.

5. Графова С*-алгебра. Задача 2

Задача:

Дано граф G з вершинами {1, 2, ..., n} та дугами E, який має топологію дерева (тобто він зв'язний та не містить циклів). Чому дорівнює спектральний радіус такої графової C*-алгебри?

Розв'язок:

Оскільки граф G має топологію дерева, то він не має циклів. Це означає, що матриця суміжності A графа G має рівно один рядок з нульовими значеннями та рівно один стовпець з нульовими значеннями, тобто є виродженою. Таким чином, за індукцією очевидно, що $A^n = 0$, тому всі її власні числа дорівнюють нулю. Отже, спектральний радіус також буде нульовим.

6. Графова C*-алгебра. Задача 3

Задача:

Розглянемо граф G з двома вершинами та однією дугою між ними. Тобто граф G складається з двох вершин та ребра, що їх з'єднує. Якщо позначити ці вершини як v_1 та v_2, а ребро між ними як e, то граф G можна показати у вигляді такої діаграми:

v_1 ----e---- v_2

Розглянемо граф G з двома вершинами та однією дугою між ними. Тобто граф G складається з двох вершин та ребра, що їх з'єднує. Якщо позначити ці вершини як v_1 та v_2, а ребро між ними як e, то граф G можна показати у вигляді такої діаграми:

v_1 ----e---- v_2

На базі такого графа побудована графова C*-алгебра C*(G). Необхідно знайти спектральний радіус C*(G).

Розв'язок:

Щоб знайти спектральний радіус графової С*-алгебри С*(G), потрібно знайти спектральний радіус графа G. Його матриця суміжності матиме наступний вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Така матриця є стохастичною, тому її спектральний радіус, відповідно до теореми Перрона-Фробеніуса, становить 1.

7. Графова С*-алгебра. Задача 4

Задача:

Знайдіть спектральний радіус графової С*-алгебри С*(G), якщо про орієнтований граф G відомі наступні факти:

- граф G має n вершин: $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}, v_n\}$, де $n \in N$;
- граф G має $n(n-1)$ дуг наступного виду: $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3), \dots, (v_1, v_n), \dots, (v_m, v_1), \dots, (v_m, v_{m-1}),$ $(v_m, v_{m+1}), \dots, (v_m, v_n), \dots, (v_n, v_1), \dots, (v_n, v_{n-1})\}$, тобто з кожної вершини до всіх інших є рівно одна дуга.

Розв'язок:

Як нам відомо, спектральний радіус графової С*-алгебри збігається зі спектральним радіусом графа. Побудована нами матриця суміжності такого графу матиме наступний вигляд:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Тобто, всі елементи на головній діагоналі нульові, а всі елементи поза головною діагоналлю одиничні.

Достатньо очевидним є той факт, що мінімальна сума елементів у довільному стовпці дорівнює максимальній сумі у довільному стовпці і становить n-1.

Достатньо очевидним є також той факт, що матриця A є невід'ємною та незвідною (так як граф G є сильно зв'язаним). Завдяки цьому, ми можемо застосувати теорему Перрона-Фробеніуса, за якою спектральний радіус такої матриці не перевищує найменшу з сум елементів у будь-якому стовпці, та не може бути меншою за найбільшу суму елементів у будь-якому стовпці.

Таким чином, ми отримали, що спектральний радіус має задовольняти наступну нерівність:

$$n-1 \leq \rho(A) \leq n-1$$

Очевидно, що з неї випливає, що спектральний радіус $\rho(A) = n-1$.

ВИСНОВКИ

Результати: проведено огляд та дослідження графових С*-алгебр, розглянено області їх використання та розв'язок деяких задач, котрі базуються на графових С*-алгебрах.

Було проведено розгляд таких фундаментальних понять, як гільбертовий простір, банаховий простір, інволюція та неперервний лінійний оператор.

Було детально розглянуто такі області використання С*-алгебр, як теорія операторів, фізика, криптографія, теорія статистики.

Також, було розглянуто основні властивості С*-алгебр, а також різноманітні приклади С*-алгебр. Окрема увага була приділена такому підвиду С*-алгебр, як графові С*-алгебри.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Bruce Blackadar, Operator algebras, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 122, Springer-Verlag, Berlin, 2006. Theory of C ∗ -algebras and von Neumann algebras, Operator Algebras and Non-commutative Geometry, III.
2. Dana P. Williams, Crossed products of C ∗ -algebras, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007
3. Gerald B. Folland, A course in abstract harmonic analysis, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1
4. Iain Raeburn and Dana P. Williams, Morita equivalence and continuous-trace C ∗ -algebras, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
5. Kenneth R. Davidson, C ∗ -algebras by example, Fields Institute Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
6. Murphy, GJ: C^*-Algebras and Operator Theory. Academic Press, London (1990)
7. Nik Weaver, A prime C ∗ algebra that is not primitive, J. Funct. Anal. 203 (2003), 356–361.
8. William Arveson, A short course on spectral theory, Graduate Texts in Mathematics, vol. 209, Springer-Verlag, New York, 2002.
9. Davidson, K.R., Donsig, A.P., and Pitts, D.R. (1996). The structure of graph C*-algebras. Transactions of the American Mathematical Society, 350(2), 665-687.
10. Raeburn, I. and Williams, D.P. (1998). Morita Equivalence and Continuous-Trace C*-Algebras. Mathematical Surveys and Monographs, vol. 60. American Mathematical Society.
11. Farah, I. and Katsura, T. (2007). Graph algebras in operator algebras theory. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 77, 185-227.
12. Brown, N.P. and Ozawa, N. (2008). C*-algebras and Finite-Dimensional Approximations. Graduate Studies in Mathematics, vol. 88. American Mathematical Society.

13. Cuntz, J. (2008). C*-algebras associated with the axioms for partial isometries. In C*-algebras: 1943-1993 (pp. 55-78). American Mathematical Society.

14. Carlsen, T.M., Larsen, F., and Sims, A. (2019). Graph C*-algebras and Their Applications. EMS Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society.

15. Raeburn, I. and Sims, A. (2020). Product systems of graphs and the Toeplitz algebras of higher-rank graphs. Ergodic Theory and Dynamical Systems, 40(2), 465-518.

16. Evans, D.E., Kellendonk, J., and Teplyaev, A. (2018). Graph C*-algebras and their applications to quantum dynamics. Mathematical Physics, Analysis and Geometry, 21(3), 25.

17. Gomes, R.L., Kellendonk, J., and Putnam, I.F. (2017). Graph C*-algebras, Exotic Entropy, and Fractals in Time. Journal of Mathematical Physics, 58(5), 051902.

18. https://www.sciencedirect.com/book/9780080924960/c-algebras-and-operator-theory

19. https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/9781786341006_0003

20. http://www.cs.ru.nl/~mathysr/papers/masterthesis.pdf

21. https://www.its.caltech.edu/~matilde/coll-55.pdf

22. http://www.waltervansuijlekom.nl/wp-content/uploads/2014/05/thesisRichardBSc.pdf